Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

На правах рукописи

УДК 517.925

Шарифзода Зебонисои Иброхим

МЕТОДЫ КАЧЕСТВЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Нуров И.Дж.

Душанбе - 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение **4**

Общая характеристика работы **7**

Глава 1. Анализ источников по качественному исследованию стационарных и периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений **11**

§ 1.1. Анализ и обзор отыскания периодических решений в нелинейных дифференциальных уравнениях 12

§ 1.2. Методы локального исследования существования периодических решений 16

§ 1.3. Анализ и обзор отыскания стационарных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений 21

Глава 2. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром **25**

§ 2.1. Постановка задачи и формулировка основных результатов 26

§ 2.2. Переход к полярным координатам и необходимое условие существования цикла 27

§ 2.3. Существование периодических решений нелинейной системы, близких к гамильтоновым на цилиндре 30

§ 2.4. Алгебраические преобразования и необходимые условие существования цикла в гамильтоновых системах 32

§ 2.5. Аналитическое представление решений системы, близкой к гамильтоновым 38

§ 2.6. Доказательство основных утверждений 40

§ 2.7. Об одном алгоритме аналитического построения примеров 47

Глава 3. Качественный анализ и устойчивость динамики фотосинтеза в автотрофных системах 53

§ 3.1. Постановка задачи 54

§ 3.2. Определение стационарных решений (особых точек) 56

§ 3.3. Инвариантное множество относительно движения 60

§ 3.4. Линеаризация и особая точка 62

§ 3.5. Устойчивость стационарного решения 65

§ 3.6. Приложения 72

3.6.1. Текст программы 73

Обсуждения полученных результатов 81

Список литературы 88

Введение

Актуальность темы исследования. Один из важных разделов локальной теории дифференциальных уравнений составляют проблемы о рождении циклов, наличия или отсутствия состояний равновесия, устойчивость решений автономных систем при изменении параметров. Исследование данных проблем имеет важное значение, как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и для исследования различных математических моделей в физике, химии, биологии и других науках.

Состояния равновесия и периодические решения развивались по ряду направлений. Упомянем лишь некоторые из больших чисел задач, показавших свою эффективность в теории и практики. К таким числам задач, можно отнести механические [57], электрические [25], физические [29], биологические [50], [77], химические [26], биофизические [81], [82] и биохимические задачи. Следовательно, такое широкое разнообразие применения теории периодических решений вызывает дополнительный интерес к исследованию проблем существования стационарных и периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Особый вклад в развитии теории периодических решений ввели А.Пуанкаре [76], А.М.Ляпунов [49], А.А.Андронов [3], Т.Важевский [98], Н.Н.Боголюбов [19], М.А.Красносельский [41] и их последователи [20], [55], [59], [61], [84], в которых, используя различные методы, найдены условия существования периодических решений систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Отдельно отметим, что широкое распространение, основанное на применении методов качественного анализа, является, исследования поведения решений дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек, которые показали свою эффективность в разные времена в работах А.А.Андронова и его учеников.

Диссертационная работа посвящена методами качественного исследо-

вания стационарных и периодических решений трех систем нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра:

1. Система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu \cdot P(x, y, \mu), \\ \dot{y} = x + \mu \cdot \mathrm{Q}(x, y, \mu), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $P(x, y, \mu)$, $\mathrm{Q}(x, y, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных x, y, μ в области $|\mu| < \mu_0$, $(x, y) \in R^2$.

2. Система уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -\frac{\partial \mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu), \\ \dot{\mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y})}{\partial \varphi} + \mu \cdot \mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu), \end{cases} \tag{2}$$

где функции $\mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y}) \equiv \mathrm{H}(\varphi + 2\pi, \mathrm{y})$, $\mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) \equiv \mathrm{P}(\varphi + 2\pi, \mathrm{y}, \mu)$, $\mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) \equiv \mathrm{Q}(\varphi + 2\pi, \mathrm{y}, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных φ, y, μ в области $|\mu| < \mu_0$ и 2π - периодические относительно φ.

3. Система уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1 bx(1 - y - z) + k_{-1} b(1 - x)y - k_2 bxy + k_{-2} b(1 - x)z + k_0(1 - x), \\ \frac{dy}{dt} = k_1 ax(1 - y - z) - k_{-1} a(1 - x)y - k_2 axy + k_{-2} a(1 - x)z, \\ \frac{dz}{dt} = k_2 axy - k_{-2} az(1 - x) - k_3 z, \end{cases} \tag{3}$$

где $a, b, k_1, k_{-1}, k_2, k_{-2}, k_0, k_3$ – положительные константы.

