Вазорати маориф ва илми Ҷумҳурии Тоҷикистон
Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон
ба номи Садриддин Айнӣ

УДК 517.5

Бо ҳуқуқи дастхат

Шамсиддинзода Саъдӣ Абдуқосим

ДОИМИҲОИ АНИҚ ДАР НОБАРОБАРИИ НАМУДИ ҶЕКСОН–СТЕЧКИН БАРОИ НАЗДИККУНИИ МУШТАРАКИ БЕҲТАРИНИ ФУНКСИЯҲО ВА ҲОСИЛАҲОИ ПАЙДАРПАЙИ ОНҲО ДАР ФАЗОИ L_2

Д И С С Е Р Т А Т С И Я

барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD) – доктор
аз рӯи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ)

Роҳбари илмӣ:
доктори илмҳои физикаю математика,
дотсент Юсупов Г.А.

Д У Ш А Н Б Е – 2026

Мундарича

Ишораҳо

$\mathbb{N}$ — маҷмуи ададҳои натуралӣ;

$\mathbb{Z}_+$ — маҷмуи ададҳои бутуни ғайриманфӣ;

$\mathbb{R}$ — маҷмуи ададҳои ҳақиқӣ;

$\mathbb{R}_+$ — маҷмуи ададҳои ҳақиқии мусбат;

$L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — фазои функсияҳои 2π-даврии бо квадрат суммиронидашавандаи ба маънои Лебег ченшаванда;

$\mathcal{T}_{2n-1}$ — зерфазои бисёраъзогиҳои тригонометрии тартибашон $n-1$;

$E_{n-1}(f)_2$ — бузургии наздиккунии беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$;

$\Delta_h^m f(x)$ — фарқи тартиби m-уми функсияи $f \in L_2$ дар нуқтаи x аз руи қадами h;

$\omega_m(f, \delta)_2$ — модули бефосилагии тартиби m-уми функсияи $f \in L_2$;

$\Omega_m(f, t)_2$ — модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби m-уми функсияи f дар фазои L_2;

sup — сарҳади аниқи болоӣ;

inf — сарҳади аниқи поёнӣ;

$a_k(f),\ b_k(f)$ — косинус- ва синус-коэффисиентҳои Фурйеи функсияи f;

$\mathbb{S} := \{f \in L_2 :\ \|f\| \leq 1\}$ — кураи воҳидӣ дар фазои L_2;

$\mathfrak{M}$ — маҷмуи марказӣ-симметрӣ аз фазои L_2;

$\Lambda_n \subset L_2$ — зерфазои n-ченака;

$\Lambda^n \subset L_2$ — зерфазои ҳамандозаи n;

$\mathcal{L} : L_2 \to \Lambda_n$ — оператори хаттии бефосила;

$\mathcal{L}^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ — оператори хаттии бефосилаи проексионӣ;

$b_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — қутри бернштейнии маҷмуи $\mathfrak{M}$ дар L_2;

$d_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — қутри колмогоровии маҷмуи $\mathfrak{M}$ дар L_2;

$\lambda_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — қутри хаттии маҷмуи $\mathfrak{M}$ дар L_2;

$d^n(\mathfrak{M}, L_2)$ — қутри гелфандии маҷмуи $\mathfrak{M}$ дар L_2;

$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — қутри проексионии маҷмуи $\mathfrak{M}$ дар L_2;

$\rho_n(\cdot)$ — ихтиёри аз n-қутрҳои дар боло овардашуда;

$\mathcal{P}_{n-1}$ — маҷмуи бисёраъзогиҳои алгебравии тартибашон на зиёда аз $n-1$;

$\Phi(t)$ — мажорантаи ихтиёрӣ.

Муқаддима

Мубрамии мавзӯи тадқиқот. Назарияи наздиккунии функсияҳо яке аз соҳаҳои босуръат рушдёбандаи таҳлили математикӣ ба шумор рафта, дорои татбиқҳои муҳим дар соҳаҳои гуногуни математикаи амалӣ мебошад. Дар ин назария масъалаҳои экстремалии наздиккуни беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банахӣ мавқеи махсусро ишғол мекунанд.

Дар замони ҳозира, воридшавии афкор ва усулҳои назарияи наздиккунии функсияҳо ба соҳаҳои гуногуни илми математика, махсусан дар самтҳои амалӣ, бисёр мушоҳида мешавад. Асоси назарияи наздиккунӣ, ки дар асарҳои машҳури классикии Чебишёв, Вейерштрасс, Ҷексон ва Бернштейн оид ба наздиккунии функсияҳо тавассути бисёраъзогиҳо гузошта шудааст, бознигарӣ гардида, дар заминаи васеътар ва мустаҳкамтар инкишоф меёбад. Маълум аст, ки масъалаҳои аппроксиматсионӣ, ки дар синфҳои функсияҳо гузошта мешаванд, дар бисёр ҳолатҳо масъалаҳои экстремалие мебошанд, ки дар онҳо ёфтани сарҳади аниқи болоии саҳви наздиккунӣ барои усули додашуда дар синфи функсияҳои қайдкардашуда талаб карда мешавад, ё ин ки барои ин синф методҳои беҳтарини наздиккунӣ нишон дода шавад.

Ҳалли масъалаҳои экстремалиро барои синфҳои функсияҳои муайян баррасӣ намуда, дар диссертатсияи мазкур бо ҳолати функсияҳои даврӣ маҳдуд мешавем, яъне дар рисолаи илмӣ як қатор масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои гилбертии L_2 таҳлил карда мешаванд. Натиҷаҳои ниҳоӣ оид ба сарҳади болоии тамоили бисёраъзогиҳои тригонометрӣ барои синфҳои гуногуни функсияҳои даврӣ баён карда мешаванд.

Дар боби аввал маводи таҳиявӣ ҷамъоварӣ гардида, масъалаҳои экстремалии ҳанӯз ҳалнашуда дар ҳар як ҳолати мушаххас ба таври муфассал таҳия ва таҳлил карда мешаванд. Аслан, ин масъалаҳо барои наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнии онҳо бахшида шудаанд. Сипас, масъалаҳои таҳияшуда дар бобҳои минбаъдаи диссертатсия барои синфҳои гуногуни функсияҳои даврӣ ҳал карда мешаванд. Натиҷаҳои бадастомада ниҳоӣ мебошанд ва дар асл ҳеҷ чизро ба онҳо илова ё аз онҳо кам кардан мумкин нест. Маҳз ҳамин омилҳо аҳамият ва мақсаднокии мавзуи интихобшудаи ин рисолаи илмиро муайян менамоянд.

Дараҷаи кор карда баромадани мавзуи тадқиқот. Дар байни самтҳои муосири таҳлили математикӣ, назарияи аппроксиматсияи функсияҳо мавқеи хосро ишғол мекунад, зеро яке аз соҳаҳои босуръат инкишофёбандаи он ба шумор рафта, дар математикаи амалӣ татбиқҳои васеъ пайдо намудааст. Дар доираи ин назария масъалаҳои экстремалии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои 2π-даврӣ бо бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазоҳои гуногуни банахӣ аҳамияти назаррас доранд. Масъалаи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи мунтазам бори аввал соли 1960 аз ҷониби А.Л. Гаркави [26] тадқиқ шудааст. Худи ҳамон сол А.Ф. Тиман [71] масъалаи гузошташударо барои ҳолати наздиккунии беҳтарини функсияҳои дар тамоми тири ададӣ додашуда тавассути функсияҳои бутуни экспоненсиалӣ мавриди омӯзиш қарор дода буд.

Масъалаи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо, ки дар шакли умумитар ҳам барои бисёраъзогиҳои алгебравӣ ва ҳам барои бисёраъзогиҳои тригонометрӣ мавриди баррасӣ қарор гирифтааст, дар монографияи В.Н. Малозёмов [51] ба таври муфассал омӯхта шуда, дар он як қатор натиҷаҳои классикии назарияи наздиккунии функсияҳо барои ҳолати наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо умумӣ гардонида шудаанд. Барои баъзе функсияҳои даврии дифференсиронидашаванда дар фазои L_2 бо вазни миёнакардашудаи модули бефосилагии тартиби олӣ, ки аз боло бо мажорантаи додашуда маҳдуд мебошанд, масъалаи гузошташуда дар корҳои С.Б. Вакарчук ва В.И. Забутная [21], М.Ш. Шабозов ва А.А. Шабозова [94] ва инчунин М.Ш. Шабозов [96] дида баромада шудааст.

Дар тадқиқоти мазкур, корҳои муаллифони дар боло зикршударо идома дода, масъалаи экстремалии умумитар мавриди баррасӣ қарор дода мешавад, яъне талаб карда мешавад, ки сарҳади аниқи болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои пай дар пайи онҳо тавассути бисёраъзогиҳои мувофиқ ёфта шавад.

Дар рисолаи мазкур наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ пурра ҳал карда шудааст. Қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии муштараки беҳтарин барои баъзе синфи функсияҳо, ки ба фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ҳисоб карда шудааст.

Робитаи кор бо барномаҳои (лоиҳаҳо) ва мавзӯҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи татбиқи дурнамои нақшаи илмӣ-тадқиқотии кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ барои солҳои 2021-2025 аз рӯи мавзӯи «Назарияи наздиккунии функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ» бахшида ба «Нақшаи чорабиниҳо барои солҳои 2020-2025 оид ба амалигардонии «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф» эълон намудани солҳои 2020-2040» (Банди 38) иҷро карда шудааст.

Тавсифи умумии тадқиқот

Мақсади тадқиқот. Ҳадафи асосии кори диссертатсионӣ дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ ифода меёбад, ки ба ёфтани қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои фосилавии онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазои $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Масъалаҳои тадқиқот. Дар мувофиқат бо ҳадафи гузошташуда масъалаҳои зерин ҷудо карда мешаванд:

- ёфтани қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд;
- ёфтани нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд;
- ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд.

Объекти тадқиқот. Объекти асосии тадқиқотро масъалаҳои гуногуни экстремалӣ ташкил медиҳанд, ки бо наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои $L_2[0, 2\pi]$ вобаста мебошанд.

Предмети тадқиқот. Мавзӯи тадқиқот аз муайянсозии нобаробариҳои аниқи намуди Ҷексон–Стечкин, ки наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои фосилавии онҳоро бо модулҳои бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ $\Omega_m(f,t)$ – ро дар метрикаи фазои $L_2[0,2\pi]$ алоқаманд менамоянд, иборат мебошад.

Навгониҳои илмии тадқиқот. Дар диссертатсия натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0,2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд;
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0,2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд;
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое ёфта шуданд, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд.

Арзишҳои назариявӣ ва илмию амалӣ. Кори диссертатсионии мазкур хусусияти фундаменталии назариявӣ дорад. Натиҷаҳо ва усулҳое, ки дар диссертатсия пешниҳод шудаанд, метавонанд барои таҳлили масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳои якчандтағйирёбанда истифода шаванд, ки ҳам ба соҳаҳои маҳдуд ва ҳам ба тамоми ҳамвории дученака татбиқшаванда мебошанд.

Мӯҳтавои ҳимояшавандаи диссертатсия:

- теоремаҳое, ки қиматҳои аниқи сарҳадҳои болоии наздиккуниҳои муштараки беҳтарини миёнаквадратӣ бо бисёраъзогиҳо барои синфҳои муайяни функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврӣ, ки тавассути модулҳои бефосилагии умумикардашуда тавсиф шудаанд, муайян мекунанд;

- теоремаҳо оид ба нобаробариҳои аниқи намуди Ҷексон–Стечкин, ки наздиккунии муштараки беҳтаринро тавассути $\Omega_m(f,t)$ — модули бефосилагии умумикардашуда тавсиф менамоянд;
- теоремаҳое, ки ба муайян кардани қиматҳои аниқи характеристикаҳои экстремалии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ дар $L_2[0,2\pi]$ вобаста ба хосиятҳои дифференсиалии функсияи вазнӣ бахшида шудаанд;
- теоремаҳо оид ба қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, $W^{(r)}(\Phi,h)$ ва $W_1^{(r)}(\Phi,h)$ дар фазои L_2.

Дараҷаи эътимоднокии натиҷаҳо. Эътимоднокии натиҷаҳои илмии кори диссертатсионӣ бо исботи дақиқи математикии ҳамаи теоремаҳои дар диссертатсия овардашуда таъмин карда мешавад ва ҳамзамон бо тадқиқотҳои муаллифони дигар тасдиқ карда мешавад.

Мутобиқатии рисола ба шиносномаи ихтисоси илмӣ (формула ва соҳаи тадқиқот). Кори диссертатсионӣ аз руйи ихтисоси 6D060102 – Таҳлили ҳақиқӣ, комплексӣ ва функсионалӣ иҷро карда шудааст ва қисмате аз таҳлили математикӣ мебошад. Мавзуи тадқиқот ба соҳаи назарияи наздиккунии функсияҳо таалluқ дошта, натиҷаҳои бадастомада ба самтҳои зерин мувофиқ мебошанд:

1) Назарияи фазоҳои функсионалӣ ва хусусиятҳои сохтории онҳо;
2) Назарияи наздиккунии функсияҳо ва усулҳои наздиккунии полиномиалӣ ва қаторӣ;
3) Тадқиқи хосиятҳои сохтории фазоҳои функсионалӣ, ки дар онҳо масъалаҳои наздиккунии функсияҳо баррасӣ мегарданд.

Самтҳои зикршуда ба бахши «Назарияи наздиккунии функсияҳо» тааллуқ доранд, ки дар банди III, параграфи 3-юми шиносномаи ихтисоси илмӣ зикр шудааст.

Саҳми шахсии довталаби дараҷаи илмӣ. Масъалаҳои тадқиқот ва интихоби усули ҳалли онҳо бо роҳнамоии роҳбари илмӣ муайян шудаанд. Ҳамзамон машваратҳои илмии зарурӣ низ пешниҳод гардидаанд. Натиҷаҳои асосие, ки дар қисмати «Навгониҳои илмии тадқиқот» оварда шудаанд, самараноки заҳмати шахсии муаллиф маҳсуб меёбанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима ва баррасӣ гардиданд:

- семинарҳои кафедраи таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалии Донишгоҳи миллии Тоҷикистон таҳти роҳбарии академики АМИТ, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, солҳои 2020–2026 гг.);
- семинарҳои кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ таҳти роҳбарии доктори илмҳои физикаю математика, дотсент Г.А. Юсупов (Душанбе, солҳои 2022–2026 гг.);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири таҳлили функсионалӣ ва муодилаҳои дифференсиалӣ», бахшида ба 70-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор К.Х. Бойматов (Душанбе, 25–26 декабри соли 2020);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири назарияи ададҳо ва таҳлили математикӣ», бахшида ба 80-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Додоҷон Исмоилов (Душанбе, 29–30 апрели соли 2022);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири таҳлили математикӣ ва назарияи функсияҳо», бахшида ба 70-солагии академики Академияи миллии илмҳои Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор М.Ш. Шабозов (Душанбе, 24–25 июни соли 2022);

- конференсияи байналмилалии «Саҳми математика дар рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ», бахшида ба эълон гардидани «Бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи маориф (солҳои 2020-2040)» (Душанбе, 30–31 майи соли 2023);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика ва усули таълими онҳо», бахшида ба 35-солагии Истиқлолияти давлатии Ҷумҳурии Тоҷикистон» ва 70-солагии доктори илмҳои физикаю математика К. Тухлиев (Хуҷанд, 21–22 июни соли 2024);
- конференсияи байналмилалии «Масъалаҳои муосири математика ва татбиқи онҳо», бахшида ба 75-солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор К.Х. Бойматов ва 75-солагии мудири шуъбаи муодилаҳои дифференсиалии Институти математикаи ба номи А. Ҷӯраеви АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Г. Ҷангибеков (Душанбе, 30–31 майи соли 2025).

Интишорот аз руйи мавзуи рисола. Натиҷаҳои тадқиқотии муаллифи рисолаи илмӣ оид ба мавзуи кори диссертатсионӣ дар 8 мақолаҳои илмӣ ба табъ расидааанд, ки аз онҳо 2 мақола дар нашрияҳое, ки ба руйихати амалкунандаи Комиссияи олии аттестатсионии Ҷумҳурии Тоҷикистон дохиланд ва 6-тои дигар дар маҷмуаҳои конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ нашр гардидаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, се боб, феҳристи адабиёти истифодашудаи иборат аз 135 номгӯй ва ҳамагӣ 152 саҳифаи компютериро дар бар гирифта, дар барномаи замонавии LaTeX ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонӣ дар диссертатсия рақамгузории умумии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо истифода шудааст. Онҳо рақамгузории секарата доранд, ки рақами якум бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ё формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

БОБИ 1. Таҳлили адабиёт оид ба нобаробарҳо байни бузургии наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ ва модулҳои бефосилагии тартибҳои гуногун

§ 1.1. Мафҳумҳои асосӣ ва таърифҳои пешакӣ

1.1.1. Таърифи модули бефосилагӣ

Дар тамоми тадқиқотҳои минбаъда фазоҳои зерини функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ баррасӣ карда мешаванд:

$C := C[0, 2\pi]$ — фазои функсияҳои дар тамоми тири ададӣ 2π-даврии бефосилаи $f(t)$ нормаи чебишёвии

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

$L_p := L_p[0, 2\pi]$ $(1 \leq p < \infty,\ L_1 = L)$ — фазои функсияҳои 2π-даврии $f(t)$, ки дар фосилаи $[0, 2\pi]$ бо дараҷаи p суммиронидашаванда буда, нормаи он бо баробарии

$$\|f\|_{L_p[0,2\pi]} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

муайян карда мешавад (интеграл дар ҳама ҷо ба маънои Лебег фаҳмида мешавад);

$M = L_\infty[0, 2\pi]$ — фазои функсияҳои 2π-даврии $f(t)$ ба таври аслӣ дар тамоми тири ададӣ бо нормаи

$$\|f\|_M = \|f\|_{L_\infty[0,2\pi]} = \operatorname*{supvrai}_t |f(t)|$$

маҳдуд мебошанд. Ошкор аст, ки агар f функсияи бефосила бошад, он гоҳ $\|f\|_M = \|f\|_C$ аст.

Бо $C^{(r)}:=C^{(r)}[0,2\pi]$ маҷмуи функсияҳои $f\in C$ – ро ишора мекунем, ки ҳосилаи тартиби r-умашон, яъне $f^{(r)}\in C$ мебошад.

Бо $L_p^{(r)}:=L_p^{(r)}[0,2\pi]\,(1\leq p\leq\infty)$ маҷмуи функсияҳои $f\in L_p$, ки барояшон ҳосилаи тартиби $(r-1)$-ум, яъне $f^{(r-1)}$ мутлақ бефосила буда, ҳосилаҳои тартиби r-ум, яъне $f^{(r)}\in L_p,\ 1\leq p\leq\infty$ мебошанд, ишора мекунем. Барои тадқиқотҳои минбаъда, мувофиқа мекунем, ки ба ҷойи $\|f\|_{L_p}$ ишораи $\|f\|_p$ – ро истифода мебарем ва дар назар дошта мешавад, ки дар ин ҷо $\|f\|_1=\|f\|_L$ ва $\|f\|_\infty=\|f\|_M$ мебошанд.

Дар фазоҳои функсияҳои даврии $C[0,2\pi]$ ва $L_p[0,2\pi]$ усули наздиккунӣ бисёраъзогиҳои тригонометрии тартиби $n-1,\ n\in\mathbb{N}$-и намуди

$$T_{n-1}(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt) \tag{1.1.1}$$

мебошанд. Системаи функсияҳои

$$1,\,\cos t\,,\sin t\,,\cos 2t\,,\sin 2t\,,\ldots,\,\cos(n-1)t\,,\sin(n-1)t, \tag{1.1.2}$$

ки комбинатсияи хаттии онҳо $T_{n-1}(t)$ мебошад, хаттӣ новобаста мебошанд. Дар ҳақиқат, агар

$$\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\big(\alpha_k\cos kt+\beta_k\sin kt\big)\equiv 0,$$

он гоҳ ҳар ду тарафи айниятро пай дар пай ба системаи функсияҳои (1.1.2) зарб зада, дар порчаи $[0,2\pi]$ меинтегронем, он гоҳ ҳосил мекунем, ки ҳамаи коэффисиентҳои α_k ва β_k ба нол баробар мебошанд. Ҳамин тариқ, барои n-и қайдкардашуда маҷмуи бисёраъзогиҳои (1.1.1) зерфазоҳои (дар C ва ё дар L_p) ченакаш $2n-1$ мебошанд. Мо онро бо рамзи $\mathcal{T}_{2n-1}$ ишора мекунем.

Барои наздиккунии беҳтарини функсияҳои $f \in X$, ки дар ин ҷо X яке аз фазоҳои C ва ё L_p мебошанд, аз руи зерфазои $\mathcal{T}_{2n-1}$ гузориши анъанавиро дохил мекунем:

$$E_{n-1}(f)_X = E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_X = \inf_{T_{n-1}} \|f - T_{n-1}\|_X.$$

Ошкор аст, ки [28, 42–44] барои ҳаргуна функсияи $f \in X$, ки дар ин ҷо X яке аз фазоҳои C ва ё L_p $(1 \leq p < \infty)$ мебошанд, дар зерфазои $\mathcal{T}_{2n-1}$ бисёраъзогии тартиби $n-1$, яъне $T^*_{n-1}(t) = T^*_{n-1}(f, t)$ мавҷуд аст, ки барояш

$$E_{n-1}(f)_X = \|f - T^*_{n-1}\|_X. \tag{1.1.3}$$

Барои мисол, баробарии (1.1.3) ҳангоми $X = C$ будан аз теоремаи Чебишёв оид ба алтернанс мебарояд (ниг., масалан, [42, с.46-48]) ва ҳангоми $X = L_2$ аз он, ки

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{L_2} = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_{L_2} : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\right\} = \\ = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\} := \\ = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right)\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

ки дар ин ҷо

$$S_{n-1}(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right)$$

— суммаи хусусии тартиби n-уми ҷудокунии функсияи $f(x)$ ба қатори Фурйе

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right) \tag{1.1.5}$$

мебошад.

Азбаски барои функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ҳамаи ҳосилаҳои фосилавии он $f^{(s)}$ барои ҳар гуна қиматҳои $s = 1, 2, \ldots, r-1$, $r \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$ инчунин ба фазои L_2 тааллуқ доранд (ниг., масалан, [37, 42, 43]), он гоҳ ёфтани қимати аниқи наздиккунии муштараки беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})_{L_2}$ $(s = 1, , 2, \ldots, r-1,\ r \in \mathbb{N})$ дар худи синфи $L_2^{(r)}$, ё ин ки дар ягон зерсинфи $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ ҷолиби диққат мебошад (ниг., масалан, корҳои илмии [95, 111, 127]).

Азбаски барои ҷудокуни ба қатори Фурйеи функсияи $f^{(s)}$ баробарии

$$\rho_k^2(f^{(s)}) = k^{2s}\rho_k^2(f) = k^{2s}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big),\ s = 1, 2, \ldots, r$$

дуруст мебошад, он гоҳ аз ифодаи (1.1.5) меёбем:

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_{L_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\,\rho_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big). \tag{1.1.6}$$

Аз (1.1.6) мебарояд, ки

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_{L_2} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2(r-s)}} \cdot k^{2r}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big) =$$

$$= \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot E_{n-1}^2(f^{(r)}), \tag{1.1.7}$$

ки дар (1.1.7) аломати баробарӣ барои функсияи $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ ба даст оварда мешавад.

Аз ин ҷо баробарии экстремалии

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{E_{n-1}(f^{(s)})_{L_2}}{E_{n-1}(f^{(r)})_{L_2}}=\frac{1}{n^{r-s}},\quad r,s\in\mathbb{Z}_+,\quad r\geq s$$

бармеояд, ки онро дар рафти тадқиқоти кори илмӣ дар параграфҳои минбаъда васеъ истифода мебарем.

1.1.2. Тавсифи модулҳои бефосилагии тартиби олӣ

Дар идома бо символи X фазои функсияҳои C ва ё L_p $(1\leq p<\infty)$-и функсияҳои 2π-давриро бо нормаи мувофиқи $\|f\|_C$ ва ё $\|f\|_p$ $(1\leq p<\infty)$ ишора мекунем. Модули бефосилагии функсияи $f\in X$ дар фазои ихтиёрии нормиронидашудаи X гуфта, функсияи

$$\omega(f,t)_X=\sup_{|u|\leq t}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_X\ \ (t\geq 0)\tag{1.1.8}$$

– ро меноманд.

Дар оянда ба ҷои $\omega(f,t)_{L_p}$ мо $\omega(f,t)_p$ ва ба ҷои $\omega(f,t)_C$ танҳо $\omega(f,t)$ – ро менависем. Ҳамин тариқ, дар асоси таъриф барои $f\in C$

$$\omega(f,t)=\sup_{|u|\leq t}\max_X|f(x+u)-f(x)|=\sup_{|x'-x''|\leq t}|f(x')-f(x'')|\tag{1.1.9}$$

ва барои $f\in L_p$

$$\omega(f,t)_p:=\sup_{|u|\leq t}\|f(\cdot+u)-f(\cdot)\|_{L_p}=$$

$$=\sup_{|u|\leq t}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\bigl|f(x+u)-f(x)\bigr|^p dx\right\}^{1/p}\quad(1\leq p<\infty).\tag{1.1.10}$$

навишта метавонем. Функсияи (1.1.10) модули интегралии бефосилаи тартиби якум номида мешавад.

Қайд менамоем, ки модули бефосилагии (1.1.8) барои ҳар гуна функсияи ихтиёрии $f \in X$ дорои хосиятҳои асосии зерин мебошад:

1) $\omega(f, 0)_X = 0$;

2) $\omega(f, t)_X$ дар фосилаи $0 \leq t < \infty$ камнашаванда мебошад;

3) модули бефосилагии (1.1.8) функсияи нимаддитивӣ мебошад, яъне

$$\omega(f, t_1 + t_2)_X \leq \omega(f, t_1)_X + \omega(f, t_2)_X \quad (t_1 > 0,\ t_2 > 0). \tag{1.1.11}$$

Ба ҳамин монанд,

$$\Delta_2(f, u) = f(x + u) - 2f(x) + f(x - u),$$

$$\|\Delta_2(f, u)\|_X = \|f(\cdot + u) - 2f(\cdot) + f(\cdot - u)\|_X$$

гузошта, бо баробарии

$$\omega_2(f, t)_X = \sup_{|u| \leq t} \|\Delta_2(f, u)\|_X \tag{1.1.12}$$

модули бефосилагии тартиби дуюми функсияи $f \in X$ – ро муайян мекунем, ки ба монанди пештара $X = C$ ва ё ки $X = L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ мебошад.

Агар $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$ бошад, он гоҳ ба мисли пештара ба воситаи

$$\Delta_h^{(m)}(f, x) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f(x + kh)$$

— фарқияти тартиби m-уми функсияи $f(x)$ бо қадами h ишора намуда, дар ҳолати $X = L_p$ будан, бо баробарии

$$\omega_m(f, t)_p := \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^{(m)}(f, \cdot)\|_{L_p[0, 2\pi]} =$$

$$= \sup_{|u| \leq t} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Delta_h^m(f, x)\right|^p dx \right\}^{1/p} \quad (1 \leq p \leq \infty) \tag{1.1.13}$$

модули бефосилагии тартиби m-ум дар фазои нормиронидашудаи L_p $(1 \leq p < \infty)$ ишора мекунем. Дар ин ҷо қайд кардан ба маврид аст, ки модули бефосилагии (1.1.13) ҳам дар ҳолати $X = C$ ва ҳам барои ҳолати $X = L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ ҳамаи хосиятҳои модули бефосилагӣ 1) – 3) иҷро мешаванд (ниг., масалан, [28, саҳ. 157-161]).

Ҳангоми ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалӣ дар кори диссертатсионӣ ба ҷои модули бефосилагии классикии тартиби m-ум барои функсияи $f \in L_2$ баъзан характеристикаи суфтагии ба бузургии (1.1.13) эквиваленти намуди

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta^m_{\overline{h}} f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}$$

– ро истифода мебарем, ки дар ин ҷо $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta^m_{\overline{h}} = \Delta^1_{h_1} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_m}$; $\Delta^1_{h_j} f(x) := f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1, m}$.

Минбаъд дар кори диссертатсионӣ асосан ҳолати $p = 2$ дида баромада мешавад, ки дар он X фазои гилбертии $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ мебошад. Аз ин рӯ, дар идома натиҷаҳои қаблан маълумеро, ки дар фазои L_2 ба даст оварда шудаанд, меорем ва онҳоро дар кори диссертатсионӣ дар самтҳои гуногун албатта, ҳамчун хусусияти асосии суфтагии функсия бо истифода аз модули бефосилагии тартиби m-ум $(m \in \mathbb{N})$, ҳамчун хусусияти асосии суфтагии функсия, умумӣ мегардонем.

§ 1.2. Баъзе натиҷаҳои аниқ, ки аз баҳодиҳии бузургии наздиккунии беҳтарин тавассути модулҳои бефосилагии тартибҳои гуногун дар фазои L_2 вобастаанд

Дар ин ҷо баъзе натиҷаҳое оварда мешаванд, ки дар онҳо наздиккунии беҳтарин $E_{n-1}(f)$ аз боло ба воситаи модули бефосилагии худи функсия ё яке аз ҳосилаҳои он бо тартиби муайян, инчунин тавассути қимати миёнаи модулҳои бефосилагии тартиби олӣ аз ҳосилаи тартиби r-ум ($r \in \mathbb{Z}_+$) дар фазои $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ баҳогузорӣ карда мешавад.

Таърихан аввалин чунин натиҷа аз ҷониби Н.И. Черных исбот карда шудааст [77, 78]. Ӯ исбот намуд, ки барои ҳар гуна функсия $f \in L_2$, ки доимӣ нест, нобаробариҳои зерин иҷро мешаванд:

$$E_{n-1}(f)_{L_2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.2.1}$$

ҳол он ки барои ҳаргуна n-и қайдкардашуда доимии $1/\sqrt{2}$-и дар тарафи рости нобаробарии (1.2.1) мавҷуд буда кам карда намешавад. Нобаробарии (1.2.1) аз нобаробарии боз ҳам нозуктар, ки беҳтарнашаванда мебошад, бармеояд [77]

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \le \frac{1}{2}\left\{n\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(f, t)_{L_2}\sin nt dt\right\}^{1/2}. \tag{1.2.2}$$

Ин нобаробарӣ барои функсияи $f_0(x) = \cos nx \in L_2$ ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Азбаски барои ҳар гуна функсия $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин иҷро мешавад (ниг., масалан, [42–44, 66])

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \le \frac{1}{n^{2r}}\,E_{n-1}(f^{(r)})_{L_2}, \tag{1.2.3}$$

он гоҳ аз муқоисакунии ифодаҳои (1.2.2) ва (1.2.3) баҳои ([77, 78])

$$E_{n-1}(f)_{L_2} \leq \frac{1}{2n^r}\left\{n\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(f^{(r)},t)_2\,\sin ntdt\right\}^{1/2}, \qquad (1.2.4)$$

– ро ҳосил мекунем, ки дар маҷмуи $L_2^{(r)}$ аниқ мебошад, зеро аломати баробарӣ дар (1.2.4) барои функсияи $f_0(t) = a\cos(nt+\beta)$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ ҷой дорад.

Аз (1.2.4) барои ҳар гуна функсияи $f \in L_2^{(r)}$ бо назардошти монотони афзуншаванда будани модули бефосилагӣ баҳои зеринро ба даст меорем

$$E_{n-1}(f)_{L_2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n^r}\,\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Бояд қайд кард, ки дар асл аз ҷониби Н.И. Черных [77] исбот шудааст, ки барои ҳар гуна $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ муносибати зерин иҷро мешавад:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f)}{\omega^2(f^{(r)},\pi/n)_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (1.2.5)$$

Дар робита бо баробарии экстремалии (1.2.5) инчунин бояд натиҷаи Л.В. Тайков [66]-ро зикр кард, ки исбот намудааст: барои ҳар гуна функсияи $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ муносибатҳои зерин иҷро мешаванд:

$$\frac{1}{(nt)^2} \leq \frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f)}{\omega^2(f^{(r)},t)_2} \leq \frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}, \quad 0 < nt \leq \pi, \qquad (1.2.6)$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{2r}E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^t\omega^2(f^{(r)},t)_2\,dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{nt-\sin nt}, \quad 0 < nt < \pi/2. \qquad (1.2.7)$$

Қайд мекунем, ки аз нобаробарии (1.2.6), аз ҷумла ҳангоми $t=\pi/n$, баҳои дуҷониба барои доимии Ҷексон ҳосил мешавад:

$$\frac{1}{\pi^2}\leq\frac{n^{2r}\,E_{n-1}^2(f)}{\omega^2(f^{(r)},\pi/n)}\leq\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2}, \tag{1.2.8}$$

ки тақрибан ба натиҷаи (1.2.5) баробар аст.

Ошкор аст, ки натиҷаи (1.2.4) – ро барои ихтиёри $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ ба намуди зерин навишта метавонем:

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r-1}\,E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(f^{(r)},t)\sin ntdt}=\frac{1}{4}. \tag{1.2.9}$$

Умумикунонии минбаъдаи баробарии (1.2.9) ба В.В. Шалаев [101] тааллуқ дорад. Ӯ исбот кардааст, ки барои ҳар гуна $n,m\in\mathbb{N}$ ва $r\in\mathbb{Z}_+$ баробарии зерин дуруст мебошад:

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq const}}\frac{n^{2r-m}\,E_{n-1}^2(f)}{\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)\sin ntdt\right\}^m}=\frac{1}{4^m}. \tag{1.2.10}$$

Баробарии (1.2.9) аз (1.2.10) ҳангоми $m=1$ будан, мебарояд.

Аз баробарии (1.2.10) инчунин мебарояд, ки барои ҳаргуна $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ ва ихтиёрии $f\in L_2^{(r)}$ баробарии зерин дуруст аст:

$$E_{n-1}(f)\leq 2^{-m/2}\,n^{-r}\,\omega_m(f^{(r)},\pi/n). \tag{1.2.11}$$

Қайд мекунем, ки нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин (1.2.11) аниқ нест, вале агар функсияи $\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)$ барои ҳар як $t\in[0,\pi/(2n)]$ шарти зеринро қонеъ гардонад:

$$2\,\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)},\pi/(2n)\big)\geq\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)+\omega_m^{2/m}\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}-t\right), \tag{1.2.12}$$

аз ҷумла, агар он дар порчаи $[0,\pi/n]$ барҷаста бошад, пас нобаробарии (1.2.11)-ро метавон аниқ намуд, яъне, дар маҷмуи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$, ки барои онҳо функсияи $\omega_m(f^{(r)},t)$ шарти (1.2.12)-ро қонеъ мекунад, нобаробарии аниқи Ҷексон–Стечкин барои ҳамаи $m,n\in\mathbb{N}$ ва $r\in\mathbb{Z}_+$ дуруст мебошад (ниг. [101]):

$$E_{n-1}(f)\leq 2^{-m/2}\,n^{-r}\,\omega_m\big(f^{(r)},\pi/(2n)\big),$$

ки барои функсияи $f_0(x)=\cos nx\in L_2^{(r)}$ ба баробарӣ мубаддал мешавад.

Ҳангоми ҳалли масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳои 2π-даврии дифференсиронидашаванда бо бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои L_2, ки ба ёфтани доимиҳои аниқ $\chi=\chi(m,n,r)$ дар нобаробариҳои намуди Ҷексон–Стечкин

$$E_n(f)_2\leq\chi\,n^{-r}\,\omega_m\left(f^{(r)},\frac{t}{n}\right)_2,\quad t>0,$$

алоқаманд мебошанд, характеристикаҳои гуногуни экстремалӣ баррасӣ гардидаанд, ки ба аниқ намудани баҳои болоии доимиҳои χ меоранд (ниг., масалан, корҳои [18, 19, 21, 24, 46, 50, 66, 68, 69, 77, 78, 81, 83, 86, 88, 96]), ки дар онҳо масъалаи зикршуда мавриди тадқиқ қарор гирифтааст.

Дар робита ба ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон–Стечкин, Н.И. Черных дар кори худ [77] қайд кардааст, ки азбаски функционали

$$\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_1^2(f,t)\sin nt\,dt\right)^{1/2}$$

аз функционали ҷексонӣ $\omega_1(f,\pi/n)$ (ҳангоми $f\neq\mathrm{const}$) хурдтар мебошад, бинобар ин, ба назар мерасад, ки он барои тавсифи бузургиҳои наздиккунии беҳтарини полиномиалии $E_{n-1}(f)$-и функсияҳои даврӣ дар фазои L_2 қулайтар аст.

Барои тасдиқи гуфташуда, дар кори М.Г. Есмаганбетов [29] характеристикаи экстремалие, ки модули бефосилагии бо вазн миёнакардашудаи тартиби олӣ, ки барои ба даст овардани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин истифода гардидааст, баррасӣ шудааст.

Дар идомаи мавзуи зикршуда, дар мақолаи С.Б. Вакарчук ва А.Н. Щитов [18] характеристикаи экстремалии зерин тадқиқ карда шудааст:

$$\chi_{m,n,r}(h) := \sup_{\substack{f\in L_2^r \\ f\neq const}} \frac{n^{2(r+m)}\, h^{2m}\cdot E_{n-1}^2(f)}{\left(\omega_m^{2/m}(f^{(r)},h) + n^2\displaystyle\int_0^h (h-t)\,\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^m}, \quad (1.2.13)$$

ки дар ин ҷо $0 < h \leq \pi/n,\ m,n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$.

Бо истифода аз он муяссар гардид, ки як натиҷаи Л.В. Тайков, ки дар теорема 1-и кори [66] барои $m = 1$ ба даст оварда шудааст, барои ҳолати модули бефосилагии тартиби ихтиёрии $m \in \mathbb{N}$ васеъ карда шавад. Яъне, С.Б. Вакарчук ва А.Н. Щитов [18] нобаробарии зеринро исбот намуданд:

$$\frac{1}{(nh)^{2m}n^{2r}} \leq \sup_{\substack{f\in L_2^r \\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\omega_m^2(f^{(r)},h)} \leq \frac{1}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nh)^2}+\frac{1}{2}\right)^m. \quad (1.2.14)$$

Натиҷаи Л.В. Тайков (1.2.6) аз нобаробарии (1.2.14) ҳангоми $m = 1$ мебарояд.

Дар робита бо гуфтаҳои дар боло зикршуда, аз нуқтаи назари М.Ш. Шабозов ва С.Б. Вакарчук [87] омӯзиши характеристикаи экстремалии зерин ҷолибият дорад:

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r}(h) :=$$

$$:= \sup\left\{\frac{n^r\, E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)dt\right)^{m/2}} : f\in L_2^r,\ f\neq \mathrm{const}\right\}, \qquad (1.2.15)$$

ки модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-ум $\omega_m^{2/m}(f,t)$-ро бо функсияи вазнӣ $h-t$, ки дар ин ҷо $0\leq t\leq h$ мебошад, дар бар мегирад.

Дар кори якҷояи М.Ш. Шабозов ва С.Б. Вакарчук [87], барои характеристикаи экстремалии (1.2.15) натиҷаи умумии зерин ба даст оварда шудааст: бигузор $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ бошад, он гоҳ барои ҳаргуна ададҳои h, ки шарти $0<h\leq\pi/n$ – ро қаноат мекунонанд, баробарии зерин ҷой дорад:

$$\widetilde{\chi}_{m,n,r}(h) = h^{-m}\left\{1-\left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-m/2}. \qquad (1.2.16)$$

Натиҷаи умумитар дар ин самт аз ҷониби А.А. Лигун [46] ба даст оварда шудааст. Ӯ нишон дод, ки барои ҳаргуна $n,m,r\in\mathbb{N}$, $0<h\leq\pi/n$, $0<t\leq h$ ва $\varphi(t)\geq 0$ — ихтиёри функсияи вазнӣ нобаробарии дуҷониба дуруст аст:

$$\left\{A_{n,h}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \leq \sup_{\substack{f\in L_2^r\\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)},t)\,\varphi(t)dt\right\}^{1/2}} \leq \left\{A_{k,h}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}, \qquad (1.2.17)$$

ки дар ин ҷо

$$A_{k,h}^{r,m}(\varphi) = 2^{m/2}\left(k^{2r}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^m\,\varphi(t)dt\right)^{1/2}, \quad k\geq n.$$

Барои баъзе функсияҳои вазнӣ φ нобаробарии (1.2.17) ба баробарӣ бо доимиҳои аниқ мубаддал мешавад.

Барои шарҳи кӯтоҳ ва ҷамъбасти ҳамаи натиҷаҳои пештар ба даст омада ва васеъ кардани онҳо дар кори М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов [86] характеристикаи умумитари экстремалии зерин тадқиқ карда шудааст:

$$\chi_{m,n,r,p}(\varphi;h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{E_n(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}},\tag{1.2.18}$$

ки дар ин ҷо $m,n,r\in\mathbb{N}$, $p\in(0,\infty)$, $0<t\le h$, $0<h\le\pi/n$, $\varphi(t)\ge0$ – ихтиёри функсияи вазнӣ мебошад.

Ҳамчунин дар (1.2.18) шартан қабул шудааст, ки $0/0:=0$.

Қайд мекунем, ки бузургиҳои намуди (1.2.18) дар давраҳои гуногун аз тарафи олимони зерин мавриди омӯзиш қарор гирифтаанд: Л.В. Черных [77, 78], Л.В. Тайков [66, 68, 69], А.А. Лигун [45–48], Н. Айнуллоев [2], В.В. Шалаев [101], М.Ш. Шабозов ва О.Ш. Шабозов [80], С.Б. Вакарчук [19, 21, 24], Г.А. Юсупов [106–111].

Ҳамчунин тадқиқоти баъзе характеристикаҳои дигари экстремалӣ анҷом дода шудааст, ки дар маънои муайян ба (1.2.18) мувофиқанд (ниг., масалан, [17–21, 25, 29–31, 34, 35, 45–47, 66, 68, 69, 81–85]).

Мақсади кори М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов [86] ин васеъ намудани нобаробарии маълуми А.А.Лигун [46] барои $0<p\le2$ мебошад, ки аз он бо интихоби мушаххаси функсияи вазнӣ $\varphi(t)$, натиҷаҳои зикршуда дар корҳои [2, 17–20, 46, 77, 101] мебароянд.

М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов [86] исбот карданд, ки барои ҳаргуна $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \geq 0$, $0 < t \leq h$ нобаробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\left\{A^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p}(\varphi; h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} A^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)\right\}^{-1}, \qquad (1.2.19)$$

ки дар ин ҷо

$$A^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) = 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

Ошкор аст, ки аз нобаробарии (1.2.19) барои $p = 2$ нобаробарии маълуми А.А. Лигун (1.2.17) мебарояд.

Бояд қайд кард, ки аз натиҷаи умумии М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов [86] бо интихоби мушаххаси функсияи вазнӣ $\varphi(t)$ ва қиматҳои муайяни ададӣ барои параметрҳои m, p, нобаробариҳои аниқ ба даст меоянд. Бо истифода аз онҳо мумкин аст ба таври осон синфҳои функсияҳоро бо маҳдудиятҳои мушаххаси мажорантаи додашуда муайян намуда, қимати аниқи n-қутрҳои гуногуни ин синфҳои функсияҳоро ҳисоб намоем (ниг., замима дар кори [86]).

Ҳоло масъалаҳои экстремалии ҳалнашудаеро номбар мекунем, ки дар бобҳои дуюм ва сеюми кори диссертатсионӣ баррасӣ ва ҳал карда мешаванд.

1.2.1. Гузориши масъалаҳои экстремалии ҳалнашуда

Дар ин банд гузориши масъалаҳои экстремалии ҳалнашудаи назарияи наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳои davриро меорем, ки ҳалли онҳо дар бобҳои дуюм ва сеюми рисола диссертатсионӣ пешниҳод мегарданд.

Масъалаи I. Қимати аниқи характеристикаи экстремалии умумикардашудаи (1.2.18)-ро вобаста ба хосиятҳои суфтагии функсияи вазнӣ барои наздиккунии муштараки беҳтарини функсия ва ҳосилаҳои фосилавии он ёфта шавад.

Масъалаи II. Синфҳои функсияҳоеро муайян намоед, ки ба таври маъмул аз ҳалли масъалаи I бармеоянд ва қимати бузургии наздиккунии беҳтарини муштараки онҳоро ёбед.

Масъалаи III. Характеристикаи экстремалии дар кори М.Ш. Шабозов, С.Б. Вакарчук ва В.И. Забутная [88] овардашуда умумӣ кунонида шавад ва қимати аниқи он ёфта шавад. Барои синфҳои функсияҳое, ки аз таърифи ин характеристика мебароянд, қимати аниқи сарҳади болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ёфта шавад.

Дар боби сеюми кори диссертатсионӣ масъалаҳои ҳисоб кардани қиматҳои аниқи n-қутрҳои гуногун ва ҳалли баъзе масъалаҳои дигари экстремалӣ мавриди омӯзиш қарор мегиранд.

Дар кори диссертатсионӣ усули Н.П. Корнейчук оид ба баҳодиҳии сарҳади болоии наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо тавассути зерфазоҳои ченакаш қайдкардашуда истифода бурда шуда, ҳамчунин баҳодиҳии поёнии n-қутрҳо дар фазоҳои нормиронидашуда, ки аз тарафи В.М. Тихомиров [72] таҳия гардидааст, татбиқ карда мешавад.

Дар ин ҷо масъалаи зерини экстремалӣ дида баромада мешавад:

Масъалаи IV. Барои синфҳои функсияҳое, ки аз таърифи характеристикаҳои экстремалии воридкардашуда ҳосил мегарданд, қимати аниқи n-қутрҳо ва бузургии наздиккунии муштараки беҳтарин ҳисоб карда шавад.

БОБИ 2. Оид ба нобаробариҳо байни наздиккунии беҳтарин ва характеристикаи миёнакардашудаи функсияҳо дар метрикаи фазои L_2

Дар ин боб баъзе натиҷаҳо оид ба наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини синфи функсияҳои дифференсиронидашавандаи даврии $f(x)$ ба воситаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар фазои $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ оварда мешаванд. Пеш аз пешниҳоди натиҷаҳои асосии худ мо шарҳи мухтасари таърихи натиҷаҳоро оид ба мавзуи тадқиқшаванда пешниҳод намуда, барои асоснок кардани интихоби мавзуи кори диссертатсионӣ рафти инкишофи онро нишон медиҳем.

Дар тули даҳсолаҳои зиёд ҳаллу фасли масъалаҳои экстремалӣ ва татбиқи онҳо таваҷҷуҳи математикони зиёдро ба худ ҷалб намудааст, зеро чунин масъалаҳо дар ҳалли масъалаҳои гуногуни математикаи амалӣ, ки мазмуни оптимизатсиониро доранд, васеъ истифода мешаванд. Дар масъалаҳои экстремалӣ, одатан, лозим меояд, ки сарҳади аниқи болоии саҳви наздикшавӣ бо усули додашуда дар синфи функсияҳои муайян ёфта шавад, ё ин ки барои ин синф воситаи беҳтарини наздикшавӣ нишон дода шавад. Дар солҳои охир дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ комёбиҳои назаррас ба даст оварда шудаанд.

Қадами муҳим дар таҳияи масъалаҳои экстремалӣ аз ҷониби математики машҳури рус П.Л. Чебышев [76] гузошта буд, ки дар солҳои 50-уми қарни XIX барои асосҳои назарияи наздиккунӣ замина ниҳод. Дар инкишофи назарияи наздиккунии функсияҳо кори илмии К. Вейерштрасс [126], ки соли 1885 нашр шудааст, нақши муҳим бозид. Мувофиқи он барои ҳаргуна функсияи дар порчаи $[a, b]$ бефосилаи $f(x)$ пайдарпайии наздиккунии беҳтарини он аз руи бисёраъзогиҳои тартибашон $\leq n$ ҳангоми $n \to \infty$ ба нул майл мекунад. Теоремаи Вейерштрасс ба он маъно конструктивӣ нест, ки он баҳои суръати наздикшавиро дар бар намегирад. Бо ин мақсад, масъалаи ёфтани чунин намуди баҳоҳо ба миён омад.

Натиҷаҳои фундаменталӣ, ки ба омӯзиши суръати камшавии бузургии наздиккунии беҳтарини функсия вобаста ба хусусиятҳои структурии он марбутанд, дар корҳои А. Лебег [118], Ш.Ж. Валле-Пуссен [123], Д. Ҷексон [116], С.Н. Бернштейн [14], Ж. Фавар [115], А.Н. Колмогоров [117], С.М. Николский [53] ва С.Б. Стечкин [61] ба даст оварда шудаанд. Дар оянда барои рушди назарияи наздиккунӣ ҳам дар татбиқи амалӣ ва ҳам дар асосҳои назариявӣ бисёр математикони дигар машғул шудаанд.

Баъд аз чоп шудани натиҷаи К. Вейерштрасс [126] корҳои Ш.Ж. Валле-Пуссен [123], С.Н. Бернштейн [14] ва Д. Ҷексон [116] нашр гардиданд, ки дар онҳо суръати ба нол наздикшавии пайдарпаиҳои наздиккунии беҳтарин тадқиқ карда шудааст.

Дар баробари тадқиқот оид ба наздиккунии функсияҳо, ки дар ягон сегмент муайян ва додашудаанд, аз руи бисёраъзогиҳои алгебравӣ тадқиқот оид ба суръати наздиккунии функсияҳои даврӣ аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ низ гузаронида шуданд.

Дар робита ба наздиккунии синфи функсияҳои даврӣ, корҳои машҳури А.Н. Колмогоров [117], Ж. Фавар [115] ва С.М. Николский [53], ки дар солҳои 30-юм ва 40-уми асри гузашта нашр шудаанд, қайд кардан лозим аст. Айни замон масъалаҳои назарияи наздиккунӣ дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника васеъ истифода мешаванд, аз ҷумла дар математикаи ҳисоббарорӣ, математикаи дискретӣ, назарияи ададҳо ва ғайра.

Масъалаҳои наздиккунии беҳтарини функсияҳои даврӣ дар фазои L_2 аз ҷумла дар корҳои Н.И. Черных [77, 79], Л.В. Тайков [65–69], С.Б. Вакарчук [16, 20, 21, 24, 125], А.А. Лигун [46, 49, 50], В.В. Шалаев [101], М.Ш. Шабозов [80, 82, 85–87, 89, 90, 93–96, 120, 121] ва дигарон тадқиқ карда шудаанд.

Солҳои охир барои ҳалли масъалаҳои наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияҳо дар фазои L_2 намудҳои гуногуни модули бефосилагӣ истифода бурда мешаванд (масалан, нигаред ба корҳои [1, 20, 21, 24, 25, 55–58, 60–64, 75, 77, 79, 81–83, 87–98, 125] ва адабиёти дар онҳо овардашуда).

Дар баъзе фазоҳои банахӣ ҳалли масъалаҳои экстремалӣ то ба доимиҳои аниқ расонида шудааст, яъне натиҷаҳои ниҳоӣ ба даст оварда шудаанд. Муҳимтарин пешравии усулҳои зикршуда дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои нормиронидашуда барои синфи функсияҳои 2π-даврии дифференсиронидашаванда зуҳур мегардад.

Яке аз масъалаҳои марказии экстремалии назарияи аппроксиматсияи функсияҳо — ин масъалаи ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин мебошад. Нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин дар ҳар гуна фазои нормиронидашудаи X нобаробарии намуди

$$E_{n-1}(f)_X \leq \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0$$

– ро меноманд, ки дар он саҳви наздиккунии функсияи инфиродии f ба воситаи характеристикаи суфтагии додашудаи ω_m-и худи функсияи аппроксиматсияшаванда ё тавассути баъзе ҳосилаҳои он $f^{(r)} \in X$ баҳогузорӣ карда мешавад. Ошкор аст, ки доимии беҳтарин χ, ба таври умум, метавонад, ҳам аз фазои X ва ҳам аз параметрҳои m, n, r ва τ вобаста бошад.

Дар ин ҷо якбора масъалаи экстремалии ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин ба миён меояд, яъне масъалаи ҳосил намудани нобаробариҳо байни бузургии наздиккунии беҳтарин ва қимати модулҳои бефосилагӣ дар нуқтаҳои $\tau_n = t/n$ $(0 < t \leq \pi)$ ба миён меояд, ки дар метрикаи фазоҳои гуногуни банахии синфҳои муайяни функсияҳо натиҷаҳои ниҳоӣ ҳастанд.

Дар бораи аҳамияти ёфтани доимии аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин, дар монографияи В.И. Иванов ва О.И. Смирнов [37] зикр мешавад, ки: «Таваҷҷуҳ ба доимиҳои аниқ, ки дар атрофи нобаробариҳои Ҷексон–Стечкин ба вуҷуд омадааст, шояд он қадар асоснок намешуд, агар ҳар як ҳолати нав истифодаи ғояҳо ва усулҳои навро талаб намекард, ки баъдан дар ҳалли масъалаҳои дигари экстремалӣ муфид хоҳанд буд».

Аввалин доимиҳои аниқ дар нобаробарии Ҷексон аз ҷониби Н.П. Корнейчук [41] барои фазои $C(0, 2\pi]$ соли 1962 ва аз ҷониби Н.И. Черных [77, 78] барои фазои $L_2(0, 2\pi]$ соли 1967 ба даст оварда шудаанд. Баъд аз натиҷаҳои Н.П. Корнейчук ва Н.И. Черных таваҷҷӯҳ ба ёфтани доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин ва дар дигар фазоҳои банахӣ ба миён омад. Соли 1992 Н.И. Черных [79] нобаробарии аниқи Ҷексон–Стечкинро дар фазои $L_p(0, 2\pi)$, $1 \leq p < 2$ исбот карда буд. Қимати аниқи доимиҳо, ки дар нобаробарихои Ҷексон истифода бурда мешаванд, аз ченаки фазое вобаста мебошанд, ки дар он наздикшавӣ анҷом дода мешавад ва инчунин ба қимати аргумент дар модули бефосилагӣ, ки дар наздиккунӣ ба кор бурда мешавад, вобаста мебошанд. Соли 1979 Н.И. Черных [114] қимати минималии аргументро дар модули бефосилагӣ муайян кард, ки барояш доимии аниқ дар нобаробарии Ҷексон–Стечкин дар фазои $L_p(-\pi, \pi]$ ба ҳадди глобалии минимум мерасад. Ёфтани чунин аргументҳо, ки онҳоро *аргументҳои оптималӣ* ё *нуқтаҳои Черных* меноманд, ба масъалаҳои муҳими экстремалӣ дар назарияи наздиккунии функсияҳо табдил ёфтанд.

Бояд гуфт, ки дар давраҳои гуногун ба омӯзиши ин мавзуъ олимони зерин: В.И. Бердышев [13], В.В. Жук [30–32], В.В. Арестов ва В.Ю. Попов [3], А.Г. Бабенко [5–10], В.И. Иванов [34–40], А.А. Лигун [45–50], Л.В. Тайков [65–69], В.А. Юдин [102–105], С.Б. Вакарчук [15–20,23], С.Б. Вакарчук ва В.И. Забутная [21–24, 124], В.В. Шалаев [101], М.Ш. Шабозов [82, 84, 96, 99, 100], М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов [85,86], М.Ш. Шабозов ва С.Б. Вакарчук [87] ва бисёр математикони дигар машғул буданд.

Дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар солҳои охир комёбиҳои назаррас ҳам дар соҳаи ҳақиқӣ ва ҳам дар соҳаи комплексӣ ба даст омадаанд. Дар як қатор фазоҳои мушаххаси банахӣ ҳалли масъалаи гузошташуда то доимиҳои аниқ расонида шудааст, яъне натиҷаҳои ниҳоӣ ба даст оварда шудаанд. Усулҳои нави тадқиқи масъалаҳои экстремалӣ таҳия шудаанд, ки бар асоси фактҳои амиқи назарияи умумии фазоҳои банахӣ ва омӯзиши хусусиятҳои нозуки синфи мушаххаси функсияҳо қарор доранд. Дар ин ҳолат, усулҳое, ки бо истифодаи сохторҳои дохилии фазоҳои нормиронидашудаи муқарраршуда алоқамандaнд, хеле самараноктар баромаданд. Самаранокии усулҳои зикршуда бештар дар ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар фазоҳои муқарраршуда барои синфҳои функсияҳои даврӣ зоҳир мешавад.

Дар кори диссертатсионӣ масъалаҳои экстремалии ёфтани сарҳади болии наздиккунии беҳтарини муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайниии онҳо дар баъзе синфҳои функсияҳое, ки тавассути модули бефосилагии умумикардашуда муайян мегарданд, мавриди тадқиқ қарор дода мешаванд. Хусусан, усулҳои наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳо баррасӣ шуда, доимимҳои аниқ дар нобаробариии намуди Ҷексон–Стечкин бо модули бефосилагии умумикардашуда ҳисоб карда мешаванд. Илова бар ин, қимати аниқи наздиккунии муштараки беҳтарини баъзе синфи функсияҳо муайян карда мешаванд.

Ёфтани доимиҳои аниқ ва умуман, ҳалҳои аниқи масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунӣ нақши муҳим мебозанд, зеро аксар вақт ҳар як масъалаи нави аниқи ҳалшудаи экстремалӣ ба ягон усули нави ҳалли масъала оварда мерасонад.

§ 2.1. Мафҳумҳои асосӣ ва таърифҳои ибтидоӣ

Пеш аз ҳама, далелҳо, қайдҳо ва таърифҳои маълумро пешниҳод мекунем, ки дар оянда онҳоро истифода хоҳем кард.

Ба воситаи $\mathbb{N}$ – маҷмуи ададҳои натуралӣ; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ – маҷмуи ададҳои ҳақиқии мусбат; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ – фазои функсияҳои ҳақиқии 2π-даврии бо квадрат дар маънои Лебег интегронидашавандаро бо нормаи маҳдуди

$$\|f\| := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

ишора мекунем. Маҷмуи ҳамаи бисёраъзогиҳои тригонометрии

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

тартиби $n-1$–ро ба воситаи $\mathcal{T}_{2n-1}$ ишора менамоем. Агар $S_{n-1}(f, x)$ – суммаи хусусии тартиби $n-1$–и қатори Фурйеи функсияи $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx\Big),$$

яъне

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \Big(a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx\Big),$$

бошад, он гоҳ аз хосияти суммаҳои хусусии қатори Фурйеи функсия бараъло маълум аст, ки дар он гуфта мешавад, ки наздиккунии беҳтарини функсияи $f(x)$ дар метрикаи фазои L_2 аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрии тартиби $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ суммаи хусусии қатори Фурйе $S_{n-1}(f, x)$ фароҳам меоварад, яъне

$$E_{n-1}(f):=E_{n-1}(f,\mathcal{T}_{2n-1})_{L_2}=\inf\Big\{\|f-T_{n-1}\|:T_{n-1}(x)\in\mathcal{T}_{2n-1}\Big\}=$$

$$=\|f-S_{n-1}(f)\|=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2(f)+b_k^2(f))\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}, \qquad (2.1.1)$$

ки дар ин ҷо барои мухтасарӣ $\rho_k^2(f)=a_k^2(f)+b_k^2(f),\ k\geq n$ гузошта шудааст ва $a_k(f)$, $b_k(f)$ – косинус- ва синус-коэффисиентҳои Фурйеи функсияи $f\in L_2$ мебошанд.

Бо $L_2^{(r)}$ $(r\in\mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)}=L_2)$ маҷмуи функсияҳои $f\in L_2$, ки барояшон ҳосилаи тартиби $(r-1)$-ум, яъне $f^{(r-1)}$ мутлақ бефосила буда, ҳосилаҳои тартиби r-ум, яъне $f^{(r)}\in L_2$ мебошанд, ишора мекунем.

Модули бефосилагии тартиби m-уми дилхоҳ функсияи 2π-даврии ченшаванда ва бо квадрат суммиронидашавандаи $f(x)\in L_2$ – ро бо баробарии

$$\omega_m(f,t)=\sup\Big\{\ \big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\|:\ |t|\leq h\Big\} \qquad (2.1.2)$$

муайян мекунем, ки дар ин ҷо

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f\Big(x+(m-k)h\Big) \qquad (2.1.3)$$

– фарқияти тартиби m-уми функсияи f дар нуқтаи x бо қадами h мебошад.