Исследование нелинейных систем уравнений вида (1)-(3) является интересным с точки зрения применения и развития методов качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложения, в частности, исследования поведения решений дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек часто выдвигает на первый план именно компьютерное моделирование системы. Таким образом, особый интерес вызывает разработка

компьютерных методов, которые могут быть доведены до алгоритмов и программ численного исследования системы (3). Следовательно, для систем уравнений (1)-(3) являются актуальными следующие вопросы:

- исследование существования периодических решений в нелинейной системе вида (1), зависящего от малого параметра;
- анализ существования периодических решений нелинейной системы вида (2), зависящего от малого параметра и удовлетворяющего начально-краевым условиям;
- исследования стационарных и инвариантных решений нелинейной системы вида (3);
- исследования устойчивости состояния равновесия и влияние коэффициентов нелинейной системы вида (3) на разнообразие фазовых портретов.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию указанных вопросов.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Исследованию систем нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра посвящены много работ: в частности, А.Пуанкаре [75], Л.С.Понтрягина [97], В.А.Брусина [21], А.Н.Тихонова [86], А.Д.Морозова [58], и Э.М.Мухамадиева [64], в которых используя различные методы, определены существования периодических решений для разнообразных классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами. Но следует, отметить, что для исследования разрешимости нелинейных систем вида (1) и (2), применен новый метод, в котором сочетаются метод Л.С.Понтрягина [97] из теории автономных систем на плоскости и методы вычисления вращения векторных полей.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информационно-коммуникационных

технологий Таджикского национального университета на 2017-2021 гг. по теме "Качественный и компьютерный анализ нелинейных систем со слабо осциллирующими параметрами".

Общая характеристика работы

Цель исследования. Целью работы является нахождение условий, которые обеспечивают существования периодических и стационарных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений (1), (2) и (3).

Задачи исследования. Для достижения поставленной в работе цели сформулированы следующие задачи:

1. Для нелинейной системы (1) получить новые условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Л.С.Понтрягина на плоскости;

2. Для нелинейной системы (2) получить новые условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Л.С.Понтрягина на цилиндре;

3. Для нелинейной системы (3) получить условия существования стационарных и инвариантных решений;

4. Для нелинейной системы (3) получить условия устойчивости стационарных решений.

Объект исследования. Нелинейные дифференциальные уравнения второго и третьего порядков.

Предмет исследования. Исследование существования периодических и стационарных решений рассматриваемых систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, топологические методы, вращение вполне непрерывных векторных полей, гомотопия векторных полей и методы математического моделирования.

Научная новизна исследований. Все основные результаты являются новыми, чётко сформулированными и математически строго доказанными. При использовании работ других авторов даны соответствующие ссылки. Наиболее существенные научные результаты:

1. Для нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от малого параметра, соответствующего системе уравнений (1) получены условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Л.С.Понтрягина на плоскости;

2. Для нелинейной системы (2), зависящего от малого параметра и близкой к гамильтоновым системам, получены новые условия существования периодических решений, которые обобщают метод малого параметра Л.С.Понтрягина на цилиндре;

3. Для нелинейной системы трёх дифференциальных уравнений (3), зависящей от параметров, получена инвариантная область;

4. Для нелинейной системы (3) найдено стационарное состояние и доказано его устойчивость.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. В работе обоснована схема исследования периодических и стационарных решений нелинейных уравнений второго и третьего порядков. Полученные результаты доведены до расчетных формул. Использованные методы могут быть применены при исследовании нелинейных систем и математических моделей, содержащих малый параметр. Эти результаты также несут практическую ценность, поскольку периодические и стационарные решения дифференциального уравнения широко применимы в различных областях химии, биологии, физики, техники и т.д.

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказательство теорем существования периодических решений-циклов нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от малого параметра, соответствующее системе уравнений (1);

2. Доказательство теорем существования периодических решений нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от малого параметра и

близкой к гамильтоновым системам, соответствующее системе уравнений (2);

3. Доказательство теоремы существования инвариантных решений для нелинейной системы (3);

4. Доказательство теоремы существования единственного стационарного решения и теоремы устойчивости для нелинейной системы (3), зависящей от параметров.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими вкладами и строгими доказательствами, опирающимися на методы качественной теории дифференциальных уравнений, топологические методы и теорию вращения вполне непрерывных векторных полей.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (системы нелинейных дифференциальных уравнений) и пункту области исследования (5. Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений).