Бо истифода аз мулоҳизаҳое, ки дар монографияи [28, с.157-165] оварда шудаанд, бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки барои модули бефосилагии тартиби m-ум (2.1.2) ҳамаи хосиятҳои модули бефосилагии тартиби олӣ иҷро мешаванд.

Баробарии Парсевалро барои функсияи $f \in L_2$ татбиқ намуда, бо осонӣ ифодаи

$$\|\Delta_h^m f(\cdot)\|^2 = \left\|\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}f(\,\cdot+(m-k)h)\right\|^2 =$$

$$= 2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m$$

– ро исбот кардан мумкин аст. Аз ин ҷо дар асоси баробарии (2.1.2) формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\omega_m^2(f,t) = 2^m\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m:\ |h|\le t\right\}. \tag{2.1.4}$$

Агар функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} = L_2$) бошад, он гоҳ аз баробарии формалии

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}k^r\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{r\pi}{2}\right)+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{r\pi}{2}\right)\right)$$

– ро истифода бурда, нишон додан мумкин аст, ки

$$\omega_m^2(f^{(r)},t) = 2^m\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m:\ |h|\le t\right\}. \tag{2.1.5}$$

Ҳангоми ҳалли масъалаҳои назарияи наздиккунӣ дар фазои L_2 масъалаҳои ҳисобкунии доимиҳои аниқ:

$$\chi := \chi_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\mathrm{const}}}\frac{n^rE_{n-1}(f)}{\omega_m\big(f^{(r)},t/n\big)},\quad 0<t\le 2\pi \tag{2.1.6}$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин

$$E_{n-1}(f) \le \chi\, n^{-r} \omega_m(f^{(r)}, t/n)$$

дар фазоҳои гуногуни банахӣ дар корҳои Н.П. Корнейчук [41], Н.И. Черных [77–79], В.А. Юдин [102–105], А.А. Лигун [45–50], В.И. Иванов ва О.И. Смирнов [37], Л.В. Тайков [66,68,69], А.Г. Бабенко [5–7,9], С.Н. Васильев [25], В.И. Бердышев [13], В.В. Арестов ва Н.И. Черных [114], В.В. Арестов ва В.Ю. Попов [3], В.В. Шалаев [101], С.Б. Вакарчук [19, 20, 23], М.Ш. Шабозов [82, 84, 96], М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов [85, 86, 95, 120, 121], Г.А. Юсупов [106–112, 127] ва дигарон дида баромада шудааст. Шарҳи муфассал ва таърихи нобаробарии Ҷексон–Стечкин дар мақолаи В.И. Иванов [39] оварда шудааст.

Дар солҳои охир ҳангоми ҳалли як қатор масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи аппроксиматсияи функсияҳо ба ҷои модули классикии бефосилаи тартиби m-ум (2.1.2) дар бисёр ҳолатҳо модификатсияҳои гуногуни он истифода бурда мешаванд. Истифодаи намудҳои гуногуни модули бефосилагӣ аз шартҳои махсуси масъалаҳои мавриди баррасишаванда вобаста буда, имкон медиҳад, ки натиҷаҳои пурмазмуне ба даст оварда шаванд, ки моҳияти масъалаҳои тадқиқшавандаро ошкор кунанд.

Яке аз модификатсияҳои модули бефосилагии (2.1.2) ба истифодаи оператор-функсияи Стеклов

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} f(x+\tau)d\tau, \quad h > 0$$

асос ёфтааст. Символҳои зеринро дохил мекунем: $S_{h,k}(f) := S_h\big(S_{h,k-1}(f)\big)$, дар ин ҷо $k\in\mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f)\equiv f$, $\mathbb{I}$ — оператори воҳидӣ дар фазои L_2 мебошад. Мувофиқи кори Абилов В.А. ва Абилова Ф.В. [1] фарқиятҳои умумии тартиби якум ва олиро ба тарзи зерин муайян мекунем:

$$\widetilde{\Delta}_h^1(f,x):=S_h(f,x)-f(x)=\big(S_h-\mathbb{I}\big)(f,x),$$

$$\widetilde{\Delta}_h^k(f,x):=\widetilde{\Delta}_h^1\big(\widetilde{\Delta}_h^{k-1}(f,x)\big)=\big(S_h-\mathbb{I}\big)^k(f,x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}S_{h,k}(f,x),$$

ки дар ин ҷо $n=2,3,\ldots$. Барои формулаҳои дохилкардашуда характеристикаи суфтагии намуди

$$\widetilde{\Omega}_m(f,t):=\sup\Big\{\big\|\widetilde{\Delta}_h^k(f,\cdot)\big\|:\ 0<h\le t\Big\} \tag{2.1.7}$$

дида баромада мешавад, ки онро *модули бефосилагии махсуси тартиби m-уми* функсияи $f\in L_2$ меноманд.

Ҳисобкуниҳои оддӣ бо ҷалби баробарии Парсевал имконият медиҳанд, ки намуди ошкори модули бефосилагии (2.1.7) ёфта шавад (ниг. масалан, [84]):

$$\widetilde{\Omega}_m\big(f,t\big)_2=\sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)\left(1-\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}. \tag{2.1.8}$$

Бо дарназардошти муносибати (2.1.8), барои ҳосилаи тартиби r-уми функсия $f^{(r)}\in L_2$ ҳосил мекунем:

$$\widetilde{\Omega}_m\big(f^{(r)},t\big)_2=\sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\left(1-\frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}. \tag{2.1.9}$$

§ 2.2. Доимиҳои аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин барои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда аз фазои L_2

Дар ин параграф шакли мушаххаси модификатсияи модули бефосилагӣ дар метрикаи фазои L_2 пешниҳод мегардад, ки бо натиҷаҳои кори диссертатсионӣ алоқаманд мебошад.

Ҳангоми ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунӣ ба ҷои модули бефосилагии классикии тартиби m-ум барои функсияи $f \in L_2$ баъзан қулайтар аст, характеристикаи суфтагии ба бузургии (2.1.2) эквивалентии намуди зерин

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2} \tag{2.2.1}$$

истифода бурда шавад, ки дар ин ҷо $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$;

$$\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x),\ j = \overline{1,m}.$$

Аз ҳамин сабаб, ҳисоб кардани доимии аниқ

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \leq 2\pi \tag{2.2.2}$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкини намуди

$$E_{n-1}(f) \leq \mathbb{K}_{m,n,r}(t) \frac{1}{n^r} \Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)$$

низ таваҷҷуҳи муайянро ба худ ҷалб мекунад.

Қайд мекунем, ки С.Б. Вакарчук [19] барои ҳаргуна қиматҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $t \in (0, \pi/2]$ баробарии

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2} \tag{2.2.3}$$

исбот карда буд ва дар ҳолати хусусӣ нишон дод, ки

$$\mathbb{K}_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}. \tag{2.2.4}$$

Бояд қайд кард, ки ҳангоми омузиши масъалаҳои муҳими наздиккунӣ дар фазои метрикии L_p $(0 < p < 1)$ характеристикаи суфтагии миёнакардашуда функсияҳои намуди (2.2.1) аз ҷониби К.В. Руновский [58] ва Э.А. Стороженко, В.Г. Кротов, П. Освальд [63] мавриди баррасӣ қарор гирифта буд.

Модулҳои бефосилагии миёнакардашудаи шакли дигар қаблан дар корҳои маълуми Р.М. Тригуб ва Е.С. Белинский (ниг. масалан, [122]) дар фазоҳои L_p $(p \geq 1)$ тадқиқ шуда, эквивалентнокии сусти онҳо бо модулҳои бефосилагии классикӣ нишон дода шудааст.

Дар идома хосиятҳои характеристикаи суфтагии $\Omega_m(f,t)$ – ро баррасӣ менамоем, зеро онҳо, ба назари мо, дорои аҳамияти муайян мебошанд.

$\mathbf{1^0}$. $\lim\limits_{t\to 0} \Omega_m(f,t) = 0$.

Дар ҳақиқат, азбаски нормаи $\|\Delta_h^m\|$ функсияи бефосила аз тағйирёбандаҳои $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_m$ мебошад, он гоҳ хосияти додашуда аз теорема дар бораи қимати миёна барои интегралҳои каратӣ мебарояд:

$$\lim_{t\to 0} \Omega_m(f,t) = \lim_{t\to 0} \left\|\Delta^1_{h_1(t)} \circ \Delta^1_{h_2(t)} \circ \cdots \circ \Delta^1_{h_m(t)} f\right\| = 0,$$

ки дар ин ҷо $0 < h_j(t) \leq t$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — қиматҳои аз t вобаста мебошанд.

$\mathbf{2^0}$. Характеристикаи суфтагии $\Omega_m(f,t)$ функсияи бефосила барои $t>0$ мебошад.

$\mathbf{3^0}$. $\Omega_m(f,t) \le 2^m \|f\|$.

Дар ҳақиқат, фарқи тартиби m-ум чунин муайян карда мешавад:

$$\Delta_{\bar{h}}^m f = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1 f.$$

Ҳар як оператори $\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x+h_j) - f(x), \ j = \overline{1,m}$ мебошад. Медонем, ки барои як оператори фарқи тартиби якум баробарии

$$\|\Delta_h^1 f\| \le 2\|f\|$$

барои ҳар як қимати h мешавад, чунки

$$\|\Delta_h^1 f\|^2 = \int \left|f(x+h) - f(x)\right|^2 dx \le$$

$$\le 2\int \left|f(x+h)\right|^2 dx + 2\int \left|f(x)\right|^2 dx = 4\|f\|^2.$$

Бо истифода аз методи индуксияи математикӣ барои ҳар як марҳилаи фарқ

$$\|\Delta_{\bar{h}}^1 f\| \le 2^m \|f\|$$

зеро ки

$$\|\Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1 f\| \le 2^m \|f\|$$

мебошад. Аз ин ҷо $\|\Delta_{\bar{h}}^1 f\|^2 \le 4^m \|f\|^2$ мешавад. Он гоҳ

$$\Omega_m^2(f,t)_2 = \frac{1}{t^m}\int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \le$$

$$\le 4^m \|f\|^2 dh_1 \cdots dh_m = \frac{1}{t^m} \cdot t^m \cdot 4^m \|f\|^2 = 4^m \|f\|^2,$$

ё ин ки

$$\Omega_m^2(f,t)_2 \le 4^m \big\|f\big\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \Omega_m(f,t)_2 \le 2^m \big\|f\big\|.$$

4⁰. $\Omega_m(f_1+f_2,t) \le 2\big(\Omega_m(f_1,t)+\Omega_m(f_2,t)\big)$.

Дар ҳақиқат, азбаски оператори фарқият $\Delta_{\bar h}^m f(x)$ хаттӣ мебошад, пас:

$$\Delta_{\bar h}^m\big(f_1+f_2\big)(x) = \Delta_{\bar h}^m f_1(x) + \Delta_{\bar h}^m f_2(x). \tag{2.2.5}$$

Дар ин ҷо нобаробарии

$$\|a+b\|^2 \le 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

– ро истифода бурда, аз (2.2.5) менависем:

$$\big\|\Delta_{\bar h}^m\big(f_1+f_2\big)\big\|^2 \le 2\big\|\Delta_{\bar h}^m f_1\big\|^2 + 2\big\|\Delta_{\bar h}^m f_2\big\|^2.$$

Ин нобаробариро дар формулаи (2.2.1) барои таърифи $\Omega_m(f_1+f_2,t)_2$ гузошта, меёбем:

$$\Omega_m^2(f_1+f_2,t)_2 = \frac{1}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \|\Delta_{\bar h}^m(f_1+f_2)\|^2 dh_1\cdots dh_m \le$$

$$\le \frac{2}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \Big(\big\|\Delta_{\bar h}^m f_1\big\|^2 + \big\|\Delta_{\bar h}^m f_2\big\|^2\Big)\, dh_1\cdots dh_m =$$

$$= \frac{2}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \big\|\Delta_{\bar h}^m f_1\big\|^2 dh_1\cdots dh_m +$$

$$+\frac{2}{t^m}\int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \big\|\Delta_{\bar h}^m f_2\big\|^2 dh_1\cdots dh_m =$$

$$= 2\Omega_m^2(f_1,t)_2 + 2\Omega_m^2(f_2,t)_2 = 2\big(\Omega_m^2(f_1,t)_2 + \Omega_m^2(f_2,t)_2\big).$$

Акнун нобаробарии байни решаи квадратӣ аз сумма ва суммаи решаҳои квадратӣ, яъне

$$\sqrt{a+b} \le \sqrt{2a} + \sqrt{2b} \le 2\big(\sqrt{a} + \sqrt{b}\,\big)$$

барои $a = \Omega_m^2(f_1, t)_2$, $b = \Omega_m^2(f_2, t)_2$ татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$\Omega_m(f_1 + f_2, t)_2 \le \sqrt{2}\Big(\Omega_m^2(f_1, t)_2 + \Omega_m^2(f_2, t)_2\Big)^{1/2} \le$$

$$\le 2\Big(\sqrt{\Omega_m^2(f_1, t)_2} + \sqrt{\Omega_m^2(f_2, t)_2}\,\Big) = 2\Big(\Omega_m(f_1, t)_2 + \Omega_m(f_2, t)_2\Big).$$

$\mathbf{5^0}$. $\Omega_m(f, nt) \le n^m\,\Omega_m(f, t)$.

Исботи хосияти $\mathbf{5^0}$ – ро нишон медиҳем. Азбаски

$$\Omega_m(f, nt)_2 = \left\{\frac{1}{(nt)^m}\int\limits_0^{nt}\cdots\int\limits_0^{nt}\|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{t^m}\int\limits_0^{t}\cdots\int\limits_0^{t}\|\Delta_{n\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1\cdots dh_m\right\}^{1/2},$$

ки дар ин ҷо $n\overline{h} = \big(nh_1, nh_2, \ldots, nh_m\big)$ аст, он гоҳ дурустии нобаробарии

$$\|\Delta_{n\overline{h}}^m f(\cdot)\| \le n^m \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|$$

– ро нишон додан лозим меояд. Ин нобаробарӣ дар асоси методи индуксияи математикӣ исбот карда мешавад. Дар ҳақиқат, барои қиматҳои $m = 1$ ва $m = 2$ мувофиқан ҳосил мекунем:

$$\Delta^1_{nh_1} f(x) = f(x+nh_1) - f(x) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{n-1} \Big[f\big(x+(i_1+1)h_1\big) - f\big(x+i_1h_1\big) \Big] = \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta^1_{h_1} f(x+i_1h_1),$$

Аз ин ҷо

$$\left\| \Delta^1_{nh_1} f \right\| = \left\| \sum_{i_1=0}^{n-1} \Delta^1_{h_1} f(x+i_1h_1) \right\| \le \sum_{i_1=0}^{n-1} \left\| \Delta^1_{h_1} f(x+i_1h_1) \right\|.$$

Дар L_2-норма барои функсияи даврии $f(x)$ аз руи дарозии давраш баробарии зерин ҷой дорад:

$$\left\| \Delta^1_{h_1} f(x+i_1h_1) \right\| = \left\| \Delta^1_{h_1} f(x) \right\|. \tag{2.2.6}$$

Дар ҳақиқат, азбаски

$$\left\| \Delta^1_{h_1} f(x+i_1h_1) \right\|^2_{L_{[0,2\pi]}} = \int_0^{2\pi} \left| f(x+(i+1)h_1) - f(x+i_1h_1) \right|^2 dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x+i_1h_1 \ \Rightarrow \ du = dx \\ x = 0 \ \Rightarrow \ u = i_1h_1, \\ x = 2\pi \ \Rightarrow \ u = 2\pi + i_1h_1 \end{matrix} \right| = \int_{i_1h_1}^{2\pi+i_1h_1} \left| f(u+h_1) - f(u) \right|^2 du =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left| f(u+h_1) - f(u) \right|^2 du = \left\| \Delta^1_{h_1} f(x) \right\|^2_{L_{[0,2\pi]}},$$

чунки функсия $f(x)$ даврӣ мебошад. Аз ин ҷо якбора (2.2.6) мебарояд.

Ғайр аз ин

$$\Delta^1_{nh_2}\circ\Delta^1_{nh_1}f(x)=\Delta^1_{nh_2}\circ\left(\sum_{i_1=0}^{n-1}\Delta^1_{h_1}f(x+i_1h_1)\right)=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{n-1}\Delta^1_{nh_2}\circ\Delta^1_{h_1}f(x+i_1h_1)=$$

$$=\sum_{i_2=0}^{n-1}\sum_{i_1=0}^{n-1}\Delta^1_{nh_2}\circ\Delta^1_{h_1}f(x+i_1h_1+i_2h_2).$$

Пас аз ин ҷо

$$\big\|\Delta^1_{nh_2}\circ\Delta^1_{nh_1}f\big\|\le n^2\big\|\Delta^1_{nh_2}\circ\Delta^1_{h_1}f\big\|$$

мешавад. Акнун фарз мекунем, ки барои $m=k$, ки $k\in\mathbb{N}$; $k\ge 2$ аст, нобаробарии

$$\big\|\Delta^1_{nh_k}\circ\Delta^1_{nh_{k-1}}\circ\cdots\circ\Delta^1_{nh_1}f\big\|\le n^k\big\|\Delta^1_{h_k}\circ\Delta^1_{h_{k-1}}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_1}f\big\|$$

ҷой дорад. Он гоҳ барои $m=k+1$ ҳосил мекунем:

$$\big\|\Delta^1_{nh_{k+1}}\circ\Delta^1_{nh_k}\circ\cdots\circ\Delta^1_{nh_1}f\big\|\le n\big\|\Delta^1_{h_{k+1}}\circ\big(\Delta^1_{h_k}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_1}f\big)\big\|=$$

$$=n\big\|\Delta^1_{h_k}\circ\Delta^1_{h_{k-1}}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_1}\circ\big(\Delta^1_{h_{k+1}}f\big)\big\|\le$$

$$\le n^{k+1}\big\|\Delta^1_{h_k}\circ\Delta^1_{h_{k-1}}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_1}\circ\Delta^1_{h_{k+1}}f\big\|=n^{k+1}\big\|\Delta^1_{h_{k+1}}\circ\Delta^1_{h_k}\circ\cdots\circ\Delta^1_{h_1}f\big\|$$

ва аз ин ҷо бармеояд:

$$\|\Delta^m_{n\overline{h}}f(\cdot)\|\le n^m\|\Delta^m_{\overline{h}}f(\cdot)\|.$$

Барои нобаробарии охирон формулаи (2.2.1) – ро татбиқ намуда, меёбем:

$$\Omega_m(f,nt)\le n^m\,\Omega_m(f,t).$$

6⁰. $\widetilde{C}_m\,\Omega_m(f,t)\ \le\ \omega_m(f,t)\ \le\ \widetilde{C}^*\,\Omega_m(f,t)$, ки дар ин ҷо $\widetilde{C}_m$ ва $\widetilde{C}^*$ — доимиҳои ихтиёрии аз t ва функсияи $f\in L_2$ вобаста набуда мебошанд.

Барои исботи ин нобаробарӣ қайд мекунем, ки дар фазои L_p $(0<p<1)$ хосияти мазкур дар кори К.В. Руновский [56] ёфта шудааст. Бо истифода аз баъзе мулоҳизаҳои овардашуда дар [55–57], нишон медиҳем, ки он дар ҳолати мавриди баррасӣ низ ҷой дорад. Аввалан нобаробарии дуюмро ҳосил мекунем. Аз [56] якбора ифодаи

$$\omega_1(f,t)\le C\,\Omega_1(f,t)$$

мебарояд, ки дар ин ҷо C — доимии аз функсияи f ва тағйирёбандаи t вобаста набуда мебошад. Таърифи модули бефосилагии тартиби якум ва формулаи (2.2.1) – ро истифода бурда, барои $|\tau|\le t$ ҳосил мекунем:

$$\left\|\Delta_\tau^1 f\right\|^2\le C^2\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_h^1 f\right\|^2dh.$$

Дар асоси нобаробарии ҳосилшуда барои ҳаргуна қимати $\tau\in[-t,t]$ навишта метавонем:

$$\left\|\Delta_\tau^2 f\right\|^2=\left\|\Delta_\tau^1\circ\Delta_\tau^1 f\right\|^2\le\frac{C^2}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_1}^1\circ\Delta_\tau^1 f\right\|^2dh_1=$$

$$=\frac{C^2}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau^1\circ\Delta_{h_1}^1 f\right\|^2dh_1\le\frac{C^2}{t}\int\limits_0^t\left(\frac{C^2}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_2}^1\circ\Delta_{h_1}^1 f\right\|^2dh_2\right)dh_1=$$

$$=\frac{C^4}{t^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_2}^1\circ\Delta_{h_1}^1 f\right\|^2dh_1\,dh_2,$$

чунки

$$\left\|\Delta_{\tau}^{1}\circ\Delta_{h_1}^{1}f\right\|^2\le\frac{C^2}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_2}^{1}\circ\Delta_{h_1}^{1}f\right\|^2dh_1$$

мебошад. Ҳамин тариқ, азбаски

$$\omega_2(f,t):=\sup_{|\tau|\le t}\left\|\Delta_{\tau}^{2}f\right\|,$$

ки дар ин ҷо

$$\Delta_{\tau}^{2}f(x):=f(x+2\tau)-2f(x+\tau)+f(x)$$

фарқи тартиби дуюми функсияи $f(x)$ ва

$$\Omega_2(f,t):=\left(\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_2}^{1}\circ\Delta_{h_1}^{1}f\right\|^2dh_1\,dh_2\right)^{1/2}$$

мебошад, он гоҳ дар асоси

$$\left\|\Delta_{\tau}^{2}f\right\|^2\le\frac{C^4}{t^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_2}^{1}\circ\Delta_{h_1}^{1}f\right\|^2dh_1\,dh_2,$$

ё ин ки аз ин ҷо

$$\left\|\Delta_{\tau}^{2}f\right\|\le C^2\left(\frac{1}{t^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t\left\|\Delta_{h_2}^{1}\circ\Delta_{h_1}^{1}f\right\|^2dh_1\,dh_2\right)^{1/2}=C^2\,\Omega_2(f,t)$$

мешавад. Аз ҳар ду тарафи нобаробарии охирон супремум аз руи $|\tau|\le t$ гирифта, меёбем:

$$\omega_2(f,t):=\sup_{|\tau|\le t}\left\|\Delta_{\tau}^{2}f\right\|\le C^2\,\Omega_2(f,t).$$

Ҳамин тариқ,

$$\omega_2(f,t) \le C_2^* \, \Omega_2(f,t)$$

мешавад, ки дар ин ҷо $C_2^* := C^2$ аст. Бо идома додани ин раванд, тавре ки қаблан нишон дода шуда буд, ба нобаробарии зерин мерасем:

$$\omega_m(f,t) \le C_m^* \, \Omega_m(f,t)$$

мешавад, ки дар ин ҷо $C_m^* := C^m$ мебошад. Азбаски барои бадастории баҳои болои характеристикаи суфтагии $\Omega_m(f,t)$ тавассути модули бефосилагии классикии $\omega_m(f,t)$ бар асоси идеяи исботи воқеияти мувофиқ барои ҳолати $0 < p < 1$ дар теоремаи 3.1 аз кори К.В. Руновский [56] асос ёфтааст, он бо сабабҳои маълум оварда намешавад.

7⁰. Функсияи $\Omega_m(f,t)$ қариб афзуншаванда мебошад, яъне чунин доимии C мавҷуд аст, ки аз функсияи f ва тағйирёбандаи t вобаста набуда, барои ихтиёрии ду қиматҳои $0 < t_1 < t_2$ нобаробарии зерин иҷро мегардад:

$$\Omega_m(f,t_1) \le C \, \Omega_m(f,t_2).$$

Дар ҳақиқат, хосияти **6⁰** – умро истифода бурда, дар асоси гузориши $C := \dfrac{C_m^*}{\widetilde{C}_m}$ ва афзуншаванда будани модули бефосилагии классикии $\omega_m(f,t)$ барои ихтиёри ду қиматҳои $t_1 < t_2$ навишта метавонем:

$$\Omega_m(f,t_1) \le \frac{1}{\widetilde{C}_m} \omega_m(f,t_1) \le \frac{1}{\widetilde{C}_m} \omega_m(f,t_2) \le \frac{C_m^*}{\widetilde{C}_m} \Omega_m(f,t_2) \le C \, \Omega_m(f,t_2).$$

Чи хеле, ки дар боло қайд карда будем, ёфтани доимии аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин

$$E_{n-1}(f)_X \le \chi\, n^{-r}\omega_m(f^{(r)}, \tau/n)_X, \quad r \in \mathbb{Z}_+,\ \tau > 0 \tag{2.2.7}$$

яке аз масъалаҳои маркази экстремалии назарияи наздиккунии функсияҳо дар ҳар гуна фазои нормиронидашудаи X мебошад.

Ин масъаларо дар вақтҳои гуногун Н.И. Черных, Л.В. Тайков, А.А. Лигун, В.А. Юдин, В.И. Иванов ва О.И. Смирнов, А.Г. Бабенко, С.Б. Вакарчук, М.Ш. Шабозов ва шогирдони онҳо тадқиқ карда буданд (масалан, нигаред ба корҳои [5–10, 16–23, 35–37, 39, 40, 45–50, 66–69, 77–80, 82, 84–86, 89, 93, 95, 96, 99, 100, 102–105]).

А.А. Лигун дар кори [46] характеристикаи экстремалии намуди зеринро дида баромада буд (дар ин ҷо ва дар оянда ифодаи 0/0 баробари 0 қабул карда шудааст):

$$\sup\left\{\frac{E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt} :\ f \in L_2^{(r)},\ f \ne \mathrm{const}\right\},$$

ки дар ин ҷо $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < h \le \pi/n$, $\varphi(t)$ функсияи ғайриманфӣ, ченшаванда, суммиронидашаванда дар порчаи $[0, h]$ ва ба нул эквивалент намебошад. Дар ҳолати хусусӣ, нишон дода буд, ки нобаробарии дучандаи

$$\frac{1}{\mathscr{B}_{n,h}^{r,m}(\varphi)} \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\ne\mathrm{const}}} \frac{E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt} \le \frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty} \mathscr{B}_{k,h}^{r,m}(\varphi)},$$

ки дар ин ҷо

$$\mathscr{B}_{k,h}^{r,m}(\varphi) = 2^m k^{2r} \int\limits_0^h \big(1 - \cos kt\big)^m \varphi(t)dt$$

аст, ҷой дорад.

Бо мақсади умуми намудани натиҷаи овардашуда дар кори А.А. Лигун [46] М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов характеристикаи экстремалии зеринро тадқиқ карда буданд [86]:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) =$$

$$= \sup\left\{ \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt\right)^s} : \quad f \in L_2^{(r)},\ f \neq \mathrm{const} \right\}, \qquad (2.2.8)$$

ки дар ин ҷо $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s – ададҳои мусбат, $0 < h \leq \pi/n$ ва функсияи $\varphi(t)$ ҳамаи шартҳои дар нобаробарии дучандаи А.А. Лигун овардашударо қаноат мекунонад. Дар кори [86] дурустии ифодаи

$$\left\{\mathscr{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \leq \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \leq \left\{\inf_{n \leq k < \infty} \mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \qquad (2.2.9)$$

нишон дода шудааст, ки дар ин ҷо $0 < p \leq 2$; $0 < h \leq \pi/n$ ва

$$\mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1 - \cos kt)^{mp/2}\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Ба андешаи мо, дар мувофиқа бо ифодаи (2.2.8), омӯзиши характеристикаи экстремалии

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi,h):=$$

$$:=\sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s}:\quad f\in L_2^{(r)},\ f\neq \mathrm{const}\right\} \tag{2.2.10}$$

ба худ таваҷҷуҳи зиёд ҷалб мекунад, ки дар ин ҷо ададҳои $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p,s\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$; $0<h\leq\pi/n$; $\varphi(t)$ — функсияи ғайриманфии ченшавандаи дар порчаи $[0,h]$ суммиронидашванда ва ба нул ғайриэквивалент мебошад.

Дар ҳамаи ҳолатҳои минбаъда ҳангоми ҳисоб кардани қимати сарҳади саҳеҳи болоӣ дар муносибатҳои умумӣ барои ҳамаи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ фарз карда мешавад, ки $f\neq\mathrm{const}$ мебошад.

Ишораи зеринро дохил мекунем:

$$\operatorname{sinc} t:=\begin{cases}\dfrac{\sin t}{t}, & \text{агар } t\neq 0,\\[2ex] 1, & \text{агар } t=0.\end{cases} \tag{2.2.11}$$

Теоремаи зерин як навъ умумикардашудаи натиҷаи (2.2.8) бо характеристикаи экстремалии (2.2.10) ба шумор меравад.

Теоремаи 2.2.1. *Бигузор $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq\infty$, $0<h\leq\pi/n$, φ — функсияи ғайриманфӣ, ченшаванда ва дар порчаи $[0,h]$ суммиронидашавандаи ба нул ғайриэквивалент бошад. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)=$$

$$=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\inf\limits_{n\le k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)},\qquad(2.2.12)$$

ки дар ин ҷо

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi):=2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Исбот. Формулаи Эйлерро истифода бурда, қатори Фурйеи функсияи $f(x)\in L_2$ – ро дар намуди комплексӣ менависем:

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx},\qquad(2.2.13)$$

ки дар ин ҷо

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}dx,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

— коэффисиентҳои қатори Фурйеи функсияи f дар намуди комплексӣ мебошанд. Аз баробарии (2.2.13) барои ихтиёри функсияи $f(x)\in L_2^{(r)}$ навишта метавонем:

$$f^{(r)}(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(ik)^rc_k(f)e^{ikx}.\qquad(2.2.14)$$

Азбаски фарқияти тартиби m – ум аз руи вектори афзоиш $\overline{h}$ $=$

$(h_1, h_2, \ldots, h_m)$ бо формулаи

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_{h_m} \cdots \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f(x) \tag{2.2.15}$$

муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

аст, барои функсияи (2.2.14) намуди зеринро мегирад:

$$\Delta_h^m f^{(r)}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k(f) e^{ikx} \prod_{\nu=1}^{m} (e^{ikh_\nu} - 1).$$

Азбаски функсияҳои $\{e^{ikx}\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ дар порчаи $[0, 2\pi]$ системаи ортогоналиро ташкил медиҳанд, он гоҳ баробарии Парсевалро барои ифодаи охирин татбиқ намуда, ҳосил мекунем:

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\|_2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \prod_{\nu=1}^{m} (1 - \cos kh_\nu). \tag{2.2.16}$$

Баробарии (2.2.16) – ро дар формулаи (2.2.1) гузошта, баъди ҳисоб намудани интегралҳо, меёбем:

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \big(1 - \operatorname{sinc} kt\big)^m \geq$$

$$\geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \big(1 - \operatorname{sinc} kt\big)^m. \tag{2.2.17}$$

Минбаъд аз яке аз шаклҳои нобаробарии Минковский, ки дар монографияи A. Pinkus [119, саҳ.204] оварда шудааст, истифода мекунем:

$$\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\widetilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|\widetilde{f}_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2},\ p>0. \tag{2.2.18}$$

Гузориши $\widetilde{f}_k(t):=f_k(t)\cdot\varphi^{1/p}(t)$ – ро дохил намуда, аз (2.2.18) ҳосил мекунем:

$$\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}. \tag{2.2.19}$$

Ҳар ду тарафи нобаробарии (2.2.17) – ро ба дараҷаи $p/2$ $(p>0)$ бардошта, ба функсияи вазнии $\varphi(t)$ зарб мезанем ва нисбат ба t аз фосилаи 0 то h интегронида, дар асоси формулаҳои (2.2.19) ва (2.1.1) навишта метавонем:

$$\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\,\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\big(1-\operatorname{sinc}kt\big)^m\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right\}^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\left(k^{2r}\rho_k^p(f)\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc}kt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left(\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right)^2\right\}^{1/2}\geq E_{n-1}(f)\inf_{n\leq k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi),$$

ё ин ки аз ин ҷо

$$\frac{E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\,\varphi(t)dt\right\}^{1/p}}\leq\frac{1}{\inf\limits_{n\leq k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)} \tag{2.2.20}$$

Дар нобаробарии (2.2.20) аз руи ҳамаи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ ба ҳудуди саҳеҳи болоӣ гузашта, якбора баҳои болоии характеристикаи экстремалии (2.2.10) – ро ҳосил мекунем:

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h)\leq\left\{\inf_{n\leq k<\infty}\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}. \tag{2.2.21}$$

Акнун ба ҳосил кардани баҳои поёнии характристикаи экстремалии (2.2.10), ки дар он $s=1/p$ аст, мегузарем. Нишон додан мумкин аст, ки пайдарпайии ададии $\left\{\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}_{k\in\mathbb{N},\,k\geq n}$ аз поён бо ягон ададӣ мусбат маҳдуд мебошад, яъне сарҳади аниқи поёнии аз нул фарқкунандаро доро мебошад.

Бо ин мақсад, функсияи $f_k(x)=\sin kx,\ k\in\mathbb{N},k\geq n$, ки ба синфи функсияҳои $L_2^{(r)}$ дохил аст, дида мебароем. Азбаски барои ин функсия

$$E_{n-1}(f_k)=1\quad\text{ва}\quad\Omega_m(f_k^{(r)},t)=k^r\Big\{2\big(1-\operatorname{sinc}kt\big)\Big\}^{m/2}$$

аст, он гоҳ

$$\frac{E_{n-1}(f_k)}{\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_k^{(r)}, t)\,\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\left\{2^{m/2}k^r \int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} kt\big)^{m/2}\,\varphi(t)dt\right\}^{1/p}} = \frac{1}{\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)}$$

ва аз ин ҷо барои ихтиёри ададй натуралии $k \geq n$ ҳосил мекунем:

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \geq \left\{\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}.$$

Бо ба назар гирифтани таъриф ва хосиятҳои сарҳадҳои саҳеҳи болоӣ ва поёнии маҷмуҳои ададӣ, аз нобаробарии охирон навишта метавонем:

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) \geq \sup_{n \leq k < \infty} \left\{\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} = \left\{\inf_{n \leq k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}. \qquad (2.2.22)$$

Аз муқоисакунии нобаробариҳои (2.2.21) ва (2.2.22), баробарии талабкардашудаи (2.2.12) – ро ҳосил мекунем. Теоремаи 2.2.1 исбот карда шуд.

§ 2.3. Баъзе натиҷаҳои муҳиме, ки аз теоремаи 2.2.1 бармеоянд

Аз теоремаи 2.2.1 як қатор натиҷаҳои муҳим ба даст оварда мешаванд, ки дар тадқиқи масъалаҳои экстремалӣ нақши калидӣ доранд.

Натиҷаи 2.3.1. *Бигузор* $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ *ва шартҳои теоремаи 2.2.1 ҷой дошта бошанд. Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \Big\{\mathscr{B}^{r,m}_{n,h,p}(\varphi)\Big\}^{-1}. \tag{2.3.1}$$

Исбот. Дар асоси хосиятҳои функсияи $g(t) := \operatorname{sinc} t$ (нигаред, масалан ба [59, с.129, 132]), барои ҳаргуна $x \geq 1$ ва $0 < y \leq 3\pi/4$ нобаробарии

$$g(y) \geq g(xy)$$

– ро ҳосил мекунем. Он гоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$x^{\gamma}\big(1 - g(xy)\big)^{\alpha} \geq \big(1 - g(y)\big)^{\alpha}, \tag{2.3.2}$$

ки дар ин ҷо γ ва α — ададҳои ихтиёрии мусбат мебошанд. Бигузор

$$x = \frac{k}{n},\ k, n \in \mathbb{N},\ k \geq n; \quad y = nt,\ 0 < t \leq h; \quad \gamma = rp; \quad \alpha = \frac{mp}{2}$$

бошанд. Он гоҳ аз нобаробарии (2.3.2) навишта метавонем:

$$k^{rp}\big(1 - \operatorname{sinc} kt\big)^{mp/2} \geq n^{rp}\big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}. \tag{2.3.3}$$

Ҳар ду тарафи нобаробарии (2.3.3) – ро ба функсияи вазнии $\varphi(t)$ зарб зада, нисбат ба тағйирёбандаи t аз фосилаи 0 то h меинтегронем. Он гоҳ, ҳар ду тарафи нобаробарии ҳосилшударо ба дараҷаи $1/p$ бардошта, ба адади $2^{m/2}$ зарб мезанем, дар натиҷа ҳосил мекунем:

$$2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\geq$$

$$\geq 2^{m/2}\left(n^{rp}\int\limits_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

ё ин ки аз ҷо

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\geq\mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi),\quad k\geq n.$$

Дар асоси ифодаи ҳосилшуда аз формулаи (2.2.12) баробарии талабкардашудаи (2.3.1) – ро ҳосил мекунем. Натиҷаи 2.3.1 исбот карда шуд.

Агар дар формулаи (2.3.1) қимати $p=2$ ва $\varphi(t)\equiv 1$ гузорем, он гоҳ яке аз натиҷаҳои Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. – ро аз кори [88] ҳосил мекунем:

$$\sup\left\{\frac{n^{r-1/2}E_{n-1}(f)}{\int\limits_0^h\Omega_m^2(f^{(r)},t)dt}:\ f\in L_2^{(r)},\ f\neq\mathrm{const}\right\}=$$

$$=\left\{2^m\int\limits_0^{nh}\Big(1-\operatorname{sinc}t\Big)^m dt\right\}^{-1/2}.$$

Гузориши

$$Si(\tau):=\int\limits_0^\tau\operatorname{sinc}t dt$$

– ро ҳамчун синуси интегралӣ дохил намуда, функсияи $\Omega_m(t)$ – ро дар нуқтаи $t=0$ чунон муайян мекунем, ки $\Omega_m(f,0)=0$ бошад, ки дар ин ҷо $f\in L_2$ аст.

Натиҷаи 2.3.2. *Бигузор* $0<\tau\le 3\pi/4;\ m,n\in\mathbb{N}$ *ва*

$$\beta(\tau):=\frac{Si(\tau)-\sin\tau}{\tau-\sin\tau},\quad \eta(p):=\big(1+mp/2\big)^{1/p}$$

бошанд. Агар ҳангоми қимати қайдкардашудаи $0<p\le 2$ *барои ҳаргуна элементи* $f\in L_2^{(r)},\ r\in\mathbb{Z}_+$ *функсияи* $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *дар порчаи* $[0,3\pi/(4n)]$ *барҷаста ба боло бошад, он гоҳ бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияи* f *нобаробарии зеринро қаноат мекунонад:*

$$E_{n-1}(f)\le\frac{\eta(p)}{n^r}\big(2(1-sinc\,\tau)\big)^{-m/2}\Omega_m\big(f^{(r)},\tau\beta(\tau)/n\big).$$

Агар функсияи $\Omega_m^p(f^{(r)})$ *барои ҳар як қимати* p *аз порчаи* $[p_*,p^*]\subset(0,2]$ *барҷаста ба боло дар сегменти* $[0,3\pi/(4n)]$ *бошад, он гоҳ*

$$E_{n-1}(f)\le\frac{\eta(p^*)}{n^r}\big(2(1-sinc\,\tau)\big)^{-m/2}\,\Omega_m\big(f^{(r)},\tau\beta(\tau)/n\big)$$

мешавад.

Исбот. Натиҷаи 2.3.1 – ро истифода бурда, барои функсияи $f\in L_2^{(r)}$ навишта метавонем:

$$E_{n-1}(f)\le 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\frac{\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)\,\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h\big(1-\mathrm{sinc}\,nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.3.4)$$

Акнун гузориши $\sigma(t)=-\mathrm{sinc}\,nt$, ки дар ин ҷо $0<t\le 3\pi/(4n)$ аст, дохил намуда, барои $\varphi(t)=d\sigma(t)/dt$ меёбем:

$$\int\limits_0^h \big(1-\mathrm{sinc}\,nt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt=\int\limits_0^h \big(1-\mathrm{sinc}\,nt\big)^{mp/2}\sigma'(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^h \big(1-\mathrm{sinc}\,nt\big)^{mp/2}d\big(1-\mathrm{sinc}\,nt\big)=\Big(\frac{mp}{2}+1\Big)^{-1}\big(1-\mathrm{sinc}\,nh\big)^{mp/2+1}.$$

Аз нобаробарии Йенсен истифода мебарем, ки онро дар шакли зерини барои мо муҳим менависем (нигаред, масалан, [52, с. 288]).

Бигузор $\mathscr{L}$ — функсияи бефосилаи барҷаста ва дар нимтири $\mathbb{R}_+$ додашуда бошад. Агар функсияҳои ψ ва q дар порчаи $[a,b]$ муайян буда, функсияи ψ ченшаванда ва охирнок бошад, функсияи q ғайриманфӣ, q ва $\psi\cdot q$ суммиронидашаванда ва $\int\limits_a^b q(t)dt>0$ бошад, он гоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\frac{\int\limits_a^b \mathscr{L}\big(\psi(t)\big)q(t)dt}{\int\limits_a^b q(t)dt}\le\mathscr{L}\left(\frac{\int\limits_a^b \psi(t)\,q(t)dt}{\int\limits_a^b q(t)dt}\right).$$

Азбаски, мувофиқи шарт, $\Omega_m^p(f^{(r)})$ — дар сегменти $[0,3\pi/(4n)]$ функсияи барҷаста мебошад, пас дар формулаи охирон $\mathscr{L}=\Omega_m^p(f^{(r)})$, $q=\varphi$, $\psi=t$, $a=0$, $b=h$, ки $0<h\le 3\pi/(4n)$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$\frac{\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt} \le \Omega_m^p\left(f^{(r)};\ \frac{\int\limits_0^h t\,\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}\right).$$

Бо дарназардошти шакли зикршудаи функсия $\varphi = \sigma'$, аз ин нобаробарӣ ба натиҷаи зерин мерасем:

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)\sigma'(t)dt \le \big(1-\operatorname{sinc} nh\big)\Omega_m^p\left(f^{(r)};\ \frac{h\big(Si(nh)-\sin(nh)\big)}{nh-\sin(nh)}\right).$$

Аз нобаробарии охирон ва ифодаи (2.3.4), ҳангоми $h=\tau/n$, баҳои болоии бузургии наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияи f – ро ҳосил мекунем, ки дар асоси гузоришҳои дар боло дохилшуда ба намуди зерин навишта мешавад:

$$E_{n-1}(f) \le \eta(p)\, n^{-r}\big(2(1-\operatorname{sinc}\tau)\big)^{-m/2}\,\Omega_m\big(f^{(r)};\tau\beta(\tau)/n\big).$$

Фарз мекунем, ки функсияи $\Omega_m^p\big(f^{(r)}\big)$ барои ҳаргуна қиматҳои $p \in [p_*, p^*] \subset (0,2]$ барҷаста ба боло бошад. Азбаски дар нобаробарии охирон аз қимати p фақат бузургии η вобаста аст ва чи хеле, ки маълум аст вай қимати хурдтаринро дар нуқтаи $p = p**$ доро мешавад, он гоҳ ҳангоми аз боло баҳодиҳии бузургии наздиккунии беҳтарин $E_{n-1}(f)$ ба ҷои қимати ададии $\eta(p)$ мо қимати $\eta(p^*)$ – ро истифода мебарем. Натиҷаи 2.3.2 исбот шуд.

Акнун қимати бузургии $\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$ – ро барои $h = a/n$ $(0 < a \le \pi)$ ва

$\varphi(t) = q(nt)$ дар намуди зерин менависем:

$$\mathscr{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) := 2^{m/2} \left\{ k^{rp} \int\limits_0^{a/n} (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2}\, q(nt)dt \right\}^{1/p} =$$

$$= 2^{m/2}\, n^{r-1/p} \left\{ \left(\frac{k}{n}\right)^{rp} \int\limits_0^a \big(1 - \operatorname{sinc}(kt/n)\big)^{mp/2}\, q(t)dt \right\}^{1/p}.$$

Аз ин ҷо нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\inf_{n\le k<\infty} \mathscr{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) \ge 2^{m/2}\, n^{r-1/p} \inf_{x\ge 1} \left\{ x^{rp} \int\limits_0^a \big(1 - \operatorname{sinc} xt\big)^{mp/2}\, q(t)dt \right\}^{1/p}.$$

Дар асоси теоремаи исботкардашудаи 2.2.1 ва бо истифода аз мулоҳизаҳое, ки дар кори [46, с. 788-789] оварда шудааст, натиҷаи зерин ба даст меояд.

Натиҷаи 2.3.3. *Бигузор $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $q(t)$ – функсияи ғайриманфӣ, ченшаванда ва дар порчаи $[0, a]$ $(0 < a \le \pi)$ суммиронидашавандаи ба нол ғайриэквивалент бошад. Он гоҳ нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$\{\Phi_{m,r,p}(a, q, 1)\}^{-1/p} \le$$

$$\le \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{ \int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n)\, q(t)dt \right\}^{1/p}} \le \left\{ \inf_{x\ge 1} \Phi_{m,r,p}(a, q, x) \right\}^{-1/p}, \quad (2.3.5)$$

ки дар ин ҷо

$$\Phi_{m,r,p}(a, q, x) = x^{rp} \int\limits_0^a \big(1 - sinc\, xt\big)^{mp/2} q(t)dt.$$

Дар ин ҳолат, агар функсияи q *чунон бошад, ки барояш*

$$\inf_{x\geq 1}\Phi_{m,r,p}(a,q,x)=\Phi_{m,r,p}(a,q,1)$$

шавад, он гоҳ баробарии

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\,q(t)dt\right\}^{1/p}}=\{\Phi_{m,r,p}(a,q,1)\}^{-1/p}$$

ҷой дорад.

Натиҷаи 2.3.4. *Бигузор* $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\leq 2$ *ва* $q(t)=t^{rp-1}q_1(t)$ *функсияи дар порчаи* $[0,a]$ $(0<a\leq\pi)$ *ғайриманфӣ, ченшаванда ва суммиронидашаванда буда,* q_1 *— функсияи афзуннашаванда ва ба нол ғайриэквивалент бошад. Он гоҳ баробарии*

$$\inf_{x\geq 1}\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),x)=\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)\tag{2.3.6}$$

ҷой дошта, формулаи зерин дуруст аст:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{2^{m/2}\,n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)},t/n)\,t^{rp-1}q_1(t)dt\right\}^{1/p}}=\left\{\Phi_{m,r,p}(a,t^{rp-1}q_1(t),1)\right\}^{-1/p}.\tag{2.3.7}$$

Исбот. Барои исбот дурустии ифодаи (2.3.6) – ро нишон медиҳем, чунки баробарии (2.3.7) якбора аз формулаи (2.3.5)-и натиҷаи 2.3.3 мебарояд.

Бо ин мақсад, гузориши зеринро дохил мекунем:

$$q_2(t)=\Big\{\,q_1(t),\ \text{агар}\ 0\leq t\leq a;\quad q_1(a),\ \text{агар}\ \ a\leq t<\infty\Big\}.$$

Барои ҳамаи қиматҳои $x \geq 1$ навишта метавонем:

$$\Phi_{m,r,p}\big(a, t^{rp-1}q_1(t), x\big) = x^{rp}\int\limits_0^a \big(1-\operatorname{sinc} xt\big)^{mp/2}\, t^{rp-1}q_1(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{ax} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{mp/2}\, t^{rp-1}q_2(t/x)dt \geq \int\limits_0^{ax} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{mp/2}\, t^{rp-1}q_2(t)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^{a} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{mp/2}\, t^{rp-1}q_1(t)dt = \Phi_{m,r,p}\big(a, t^{rp-1}q_1(t), 1\big),$$

яъне формулаи (2.3.6) ҷой дорад ва аз ин ҷо натиҷаи 2.3.4 исбот шуд.

Эзоҳ: Қайд кардан зарур аст, ки натиҷаи 2.3.4 ҳангоми $p = 2$ дар кори А.А. Лигун [46] исбот шуда буд.

Ба ифодаи $\mathscr{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)$, ки дар матни теоремаи 2.2.1 ҷорӣ шуда буд, бозмегардем ва муайян мекунем, ки функсияи φ бояд дорои кадом хосиятҳои дифференсиалӣ бошад, то баробарии

$$\inf_{n\leq k<\infty} \mathscr{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi) = \mathscr{B}^{r,m}_{n,h,p}(\varphi). \tag{2.3.8}$$

иҷро гардад. Ба ин савол леммаи зерин ҷавоб медиҳад.

Леммаи 2.3.1. *Бигузор $\varphi(t)$ – функсияи дар порчаи $[0, h]$ ғайриманфӣ ва дифференсиронидашаванда дар интервали $(0, h)$ $(0 < h \leq \pi/n)$ бошад. Агар барои ҳаргуна $r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq 2$ ва ихтиёри $t \in (0, h)$ нобаробарии*

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \geq 0 \tag{2.3.9}$$

иҷро гардад, он гоҳ баробарии (2.3.8) иҷро мегардад.

Исбот. Намуди ифодаи $\mathscr{B}^{r,m}_{k,h,p}(\varphi)$ ва шартҳои леммаи 2.3.1 – ро ба инобат гирифта, барои исботи дурустии формулаи (2.3.8) кифоя аст, нишон диҳем, ки функсияи

$$y(x) := x^{rp}\int\limits_{0}^{h}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{mp/2}\varphi(t)dt \tag{2.3.10}$$

дар фосилаи $1 \le x < \infty$ камнашаванда мебошад. Бо ин мақсад, нишон медиҳем, ки дар маҷмуи $1 \le x < \infty$ ҳосилаи тартиби якуми функсия $y'(x)$ ғайриманфӣ мебошад ва аз он ҷо якбора баробарии

$$\inf\big\{\,y(x):\ 1 \le x < \infty\big\} = y(1)$$

мебарояд. Дар ҳақиқат, функсияи (2.3.10) – ро дифференсиронида, меёбем:

$$y'(x) = rpx^{rp-1}\int\limits_{0}^{h}\big(1-\operatorname{sinc} xt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt+$$
$$+\,x^{rp}\int\limits_{0}^{h}\frac{\partial}{\partial x}\big(1-\operatorname{sinc} xt\big)^{mp/2}\varphi(t)dt. \tag{2.3.11}$$

Бо ҳисобкуниҳои оддӣ дурустии баробарии зеринро нишон додан мумкин аст:

$$\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\big(1-\operatorname{sinc} xt\big)^{mp/2} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\big(1-\operatorname{sinc} xt\big)^{mp/2}. \tag{2.3.12}$$

Формулаи (2.3.12) – ро истифода бурда, аз (2.3.11) ҳосил мекунем:

$$y'(x) = x^{rp-1}\left\{rp\int\limits_0^h \Big(1-\operatorname{sinc} xt\Big)^{mp/2}\varphi(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^h t\varphi(t)\frac{\partial}{\partial t}\Big(1-\operatorname{sinc} xt\Big)^{mp/2}\right\}. \quad (2.3.13)$$

Дар интеграли дуюми (2.3.13) усули интегронӣ аз руи ҳиссаҳоро иҷро намуда, дар асоси нобаробарии (2.3.9) меёбем:

$$y'(x) = x^{rp-1}\left\{\Big(1-\operatorname{sinc} xh\Big)^{mp/2} h\varphi(h) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^h \Big(1-\operatorname{sinc} xt\Big)^{mp/2}\Big(\big(rp-1\big)\varphi(t) - t\varphi'(t)\Big)dt\right\} \geq 0.$$

Леммаи 2.3.1 исбот карда шуд.

Натиҷаи 2.3.5. *Бигузор* $r \in \mathbb{N}$, $1/r \leq p \leq 2$, $0 \leq \gamma \leq rp-1$, $0 < \beta \leq \pi$, $\varphi_*(t) = \sin^\gamma\big(\beta t/h\big)$ *ва* $0 < t \leq h \leq \pi/n$ *бошанд. Он гоҳ барои ҳаргуна* $m, n \in \mathbb{N}$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi_*, h) = 2^{-m/2}n^{-r}\left\{\int\limits_0^h \Big(1-\mathit{sinc}\, nt\Big)^{mp/2}\sin^\gamma\Big(\beta t/h\Big)dt\right\}^{-1/p}. \quad (2.3.14)$$

Исбот. Дар ҳақиқат, бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки барои ҳамаи қиматҳои $0 < x \leq \pi$ нобаробарии

$$\operatorname{sinc} x - \cos x \geq 0 \quad (2.3.15)$$

дуруст мебошад. Иҷрошавии шарти (2.3.9) – ро барои функсияи

$$\varphi_*(t) = \sin^\gamma\big(\beta t/h\big)$$

месанҷем. Азбаски

$$\xi(t) = \big(rp-1\big)\varphi_*(t) - t\varphi_*'(t) =$$

$$= \big(\beta t/h\big)\sin^{\gamma-1}\big(\beta t/h\big)\Big[\big(rp-1\big)\mathrm{sinc}\,\big(\beta t/h\big) - \gamma\cos\big(\beta t/h\big)\Big], \quad (2.3.16)$$

он гоҳ дар асоси нобаробарии (2.3.15) навишта метавонем:

$$\mathrm{sinc}\,\big(\beta t/h\big) - \cos\big(\beta t/h\big) \geq 0. \quad (2.3.17)$$

Бо назардошти он ки $rp - 1 \geq \gamma$ аст, он гоҳ дар асоси нобаробарии (2.3.17) ифодаи дар қавси квадратӣ будаи тарафи рости формулаи (2.3.16) ғайриманфӣ мешавад. Аз ин ҷо мебарояд, ки $\xi(t) \geq 0$ барои ҳамаи қиматҳои $t \in (0, h)$ мебошад ва ин мувофиқи леммаи 2.3.1 дурустии формулаи (2.3.14) – ро нишон медиҳад. Натиҷаи 2.3.5 исбот шуд.

§ 2.4. Оид ба наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои онҳо дар фазои гилбертии L_2

Дар ин параграф мо масъалаҳои экстремалии марбут ба наздиккунии беҳтарини муштараки функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳоро аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазо $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ меомӯзем. Бояд қайд намуд, ки масъалаи наздиккунии муштараки функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи мунтазам бори аввал соли 1960 аз ҷониби А.Л. Гаркави [26] тадқиқ карда шуда буд. Сониян, худи ҳамон сол А.Ф. Тиман [70] масъалаи гузошташударо барои наздиккунии функсияҳое, ки дар тамоми тири ададӣ бо функсияҳои бутуни экспоненсиалӣ муайян карда мешаванд, тадқиқ намуд.

Дар ҳолати умумитар, масъалаи наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо ҳам тавассути бисёраъзогиҳои алгебравӣ ва ҳам тригонометрӣ дар монографияи В.Н. Малозёмов [51] мавриди баррасӣ қарор гирифтааст. Дар он ҷо баъзе теоремаҳои классикии назарияи наздиккунӣ барои ҳолати наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо оварда ва умумӣ гардонида шудаанд.

Хуб маълум аст [43, с. 127], ки барои ихтиёри функсияи $f \in L_2^{(r)}$ ҳосилаҳои мобайнии он $f^{(s)}$ $(s = 1, 2, 3, \ldots, r-1;\ r \geq 2, r \in \mathbb{N}, f^{(0)} \equiv f)$ инчунин ба фазои L_2 тааллуқ доранд, аз ин рӯ омӯзиши рафтори бузургии наздиккунии беҳтарини $E_{n-1}(f^{(s)})$ дар худи синфи $L_2^{(r)}$ ва ё дар ягон зерсинфи он $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ бешубҳа шавқовар мебошад. Ин масъала дар кори [21] барои модулҳои бефосилагии навъи махсусе, ки дар кори [1] тадқиқ карда шуд, пешниҳод ва ҳал карда шудааст. Дар ин ҷо мо ҳалли масъалаи гузошташударо дар ҳолате пешниҳод менамоем, ки характеристикаҳои структурии функсияи $f \in L_2^{(r)}$ тавассути қимати модули бефосилагии бо вазни $\varphi(t)$ миёнакардашудаи $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ тавсиф карда мешаванд.

Ҳамин тариқ, масъалаи наздиккунии беҳтарини муштараки синфи функсияҳои $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ дар шакли зерин ифода карда мешавад: талаб карда мешавад қимати аниқи бузургии зерин ёфта шавад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}):\ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{2.4.1}$$

Пеш аз он ки натиҷаҳои параграфи 1.4 – ро баррасӣ намоем, аввал баъзе малумотҳои умумиро пешниҳод мекунем.

Минбаъд ба воситаи $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$ — мувофиқан маҷмуи ададҳои натуралӣ, бутуни ғайриманфӣ ва мусбати ҳақиқӣ ишора мекунем; $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — фазои функсияҳои 2π-даврии бо квадрат ба маънои Лебег суммиронидашаванда бо нормаи охирноки

$$\|f\| := \|f\|_{L_2[0,2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big|f(x)\big|^2 dx\right)^{1/2} < \infty \tag{2.4.2}$$

ишора мекунем.

Бо символи $\mathcal{T}_{2n-1}$ зерфазоҳои ҳамаи бисёраъзогиҳои тригонометрии тартибашон аз $n-1$ калон набударо ишора мекунем:

$$\mathcal{T}_{2n-1} = \left\{T_{n-1}(x):\ T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)\right\}.$$

Хуб маълум аст, ки дар масъалаҳои ҷудокунии функсия ба қатори Фурйе аз руйи системаҳои тригонометрӣ нақши муҳимро оператори тағйирёбии ҷойгиршавӣ $T_h f(x) = f(x+h)$ ва модулҳои бефосилагии муқаррарии тартибҳои гуногун, ки бо ёрии он муайян карда мешаванд (нигаред, масалан, ба монографияҳои Н.К. Бари [12] ва А. Зигмунд [33]), роли ниҳоят калон мебозанд.

Ошкор аст, ки ихтиёри қатори Фурйеи функсияи $f \in L_2$, ки намуди

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big) \qquad (2.4.3)$$

– ро дорад ва дар ин ҷо

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned} \qquad (2.4.4)$$

— коэффисиентҳои Фурйеи функсияи $f \in L_2$ мебошанд, дар намуди комплексӣ ба шакли зерин навишта мешавад:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}. \qquad (2.4.5)$$

Дар ифодаи (2.4.5) коэффисиентҳои $c_k(f)$ аз руи баробариҳои

$$c_0(f) = \frac{1}{2}a_0(f),\ c_k(f) = \frac{a_k(f) - i\,b_k(f)}{2},\ c_{-k}(f) := \frac{a_k(f) + i\,b_k(f)}{2} \qquad (2.4.6)$$

муайян карда мешаванд, ё ин ки намуди умумии

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad (2.4.7)$$

– ро доранд.

Масъалаи экстремалии ёфтани қимати аниқи наздиккунии беҳтарини миёнаквадратии функсияҳои $f \in L_2$ тавассути бисёраъзогиҳои намуди

$$\mathscr{P}_{n-1} := \left\{ p_n(z) :\ p_n(z) = \sum_{|k|\le n} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx},\ \ a_k \in \mathbb{C} \right\} \qquad (2.4.8)$$

аз муайян кардани қимати бузургии зерин иборат аст:

$$E_{n-1}(f) := E(f, \mathscr{P}_{n-1})_{L_2} = \inf\Big\{\big\|f - p_{n-1}\big\|_2 :\ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\Big\}. \tag{2.4.9}$$

Тасдиқотҳои зеринро, ки барои исботи теоремаҳо дар оянда васеъ истифода бурда мешаванд, исбот мекунем.