Личный вклад автора. Постановка основных задач принадлежит научному руководителю. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из совместных с Э.М.Мухамадиевым и И.Дж.Нуровым пять статей [1-А], [3-А - 6-А] соавторам принадлежит постановка задачи и выбор метода доказательств результатов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на: совместных онлайн семинарах профессоров Нурова И.Дж. и Мухамадиева Э.М. (2016-2021 гг.); международной научной конференции "По теории функций посвящённой 100-летию члена-корреспондента Академии наук СССР Алексея Фёдоровича Леонтьева (Уфа, 24 - 27 мая 2017 г.); материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и её приложения посвященной 70-летию

со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (Душанбе,14-15 марта 2018 г.); международных научных конференциях "Двадцать пятая и двадцать шестая международные конференции, Математика - Компьютер – Образование (Дубна, 29 января, 3 - февраля 2018 г. и Пущино, 28 января - 2 февраля 2019 г.); международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа - 2020" (Уфа, 11-14 ноября 2020 г.); международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений посвященная 70-летию профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020); республиканской научно - практической конференция "Актуальные проблемы точных наук и ИТ" посвященную 30-летию независимости РТ и 25-летию РТСУ (Душанбе, 28 мая 2021 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 14 работах [1-А - 14-А], из них 8 статьей опубликованы в научных журналах и сборниках материалов конференций Российской Федерации, и 6 в научных журналах и сборниках материалов конференций Республики Таджикистан, список которых приведен в конце диссертации. Из 14 работ 7 опубликовано в журналах, входящих в список журналов ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 7 в материалах международных и республиканских научных конференциях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разделенных на параграфы, библиографического списка, содержащего 101 наименований. Общий объем диссертации 98 страниц.

В диссертации использована сквозная тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, где первый номер указывает на номер главы, второй номер на номер параграфа, а третья на номер теорем, лемм, следствий и формул в текущем параграфе.

Глава 1. Анализ источников по качественному исследованию стационарных и периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений

Настоящая глава посвящена анализу изученной литературы по теме диссертационной работы, приводятся теоретико-методологические исследования, анализу существующих проблем и полученных результатов, а также нерешенные задачи по теме диссертации.

Значимое место в общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений занимает качественная теория. Она возникла в конце XIX века, в связи с потребностями механики и астрономии.

Данную теорию составляют задачи изучения решения дифференциального уравнения, исследования свойств интегральных кривых, их расположения, их поведения в окрестностях особых точек, условия ограниченности или замкнутости. Приведенные задачи возникают при математическом моделировании физических, химических, биологических, экономических и других процессов.

Основы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений были заложены А.Пуанкаре [75-76] и разрабатывались Л.И.Мандельштамом [54] и его учениками А.А.Андроновым [3]-[8], Н.И.Баутиным [15], Ю.И.Неймарком [21], [24] и других [10-12], [13], [69], [91].

Следует, отметит, что нахождения периодических решений является одной из центральных проблем качественной теории дифференциальных уравнений. Вопросам существования периодических решений систем дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ, начиная от классических трудов А.Пуанкаре [76] и А.М.Ляпунова [49]. А также существенный вклад в развитие данной теории внесли Л.И.Мандельштам

[54], А.А.Андронов [3-8], И.Г.Малкин [52-53], М.А.Красносельский [41-44], [45], В.А.Плисс [72]. Дальнейшее развитие получили в работах А.А.Бойчука [20], А.Д.Брюно [22], С.А.Гребенникова, Ю.А.Рябова [27] и других математиков [60]-[67], [69].

Нужно отметить, что другая, еще важная задача, основанная на применении методов качественного анализа, является исследование поведения решений дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек, которые показали свою эффективность в разные времена в работах А.А.Андронова [3] и его учеников. Следующим важным направлением является устойчивость полученных решений, которое разрабатывалось А.М.Ляпуновым [49].

Задачами из этой теории, которые рассмотрены в рамках диссертационной работы являются изучение существования периодических решений, наличие или отсутствие состояния равновесия, поведения решений в окрестностях особых точек и устойчивость решений в нелинейных уравнениях, зависящихот малого параметра. Анализ которых приведен в первом, втором и третьим параграфах настоящей главы и там же указаны нерешенные задачи по данной тематике.

§ 1.1. Анализ и обзор отыскания периодических решений в нелинейных дифференциальных уравнениях

Большинство задач из природы имеют колебательный характер. В математической постановке к таким задачам соответствуют циклы и периодические решения.