Леммаи 2.4.1. *Дар байни ҳамаи бисёраъзогиҳои комплексии намуди* (2.4.8) *наздиккунии полиномиалии миёнаквадратии функсияҳои* $f \in L_2$ *– ро суммаи хусусии тартиби* $(n-1)$*-уми*

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|k|\le n} c_k(f) e^{ikx} \tag{2.4.10}$$

қатори Фурйеи (2.4.5) *доро мешавад. Ҳамзамон*

$$E_{n-1}(f) = \big\|f - S_{n-1}\big\|_2 = \left\{2 \sum_{|k|\ge n} \big|c_k(f)\big|^2\right\}^{1/2}. \tag{2.4.11}$$

Исбот. Бигузор функсияҳои $f \in L_2$ ва $p_{n-1}(x) \in \mathscr{P}_{n-1}$ — ихтиёри бисёраъзогии намуди (2.4.8) бошад. Сипас, бо истифода аз он, ки системаи функсияҳои $\{e^{ikx}\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ дар $L_2[0, 2\pi]$ ортогоналӣ мебошанд, яъне

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} \cdot e^{-ilx} dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{агар} \quad k \ne l, \\ 2, & \text{агар} \quad k = l, \end{cases}$$

мебошанд, ҳосил мекунем:

$$\big\|f - p_{n-1}\big\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|f(x) - p_{n-1}(x)\big|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}\right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{|k|\le n-1}\big(c_k(f)-a_k\big)e^{ikx}+\sum_{|k|\ge n}c_k(f)e^{ikx}\right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\sum_{|k|\le n-1}\big(c_k(f)-a_k\big)e^{ikx}+\sum_{|k|\ge n}c_k(f)e^{ikx}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{|l|\le n-1}\big(\overline{c}_l(f)-\overline{a}_l\big)e^{-ilx}+\sum_{|l|\ge n}\overline{c}_l(f)e^{-ilx}\right)dx =$$

$$= \sum_{|k|\le n}\sum_{|l|\le n-1}\big(c_k(f)-a_k\big)\big(\overline{c}_l(f)-\overline{a}_l\big)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(k-l)x}dx+$$

$$+\sum_{|k|\le n}\sum_{|l|\ge n}\big(c_k(f)-a_k\big)\overline{c}_l(f)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(k-l)x}dx+$$

$$+\sum_{|k|\ge n}\sum_{|l|\le n}c_k(f)\big(\overline{c}_l(f)-\overline{a}_l\big)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(k-l)x}dx+$$

$$+\sum_{|k|\ge n-1}\sum_{|l|\ge n}c_k(f)\overline{c}_l(f)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{i(k-l)x}dx =$$

$$= 2\sum_{|k|\le n-1}\big|c_k(f)-a_k\big|^2+2\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2.$$

Ҳамин тавр, мо исбот кардем, ки агар $f \in L_2$ ва $p_{n-1}(x) \in \mathscr{P}_{n-1}$ бошанд, пас

$$\big\|f-p_{n-1}\big\|_2^2 = 2\left\{\sum_{|k|\le n-1}\big|c_k(f)-a_k\big|^2+\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2\right\}. \tag{2.4.12}$$

Аз муносибати (2.4.12) якбора ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}^2(f) = \inf\left\{\left\|f - p_{n-1}\right\|_2^2 : \ p_{n-1}(x) \in \mathscr{P}_{n-1}\right\} =$$

$$= 2\left\{\sum_{|k|\le n-1}\left|c_k(f) - a_k\right|^2 + \sum_{|k|\ge n}\left|c_k(f)\right|^2\right\} = \left|a_k = c_k(f)\right| =$$

$$= 2\sum_{|k|\ge n}\left|c_k(f)\right|^2 = \left\|f - S_{n-1}(f)\right\|_2^2.$$

Аз баробарии охирон шарти леммаи 2.4.1 мебарояд, ки бо ҳамин исботаш ба охир мерасад.

Аз леммаи 2.4.1-и нав исботкардашуда мебарояд, ки агар функсияи $f \in L_2$ ба қатори Фурйе дар намуди (2.4.3) бо коэффисиентҳои (2.4.4) ҷудо шуда,

$$S_{n-1}(f,x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big)$$

— суммаи хусусии тартиби n-уми қатори (2.4.3) бошад, он гоҳ

$$E_{n-1}(f) = \left\|f - S_{n-1}(f)\right\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big)\right\}^{1/2}. \qquad (2.4.13)$$

Гузориши

$$\rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \quad k \in \mathbb{N}$$

– ро дохил намуда, баробарии (2.4.13) – ро дар намуди зерин менависем:

$$E_{n-1}(f) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \qquad (2.4.14)$$

Акнун нишон медиҳем, ки баробарии (2.4.14) ҳамчун натиҷа аз формулаи (2.4.11) мебошад. Дар ҳақиқат, аз баробариҳои (2.4.6) мебарояд, ки

$$\left|c_k(f)\right|^2 + \left|c_{-k}(f)\right|^2 = \frac{a_k^2(f) + b_k^2(f)}{2} \tag{2.4.15}$$

ва бинобар ҳамин аз (2.4.11) меёбем:

$$E_{n-1}^2(f)_2 = 2\sum_{|k|\geq n}\left|c_k(f)\right|^2 = 2\sum_{k=n}^{\infty}\left\{\left|c_k(f)\right|^2 + \left|c_{-k}(f)\right|^2\right\} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\left(a_k^2(f) + b_k^2(f)\right) = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f). \tag{2.4.16}$$

Дар оянда, барои осонии ҳисобкунӣ баробарии (2.4.16) – ро дар шакли барои худамон мувофиқ истифода мебарем:

$$E_{n-1}(f) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{2.4.17}$$

Бигузор $s \in [0, r]$, $r \in \mathbb{N}$. Қатори (2.4.5) – ро s маротиба дифференсиронида меёбем:

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(ik)^s c_k(f)e^{ikx}. \tag{2.4.18}$$

Ба ифодаи (2.4.18) баробарии Парсевалро татбиқ намуда, менависем:

$$\left\|f^{(s)}\right\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^{2s}\left|c_k(f)\right|^2. \tag{2.4.19}$$

Аз схемаи исботи леммаи 2.4.1 истифода бурда, бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки

$$E_{n-1}(f^{(s)}) = \left\{2\sum_{|k|\geq n}|k|^{2s}\left|c_k(f)\right|^2\right\}^{1/2} \tag{2.4.20}$$

мебошад. Аз баробарии (2.4.20) дар ҳолати хусусӣ, барои масъалаи наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои $f \in L_2$ бо қатори Фурйеи (2.4.3) аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрии оддии $T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}$ ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) := \inf\left\{\left\|f^{(s)} - T_{n-1}^{(s)}\right\| : \quad T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \left\|f^{(s)} - S_{n-1}^{(s)}(f)\right\| = \left\|f^{(s)} - S_{n-1}\big(f^{(s)}\big)\right\| =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \qquad (2.4.21)$$

Фикр мекунам, ки дар ин параграф аз нуқтаи назари мо ёфтани доимии аниқ

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)} \qquad (2.4.22)$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкини

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big) \le \chi\, n^{-(r-s)} \Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big), \quad s = 0, 1, \ldots, r$$

барои наздиккунии муштараки функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ аҳамияти калон дорад.

Тасдиқоти зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.4.1. *Бигузор $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r \ge s$. Он гоҳ барои ихтиёри ададҳои $t \in (0, \pi/2]$ баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) = \Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)\Big\}^{-m/2}. \qquad (2.4.23)$$

Исбот. Формулаҳои Эйлерро истифода бурда, қатори Фурйеро барои функсияи $f \in L_2$ дар шакли комплексӣ менависем

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx},$$

ки дар ин ҷо $c_k(f)$ ва $c_{-k}(f)$ – ададҳои ҷуфт-ҷуфт ҳамроҳшуда мебошанд. Азбаски функсияҳои $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ дар сегманти $[0, 2\pi]$ системаи ортогоналиро ташкил медиҳанд, он гоҳ баробарии Парсевалро барои фарқи тартиби m-ум (2.2.15)-и функсияи $f(x)$ истифода бурда, навишта метавонем:

$$\left\|\Delta_{\overline{h}}^{m} f^{(r)}\right\|^2 = \left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k(f) \Delta_{\overline{h}}^{m} e^{ikx} \right\|^2 =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \prod_{\nu=1}^{m} \big(1 - \cos kh_\nu\big). \quad (2.4.24)$$

Формулаи (2.4.24) – ро дар тарафи рости баробарии (2.2.1) гузошта, дар асоси (2.4.14) ва бо дарназардошти он ки [66, с. 435]

$$\max\Big\{ \big|\operatorname{sinc} u\big| : \ u \geq n\tau \Big\} = \operatorname{sinc} n\tau \quad (0 < n\tau \leq \pi/2),$$

$$\min\Big\{ \big(1 - \operatorname{sinc} k\tau\big)^m : \ k \geq n \Big\} = \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)^m \quad (0 < nt \leq \pi/2),$$

навишта метавонем:

$$\Omega_m^2\big(f^{(r)}, t\big) \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \big(1 - \operatorname{sinc} k\tau\big)^m =$$

$$= 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} k^{2s} \rho_k^2(f) \big(1 - \operatorname{sinc} k\tau\big)^m \geq$$

$$\geq n^{2(r-s)} \Big\{ 2\big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big) \Big\}^m E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big). \quad (2.4.25)$$

Дар асоси муносибати маълум [54]

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{E_{n-1}\big(f^{(r)}\big)}=\frac{1}{n^{r-s}},\quad s=0,1,\ldots,r\,,$$

аз нобаробарии (2.4.25) барои ихтиёри функсияи $f\in L_2^{(r)}$, $f\neq\mathrm{const}$ ҳосил мекунем:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f^{(r)},t\big)}\leq\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,n\tau\big)\Big\}^{-m/2}.$$

Дар ин ҷо $n\tau=t$ гузошта, бо истифода аз таърифи бузургии $\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t)$ метавон ба он баҳои болоӣ дода шавад:

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t)\leq\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,t\big)\Big\}^{-m/2}.\tag{2.4.26}$$

Бо мақсади аз поён баҳодиҳии бузургии $\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t)$ дар фазои L_2 функсияи $f_0(x)=\cos nx$ – ро дида мебароем. Азбаски барои ин функсия

$$f_0^{(s)}(x)=n^s\cos\left(nx+\frac{s\pi}{2}\right),\quad E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)=n^s$$

ва

$$\Omega_m\big(f_0^{(r)},t/n\big)=n^r\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,t\big)\Big\}^{m/2}$$

мебошанд, он гоҳ ҳосил мекунем:

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t):=\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f^{(r)},t\big)}\geq\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f_0^{(r)},t\big)}=$$

$$=\frac{n^{r-s}\cdot n^s}{n^r\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,t\big)\Big\}^{m/2}}=\Big\{2\big(1-\mathrm{sinc}\,t\big)\Big\}^{-m/2}.\tag{2.4.27}$$

Аз муқоиса намудани ҳудуди болоии (2.4.26) ва ҳудуди поёнии (2.4.27), баробарии (2.4.23) ҳосил мешавад, ки бо он исботи теоремаи 2.4.1 анҷом меёбад.

Аз теоремаи нав исботкардашуда чунин натиҷа мебароянд.

Натиҷаи 2.4.1. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.4.1 барои ҳаргуна қиматҳои* $s = 0, 1, \cdots, r$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}. \tag{2.4.28}$$

Дар ҳақиқат, аз формулаи (2.2.11) барои қимати $t = \dfrac{\pi}{2}$ ҳосил мекунем:

$$\operatorname{sinc}\frac{\pi}{2} = \frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)} = \frac{2}{\pi}.$$

Аз ин ҷо ва аз (2.4.23) навишта метавонем:

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{2\left(1-\operatorname{sinc}\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-m/2} = \left\{2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right\}^{-m/2} =$$

$$= \left\{2\left(\frac{\pi-2}{\pi}\right)\right\}^{-m/2} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}.$$

§ 2.5. Дар бораи як нобаробарии байни наздиккунии муштараки беҳтарин ва модули бефосилагии бо вазни мусбат миёнакардашудаи тартиби m-ум дар фазои L_2

Дар ин параграф мо тадқиқоти худро дар ин самт идома дода, ҳудуди болоии наздиккунии муштараки беҳтарини баъзе синфи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳоро аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо муайян менамоем. Аниқтараш қимати аниқи бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) : \ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\} \tag{2.5.1}$$

– ро барои модули бефосилагии классикии тартиби олӣ ҳисоб мекунем, ки дар ин ҷо $\mathfrak{M}$ ихтиёри маҷмуи синфи функсияҳо аз фазои $L_2^{(r)}$ мебошад.

Барои ҳалли масъалаи (2.5.1) аввал теоремаи зеринро исбот мекунем.

Теоремаи 2.5.1. *Барои ҳаргуна қиматҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ва $r \geq s$ баробарии зерин дуруст аст:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt dt\right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}. \tag{2.5.2}$$

Исбот. Барои ҳар як функсияи ихтиёрии $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии машҳуре мавҷуд аст, ки наздиккунии беҳтарини полиномиалии функсияи f ва ҳосилаҳои тартиби r-уми онро дар фазои L_2 муқоиса мекунад:

$$E_{n-1}(f) \leq n^{-r} E_{n-1}(f^{(r)}). \tag{2.5.3}$$

Бо истифода аз муносибатҳои (2.4.21)

$$E_{n-1}^2(f^{(s)}) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f),$$

ки барои ҳамаи қиматҳои $s = 0, 1, \ldots, r$ дуруст мебошанд, меёбем:

$$E_{n-1}^2(f^{(r)}) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} k^{2s}\rho_k^2(f) \geq$$

$$\geq n^{2(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f) = n^{2(r-s)}\, E_{n-1}(f^{(s)}),$$

аз ин ҷо мебарояд, ки

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq n^{-(r-s)}\, E_{n-1}(f^{(r)}). \tag{2.5.4}$$

Барои исботи баробарии (2.5.2) аз он истифода мебарем, ки барои ҳар гуна функсияи $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин ҷой дорад (нигаред ба [101, с. 126]):

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^{m/2}\, n^r} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt \right)^{m/2}. \tag{2.5.5}$$

Дар нобаробарии (2.5.5) қимати $r = 0$ гузошта, ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t) \sin nt\, dt \right)^{m/2}.$$

Акнун дар нобаробарии ҳосилшуда функсияи f – ро бо ҳосилаи тартиби r-уми он, яъне $f^{(r)}$ иваз мекунем, он гоҳ

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt \right)^{m/2} \tag{2.5.6}$$

мешавад. Бо дарназардошти (2.5.6) ва нобаробарии (2.5.4) навишта метавонем:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}\, n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt \right)^{m/2}. \tag{2.5.7}$$

Азбаски нобаробарии (2.5.7) барои ҳар як функсияи $f \in L_2^{(r)}$ дуруст аст, бинобар ҳамин аз он баҳои болоии бузургии дар тарафи чапи баробарии (2.5.2) қарор доштаро ба даст овардан мумкин аст:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt \right)^{m/2}} \leq \frac{1}{2^{m/2}}. \tag{2.5.8}$$

Барои аз поён баҳодиҳии бузургии додашуда, функсияи

$$f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$$

– ро мавриди баррасӣ қарор медиҳем. Бо ҳисобкуниҳои содда нишон додан мумкин аст, ки барои ин функсия

$$E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big) = n^s, \quad \omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = 2^m n^{2r} (1 - \cos nt)^m,$$

$$\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt = 2\, n^{2r/m} \tag{2.5.9}$$

ва бо истифода аз онҳо менависем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt \right)^{m/2}} \geq$$

$$\geq \frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f_0^{(s)})}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f_0^{(r)},t)\sin nt\,dt\right)^{m/2}} = \frac{n^{r-s}\,n^s}{(2\,n^{2r/m})^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}. \qquad (2.5.10)$$

Баробарии талабкардашудаи (2.5.2) аз муқоисакунии баҳои болоии (2.5.8) ва баҳои поёнии (2.5.10) ба даст оварда мешавад ва бо ҳамин исботи теоремаи 2.5.1 – ро анҷом медиҳем.

Аз теоремаи 2.5.1 натиҷаҳои зеринро гирифтан мумкин аст.

Натиҷаи 2.5.1. *Барои ҳаргуна $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ ва функсияи ихтиёрии $f \in L_2^{(r)}$ нобаробарии зерин ҷой дорад:*

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq 2^{-m/2}n^{-(r-s)}\omega_m(f^{(r)}, \pi/n). \qquad (2.5.11)$$

Исбот. Бо дарназардошти он, ки функсияи $\omega_m(f^{(r)}, t)$ дар порчаи $[0, \pi/n]$ камнашаванда мебошад, аз (2.5.6) ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}n^{r-s}}\left(\omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\sin nt\,dt\right)^{m/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{m/2}n^{r-s}}\,\omega_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)$$

ва аз ин ҷо якбора нобаробарии (2.5.11) мебарояд.

Аммо, агар функсияи $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$ барои ҳаргуна қимати $t \in [0, \pi/(2n)]$ шарти

$$2\,\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big) \geq \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) + \omega_m^{2/m}\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\Big) \qquad (2.5.12)$$

қаноат кунонад, дар ҳолати хусусӣ, агар дар сегменти $[0, \pi/n]$ барҷаста бошад, он гоҳ нобаробарии (2.5.11) – ро аниқ кардан мумкин аст.

Дар ҳақиқат, бо такрори таҳлилҳои дар китоби [43, с.266] овардашуда, нисбат ба интеграли дар қисми рости (2.5.6) қарор дошта, бо истифода аз функсия

$$l(t) = \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)$$

ба ҷои функсияи хаттӣ ҳангоми $t \in [0, \pi/(2n)]$ ва

$$l(t) = 2\,\omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big) - \omega_m^{2/m}\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\Big)$$

ҳангоми $t \in [\pi/(2n), \pi/n]$ тасдиқоти зеринро ҳосил мекунем.

Натиҷаи 2.5.2. *Дар маҷмуи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$, ки барои онҳо функсияи $\omega_m(f^{(r)}, t)$ шарти (2.5.12) – ро қаноат мекунонад, нобаробарии*

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \le 2^{-m/2} n^{-(r-s)}\,\omega_m\big(f^{(r)}, \pi/(2n)\big) \tag{2.5.13}$$

иҷро мегардад, ки барои функсияи $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ ба баробарӣ мубаддал мегардад.

Исбот. Дар ҳақиқат, аз интеграли дар қисми рости нобаробарии (2.5.6) ҳосил мекунем:

$$\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{n}{2}\left\{\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)\sin nt\,dt + \int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big)\sin nt\,dt\right\}. \tag{2.5.14}$$

Дар интеграли дуюми дар қавси фигуравӣ буда, гузориши $t = \dfrac{\pi}{n} - u$ – ро дохил мекунем:

$$\int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) \sin nt\, dt = \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{\pi}{n} - u \;\Rightarrow\; dt = -du \\ x = \pi/(2n) \;\Rightarrow\; u = \pi/(2n), \\ x = \pi/n \;\Rightarrow\; u = 0 \end{array} \right| =$$

$$= - \int\limits_{\pi/(2n)}^{0} \omega_m^{2/m}\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\Big) \sin nt\, dt = \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega_m^{2/m}\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\Big) \sin nt\, dt.$$

Он гоҳ аз баробарии (2.5.14) дар асоси ифодаи охирон ҳангоми иҷро шудани шарти (2.5.12) меёбем:

$$\frac{n}{2} \int\limits_{0}^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin nt\, dt =$$

$$= \frac{n}{2} \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \left\{ \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) + \omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - t\right) \right\} \sin nt\, dt \le$$

$$\le \frac{n}{2} \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} 2\, \omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right) \sin nt\, dt = \omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right). \qquad (2.5.15)$$

Акнун аз нобаробарии (2.5.6) дар асоси (2.5.14) менависем:

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \le 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left(\frac{n}{2} \int\limits_{0}^{\pi/n} \omega_m^{2/m}\big(f^{(r)}, t\big) \sin nt\, dt \right)^{m/2} \le$$

$$\le 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \left(\omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)\right)^{m/2} = 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)$$

ва аз ин ҷо нобаробарии (2.5.13) мебарояд.

Дақиқ будани нобаробарии (2.5.13) барои функсияи $f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)}$ аз баробариҳои (2.5.9) бармеояд, яъне

$$2^{-m/2} n^{-(r-s)} \omega_m\left(f_0^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= 2^{-m/2} n^{-(r-s)} \cdot 2^{m/2}\, n^r \left(1 - \cos n\,\frac{\pi}{2n}\right)^{m/2} = n^s = E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)$$

ва бо ҳамин натиҷаи 2.5.2 пурра исбот шуд.

Натиҷаи 2.5.3. *Ҳангоми иҷро шудани шартҳои натиҷаи 2.5.2 баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))} = \frac{1}{2^{m/2}}. \tag{2.5.16}$$

Исбот. Дар ҳақиқат, аз як тараф аз нобаробарии (2.5.13) мебарояд, ки

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))} \le \frac{1}{2^{m/2}} \tag{2.5.17}$$

ва аз тарафи дигар дар асоси баробарии (2.5.9) навишта метавонем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})}{\omega_m(f^{(r)}, \pi/(2n))} \ge \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f_0^{(s)})}{\omega_m(f_0^{(r)}, \pi/(2n))} = \frac{n^{r-s} \cdot n^s}{2^{m/2} \cdot n^r} = \frac{1}{2^{m/2}}\,. \tag{2.5.18}$$

Баробарии (2.5.16) натиҷаи муқоисакунии нобаробариҳои (2.5.17) ва (2.5.18) мебошад. Натиҷаи 2.5.2 исбот шуд.

§ 2.6. Нобаробариҳое, ки наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ ва модули бефосилагии $\omega(f,t)$ – ро дар фазои L_2 дар бар мегиранд

Дар ин ҷо нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ ва қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ дар нормаи фазои L_2 ёфта шудаанд.

Қайд мекунем, ки $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} \equiv L_2)$ маҷмуи функсияҳои $f \in L_2$, ки барояшон ҳосилаи тартиби $(r-1)$-ум, яъне $f^{(r-1)}$ мутлақ бефосила буда, ҳосилаҳои тартиби r-ум, яъне $f^{(r)} \in L_2$ мебошанд.

Модули бефосилагии ихтиёри функсияи 2π-даврии бо квадрат суммиронидашавандаи $f(x) \in L_2$ – ро бо символи

$$\omega(f,t) = \sup\Big\{\big\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\big\|:\ |t| \le h\Big\} \tag{2.6.1}$$

ишора мекунем, ки дар ин ҷо

$$\big\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\big\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|f(x+t) - f(x)\big|^2 dx\right\}^{1/2}$$

мебошад.

Теоремаи зерин ҷой дорад.

Теоремаи 2.6.1. *Бигузор $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$ бошад. Он гоҳ муносибатҳои зерин ҷой доранд:*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} = \frac{nh}{2\big(nh - \sin nh\big)}, \quad 0 < nh \le \pi/2; \tag{2.6.2}$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \le \pi\,. \quad (2.6.3)$$

Исбот. Баробарии (2.6.2) натиҷаи теоремаи 1 аз кори [66, с. 434] мебошад. Бинобар ҳамин, ба исботи баробарии (2.6.3) мегузарем. Тибқи мулоҳизарониҳои Л.В. Тайков [66], бе маҳдуд кардани умумият, метавонем функсияҳои $f(x)$ – ро баррасӣ намоем, ки ба ҳамаи бисёраъзогиҳои $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$ ортогоналӣ мебошанд:

$$f(x) \sim \sum_{k=n}^{\infty} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big).$$

Он гоҳ барои фарқи тартиби якуми ин функсия

$$\Delta^2(f,h) = \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|^2 =$$

$$= 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)(1-\cos kh) = 2E_{n-1}^2(f) - 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\cos kh$$

мешавад. Баробарии ҳосилшударо нисбат ба h дар фосилаи аз $h = 0$ то $h = t$ интегронида, навишта метавонем:

$$2t\, E_{n-1}^2(f) = 2\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\,\frac{1}{k}\sin kt + \int\limits_0^t \Delta^2(f,h)dh.$$

Ҳар ду тарафи баробарии охиронро ба $2t$ тақсим намуда, бо дарназардошти нобаробарии

$$\Delta^2(f,h) \le \omega^2(f,h)$$

ҳосил мекунем:

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \,\frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t}\int\limits_0^t \omega^2(f,u)du. \tag{2.6.4}$$

Агар фарз кунем, ки функсия $f \in L_2^{(r)}$ бошад, пас аз (2.6.4) бо назардошти нобаробарии

$$\omega^2(f,u) \le n^{-2r}\,\omega^2(f^{(r)},u)$$

чунин натиҷа мегирем:

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\,\frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{n^{2r}}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du. \tag{2.6.5}$$

Агар ҳар ду тарафи нобаробарии (2.6.5) – ро ба t зарб зада, нисбат ба t аз $t=0$ то $t=h$ меинтегронем, он гоҳ чунин нобаробарӣ ба даст меорем:

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\,\frac{1-\cos kh}{k^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2r}}\int\limits_0^h\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)\,dudt. \tag{2.6.6}$$

Ҳар ду тарафи нобаробарии (2.6.7) ба $\dfrac{2}{h^2}$ зарб зада, онро дар намуди

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\,\frac{2(1-\cos kh)}{(kh)^2} + \frac{1}{n^{2r}}\cdot\frac{1}{h^2}\int\limits_0^h\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)},u)\,dudt \tag{2.6.7}$$

менависем. Барои интеграли дар тарафи рости нобаробарии (2.6.7) формулаи интегронӣ аз руи ҳиссаҳоро татбиқ мекунем, он гоҳ

$$\int_0^h \int_0^t \omega^2(f^{(r)},u)dudt = \int_0^h \left(\int_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du\right) dt =$$

$$= t\left(\int_0^t \omega^2(f^{(r)},u)du\right)\Bigg|_{t=0}^{t=h} - \int_0^h t\,\omega^2(f^{(r)},t)dt =$$

$$= h\int_0^h \omega^2(f^{(r)},u)du - \int_0^h t\,\omega^2(f^{(r)},t)dt = \int_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt \qquad (2.6.8)$$

мешавад. Бо истифода аз баробарии (2.6.8), нобаробарии (2.6.7)-ро дар шакли зерин менависем:

$$E_{n-1}^2(f) \le \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f)\left(\frac{2}{kh}\sin\frac{kh}{2}\right)^2 + \\ + \frac{1}{n^{2r}}\cdot\frac{1}{h^2}\int_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)},t)dt. \quad (2.6.9)$$

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки барои қимати $0 < nh \le \pi$ баробарии

$$\max_{u\ge nh}\left(\frac{2}{u}\sin\frac{u}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2$$

ҷой дорад. Бинобар ҳамин, дар асоси ин баробарӣ аз (2.6.9) меёбем:

$$E_{n-1}^2(f) \le \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)}, t)dt =$$

$$= \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2 E_{n-1}^2(f) + \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)}, t)dt,$$

ё ин ки

$$E_{n-1}^2(f) \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\} \le \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)}, t)dt.$$

Нобаробарии ҳосилшударо дар шакли ба мо мувофиқ барои идомаи тадқиқ чунин менависем:

$$E_{n-1}(f) \le$$

$$\le \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2} \frac{1}{n^r} \left\{\frac{1}{h^2} \int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)}, t)dt\right\}^{1/2}. \qquad (2.6.10)$$

Аз нобаробарии (2.6.10) барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2^{(r)}$ ва қимати $0 < nh \le \pi$ баҳои болоии (2.6.3) – ро ҳосил мекунем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left(\dfrac{2}{h^2} \displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}} \le \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \qquad (2.6.11)$$

Азбаски барои функсияи экстремалии қаблан баррасишудаи

$$f_0(x) = \cos nx \in L_2^{(r)},$$

ҳангоми $0 < nt \leq \pi$, бар асоси (2.1.1) ва (2.1.5) баробариҳои зерин иҷро мешаванд:

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \omega^2(f_0^{(r)}, t) = 2n^{2r}(1 - \cos nt),$$

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\,\omega^2(f_0^{(r)}, t)dt = 2n^{2r}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\},$$

пас, бо истифода аз баробарии бадастомада, қимати баҳои поёниро менависем:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}n^r E_{n-1}(f)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}n^r E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f_0^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}n^r}{\sqrt{2}n^r\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{1/2}} = \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \quad (2.6.12)$$

Баробарии талабкардашудаи (2.6.3)-ро ҳангоми муқоисакунии баҳоҳои болоӣ (2.6.11) ва поёнии (2.6.12) ба даст меорем ва бо ҳамин исботи теоремаи 2.6.1 – ро ба поён мерасонем.

БОБИ 3. Ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалӣ ва қимати аниқи n-қутрҳо

Ҳадафи асосии тадқиқот дар ин боб ҳисоб кардани қимати аниқи қутрҳои гуногун барои синфҳои функсияҳои дифференсиронидашаванда, ки аз натиҷаҳои дар боби дуюм гирифташуда бармеоянд, мебошад.

То ба имрӯз дар масъалаи ёфтани қимати аниқи n-қутрҳои синфҳои функсияҳои яктағйирёбандаи ҳақиқӣ як қатор натиҷаҳои ниҳоӣ ба даст овар-да шудаанд (нигаред, масалан, [74]).

Аммо, новобаста аз натиҷаҳои бисёр дар ин самт [6, 15–19, 21–23, 48–50, 67–69, 77–79, 82, 84–89, 107–111], барои функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ бисёре аз масъалаҳои экстремалӣ аз руи самти додашуда то ҳол ҳалли ниҳоии худро наёфтаанд.

Дар боби сеюми диссертатсия ҳадафи асосии мо аз ҳисоб намудани қимати аниқи n-қутрҳо барои баъзе синфҳои функсияҳои дифференсиронидашаванда мебошад, ки тавассути модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ дар фазои L_2 дода шудаанд. Дар асоси баъзе шартҳои маҳдудияте, ки барои баъзе синфи функсияҳои дидабаромадашаванда гузошта мешаванд, имконияти ёфтани қимати аниқи n-қутрҳо ба вуҷуд меояд.

Айни замон барои баҳогузории поёнии n-қутрҳо, усули асосии истифодашаванда ин усули пешниҳоднамудаи В.М. Тихомиров [72] ба ҳисоб меравад.

Қайд кардан зарур аст, ки усуле, ки барои баҳодиҳии болоии n-қутрҳо истифода бурда мешавад, дар замонҳои гуногун аз ҷониби К.И. Бабенко [11], В.М. Тихомиров [72–74], Л.В. Тайков [66–69], С.Б. Вакарчук [15–23], М.Ш. Шабозов [88–90, 93–96, 99, 100] ва бисёр олимони дигар ба кор бурда шудааст.

Акнун мо таърифҳо ва нишонаҳои заруриеро, ки дар идомаи тадқиқот дар диссертатсия истифода хоҳанд шуд, меорем.

Бигузор X — ихтиёри фазои банахӣ бошад, $\mathfrak{M} \subset X$ — ягон синфи функсияҳо бошад ва бигузор $L_n \subset X$ — як зерфазои ченакаш n бошад. Бузургии

$$E_n(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M}, L_n)_X = \sup\Big\{E(f; L_n)_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\inf\Big\{\|f-g\|_X : \ g \in L_n\Big\} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} \quad (3.0.1)$$

– ро наздиккунии беҳтарини синфи $\mathfrak{M}$ аз руи зерфазоҳои L_n – и ченакаш додашудаи n меноманд. Бузургии (3.0.1) тамоили синфи $\mathfrak{M}$-ро аз зерфазои L_n дар метрикаи фазои X тавсиф мекунад.

Агар тавассути $\mathcal{L}(X, L_n)$ маҷмуи ҳамаи операторҳои бефосилаи $A : X \to L_n$, ки аз фазои X ба зерфазои дилхоҳи $L_n \subset X$ бо ченаки n амал мекунанд, ифода намоем, он гоҳ масъалаи зерин ба миён меояд: бузургии

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \in \mathcal{L}(X, L_n)\Big\} \quad (3.0.2)$$

ёфта шуда, оператори $A_* \subset \mathcal{L}(X, L_n)$ нишон дода шавад, ки дорои сарҳади аниқи поёнӣ дар (3.0.2) бошад, яъне

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A_* f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}$$

бошад.

Масъаларо (3.0.2) метавон дар маънои маҳдудтар баррасӣ кард: сарҳади поёниро на аз тамоми маҷмуи операторҳои бефосилаи $\mathcal{L}(X, L_n)$, ки $A : X \to L_n$ мебошанд, ҷустуҷӯ кардан лозим аст, балки танҳо дар як синфи муайяни чунин операторҳо, ки бо тарзи муайян мушаххас мешаванд. Дар ҳолати хусусӣ, метавон дар $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои бефосилаи $A : X \to L_n$ ҷудо карда, бузургии зеринро тадқиқ намуд:

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}(X, L_n)\Big\}. \quad (3.0.3)$$

Агар чунин оператори $A^* : X \to L_n$ мавҷуд бошад, ки дар он сарҳади саҳеҳи поёнӣ дар (3.0.3) доро мешавад, он гоҳ чунин оператор усули наздиккунии беҳтарини хаттиро дар масъалаи (3.0.3) муайян мекунад, яъне

$$\mathcal{E}_n^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M})_X = \sup\Big\{\Big\|f - A^*f\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}.$$

Агар дар дохили $\mathcal{L}(X, L_n)$ синфи операторҳои $\mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)$ ҷудо карда шавад — яъне он операторҳои хаттии проексионӣ ба зерфазои L_n, ки барои ҳар як $f \in L_n$ шарти $Af = f$ иҷро мешавад — одатан бузургии зеринро тадқиқ карда мешавад:

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{M})_X := \mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\Big\|f - Af\Big\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\} : A \subset \mathcal{L}^{\perp}(X, L_n)\Big\}. \quad (3.0.4)$$

Бо бузургиҳои (3.0.1) – (3.0.4) масъалаи ёфтани қимати n-қутрҳо барои синфи функсияҳои гуногуни $\mathfrak{M}$ алоқаманд мебошад.

Акнун таърифҳои n-қутрҳоро ба ёд меорем, ки қиматҳои онҳо барои синфҳои муайяни $\mathfrak{M}$ дар ин боб ҳисоб карда мешаванд.

n-қутри ба маънои А.Н. Колмогорови [73] синфи функсияҳои $\mathfrak{M}$ дар фазои X бузургии

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, L_n)_X : \; L_n \subset X\Big\} \tag{3.0.5}$$

номида мешавад, ки сарҳади поёнӣ аз руи ҳамаи зерфазоҳои ченакаш додашудаи n дар фазои X ҳисоб карда мешавад.

Агар ба наздиккунии беҳтарини хаттӣ $\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X$ такя намоем, он гоҳ бузургии

$$\lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\mathcal{L}}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \; L_n \subset X\Big\} \tag{3.0.6}$$

n-қутри хаттии синфи $\mathfrak{M}$ дар фазои X номида мешавад.

Ба ҳамин монанд, агар бузургии (3.0.4) бар асос гирифта шавад, он гоҳ n-қутри проексионӣ мавриди баррасӣ қарор дода мешавад, яъне

$$\pi_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\mathcal{E}^{\perp}(\mathfrak{M}, L_n)_X : \; L_n \subset X\Big\}. \tag{3.0.7}$$

Инчунин ду бузургии дигар, ки дар назарияи наздиккунии функсияҳо бо номҳои „n-қутри гелфандӣ" ва „n-қутри бернштейнӣ" мавҷуданд.

Бигузор S – кураи воҳидӣ дар фазои X бошад, яъне

$$S = \Big\{x \in X, \; \|x\|_X \leq 1\Big\}.$$

Бузургии

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf\Big\{\inf\Big\{\mathfrak{M} \cap L^n \subset \varepsilon S : \; \varepsilon > 0\Big\} : \; L^n \subset X\Big\}, \tag{3.0.8}$$

ки дар ин ҷо инфимум аз руи ҳамаи зерфазоҳои L^n-и ҳамандозаи n гирифта мешавад, n-қутри гелфандӣ меноманд.

Бузургии

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} : \ \varepsilon > 0\Big\} : \ L_{n+1} \subset X\Big\} \qquad (3.0.9)$$

n-қутри бернштейнӣ номида мешавад.

Агар X — фазои гилбертӣ бошад, он гоҳ байни n-қутрҳои (3.0.5) – (3.0.9) нобаробариҳои зерин иҷро мешаванд [73, 119]:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le d^n(\mathfrak{M}, X) \le d_n(\mathfrak{M}, X) = \lambda_n(\mathfrak{M}, X) = \pi_n(\mathfrak{M}, X). \qquad (3.0.10)$$

Нобаробарии якум $b_n(\mathfrak{M}; X) \le d^n(\mathfrak{M}; X)$ дар (3.0.10) – ро дар монографияи A. Pinkus [119, с. 19] ва нобаробариҳои боқимондаро дар монографияи В.М. Тихомиров [73, с. 239] ёфтан мумкин аст.

Дар идомаи кори диссертатсионӣ ҳангоми ҳисоб кардани қимати n-қутрҳои овардашуда истифода бурдани тасдиқоти зерин, ки аз теорема оид ба қутри кура бармеояд, хеле муфид мебошад [73, с. 239]:

Теорема. *Бигузор $\mathfrak{M}$ — маҷмуи марказӣ-симметрӣ дар фазои L_2 бошад ва $\gamma_n(\mathfrak{M}, X)$ — ихтиёри яке аз n-қутрҳои* (3.0.5) – (3.0.9) *буда,*

$$d_n(\mathfrak{M}, X) \le R$$

бошад. Агар $S_{n+1} = \{x : \ \|x\| \le R\}$, ки ченакаш аз $n + 1$ хурд нест, дар дохили синфи $\mathfrak{M}$ буда, дорои радиуси R бошад, он гоҳ

$$b_n(S_{n+1}, X) \ge R \quad \textit{ва} \quad \gamma_n(\mathfrak{M}, X) = R$$

мешавад.

§ 3.1. Ҳалли масъалаи экстремалии (2.5.1) барои баъзе синфи функсияҳои дифференсиронидашавандаи 2π-даврӣ

Ёфтани қимати аниқи бузургии (2.4.22) дар ҳалли баъзе масъалаҳои экстремалии наздиккунии муштараки беҳтарини синфи функсияҳои бо модули бефосилагӣ додашуда нақши муҳимро мебозад. Бо истифода аз таърифи модули бефосилагии умумикардашуда (2.2.1) синфи зеринро дар фазои L_2 муайян мекунем.

Бигузор $\Phi(t),\ t \geq 0$ — ихтиёри функсияи афзуншаванда буда, барои $t > 0$ $\Phi(t) > 0$ ва $\lim\big\{\Phi(t):\ t \to 0\big\} = \Phi(0) = 0$ бошад. Функсияи $\Phi(t)$ – ро мажоранта меноманд.

Зери $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ (дар ин ҷо $r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N}$) маҷмуи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ фаҳмида мешавад, ки ҳосилаҳои дараҷаи r-уми онҳо $f^{(r)}$ ба маҳдудияти

$$\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big) \leq \Phi(t), \quad \forall t > 0. \tag{3.1.1}$$

итоат мекунанд.

Талаб карда мешавад, ки бузургии наздиккунии муштараки синфи функсияҳои $W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)$ ёфта шавад, аниқтараш, талаб карда мешавад, ки қимати бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\big) = \sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big):\ f \in W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\Big\} \tag{3.1.2}$$

ёфта шавад.

Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 3.1.1. *Бигузор барои қимати* $n \in \mathbb{N}$ *мажорантаи* $\Phi(t)$ *шарти зеринро қаноат кунонад:*

$$\frac{\Phi^2\big(\pi t/(2n)\big)}{\Phi^2\big(\pi/(2n)\big)} \geq$$
$$\geq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \begin{cases} \big(1 - sinc\,(\pi t/2)\big)^m, & \textit{агар} \quad 0 < t \leq 2, \\ 2^m \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^m, & \textit{агар} \quad 2 \leq t < \infty. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

Он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\big) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.1.4}$$

Маҷмуи мажорантаҳои $\{\Phi\}$, *ки шарти* (3.1.3) – *ро қаноат мекунонад, холӣ нест.*

Исбот. Дар ҳақиқат, аз нобаробарии (2.4.25) барои функсияи ихтиёрии $f \in L_2^{(r)}$ навишта метавонем:

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big) \leq \frac{1}{n^{r-s}} \Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)\Big\}^{-m/2} \Omega_m\big(f^{(r)}, t\big). \tag{3.1.5}$$

Дар нобаробарии (3.1.5) қимати $t = \pi/(2n)$ – ро гузошта, бо дар назар доштани он, ки $f \in W^{(r)}\big(\Omega_m, \Phi\big)$ аст, баҳогузории болоии бузургии дар тарафи чапи баробарии (3.1.4) истодаро ҳосил мекунем:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m, \Phi)\big) \leq \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{3.1.6}$$

Бо ҳадафи дарёфти баҳогузории поёнӣ, функсияи муайяни

$$f_1(x) := \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{1}{n^r} \cos nx. \tag{3.1.7}$$

– ро мавриди баррасӣ қарор медиҳем. Барои ин функсия

$$f_1^{(s)}(x) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right), \quad s = 0, 1, \cdots, r$$

мешавад. Ғайр аз ин, бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки

$$E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

аст. Азбаски функсияи $f_1 \in \mathscr{T}_{2n-1}$ ва мажорантаи Φ шартҳои (3.1.3) - ро қаноат мекунонад, он гоҳ функсияи $f_1 \in W^{(r)}\big(\Omega_m, \Phi\big)$ мебошад. Пас мо баҳодиҳии болоии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}\big(\Omega_m, \Phi\big)\big) \geq E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big) = \\ = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \quad (3.1.8)$$

– ро ҳосил мекунем. Аз муқоисакунии нобаробариҳои (3.1.6) ва (3.1.8) баробарии (3.1.4) ба даст меояд.

Акнун нишон медиҳем, ки функсияи $\Phi_1(t) = t^{m/(\pi-2)}$ мажорантае мебошад, ки барои ихтиёри $n \in \mathbb{N}$ шарти (3.1.3) – ро қаноат мекунонад. Дар тарафи чапи (3.1.3) ба ҷои $\Phi_1(t)$ қимати онро гузошта, ҳар ду тарафи ифодаро ҳосилшударо ба дараҷаи $1/m$ бардошта, нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$t^{2/(\pi-2)} \leq \left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m \cdot \begin{cases} \big(1 - \operatorname{sinc}(\pi t/2)\big)^m, & \text{агар} \quad 0 < t \leq 2, \\ 2^m \left(1 - \dfrac{1}{t}\right)^m, & \text{агар} \quad 2 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3.1.9)$$

ки дурустии онҳо бояд исбот карда шавад. Барои ҳамин, ҳангоми $0 < t \leq 2$ фарқи зеринро дида мебароем:

$$t^{2/(\pi-2)} - \frac{\pi}{\pi-2}\big(1 - \operatorname{sinc}(\pi t/2)\big) = \frac{1}{t}\left\{t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(t - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right)\right\}.$$

Функсияи дар қавси фигуравӣ будаи баробарии охирон ғайриманфӣ мебошад. Дар ҳақиқат,

$$\varphi(t) = t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(t - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2}\right)$$

дар атрофи кифоя хурди нулӣ $\varphi(t) < 0$ мебошад. Ва агар $\varphi(t)$ дар интервали $(0,1)$ аломаташро тағйир медод, он гоҳ $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ – ро ба назар гирифта, ҳосилаи он

$$\varphi'(t) = \frac{\pi}{\pi-2}\left(t^{2/(\pi-2)} - 1 + \cos\frac{\pi t}{2}\right)$$

ҳатман дар интервали $(0,1)$ на камтар аз ду сифр медошт. Ғайр аз ин қимати ҳосила дар охирҳои сегмент $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$ мебошанд. Пас ҳосилаи тартиби дуюми функсия

$$\varphi''(t) = \frac{\pi}{\pi-2}\left(\frac{2}{\pi-2}t^{(4-\pi)/(\pi-2)} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)$$

ақаллан дар интервали $(0,1)$ дорои се сифр мебошад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳосилаи тартиби сеюми ин функсия, яъне

$$\varphi'''(t) = \frac{\pi}{\pi-2}\left(\frac{2}{\pi-2}\cdot\frac{4-\pi}{\pi-2}\,t^{(6-2\pi)/(\pi-2)} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi t}{2}\right)$$

низ дар интервали $(0,1)$ дорои се сифр мебошад, ки ин номумкин аст, чунки функсияи $\varphi'''(t)$ фарқи ду функсияҳои барҷаста ва фурӯхамида мебошад.

Агар $1 < t \leq 2$ бошад, он гоҳ аз шартҳои $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$ ва $\varphi''(t) < 0$ мебарояд, ки $\varphi(t) < 0$ мебошад, ки ин иҷрошавии шарти якуми нобаробариро дар (3.1.3) нишон медиҳад.

Дар ҳолати $2 \leq t < \infty$ фарқи

$$t^{2/(\pi-2)} - \frac{2\pi}{\pi-2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\left\{t^{\pi/(\pi-2)} - \frac{2\pi}{\pi-2}\big(t-1\big)\right\}$$

– ро тадқиқ менамоем. Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки ифодаи дар қавси фигуравӣ будаи баробарии охирон функсияи мусбат ва монотони афзуншаванда мебошад. Пас аз ин ҷо мебарояд, ки шарти дуюми нобаробарии (3.1.3) ҳам ҷой дорад. Теоремаи 3.1.1 пурра исбот карда шуд.

Барои пешниҳод намудани натиҷаи дигар аввал синфи функсияҳои зеринро дохил мекунем.

Бигузор барои ихтиёри қиматҳои $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ ва $u \in [0, 2\pi]$

$$W_m^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \ \frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)\sin\frac{\pi}{u}t\,dt \leq \Phi^2(u) \right\}$$

синфи функсияҳо дар $L_2^{(r)}$ бошад. Гузориши

$$\big(1 - \cos nh\big)_* := \begin{cases} 1 - \cos nh, & \text{агар} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ 2, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases}$$

– ро дохил мекунем. Барои ҳаргуна қиматҳои $h \geq 0$ $j \leq n$ нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\big(1 - \cos jh\big) \leq \big(1 - \cos nh\big)_*.$$

Натиҷаи теоремаи 2.5.1 ба мо имконият медиҳад, ки масъалаи экстремалии (2.5.1) – ро ҳангоми $\mathfrak{M}^{(r)} := W_m^{(r)}(\Phi)$ будан, ҳал намоем. Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот шудааст.

Теоремаи 3.1.2. *Бигузор функсияи* Φ *шартҳои*

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}\,dt\le 2\mu\,\Phi^2(u) \tag{3.1.10}$$

– ро барои ҳаргуна $\mu>0$ *ва ихтиёри* $u\in(0,2\pi]$ *қаноат кунонад. Он гоҳ барои қиматҳои* $m,n\in\mathbb{N};\ r,s\in\mathbb{Z}_+;\ r>s$ *баробарии зерин ҷой дорад:*

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_m(\Phi)\big)=2^{-m/2}\,n^{-r+s}\,\Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{3.1.11}$$

Исбот. Барои ихтиёри функсияи $f\in W^{(r)}_m(\Phi)$, бо истифода аз таърифи синфи $W^{(r)}_m(\Phi)$, аз нобаробарии (2.5.7) получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})\le$$

$$\le\frac{1}{2^{m/2}\,n^{r-s}}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)\sin nt\,dt\right)^{m/2}\le 2^{-m/2}\,n^{-r+s}\,\Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{3.1.12}$$

Аз (2.5.12) дар асоси таърифи (2.5.1) якбора баҳои болоии

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_m(\Phi)\big)=\sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big):\ f\in W^{(r)}_m(\Phi)\Big\}\le$$

$$\le 2^{-m/2}\,n^{-r+s}\,\Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{3.1.13}$$

мебарояд. Барои ёфтани баҳои поёнии бузургии дар тарафи чапи баробарии (3.1.11) мавҷуд буда сфераи бисёраъзогиҳои тригонометрии

$$S_{n+1}:=\Big\{T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \big\|T_n\big\|\le 2^{-m/2}\,n^{-r}\,\Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right)\Big\}$$

– ро дохил намуда, аввал нишон медиҳем, ки $S_{n+1}\subset W^{(r)}_m(\Phi)$ аст.

Азбаски барои $T_n \in S_{n+1}$

$$\omega_m^2(T_n^{(r)}, t) = \sup\left\{2^m \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2(T_n)\, k^{2r}\big(1-\cos kt\big)^m : \ |h| \le t\right\} \le$$

$$\le 2^m\, n^{2r}\big(1-\cos nt\big)_*^m \, \big\|T_n\big\|^2 \le \big(1-\cos nt\big)_*^m\, \Phi^{2m}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Нобаробарии ҳосилшударо ба функсияи $\dfrac{\pi}{2u}\sin\dfrac{\pi t}{u}$ зарб зада, дар сегменти $[0,u]$ нисбат ба t меинтегронем, он гоҳ

$$\frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t)\,\sin\frac{\pi t}{u}\,dt \le \left\{\frac{\pi}{2u}\int_0^u \big(1-\cos nt\big)_*\,\sin\frac{\pi t}{u}\,dt\right\}\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

мешавад. Дар тарафи рости нобаробарии охирон гузориши $\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{u}{\mu}$ – ро дохил намуда, онро дар намуди зерин менависем:

$$\frac{\pi}{2u}\int_0^u \omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, t)\,\sin\frac{\pi t}{u}\,dt \le \frac{n}{2\mu}\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int_0^{\mu\pi/n}\big(1-\cos nt\big)_*\,\sin\frac{nt}{\mu}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\mu}\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int_0^{\mu\pi}\big(1-\cos t\big)_*\,\sin\frac{t}{\mu}\,dt \le \Phi^2(u).$$

Пас аз ин ҷо мебарояд, ки $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$ аст.

Акнун функсияи

$$f_1(x) = 2^{-m/2}\, n^{-r}\,\Phi^m(\pi/n)\cos nx$$

– ро дида мебароем. Азбаски барои ин функсия

$$\|f_1\| = 2^{-m/2}\, n^{-r}\,\Phi^m(\pi/n),$$

он гоҳ функсияи $f_1(x) \in S_{n+1}$ мебошад ва бинобар ҳамин $f_1(x) \in W_m^{(r)}(\Phi)$. Бо дарназардошти он, ки барои ҳамаи қиматҳои $s = 0, 1, \ldots, r$ ҳосилаи тартиби s-ум

$$f_1^{(s)}(x) = 2^{-m/2}\, n^{-r+s}\, \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right)$$

ва

$$E_{n-1}(f_1^{(s)}) = 2^{m/2} n^{-r+s} \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

аст, он гоҳ барои баҳодиҳии поёнӣ ҳосил мекунем:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big) \geq E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big) = 2^{m/2} n^{-r+s}\, \Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{3.1.14}$$

Баробарии талабкардашудаи (3.1.11) аз муқоисакунии нобаробариҳои (3.1.13) ва (3.1.14) ба даст меояд.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи

$$\Phi(u) = u^{\alpha/2}, \quad \text{ҳангоми} \quad \alpha = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{будан,}$$

шарти (3.1.10) – ро қаноат мекунонад (ниг., масалан [2]). Теоремаи 3.1.2 пурра исбот шуд.

§ 3.2. Оид ба қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳои $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, $W^{(r)}(\Phi,h)$ ва $W_1^{(r)}(\Phi,h)$

Фарз мекунем, ки $\Phi(t)$ $(t>0)$ — ихтиёри функсияи бефосилаи афзуншаванда бошад, ки барояш $\Phi(0)=0$ мебошад. Бо символи $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ $(m,n\in\mathbb{N};$ $0<p\le 2)$ синфи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем, ки барои ҳамаи қиматҳои $0<t\le 2\pi$ шарти

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p\big(f^{(r)},\tau\big)\,d\tau \le \Phi^p(t) \tag{3.2.1}$$

– ро қаноат мекунонанд.

Бо назардошти корҳои илмии [19, 88, 124, 127], бо t_* бузургии аргументи $t\in(0,\infty)$ функсияи $\operatorname{sinc} t$ – ро ишора мекунем, ки дар он вай қимати минималиии худро доро мешавад. Ошкор аст, ки t_* қимати хурдтарин аз байни решаҳои муодилаи

$$t-\operatorname{tg} t=0 \quad (4{,}49<t_*<4{,}51)$$

мебошад. Инчунини дигар гузориши зеринро дохил мекунем:

$$\big(1-\operatorname{sinc} t\big)_* := \begin{cases} 1-\operatorname{sinc} t, & \text{агар } 0<t\le t_*; \\ 1-\operatorname{sinc} t_* & \text{агар } t\ge t_*. \end{cases}$$

Дар ин ҷо теоремаи зерин исбот карда мешавад.

Теоремаи 3.2.1. *Бигузор $m,n,r\in\mathbb{N}$, $1/r\le p\le 2$ бошанд. Агар барои ҳамаи қиматҳои $0<t\le 2\pi$ мажорантаи Φ шартҳои зеринро қаноат*

кунонад:

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p\big(\pi/n\big)} \geq \frac{\int\limits_0^t \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{mp/2}\, d\tau}{\int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\, d\tau}, \tag{3.2.2}$$

он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\delta_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\big) = \delta_{2n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\big) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\big) =$$

$$= 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{3.2.3}$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ *— яке аз* n*-қутрҳои дар боло овардашуда —* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ *ва ё* $\pi_n(\cdot)$ *мебошад. Дар ин ҳолат, маҷмуи ҳамаи мажорантаҳое, ки шарти (3.2.2) – ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.*

Исбот. Дар формулаи (2.3.14) $\gamma = 0$ ва $h = \dfrac{\pi}{n}$ гузошта меёбем:

$$E_{n-1}(f) \leq 2^{-m/2} n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p}. \tag{3.2.4}$$

Аз нобаробарии охирон бо дарназардошти он, ки синфи функсияҳои $f \in W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ ва ифодаи (3.0.10) баҳодиҳии болоии қимати n-қутрҳоро ҳосил мекунем:

$$\delta_{2n}\big(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\big) \le \delta_{2n-1}\big(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\big) \le E_{n-1}\big(W^{(r)}_{m,p}(\Phi)\big) \le$$

$$\le 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (3.2.5)$$

Барои баҳодиҳии поёнӣ кураи $\mathbb{B}_{2n+1}$ – ро дар зерфазои $\mathscr{T}_n$ – и бисёраъзогиҳои тригонометрии тартибашон аз n калон набуда, яъне

$$\mathbb{B}_{2n+1} :=$$

$$= \left\{ T_n(x) \in \mathscr{T}_{2n-1} : \ \|T_n\| \le 2^{-m/2}\, n^{-r} \left(\int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\, dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \right\}$$

– ро дохил намуда, нишон медиҳем, ки кураи $\mathbb{B}_{2n+1}$ мутааллиқи синфи функсияҳои $W^{(r)}\big(\Omega_m, \Phi\big)$ мебошад.

Барои ихтиёри бисёраъзогии тригонометрии

$$T_n(x) = \frac{a_0(T_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2(T_n) \cos\big(kx + \gamma_k\big)$$

дар асоси таърифи модули бефосилагии (2.2.1) навишта метавонем:

$$\Omega_m^2\big(T_n^{(r)}, \tau\big) = 2^m \sum_{k=1}^{n} k^{2r} \rho_k^2(T_n) \big(1-\operatorname{sinc} k\tau\big)^m. \quad (3.2.6)$$

Қайд кардан зарур аст, ки барои ҳаргуна қиматҳои $0 \le \tau < \infty$ ва $k \le n$ $(k \in \mathbb{N})$, нобаробарии зерин ҷой дорад:

$$\big(1-\operatorname{sinc} k\tau\big)^m \le \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^m.$$

Он гоҳ дар асоси ин нобаробарии охирон аз (3.2.6) меёбем:

$$\Omega_m\big(T_n^{(r)},\tau\big) \le 2^{m/2} n^r \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{m/2} \left\{\sum_{k=1}^{n} \rho_k^2(T_n)\right\}^{1/2} =$$

$$= 2^{m/2} n^r \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{m/2} \big\|T_n\big\|.$$

ё ин ки

$$\Omega_m\big(T_n^{(r)},\tau\big) \le 2^{m/2} n^r \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{m/2} \big\|T_n\big\|. \qquad (3.2.7)$$

Ҳар ду тарафи нобаробарии (3.2.7) – ро ба дараҷаи p, ки $1/r \le p \le 2$ аст, бардошта, нисбат ба тағйирёбандаи τ дар фосилаи аз $\tau = 0$ то $\tau = t$ $(0 < t \le 2\pi)$ меинтегронем, он гоҳ

$$\int_0^t \Omega_m^p\big(T_n^{(r)},\tau\big)\,d\tau \le \big\|T_n\big\|^p\, 2^{mp/2} n^{rp} \int_0^t \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{mp/2} d\tau. \qquad (3.2.8)$$

Бо дарназардошти шарти (3.2.2) барои ихтиёри бисёраъзогии $T_n \in \mathbb{B}_{2n+1}$ аз нобаробарии (3.2.8) ҳосил мекунем:

$$\int_0^t \Omega_m^p\big(T_n^{(r)},\tau\big)\,d\tau \le \frac{\Phi^p\big(\pi/n\big) \displaystyle\int_0^t \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{mp/2} d\tau}{\displaystyle\int_0^t \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2} d\tau} \le \Phi^p(t).$$

Аз ин ҷо, дар асоси шарти (3.2.1), иҷрошавии шарти $\mathbb{B}_{2n+1} \subset W^{(r)}\big(\Omega_m,\Phi\big)$ мебарояд. Ҳамин тариқ, мувофиқи теоремаи В.М. Тихомиров дар бораи n-

қутрҳо [73, с. 239] навишта метавонем:

$$\delta_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \geq b_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\big) \geq b_{2n}\big(\mathbb{B}_{2n+1}, L_2\big) \geq$$

$$\geq 2^{-m/2}\, n^{-r} \left\{ \int\limits_0^{\pi/n} \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\, dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \quad (3.2.9)$$

Аз муқоисакунии баҳодиҳии болоии (3.2.5) ва баҳодиҳии поёнии (3.2.9) баробарии талабкардашудаи (3.2.3) – ро ҳосил мекунем, ки бо ҳамин як қисми теоремаи 3.2.1 исбот карда мешавад.

Акнун нишон медиҳем, ки функсияи $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, ки дар ин ҷо

$$\alpha = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\, d\tau} \quad (3.2.10)$$

мебошад, шарти (3.2.2) – ро барои ихтиёри $n \in \mathbb{N}$ қаноат мекунонад.

Барои идомаи таҳлилҳо, ба мо баҳогузориҳои бузургии α ҳам аз боло ва ҳам аз поён лозим хоҳанд шуд. Аз мулоҳизаҳои геометрӣ маълум аст, ки

$$\operatorname{sinc} \tau > 1 - \frac{\tau}{\pi}$$

барои ҳар як $\tau \in (0, \pi)$ мебошад. Пас, аз баробарии (3.2.10) ҳосил мекунем:

$$\alpha > \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi} \big(\tau/\pi\big)^{mp/2}\, d\tau} = \frac{mp}{2} + 1. \quad (3.2.11)$$

Барои баҳодиҳии болоии бузургии α нобаробарии

$$1 - \operatorname{sinc} \tau > \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2,$$

ки барои ҳар як $\tau \in (0,\pi)$ дуруст мебошад, истифода мебарем. Он гоҳ, аз (3.2.10) меёбем:

$$\alpha < \frac{\pi}{\int\limits_0^\pi (\tau/\pi)^{mp}\,d\tau} = mp + 1. \tag{3.2.12}$$

Шарти (3.2.2), ки барои функсияи Φ_* бояд нишон дода шавад, ба шакли зерин табдил меёбад:

$$\left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha \ge \frac{\int\limits_0^t \left(1-\operatorname{sinc} n\tau\right)_*^{mp/2} d\tau}{\int\limits_0^{\pi/n} \left(1-\operatorname{sinc} n\tau\right)^{mp/2} d\tau}. \tag{3.2.13}$$

Функсияи ёридиҳандаи

$$F(t) := \left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha - \frac{\int\limits_0^t \left(1-\operatorname{sinc} n\tau\right)_*^{mp/2} d\tau}{\int\limits_0^{\pi/n} \left(1-\operatorname{sinc} n\tau\right)^{mp/2} d\tau}$$

– ро дида мебароем, ки онро бо истифода аз формулаи (3.2.10) ба шакли зерин менависем:

$$F(t) = \left(\frac{tn}{\pi}\right)^\alpha - \frac{\alpha n}{\pi}\int\limits_0^t \left(1-\operatorname{sinc} n\tau\right)_*^{mp/2} d\tau. \tag{3.2.14}$$

Нишон медиҳем, ки барои ҳаргуна $0 \le t \le 2$ функсияи $F(t) \ge 0$ мебошад. Ин ба иҷро шудани нобаробарии (3.2.13) эквивалент хоҳад буд. Таҳлилро барои се ҳолат мегузаронем:

а) $0 \le t \le \pi/n$;   б) $\pi/n \le t \le t_*/n$;   в) $t_*/n \le t \le 2\pi$.

Ҳолати а)-ро баррасӣ мекунем. Аз формулаи (3.2.14) ва нобаробарии

$$\sin\tau \geq \tau - \frac{\tau^3}{6} \qquad (\tau \geq 0)$$

истифода бурда, ба натиҷаи зерин мерасем:

$$F(t) \geq \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha} - \frac{\alpha n}{\pi}\int\limits_0^t \left(\frac{n\tau}{6}\right)^{mp} d\tau =$$

$$= \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha\,\pi^{\alpha-1}\,n^{mp+1-\alpha}}{(mp+1)\sqrt{6^{mp}}}\,t^{mp+1-\alpha}\right). \quad (3.2.15)$$

Аз нобаробариҳои (3.2.12) ва (3.2.15) мебарояд, ки ҳангоми $t \to 0+0$ функсияи $F(t)$ қиматҳои мусбатро қабул мекунад. Исбот мекунем, ки $F(t)$ дар интервали $(0,\pi/n)$ аломати худро тағйир намедиҳад. Барои ҳамин, аз баръаксӣ фарз мекунем, ки чунин нуқтаи $\xi \in (0,\pi/n)$ мавҷуд аст, ки ҳангоми гузаштани аргументи t аз он, функсияи $F(t)$ аломати худро иваз мекунад.

Азбаски, тибқи формулаҳои (2.3.17) ва (3.2.14), $F(0) = F(\pi/n) = 0$, пас мувофиқи теоремаи Ролл, ҳосилаи тартиби якум

$$F'(t) = \frac{\alpha n}{\pi}\left\{\left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha-1} - \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\right\} \quad (3.2.16)$$

дар интервали $\big(0,\pi/n\big)$ бояд дорои на кам аз ду нолҳои гуногун бошад. Аз формулаи (3.2.16) мебарояд, ки чунин миқдори нолҳои гуногун дар интервали $\big(0,\pi/n\big)$ ва дар ҳамон нуқтаҳо инчунин функсияи зерин ҳам доро мебошад:

$$G(t) := \left(\frac{tn}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} - 1 + \operatorname{sinc} nt. \quad (3.2.17)$$

Дар асоси ҳудуди шоёни диққати якум барои функсияи $g(t) = \operatorname{sinc} t$ $g(0) = 1$ мегузорем. Дар асоси ин аз ифодаи (3.2.17) ҳосил мекунем: $G(0) =$

$G(\pi/n = 0$. Пас, функсияи G дар порчаи $[0, \pi/n]$ на камтар аз чор решаи гуногун дорад. Азбаски функсияи (3.2.17) – ро дар намуди

$$G(t) = \frac{1}{nt} G_1(t)$$

навиштан мумкин аст, ки дар ин ҷо

$$G_1(t) := \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} \big(tn\big)^{2(\alpha-1)/(mp)+1} - nt + \sin nt \qquad (3.2.18)$$

аст. Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки функсияи $G_1(t)$ низ дар порчаи $[0, \pi/n]$ набояд камтар аз чор решаи гуногун дошта бошад. Аз теоремаи Ролл мебарояд, ки ҳосилаи тартиби якуми функсияи $G_1(t)$, яъне

$$G_1'(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \times$$

$$\times \left(\frac{2\big(\alpha-1\big)}{mp} + 1\right) t^{2(\alpha-1)/(mp)} + n\big(\cos nt - 1\big) \quad (3.2.19)$$

ҳатман бояд дар интервали $(0, \pi/n)$ на камтар аз дар се нуқтаҳои гуногун ба нол баробар шавад. Азбаски $G_1'(0) = 0$ аст, он гоҳ дар асоси андешаҳои боло функсияи

$$G_1''(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} n^{2(\alpha-1)/(mp)+1} \times$$

$$\times \left(\frac{2\big(\alpha-1\big)}{mp} + 1\right) \cdot \frac{2\big(\alpha-1\big)}{mp} t^{2(\alpha-1)/(mp)-1} - n^2 \sin nt \quad (3.2.20)$$

бояд дар интервали $(0, \pi/n)$ на камтар аз се нолҳои гуногун дошта бошад. Дар асоси нобаробариҳои (3.2.11) ва (3.2.20) ҳосил мекунем, ки $G_1''(0) = 0$.

Ин маънои онро дорад, ки функсияи

$$G_1'''(t) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2(\alpha-1)/(mp)} \quad n^{2(\alpha-1)/(mp)+1}\left(\frac{2\big(\alpha-1\big)}{mp}+1\right)\cdot\frac{2\big(\alpha-1\big)}{mp}\times$$

$$\times\left(\frac{2\big(\alpha-1\big)}{mp}-1\right)t^{2(\alpha-1)/(mp)-2} - n^3\cos nt.$$

дар интервали $(0, \pi/n)$ на камтар аз се решаҳои гуногун дорад.

Аз нобаробарии (3.2.12) ва формулаи охирон бармеояд, ки функсияи $G_1'''(t)$ фарқи байни функсияи мусбати фурӯхамидаи дараҷагии камшаванда ва функсияи тригонометрии монотони камшаванда, ки ҳангоми гузаштан аз нуқтаи $\pi/(2n)$ аломати худро аз мусбат ба манфӣ иваз мекунад ва самти хамии он аз барҷаста ба фурӯхамида табдил меёбад. Аз ин бармеояд, ки функсияи $G_1'''(t)$ дар интервали $(0, \pi/n)$ на зиёда аз ду нуқтаи гуногунро дошта метавонад ба нол баробар гардад. Зиддияти бадастомада дурустии нобаробарии (3.2.13) барои $0 \le t \le \pi/n$ нишон медиҳад.

Акнун ҳолати б) – ро дида мебароем. Аз баръаксӣ фарз мекунем, ки функсияи (3.2.14) дар нимсегменти $(\pi/n,\ t_*/n]$ қиматҳои мусбатро қабул мекунад. Бигузор чунин нуқтаи $\eta \in (\pi/n,\ t_*/n]$ мавҷуд бошад, ки ҳангоми гузаштан аз он аргументи t-и функсияи $F(t)$ аломаташро иваз мекунад. Азбаски $F(\pi/n) = 0$ мебошад, он гоҳ дар асоси теоремаи Ролл функсияи $F'(t)$ ва ҳамин тавр функсияи $G_1(t)$, ки ба воситаи формулаи (3.2.18) муайян карда мешавад, дар интервали $(\pi/n,\ t_*/n)$ бояд, ақаллан як нуқтаи нулӣ дошта бошад. Бо дарназардошти он, ки $G_1(\pi/n) = 0$, он гоҳ дар асоси мулоҳизаҳои монанд, ҳосилаи тартиби якуми $G_1'(t)$ инчунин дар интервали $(\pi/n,\ t_*/n)$ бояд на кам аз як нуқтаи нулӣ дошта бошад. Дар асоси формулаи (3.2.19) ва нобаробарии (3.2.11) ҳосилаи $G'_1(t)$ суммаи ду функсияҳои монотони афзуншавандаи фурӯхамида, ки ки якумаш қиматҳои мусбат ва дуюмаш манфиро қабул мекунад. Аз гуфтаҳои боло бармеояд, ки

$$\min\Big\{\,G'_1(t):\ \pi/n\le t\le t_*/n\Big\}=G'_1(\pi/n). \tag{3.2.21}$$

Аз муносибатҳои (3.2.19) ва (3.2.11) мебарояд, ки

$$G'_1(\pi/n)=n\left(\frac{2(\alpha-1)}{mp}-1\right)>0.$$

Пас, мувофиқи формулаи (3.2.19) ҳосилаи функсияи $G'_1(t)>0$ барои ҳаргуна $t\in(\pi/n,\,t_*/n)$ мебошад. Зиддияти ҳосилшуда, дар робита бо он ҳосил шуд, ки функсияи $G'_1(t)$ дар интервали дода шуда бояд ақаллан як нуқтаи нулӣ медошт, дурустии нобаробарии (3.2.13) – ро барои ҳолати б) исбот мекунад.

Ҳоло ҳолати в) – ро дида мебароем. Барои $t_*/n\le t\le 2\pi$ функсияи (3.2.14) намуди зеринро мегирад:

$$F(t)=\left(\frac{tn}{\pi}\right)^{\alpha}-1-\frac{\alpha n}{\pi}\int\limits_{\pi/n}^{t_*/n}\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)^{mp/2}\,d\tau-$$
$$-\frac{\alpha n}{\pi}\big(1-\operatorname{sinc}t_*\big)^{mp/2}\left(t-\frac{t_*}{n}\right).$$

Аз ин ҷо

$$F'(t)=\frac{\alpha n}{\pi}\left\{\left(\frac{nt}{\pi}\right)^{\alpha-1}-\big(1-\operatorname{sinc}t_*\big)^{mp/2}\right\}. \tag{3.2.22}$$

Мувофиқи нобаробарии (3.2.11) функсияи (3.2.22) монотони афзуншаванда мебошад ва

$$\min\Big\{F'(t):\ t_*/n\le t\le 2\pi\Big\}=F'(t_*/n). \tag{3.2.23}$$

Барои фосилаи $\pi \le t \le 2\pi$ нобаробарии

$$\sin t \ge t\left(1-\frac{t}{\pi}\right)$$

ҷой дорад, яъне аз ин ҷо

$$\operatorname{sinc} t \ge 1-\frac{t}{\pi}$$

мебошад. Он гоҳ дар асоси ин нобаробарӣ ва формулаи (3.2.11) навишта метавонем:

$$F'\left(\frac{t_*}{n}\right)=\frac{\alpha n}{\pi}\left\{\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{\alpha-1}-\big(1-\operatorname{sinc} t_*\big)^{mp/2}\right\}>$$

$$>\frac{\alpha n}{\pi}\left\{\left(\frac{t_*}{\pi}\right)^{mp/2}-\big(1-\operatorname{sinc} t_*\big)^{mp/2}\right\}\ge 0.$$

Бо дарназардошти ифодаи (3.2.23), ин маънои онро дорад, ки дар порчаи $[t_*/n, 2\pi]$ функсияи $F(t)$ монотони афзуншаванда мебошад. Азбаски, мувофиқи ҳолати б), $F\big(t_*/n\big)>0$, пас дар маҷмуи нуқтавии мавриди баррасӣ қарор дошта, функсияи $F(t)$ мусбат мебошад, ки ин иҷро шудани нобаробарии (3.2.13) – ро дар ҳолати $t_*/n \le t \le 2\pi$ нишон медиҳад. Теоремаи 3.2.1 пурра исбот карда шуд.

Акнун барои ихтиёри $r\in\mathbb{Z}_+$ ва $h>0$ синфҳои функсияҳои зеринро дохил мекунем:

$$W^{(r)}\big(\Phi,h\big)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega^2\big(f^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/2}\le\Phi(h)\right\};$$

$$W_1^{(r)}\big(\Phi,h\big)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega^2\big(f^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/2}\le\Phi(h)\right\}.$$

Барои синфҳои дохил шуда, теоремаҳои зерин исбот карда шудаанд.

Теоремаи 3.2.2. *Агар мажорантаи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна қиматҳои $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \begin{cases} \dfrac{nh - \sin nh}{nh}, & \text{агар} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ \dfrac{3nh - 2\pi}{nh}, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{3.2.24}$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\lambda_n\big(W^{(r)}(\Phi,h), L_2\big) = E_{n-1}\big(W^{(r)}(\Phi,h), L_2\big) =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}\,, \tag{3.2.25}$$

ки дар ин ҷо $\lambda_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда — $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ ва ё $\pi_n(\cdot)$ мебошад. Маҷмуи ҳамаи функсияҳои мажорантӣ, ки шарти (3.2.24) *– ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.*

Исбот. Аз баробарии (2.6.2) нобаробарии зеринро навишта метавонем:

$$E_{n-1}(f) \leq \left\{\frac{nh}{2\big(nh - \sin nh\big)}\right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)dt\right)^{1/2}.$$

Дар тарафи рости нобаробарии ҳосилшуда қимати $h = \pi/n$ – ро гузошта, бо дар назар гирифтани таърифи синфи $W^{(r)}(\Phi, h)$ ва муносибати (3.0.10) меёбем:

$$\delta_n\big(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\big)\le E_{n-1}\big(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\big)=$$

$$=\sup\Big\{E_{n-1}(f):\ f\in W^{(r)}(\Phi,h)\Big\}\le\left\{\frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\,. \quad (3.2.26)$$

Ҳангоми ёфтани баҳодиҳии поёнӣ, аввал нишон медиҳем, ки барои ҳаргуна $n\in\mathbb{N}$ сфераи $(2n+1)$-ченакаи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ

$$\mathbb{S}_{2n+1}:=\left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \big\|T_n\big\|=\left\{\frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\right\}$$

ба синфи $W^{(r)}(\Phi,h)$ дохил мешавад. Мувофиқи шарти аввали нобаробарии (3.2.24), барои ҳаргуна $0<nh\le\pi$ ва ихтиёри $T_n\in\mathbb{S}_{2n+1}$ ҳосил мекунем:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt\le\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^2 n^{2r}\big\|T_n\big\|^2dt=$$

$$=\frac{2\big(nh-\sin nh\big)}{nh}\cdot n^{2r}\big\|T_n\big\|^2=\frac{\pi}{nh}\cdot\frac{nh-\sin nh}{\pi-2}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\le\Phi(h)\,. \quad (3.2.27)$$

Агар $nh>\pi$ бошад, он гоҳ шарти дуюми нобаробарии (3.2.24) – ро истифода бурда, навишта метавонем:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt\le\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt+\frac{1}{h}\int\limits_{\pi/n}^h\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt\le$$

$$\le\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\left\{1+2\left(1-\frac{\pi}{nh}\right)\right\}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{nh}\cdot\frac{3nh-2\pi}{\pi-2}\,\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\le\Phi(h)\,. \quad (3.2.28)$$

Аз нобаробариҳои (3.2.27) ва (3.2.28) мебарояд, ки $\mathbb{S}_{2n+1} \subset W^{(r)}(\Phi, h)$ мебошад, ки аз ин ҷо мувофиқи теоремаи В.М. Тихомиров [73, с. 239] ва таърифи n-қутри бернштейнӣ менависем:

$$b_{2n-1}\big(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) \geq b_{2n}\big(W^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) \geq$$

$$\geq b_{2n}\big(\mathbb{S}_{2n+1}, L_2\big) = \left\{\frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}, \quad (3.2.29)$$

Ҳудуди болоии (3.2.26) – ро бо ҳудуди поёнии (3.2.29) муқоиса намуда, баробарии зарурии (3.2.25) – ро ба даст меорем.

Қайд мекунем, ки функсияи $\Phi(h) = h^\alpha$, дар ин ҷо $\alpha = \dfrac{2}{\pi-2}$, шарти (3.2.24)-и теоремаи 3.2.2 – ро қаноат мекунонад.

Дар ҳақиқат, аввал иҷрошавии шарти якуми нобаробарии (3.2.24) – ро нишон медиҳем. Бо ин мақсад, $2nh/\pi = \mu$ гузошта, шарти додашударо дар намуди

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\left(\mu - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right), \quad 0 \leq \mu \leq 2 \quad (3.2.30)$$

менависем. Функсияи ёридиҳандаи

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(\mu - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (3.2.31)$$

– ро дида мебароем. Бигузор дар аввал $0 \leq \mu \leq 1$ бошад. Нишон медиҳем, ки дар ин ҳолат барои ҳамаи қиматҳои $\mu \in [0, 1]$ функсияи $\varphi(\mu) \geq 0$ мебошад.

Азбаски, ҳангоми $\varphi(\mu) \to 0+$

$$\varphi(\mu) = \mu^{\alpha+1}\big(1 - O(\mu^{2-\alpha})\big),$$

он гоҳ дар атрофи кифоя хурди нол $\varphi(\mu) > 0$ мешавад. Ва агар дар ягон нуқтаи $\xi \in (0,1)$ функсияи $\varphi(\mu)$ аломаташро иваз мекард, пас бо назардошти $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ҳосилаи

$$\varphi'(\mu) = (\alpha+1)\mu^{\alpha} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(1-\cos\frac{\mu\pi}{2}\right) = (\alpha+1)\left(\mu^{\alpha}+\cos\frac{\mu\pi}{2}-1\right)$$

на кам аз ду нуқтаи нулиро дар интервали $(0,1)$ медошт. Ғайр аз ин, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$, он гоҳ ҳосилаи тартиби дуюми функсия

$$\varphi''(\mu) = (\alpha+1)\left(\alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

ҳатман бояд дар интервали $(0,1)$ ақаллан се нуқтаи нулӣ дошта бошад ва ғайр аз ин $\varphi''(0) = 0$ мешавад. Аз ин ҷо мебарояд, ки ҳосилаи тартиби сеюм

$$\varphi'''(\mu) = (\alpha+1)\left(\alpha(\alpha-1)\mu^{\alpha-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

дар интервали $(0,1)$ дорои се нуқтаи нулӣ мебошад, ки ин ғайриимкон аст, чунки функсияи $\varphi'''(\mu)$ фарқи функсияи фурӯхамида ва барҷаста мебошад.

Агар $1 < \mu \leq 2$ бошад, он гоҳ аз шарти $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$ ва $\varphi''(\mu) > 0$ якбора мебарояд, ки $\varphi(\mu) > 0$ аст.

Агар $\mu > 2$ бошад, он гоҳ аз нобаробарии дуюми шарти (3.2.24) меёбем:

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{2}{\pi-2}\left(\frac{3\pi}{2}-\mu\right) := (\alpha+1)\left(\frac{3\pi}{2}-\mu\right). \qquad (3.2.32)$$

Пас, функсияи ёридиҳандаи

$$\varphi_1(\mu) = \mu^{\alpha+1} - (\alpha+1)\left(\frac{3\pi}{2}-\mu\right)$$

– ро дохил намуда,

$$\varphi_1'(\mu) = (\alpha+1)\mu^{\alpha}\big(\mu^{\alpha}+1\big) > 0$$

– ро ҳосил мекунем. Вале ин маънои онро дорад, ки нобаробарии (3.2.32) барои ҳар як қимати $\mu \in (2,+\infty)$ иҷро мешавад ва ба ҳамин тартиб, теоремаи 3.2.2 пурра исбот мегардад.

Тасдиқоти дигари зерин ҷой дорад.

Теоремаи 3.2.3. *Бигузор мажорантаи* $\Phi(h)$ *барои ҳаргуна қиматҳои* $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ *ва* $r \in \mathbb{Z}_+$ *шарти*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/n\big)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \begin{cases} 1-\left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{агар} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ 1-\dfrac{4}{\pi^2}+2\left(1-\dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{3.2.33}$$

– ро қаноат кунонад. Он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\delta_n\big(W_1^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) = E_{n-1}\big(W_1^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\,, \tag{3.2.34}$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ *— ихтиёри аз* n*-қутрҳои дар боло овардашуда мебошад. Маҷмуи мажорантаҳое, ки шарти* (3.2.33) *– ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.*

Исбот. Барои баҳодиҳии болоии n-қутрҳои дар боло дохил шуда, нобаробариеро, ки аз муносибати (2.6.11) мебарояд, истифода мебарем:

$$E_{n-1}(f) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\left\{\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)},t)\,dt\right\}^{1/2}. \tag{3.2.35}$$

Аз нобаробарии (3.2.35), ҳангоми $h = \pi/n$, бо дарназардошти таърифи синфи $W_1^{(r)}(\Phi, h)$ баҳодиҳии болоии

$$\delta_n\big(W_1^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) \le E_{n-1}\big(W_1^{(r)}(\Phi,h),L_2\big) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r} \quad (3.2.36)$$

– ро ҳосил мекунем. Барои баҳодиҳии поёнӣ сфераи $(2n+1)$-ченакаи

$$\sigma_{2n+1} = \left\{T_n(x)\in\mathcal{T}_{2n+1}:\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\right\}$$

– ро дохил намуда, нишон медиҳем, ки σ_{2n+1} ба синфи функсияҳои $W_1^{(r)}(\Phi,h)$ дохил мебошад. Мутобиқи нобаробарии якуми шарти (3.2.35), ҳангоми $0 < nh \le \pi$ меёбем:

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt \le 2n^{2r}\|T_n\|^2\left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\big(1-\cos nt\big)\,dt\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \Phi(h). \quad (3.2.37)$$

Агар $nh > \pi$ бошад, он гоҳ нобаробарии дуюми шарти (3.2.35) – ро истифода бурда, менависем:

$$\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h (h-t)\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt \le$$

$$\le 2\left(\frac{n}{\pi}\right)^2\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-t\right)\omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt + \frac{2}{h^2}\int\limits_{\pi/n}^h \omega^2\big(T_n^{(r)},t\big)\,dt \le$$

$$\leq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2\cdot\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left(1-\frac{\pi}{nh}\right)^2\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{\pi^2-4}\left\{1-\frac{4}{\pi^2}+2\left(1-\frac{\pi}{nh}\right)^2\right\}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h). \quad (3.2.38)$$

Аз нобаробариҳои (3.2.37) ва (3.2.38) шарти $\sigma_{2n+1} \subset W_1^{(r)}(\Phi, h)$ мебарояд. Пас, аз ин ҷо дар асоси таърифи n-қутри бернштейнӣ ҳосил мекунем:

$$b_{2n-1}\big(W_1^{(r)}(\Phi,h), L_2\big) \geq b_{2n}\big(W_1^{(r)}(\Phi,h), L_2\big) \geq$$

$$\geq b_{2n}\big(\sigma_{2n+1}, L_2\big) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}. \quad (3.2.39)$$

Аз муқоисакунии нобаробариҳои (3.2.36) ва (3.2.39) баробарии талабкардашудаи (3.2.34) – ро ба даст меорем.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи $\Phi(h) = h^\alpha,\ \alpha = \dfrac{8}{\pi^2-4}$ шарти (3.2.33) – ро қаноат мекунонад, ки бо ҳамин теоремаи 3.2.3 пурра исбот мегардад.

Муҳокимаи натиҷаҳои гирифташуда

Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ ин теоремаҳои 2.2.1, 2.4.1, 2.6.1, 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 ва натиҷаҳои аз онҳо гирифташуда, ба монанди 2.3.1, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5 ва ҳоказоҳо мебошанд.

Чи хеле, ки қайд кардем, ёфтани доимиҳои аниқ ва ё ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи аппроксиматсия роли ниҳоят муҳимро мебозанд. Дар ин ҷо ҳар як масъалаи нави ҳалшудаи экстремалӣ ба ягон усули нави ҳалли масъала оварда мерасонад.

Дар кори диссертатсионии масъалаи мазкур дида баромада шуда, ёфтани сарҳади аниқи болии наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳо ва ҳосилаҳои мобайнииии онҳо дар баъзе синфи функсияҳое, ки ба воситаи модули бефосилагии умумикардашуда муайян мегарданд, тадқиқ карда мешавад. Илова бар ин, қимати аниқи наздиккунии муштараки беҳтарини баъзе синфи функсияҳо муайян карда шудааст.

Барои тавсифи характеристикаи суфтагии функсияҳо ҳангоми ҳалли масъалаҳои экстремалӣ дар назарияи наздиккунӣ модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ барои функсияи $f \in L_2$ истифода бурда мешавад, яъне характеристикаи суфтагии намуди

$$\Omega_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2}$$

истифода бурда шавад, ки дар ин ҷо $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \cdots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$; $\Delta_{h_j}^1 f(x) := f(x + h_j) - f(x)$, $j = \overline{1, m}$ мебошад.

Аз ҳамин сабаб, ҳисоб кардани доимии аниқ

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) := \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\neq\text{const}}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)}, \quad 0 < t \leq 2\pi$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкини намуди

$$E_{n-1}(f) \leq \mathbb{K}_{m,n,r}(t)\frac{1}{n^r}\,\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big)$$

таваҷҷуҳи махсусро ба худ ҷалб менамояд.

Барои ҳаргуна қиматҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0, \pi/2]$ С.Б. Вакарчук дар кори [19] исбот кард, ки баробарии

$$\mathbb{K}_{m,n,r}(t) = \left\{2\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)\right\}^{-m/2} \tag{4.0.1}$$

ҷой дорад ва дар ҳолати хусусӣ нишон дод, ки

$$\mathbb{K}_{m,n,r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}. \tag{4.0.2}$$

Бо мақсади умуми намудани натиҷаи дар кори А.А. Лигун [46] овардашуда М.Ш. Шабозов ва Г.А. Юсупов характеристикаи экстремалии зеринро тадқиқ карда буданд [86]:

$$\chi_{m,n,r,p,s}(\varphi, h) =$$

$$= \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(f^{(r)}, t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s} : \quad f \in L_2^{(r)},\ f \neq \text{const}\right\}, \tag{4.0.3}$$

ки дар ин ҷо $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, p, s – ададҳои мусбат, $0 < h \leq \pi/n$ ва функсияи $\varphi(t)$ ҳамаи шартҳои дар нобаробарии дучандаи А.А. Лигун овардашударо қаноат мекунонад. Дар кори [86] дурустии ифодаи

$$\left\{\mathscr{A}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \le \chi_{m,n,r,p,1/p}(\varphi,h) \le \left\{\inf_{n\le k<\infty} \mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1} \qquad (4.0.4)$$

нишон дода шудааст, ки дар ин ҷо $0 < p \le 2;\ 0 < h \le \pi/n$ ва

$$\mathscr{A}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2}\left(k^{rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Барои умумӣ намудани натиҷаи (4.0.4) ба андешаи мо, дар мувофиқа бо ифодаи (4.0.3), омӯзиши характеристикаи экстремалии

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,s}(\varphi,h) :=$$

$$:= \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^s} :\quad f\in L_2^{(r)},\ f\ne \mathrm{const}\right\} \qquad (4.0.5)$$

ба мақсад мувофиқ аст, ки дар ин ҷо ададҳои $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ p,s\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\};\ 0 < h \le \pi/n;\ \varphi(t)$ — функсияи ғайриманфии ченшавандаи дар порчаи $[0,h]$ суммиронидашванда ва ба нол ғайриэквивалент мебошад.

Дар ҳамаи ҳолатҳои минбаъда ҳангоми ҳисоб кардани қимати сарҳади саҳеҳи болоӣ дар муносибатҳои умумӣ барои ҳамаи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ фарз карда мешавад, ки $f\ne\mathrm{const}$ мебошад. Ишораҳои

$$\operatorname{sinc} t := \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{если } t\ne 0,\\ 1, & \text{если } t=0. \end{cases}$$

дохил карда шуда, як навъ теоремаи умумикардашудаи натиҷаи (4.0.5) бо характеристикаи экстремалии (4.0.4) исбот карда мешавад.

Яке аз натиҷаҳои асосии боби дуюми параграфи 1.1 теоремаи 2.2.1 мебошад, ки дар он қайд шудааст, ки барои ҳаргуна қиматҳои $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0p > 0$, $0 < h \leq \pi/n$ ва функсияи ғайриманфии ченшаванда ва дар порчаи $[0, h]$ суммиронидашавандаи ба нол ғайриэквиваленти φ баробарии зерин

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) =$$

$$= \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\inf\limits_{n \leq k < \infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)}, \tag{4.0.6}$$

ҷой дорад, ки дар ин ҷо

$$\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) := 2^{m/2} \left(k^{rp} \int\limits_0^h (1 - \operatorname{sinc} kt)^{mp/2}\, \varphi(t)dt\right)^{1/p}$$

мебошад.

Аз теоремаи 2.2.1 натиҷаи 2.3.1 гирифта шудааст, ки дар он барои ҳаргуна $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ ва ҳангоми иҷро шудани шартҳои теоремаи 2.2.1 дурустии баробарии

$$\mathscr{K}_{m,n,r,p,1/p}(\varphi, h) = \left\{\mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi)\right\}^{-1}. \tag{4.0.7}$$

исбот карда шудааст.

Дар ҳолати хусусӣ, агар дар формулаи (4.0.7) қимати $p = 2$ ва $\varphi(t) \equiv 1$ гузорем, он гоҳ яке аз натиҷаҳои асосии Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. ва

Забутная В.И. – ро, ки дар кори кори [88] оварда шудааст, ҳосил мекунем.

Аз теоремаи 2.2.1 инчунин натиҷаи 2.3.4 ба даст оварда шудааст, ки дар он дурустии формулаи

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^a \Omega_m^p(f^{(r)}, t/n)\, t^{rp-1} q_1(t)dt\right\}^{1/p}} = \left\{\Phi_{m,r,p}(a, t^{rp-1}q_1(t), 1)\right\}^{-1/p}. \tag{4.0.8}$$

исбот карда шудааст. Ҳангоми $p = 2$ натиҷаи 2.3.4 дар кори машҳури А.А. Лигун [46] исбот карда шудааст.

Қайд кардан бамаврид аст, ки дар кори диссертатсионӣ инчунин нишон додани дурустии баробарии

$$\inf_{n\le k<\infty} \mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi) = \mathscr{B}_{n,h,p}^{r,m}(\varphi) \tag{4.0.9}$$

яке аз масъалаҳои асосӣ ба шумор меравад. Барои ифодаи $\mathscr{B}_{k,h,p}^{r,m}(\varphi)$, ки дар матни теоремаи 2.2.1 оварда шуда буд, муайян карда тавонистем, ки функсияи φ бояд барои ҳаргуна қиматҳои $r \in \mathbb{N}$, $1/r \le p \le 2$ ва ихтиёри $t \in (0, h)$ шарти

$$(rp-1)\varphi(t) - t\varphi'(t) \ge 0$$

– ро қаноат кунонад, то ин ки баробарии (4.0.9) иҷро гардад.

Дар параграфи 2.4 масъалаҳои экстремалии марбут ба наздиккунии муштараки беҳтарини функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои пайдарпайи онҳоро аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи фазо $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ дида баромада шудаанд. Дар ин ҷо бояд қайд намуд, ки масъалаи наздиккунии муштараки функсияҳои даврӣ ва ҳосилаҳои онҳо тавассути бисёраъзогиҳои тригонометрӣ дар метрикаи мунтазам бори аввал соли 1960 аз ҷониби А.Л. Гаркави [26, 27] тадқиқ карда шуда буд ва худи ҳамон сол А.Ф. Тиман [70, 71] масъалаи гузоштагшудаоро барои наздиккунии функсияҳое, ки дар тамоми тири ададӣ бо функсияҳои бутуни экспоненсиалӣ муайян карда мешаванд, тадқиқ намуд.

Дар ҳолати умумитар, масъалаи наздиккунии муштараки функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳо ҳам тавассути бисёраъзогиҳои алгебравӣ ва ҳам тригонометрӣ дар монографияи В.Н. Малозёмов [51] мавриди баррасӣ қарор гирифтанд.

Ҳамин тариқ, масъалаи наздиккунии муштараки беҳтарини синфи функсияҳои $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ дар шакли зерин ифода карда мешавад: талаб карда мешавад қимати аниқи бузургии зерин ёфта шавад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) : \ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{4.0.10}$$

Дар ин параграф ёфтани доимии аниқ

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) := \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)}{\Omega_m\big(f^{(r)}, t\big)}$$

дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big) \le \chi\, n^{-(r-s)}\Omega_m\big(f^{(r)}, t/n\big), \quad s = 0, 1, \ldots, r$$

барои наздиккунии муштараки функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ дида баромада шуда, дар теоремаи 2.4.1 доимии аниқ дар нобаробарии намуди Ҷексон–Стечкин барои ҳаргуна ададҳои $n, m \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r \ge s$ ёфта шудааст, яъне барои ихтиёри ададҳои $t \in (0, \pi/2]$ баробарии

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}(t) = \Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)\Big\}^{-m/2}$$

исбот карда шудааст.

Аз теоремаи 2.4.1 барои ҳаргуна қиматҳои $s = 0, 1, \cdots, r$ баробарии зерин

$$\widetilde{\mathscr{K}}_{n,m,r,s}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}\right\}^{m/2} \tag{4.0.11}$$

дар ҳолати хусусӣ исбот карда шудааст. Натиҷаи овардашуда, ҳамчун натиҷаи умумикардашудаи С.Б. Вакарчук [19] барои модули бефосилагии умумикардашудаи тартиби олӣ мебошад.

Дар параграфи 2.5 ҳудуди болоии наздиккунии муштараки беҳтарини баъзе синфи функсияҳо ва ҳосилаҳои онҳоро аз руи бисёраъзогиҳои тригонометрӣ ва ҳосилаҳои мувофиқи онҳо, яъне қимати аниқи бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)}) : \ f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}$$

ҳисоб карда шудааст, ки дар ин ҷо $\mathfrak{M}$ ихтиёри маҷмуи синфи функсияҳо аз фазои $L_2^{(r)}$ мебошад.

Аниқтараш дар теоремаи 2.5.1 барои ҳаргуна қиматҳои $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ва $r \geq s$ баробарии

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin ntdt\right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}$$

исбот карда шудааст.

Дар параграфи 2.6 нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ ва қимати модули бефосилагии классикии миёнакардашудаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ дар нормаи фазои L_2 ёфта шудаанд.

Қайд мекунем, ки $L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} \equiv L_2)$ маҷмуи функсияҳои $f \in L_2$, ки барояшон ҳосилаи тартиби $(r-1)$-ум, яъне $f^{(r-1)}$ мутлақ бефосила буда, ҳосилаҳои тартиби r-ум, яъне $f^{(r)} \in L_2$ мебошанд.

Модули бефосилагии классикии ихтиёри функсияи 2π-даврии бо квадрат суммиронидашавандаи $f(x) \in L_2$ – ро бо символи

$$\omega(f,t) = \sup\Big\{\big\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\big\|:\ |t| \le h\Big\}$$

ишора мекунем, ки дар ин ҷо

$$\big\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\big\| = \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|f(x+t) - f(x)\big\|^2 dx\right\}^{1/2}$$

мебошад. Дар теоремаи 2.6.1 нобаробариҳои аниқ байни наздиккунии беҳтарини полиномиалӣ ва қимати модули бефосилагии классикии миёнакардашудаи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$ дар метрикаи фазои L_2, яъне дурустии баробариҳои

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} = \frac{nh}{2\big(nh - \sin nh\big)}, \quad 0 < nh \le \pi/2;$$

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\,n^r E_{n-1}(f)}{\left\{\dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int\limits_0^h (h-t)\omega^2(f^{(r)},t)dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}, \quad 0 < nh \le \pi$$

барои ҳаргуна қиматҳои $r\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$ нишон дода шудааст.

Дар боби сеюми кори диссертатсионӣ ҳадафи асосии тадқиқот ин ҳисоб кардани қимати аниқи n-қутрҳои гуногун барои синфҳои функсияҳои дифференсиронидашаванда, ки аз натиҷаҳои дар боби дуюм гирифташуда бармеоянд, мебошад.

Айни замон барои баҳогузории қимати поёнии n-қутрҳо, усули асосии истифодашаванда — ин усули пешниҳоднамудаи В.М. Тихомиров [72] ба ҳисоб меравад.

Қайд кардан бамаврид аст усуле, ки барои баҳодиҳии қимати болоии n-қутрҳо истифода бурда мешавад, дар замонҳои гуногун аз ҷониби К.И. Бабенко [11], В.М. Тихомиров [72–74], Л.В. Тайков [66–69], С.Б. Вакарчук [15–23], М.Ш. Шабозов [88–90, 93–96, 99, 100] ва шогирдони онҳо ба кор бурда шудааст.

Бо $\Phi(t),\ t\geq 0$ — ихтиёри функсияи афзуншавандаро ишора мекунем, ки барояш $t>0$ $\Phi(t)>0$ ва $\lim\big\{\Phi(t):\ t\to 0\big\}=\Phi(0)=0$ мебошад. Функсияи $\Phi(t)$ – ро мажоранта меноманд.

Дар ин параграф барои $r\in\mathbb{Z}_+,\ m\in\mathbb{N}$ маҷмуи функсияҳои $f\in L_2^{(r)}$ дохил мекунем, ки ҳосилаҳои дараҷаи r-уми онҳо $f^{(r)}$ ба маҳдудияти

$$\Omega_m\big(f^{(r)},t\big)\leq\Phi(t),\quad \forall t>0.$$

итоат мекунанд. Ин маҷмуро бо $W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)$ ишора намуда, қимати бузургии наздиккунии муштараки беҳтарини онро ҳисоб мекунем, аниқтараш, қимати аниқи бузургии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\big)=\sup\Big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big):\ f\in W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\Big\}$$

– ро меёбем.

Дар ин ҷо теоремаи 3.1.1 исбот карда мешавад. Нишон дода мешавад, ки агар барои қимати $n\in\mathbb{N}$ мажорантаи $\Phi(t)$ шарти

$$\frac{\Phi^2\big(\pi t/(2n)\big)}{\Phi^2\big(\pi/(2n)\big)}\geq$$

$$\geq\left(\frac{\pi}{\pi-2}\right)^m\cdot\begin{cases}\big(1-\mathrm{sinc}\,(\pi t/2)\big)^m, & \text{агар}\quad 0<t\leq 2,\\ 2^m\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^m, & \text{агар}\quad 2\leq t<\infty\end{cases}\tag{4.0.12}$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ баробарии

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Omega_m,\Phi)\big)=\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\tag{4.0.13}$$

ҷой дорад. Маҷмуи мажорантаҳои $\{\Phi\}$, ки шарти (4.0.12) – ро қаноат мекунонад, холӣ намебошад.

Бо осонӣ нишон додан мумкин аст, ки функсияи $\Phi_1(t)=t^{m/(\pi-2)}$ мажорантае мебошад, ки барои ихтиёри $n\in\mathbb{N}$ шарти (4.0.12) – ро қаноат мекунонад.

Барои ихтиёри қиматҳои $m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ ва $u\in[0,2\pi]$ бо

$$W_m^{(r)}(\Phi):=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega_m^{2/m}(f^{(r)},t)\sin\frac{\pi}{u}t\,dt\leq\Phi^2(u)\right\}$$

синфи функсияҳо аз $L_2^{(r)}$ – ро ишора мекунем. Барои овардани натиҷаҳои минбаъда гузориши

$$\big(1-\cos nh\big)_* := \begin{cases} 1-\cos nh, & \text{агар} \quad 0 < nh \le \pi, \\ 2, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases}$$

– ро дохил мекунем.

Натиҷаи теоремаи 2.5.1 ба мо имконият медиҳад, ки масъалаи экстремалии (2.5.1) – ро ҳангоми $\mathfrak{M}^{(r)} := W_m^{(r)}(\Phi)$ будан, ҳал намоем. Ин масъала дар теоремаи 3.1.2 ҳал карда шудааст. Нишон дода шудааст, ки агар функсияи Φ шарти

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos t)_* \sin\frac{t}{\mu}\,dt \le 2\mu\,\Phi^2(u) \tag{4.0.14}$$

– ро барои ҳаргуна $\mu > 0$ ва ихтиёри $u \in (0, 2\pi]$ қаноат кунонад, он гоҳ барои қиматҳои $m, n \in \mathbb{N}$; $r, s \in \mathbb{Z}_+$; $r > s$ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big) = 2^{-m/2}\, n^{-r+s}\,\Phi^m\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Дар ин ҷо маҷмуи функсияҳое, ки шарти (4.0.14) – ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад. Нишон дода мешавад, ки функсияи

$$\Phi(u) = u^{\alpha/2}, \quad \text{ҳангоми} \quad \alpha = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{будан},$$

шарти (4.0.14) – ро қаноат мекунад. Дар ҳолати хусусӣ, аз теоремаи 3.1.2 натиҷаи Н. Айнуллоев [2] мебарояд.

Дар параграфи 2.2 қимати аниқи n-қутрҳои синфи функсияҳои $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$, $W^{(r)}(\Phi, h)$ ва $W_1^{(r)}(\Phi, h)$ ҳисоб карда шудааст.

Барои синфи функсияҳои $f \in L_2^{(r)}$, ки барои ҳамаи қиматҳои $0 < t \le 2\pi$

шарти

$$\int\limits_0^t \Omega_m^p\big(f^{(r)},\tau\big)\,d\tau \le \Phi^p(t)$$

– ро қаноат мекунонанд, дар теоремаи 3.2.1 исбот карда шудааст, ки агар барои ҳамаи қиматҳои $0 < t \le 2\pi$ мажорантаи Φ шарти

$$\frac{\Phi^p(t)}{\Phi^p\big(\pi/n\big)} \ge \frac{\int\limits_0^t \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)_*^{mp/2}\,d\tau}{\int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\,d\tau} \tag{4.0.15}$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ баробарии зерин ҷой дорад:

$$\delta_{2n}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\big) = \delta_{2n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi),L_2\big) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\big) =$$
$$= 2^{-m/2}\,n^{-r}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{mp/2}\,dt\right\}^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Дар ин ҷо $\lambda_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда — $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ ва ё $\pi_n(\cdot)$ мебошад. Маҷмуи ҳамаи мажорантаҳое, ки шарти (4.0.15) – ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад.

Нишон дода мешавад, ки функсияи $\Phi_*(t) = t^{\alpha/p}$, ки дар ин ҷо

$$\alpha = \frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} n\tau\big)^{mp/2}\,d\tau}$$

мебошад, шарти (4.0.15) – ро барои ихтиёри $n\in\mathbb{N}$ қаноат мекунонад.

Барои синфҳои функсияҳои

$$W^{(r)}\big(\Phi,h\big)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\omega^2\big(f^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/2}\leq\Phi(h)\right\},$$

$$W_1^{(r)}\big(\Phi,h\big)=\left\{f\in L_2^{(r)}:\ \left(\frac{2}{h^2}\int\limits_0^h(h-t)\omega^2\big(f^{(r)},t\big)\,dt\right)^{1/2}\leq\Phi(h)\right\},$$

ки дар ин ҷо $r\in\mathbb{Z}_+$ ва $h>0$ мебошанд, натиҷаҳои зерин ба даст оварда шудааст.

Дар теоремаи 3.2.2 нишон дода шудааст, ки агар мажорантаи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна қиматҳои $h\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ шарти

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)}\geq\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\begin{cases}\dfrac{nh-\sin nh}{nh}, & \text{агар}\quad 0<nh\leq\pi,\\ \dfrac{3nh-2\pi}{nh}, & \text{агар}\quad nh>\pi\end{cases}\tag{4.0.16}$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ баробариҳои зерин ҷой доранд:

$$\delta_n\big(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\big)=E_{n-1}\big(W^{(r)}(\Phi,h),L_2\big)=$$

$$=\left\{\frac{\pi}{2\big(\pi-2\big)}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r},$$

ки дар ин ҷо $\delta_n(\cdot)$ — яке аз n-қутрҳои дар боло овардашуда — $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\lambda_n(\cdot)$ ва ё $\pi_n(\cdot)$ мебошад. Нишон дода мешавад, ки функсияи $\Phi(h)=h^\alpha$, дар ин ҷо $\alpha=\dfrac{2}{\pi-2}$ аст, шарти (4.0.16) – ро қаноат мекунонанд.

Дар теоремаи 3.2.3 нишон дода мешавад, ки агар мажорантаи $\Phi(h)$ барои ҳаргуна қиматҳои $h \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ ва $r \in \mathbb{Z}_+$ шарти

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\big(\pi/n\big)} \geq \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{2}{nh}\sin\dfrac{nh}{2}\right)^2, & \text{агар} \quad 0 < nh \leq \pi, \\ 1 - \dfrac{4}{\pi^2} + 2\left(1 - \dfrac{\pi}{nh}\right)^2, & \text{агар} \quad nh > \pi \end{cases} \tag{4.0.17}$$

– ро қаноат кунонад, он гоҳ қиматҳои n-қутрҳои дар боло овардашуда ба қимати наздиккунии беҳтарини синфи функсияҳои $W_1^{(r)}(\Phi, h)$ дар метрикаи фазои L_2 баробар мебошанд, яъне

$$\delta_n\big(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) = E_{n-1}\big(W_1^{(r)}(\Phi, h), L_2\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}\,.$$

Маҷмуи мажорантаҳое, ки шарти (4.0.17) – ро қаноат мекунонанд, холӣ намебошад. Барои иҷрошавии ин шарт функсияи $\Phi(h) = h^\alpha$, ки дар ин ҷо $\alpha = \dfrac{8}{\pi^2-4}$ мебошад, ба сифати мисол оварда мешавад.

Хулоса

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ аз масъалаҳои зерин иборат мебошанд:

- қимати аниқи сарҳадҳои болоии наздиккунии муштараки беҳтарин ва ҳосилаҳои пайдарпайи он тавассути бисёраъзогиҳо ва ҳосилаҳои мутаносиби онҳо барои баъзе синфи функсияҳои даврӣ, ки ба фазои $L_2[0, 2\pi]$ тааллуқ доранд, ёфта шуданд [1-М, 2-М, 5-М, 6-М, 7-М];
- нобаробариҳои нави аниқ байни бузургиҳои наздиккунии миёнаквадратии беҳтарини функсияҳои дифференсиронидашаванда ва интегралҳое, ки қимати модули бефосилагии миёнакардашудаи тартиби m-умро аз қимати сарҳадӣ дар фазои гилбертии $L_2[0, 2\pi]$ дар бар мегиранд, ёфта шуданд [1-М, 2-М, 3-М, 4-М];
- қимати аниқи n-қутрҳои бернштейнӣ, колмогоровӣ, гелфандӣ, хаттӣ ва проексионии синфҳои функсияҳое ёфта шуданд, ки ба воситаи модули бефосилагии тартиби олӣ дода мешаванд [1-М, 4-М, 8-М].

Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Натиҷаҳои дар рисолаи диссертатсионӣ гирифташуда арзиши назариявӣ дошта, имкониятҳои васеъи истифодаи амалиро доранд. Натиҷаҳои илмӣ ва хулосаҳои таҳияшударо метавон барои рушди минбаъдаи назарияи аппроксиматсияи функсияҳо ва дигар масъалаҳои экстремалии назарияи наздиккунӣ татбиқ намуд. Хулосаҳои бадастомада ва формулаҳои исботкардашударо дар самтҳои зерини илмӣ татбиқ намудан мумкин аст:

1) Муайян намудани сарҳади аниқии болоии наздиккунии беҳтарини функсияҳои бисёртағйирёбанда;
2) Ҳар як боби диссертатсия метавонад ҳамчун маводи таълимӣ дар курсҳои махсус барои донишҷӯёни курсҳои болоӣ оид ба самтҳои риёзӣ ва татбиқӣ истифода шавад;

3) Тадқиқи фазоҳои функсионалӣ ва хосиятҳои сохтории онҳо, ки дар онҳо масъалаҳои наздиккунии функсияҳо баррасӣ мегарданд;
4) Муайян намудани суръати наздиккунии функсияҳо ва баҳодиҳии аниқи наздиккуниҳо дар фазоҳои функсионалӣ, ки барои татбиқи усулҳои аппроксиматсионӣ аҳамияти назаррас доранд.

Рӯйхати адабиёт

А) Рӯйхати адабиёти истифодашуда

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т.76. – №6. – С. 803–811.

[2] Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН Тадж.ССР. – 1984. – Т.27. –№8. – С. 415–418.

[3] Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. – 1995. – №8. – С.13-20.

[4] Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука. – 1965. – 406 с.

[5] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. – 1986. – Т.39. – №5. – С. 651-664.

[6] Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки. – 1996. – Т.60. – №3. – С. 333–355.

[7] Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1998. – Т.5. – С. 183-198.

[8] Бабенко А.Г., Черных Н.И., Шевалдин В.Т. Неравенства Джексона–Стечкина в L_2 с тригонометрическим модулем непрерывности // Матем. заметки. – 1999. – Т.65. – №6. – С. 928–932.

[9] Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т.7. – №1. – С. 30–46.

[10] Бабенко А.Г., Долматова Н.В., Крякин Ю.В. Точное неравенство Джексона со специальным модулем непрерывности // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т.18. – №4. – С. 51–67.

[11] Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – Т..22. – №5. – С. 631–640.

[12] Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз. – 1961. – 936 с.

[13] Бердышев В.И. О теореме Джексона в L_p // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1967. – Т.88. – С. 3–16.

[14] Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. – 1952. – Т.II. – С. 371–375.

[15] Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки. – 1999. – Т.66. – №4. – С. 494–499.

[16] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки. – 2001. – Т.70. – №3. – С. 334–345.

[17] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях 2π-периодических функций и точных значениях n-поперечников функциональных классов в пространстве L_2 // Укр. мат. журн. – 2002. – Т.54. – №12. – С. 1603–1615.

[18] Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2004. – Т.56. – №11. – С. 1458–1466.

[19] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – №5. – С. 792–796.

[20] Вакарчук С.Б. Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – №1. – С. 11–19.

[21] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С. 497–514.

[22] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. вестник. – 2014. – Т.11. – №3. – С. 417–441.

[23] Вакарчук С.Б. Обобщенные характеристики гладкости в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2015. – Т.98. – №4. – С. 511–529.

[24] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. – №2. – С. 215–238.

[25] Васильев С.Н. Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$. Теория приближений. Асимптотические разложения // Тр. ИММ УрО РАН. – 2001. – №7. – С. 75–84.

[26] Гаркави А.Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т.24. – №1. – С. 103–128.

[27] Гаркави А.Л. О критерии элемента наилучшего приближения // Сиб. матем. журнал. – 1964. – №5. – С. 472–476.

[28] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука. – 1977. – 511 с.

[29] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина // Матем. заметки. – 1999. – Т.65. – №6. – С. 816–820.

[30] Жук В.В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. – 1967. – Т.201. – С. 263–266.

[31] Жук В.В. О порядке приближения непрерывной периодической функции линейными методами // Изв. вузов. Математика. – 1969. – №10. – С. 40–50.

[32] Жук В.В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. матем. журнал. – 1971. – Т.12. – №6. – С. 1283–1291.

[33] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 ч. – М.: Мир. – 1965. – Т.1. – 616 с.; – Т.2. – 537 с.

[34] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т.18. – №5. – С. 641–658.

[35] Иванов В.И. Об оценке снизу константы в неравенстве Джексона в разных L_p–нормах // Матем. заметки. – 1992. – Т.52. – №3. – С. 48–62.

[36] Иванов В.И. О приближении функций в пространствах L_p // Матем. заметки. – 1994. – Т.56. – №2. – С. 15–40.

[37] Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. — Тула: ТулГУ. – 1995. – 192 с.

[38] Иванов В.И., Чертова Д.В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1, 1]$ со степенным весом // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2008. – Т.14. – №3. – С. 112–126.

[39] Иванов В.И. Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т.16. – №4. – С. 5–17.

[40] Иванов В.И. Точные L_2-неравенства Джексона – Черных – Юдина в теории приближений // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – №3. – С. 19–28.

[41] Корнейчук Н.П. Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С. 514-516.

[42] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения // М.: Наука. – 1976. – 320 с.

[43] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука. – 1978. – 424 с.

[44] Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями // Киев: Наукова думка. – 1982. – 252 с.

[45] Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.14. – №1. – С. 21–30.

[46] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С. 785–792.

[47] Лигун А.А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1980. – Т.27. – №1. – С. 61–75.

[48] Лигун А.А. О наилучшим приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Известия вузов. – 1980. – №4. – С. 53–60.

[49] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.38. – №2. – С. 248–256.

[50] Лигун А.А. Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1988. – Т.43. – №6. – С. 757–769.

[51] Малозёмов В.Н. Совместное приближение функции и её производных. – Л.: Изд-во ЛГУ. – 1973. – 112 с.

[52] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука. – 1974. 3 изд. 480 с.

[53] Никольский С.М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1946. – Т.10. – С. 295-332.

[54] Раимзода Фарахноз. Об одновременном приближении функции и её производных тригонометрическими полиномами в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. – 2020. – №1(178). – С. 29–36.

[55] Руновский К.В. Прямые и обратные теоремы теории приближений в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Докл. РАН. – 1993. – Т.331. – №6. – С. 684–686.

[56] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1994. – Т.185. – №8. – С. 81–102.

[57] Руновский К.В. Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. №6. – С. 899–910.

[58] Руновский К.В. Приближение средними Фурье и обобщенные модули гладкости // Матем. заметки. – 2016. – Т.99. №4. – С. 574–587.

[59] Рыбасенко В.Д., Рыбасенко И.Д. Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики. – М.: Мир. – 1987. 416 с.

[60] Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости. – М.: Мир. – 1988. 328 с.

[61] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН. СССР. Сер. матем. – 1951. – Т.15. – №3. – С. 219–242.

[62] Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами // – Киев: Наука. думка. – 1981.

[63] Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т.98. – №3. – С. 395–415.

[64] Стороженко Э.А., Освальд П. Теоремы Джексона в $L_p(\mathbb{R}^k)$ $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журнал. – 1978. – Т.19. – №4. – С. 888–901.

[65] Тайков Л.В. О наилучших линейных методах приближения функций классов B^r и H^r // Успехи мат. наук. – 1963. – Т.VXIII. – Вып. 4(112). – С. 183–189.

[66] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С. 433–438.

[67] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №2. – С. 285–295.

[68] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №4. – С. 535–542.

[69] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. – №2. – С. 217–223.

[70] Тиман А.Ф. К вопросу об одновременой аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т.24. – №3. С. 421–430.

[71] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз. – 1960. – 624 с.

[72] Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. – 1960. – Т.1. – №3. – С. .81–120.

[73] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ. – 1976. – 325 с.

[74] Тихомиров В.М. Теория приближений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундамент. направления / ВИНИТИ. – 1987. – Т.11. – С. 103–260.

[75] Тухлиев К. О приближении периодических функций в L_2 и значениях поперечников некоторых классов функций // Модел. и анализ информ. систем. – 2015. – Т.22. – №1. – С. 127–143.

[76] Чебышёв П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближённым представлением функций (1859) // Собр. соч., М. – Л., – 1947. Изд-во АН СССР. – Т.II. – С. 151-235.

[77] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С. 513–522.

[78] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Приближение функций в среднем. Сборник работ. Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т.88. – С. 71-74.

[79] Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С. 232–241.

[80] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. – 2000. – Т.68. – №5. – С. 796–800.

[81] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2008. – №4(133). – С. 7–20.

[82] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С. 616–623.

[83] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 // Доклады АН Российской Федерации. – 2010. – Т.435. – №2. С. 178–181.

[84] Шабозов М.Ш. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2010. – №4(141). – С. 7–24.

[85] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т.52. – №6. – С. 1414–1427.

[86] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С. 764–775.

[87] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematics. – 2012. – V.38. – №6. – PP. 147–159.

[88] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // Доклады АН Российской Федерации. – 2013. – Т.451. – №6. С. 625–628.

[89] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки. – 2013. – Т.94. – №6. – С. 908–917.

[90] Шабозов М.Ш., Фарозова А.Д. Точное неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т.2. – №4. – С.311–319.

[91] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Палавонов К.К. Среднеквадратическое приближение периодических функций и значения поперечников классов функций из L_2 // Доклады НАН Таджикистана. – 2018. – Т.61. – №1. С. 12–18.

[92] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Матем. заметки. – 2018. – Т.103. – №4. – С. 617–631.

[93] Шабозов М.Ш. Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Чебышевский сб.

– 2019. – Т.20. – №4. – С. 385–398.

[94] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С. 255–264.

[95] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27. – №4. – С. 239–254.

[96] Шабозов М.Ш. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в L_2 // Матем. заметки. – 2021. – Т.110. – №3. – С. 450–458.

[97] Шабозов М.Ш., Абдулхаминов М.А. Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве L_2 // Известия вузов. Математика. – 2021. – №10. С. 78–91.

[98] Шабозов М.Ш., Палавонов К.К. Неравенства типа Джексона–Стечкина и значение поперечников некоторых классов функций в L_2 // Дальневосточный матем. журнал. – 2022. – Т.22. – №1. С. 125–137.

[99] Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т.29. – №4. – С. 283–291.

[100] Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближение функций в пространстве Бергмана B_2 // Матем. заметки. – 2023. – Т.114. – №3. – С. 435–446.

[101] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр.

матем. журнал. – 1991. – Т.43. – №1. – С. 125–129.

[102] Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // Докл. АН СССР. – 1980. – Т.251, – №1. – С. 54–57.

[103] Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. – 1981. – Т.29. – №2. – С. 309–315.

[104] Юдин В.А. К теоремам Джексона в L_2 // Матем. заметки. – 1987. – Т.41. – №1. – С. 43–47.

[105] Юдин В.А. Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов // Матем. сб. – 1996. – Т.187. – №11. – С. 1721–1736.

[106] Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ и точные значения n-поперечников // ДАН РТ. – 2008. – Т.51. – №11. – С. 803–809.

[107] Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и поперечники классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. – 2009. – Т.52. – №10. – С. 749–758.

[108] Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения и точные значения поперечников некоторых классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ // ДАН РТ. – 2010. – Т.53. – №8. – С. 588–594.

[109] Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значение поперечников множеств в пространстве L_2 // ДАН РТ. – 2011. – Т.54. – №3. – С. 173-180.

[110] Юсупов Г.А. Точные неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники функциональных классов в L_2 // Изв. Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – №2. – С. 124–135.

[111] Юсупов Г.А. Точные значения поперечников некоторых классов функций из L_2 и минимизация констант в неравенствах типа Джексона – Стечкина // Модел. и анализ инф. систем. – 2013. – Т.20. – №5. – С. 106-116.

[112] Юсупов Г.А. О наилучших среднеквадратических приближениях на всей оси целыми функциями экспоненциального типа // ДАН РТ. – 2013. – Т.56. – №3. – С. 192–195.

[113] Achieser N.I. Theory of Approximation. — New York: Dover publications. INC. – 1992. – 319 p.

[114] Arestov V.V., Cernykh N.I. On the L_2-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and function spaces: Proc. Intern. Conf. (Gdansk, 1979). Amsterdam. – 1981. – PP. 25–43.

[115] Favar J. Sur les meilleurs prosedes d'approximation de certains classes de functions par des polynomes trigonometriques // Bull Sci. Math. – 1937. – V.61. – 209-224. – PP.243-256.

[116] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherunger stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Preisschrift und Dissertation. Universitat Göttingen, – 1911.

[117] Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. – 1936. – V.37. – PP.107-110.

[118] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. S. V. F. – 1910. – V.38. – PP.184-210.

[119] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York, Tokyo. – 1985. – 252 p.

[120] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. – 2012. – V.164. – Issue 1. – PP. 869-878.

[121] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D. n-Widths of Certain Function Classes Defined by the Modulus of Continuity // Journ. of Approx. Theory. – 2017. – V.215. – Issue 1. – PP. 145-162.

[122] Trigub R.M., Bellinsky E.S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. — Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers. – 2004.

[123] Vallee-Poussin Ch.J. de la. Sur les polinômes d'approximation à une variable complexe // Bull. Acad Roy Belg. CI. Sc. – 1911. – P.199-211.

[124] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. 2008. V.14, №4. P.411-421.

[125] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206. – №1. – PP. 97–114.

[126] Weierstrass K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reelen Veränderlichen // Der Sitzungsberichte der Königl. Akademie der Wissennschaften. – 1885. – S.633-639, 789-805.

[127] Yusupov G.A. Best polynomial approximations and widths of certain classes of functions in the space L_2 // Eurasian Math. J. – 2013. – V.4. – №3. – PP. 120–126.

Б) Рӯйхати интишороти илмии довталаби дараҷаи илмӣ

1. Мақолаҳое, ки дар маҷаллаҳои тақризшавандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон нашр шудаанд:

[1-М] Шамсиддинов С.А. Наилучшее полиномиальное приближение и поперечники множеств в пространстве L_2 [Матн] / Н.М. Мамадаёзов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №1-2. – С. 26–34.

[2-М] Шамсиддинов С.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции и их последовательных производных в L_2 [Матн] / М.Ш. Шабозов, С.А. Шамсиддинов // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №5-6. – С. 286–293.

2. Дар дигар нашрияҳо:

[3-М] Шамсиддинов С.А. Об одной оптимизационной задаче [Матн] / М. Азизов, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.). – С. 50–51.

[4-М] Шамсиддинов С.А. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 между наилучшим совместным приближением и обобщённым модулем непрерывности [Матн] / С.А. Шамсиддинов, Х.М. Шосафаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы теории чисел и математического анализа», посвящённой 80-летию со дня рождения доктора физ.-мат. наук, профессора Дододжона Исмоилова (г.Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 253-256.

[5-М] Шамсиддинов С.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функции в L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 281–284.

[6-M] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений из L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научно-теоретической конференции «Вклад математики в развитие естественных, точных и математических наук», двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук (2020 – 2040 годы). (Душанбе, 30-31 мая 2023 г.). – С. 332–335.

[7-M] Шамсиддинов С.А. Неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших совместных приближений функций и их производных в L_2 [Матн] / С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной-практической конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», посвященной 35-летию государственной независимости Республики Таджикистан; 30-летию Конституции Республики Таджикистан; «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования» и 70-летию доктора физ.-мат. наук К. Тухлиева (г.Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 111-114.

[8-M] Шамсиддинов С.А. Наилучшее совместное приближение периодических функций, определяемых модулями непрерывности [Матн] / У.Н. Зеваршоев, С.А. Шамсиддинов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения», посвящённой 75-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х. Бойматова и 75-летию доктора физ.-мат. наук, заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А. Джураева НАНТ, профессора Г. Джангибекова (г.Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 354–357.