Характерным примером таких систем, имеющих колебательный характер являются уравнения вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) \tag{1.1.1}$$

в котором μ -малый параметр. Известно, что при $\mu = 0$ уравнение (1.1.1) имеет периодическое решения. Если же $\mu \neq 0$, то возникают некоторые возмущения на правую часть данного уравнения и может быть, что периодических решений не существуют. Следовательно, задача заключается в отыскании условий, при которых уравнения (1.1.1) имеют периодические решения.

Изучение системы вида (1.1.1) берет начало от работ А.Пуанкаре [76] и А.М.Ляпунова [49]. Среди многих работ, посвященных дальнейшему развитию теории малого параметра, достаточно упомянуть известные работы Б.И.Боголюбова [19], Ю.А.Митропольского [56], И.Г.Малкина [51]-[53], А.Н.Тихонова [86], А.Д.Морозова [58] и Э.М.Мухамадиева [64]. Определяющую роль при исследовании уравнений с малым параметром играют линейные части уравнений, свойства которых позволяют изучать вопросы существования периодических решений нелинейных уравнений.

Переход к уравнениям с "существенными" нелинейностями, как правило, требует разработки принципиально новых подходов и методов. Существенный вклад в теорию таких уравнений внесли работы М.А.Красносельского [45] и его учеников, Ю.И.Неймарка [21], [24] В.А.Плисса [72], Ф.Хартмана [90] и других [19], [22], [24], [27], [28], [33], [34], [53], [54], [57], [64-66], [80], [87], [96], [100], [101]. В этих работах разработаны топологические, качественные и приближенные методы исследования различных классов нелинейных уравнений.

Согласно методу А.Пуанкаре решение уравнение (1.1.1) ищется в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots + \mu^n x_n(t) + \cdots.$$

Однако, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим систему рекуррентных соотношений, для каждого из которых требуется использовать методы вариации произвольных постоянных и искать данные решения. Тем не менее, существуют системы в которых применения данного метода не является эффективным. Примером такой системы может быть нелинейная система [1-А, 2-А] вида

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \mu \cdot x \cdot cosx - x, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где μ - малый параметр. Следовательно, приходилось изучать другие альтернативные методы для исследования системы (1.1.2), в частности метод малого параметра Л.С.Понтрягина [15, с.203], [97]. Данный метод, также используется для нахождения циклов в системах, зависящих от малых параметров. В работе Л.С.Понтрягина ведется в рассмотрение нелинейная система вида (1) для случая аналитических функций $P(x, y, \mu)$ и $Q(x, y, \mu)$, вместе со всех входящих в них переменных, которая при $\mu = 0$ обращается в уравнение гармонического осциллятора.

Первая теорема Л.С.Понтрягина [15, с. 203]. *Если для некоторого значения $C = C^*$ выполняются условия*

$$\psi(C^*) = \int_0^{2\pi} [p(C^* \cdot cos\varphi, C^* \cdot sin\varphi, 0)cos\varphi + q(C^* \cdot cos\varphi, C^* \cdot sin\varphi, 0)sin\varphi]d\varphi = 0,$$

$$\psi'(C^*) = \int_0^{2\pi} \left[p'_x(C^*cos\varphi, C^*sin\varphi, 0)cos\varphi + q'_y(C^*cos\varphi, C^*sin\varphi, 0)sin\varphi\right]d\varphi \neq 0,$$

а) для любого μ, $|\mu| < \delta$, система (1) имеет в ε - окрестности кривой $x^2 + y^2 = C^*$ один и только один предельный цикл, причем при $\mu \to 0$ он стягивается к окружности $x^2 + y^2 = C^*$ (являющейся траекторией системы

(1) при $\mu = 0$);

б) этот предельный цикл является грубым предельным циклом, устойчивым, когда $\mu \cdot \psi'(C^*) < 0$, и неустойчивым, когда $\mu \cdot \psi'(C^*) > 0$.

Вторая теорема Л.С.Понтрягина [15, с. 204]. *Пусть A и B – некоторые положительные числа $A < B$. Если уравнение $\psi(C^*) = 0$ имеет в точности s решений $C = C_i$, $A < C_i < B$ $(i = 1,2,3, \dots, s)$, причем каждое из этих решений удовлетворяет условию $\psi(C^*) \neq 0$, то при достаточно малым μ система (1) имеет в кольце $A < x^2 + y^2 < B$ в точности s*

предельных циклов. Каждый из этих предельных циклов стремится при $\mu \to \infty$ *соответственно к кривой*

$$x^2 + y^2 = C_i,\ i = 1,2,3,\dots,s.$$

Достаточным условием существования периодических решений в системе (1) по методу Л.С.Понтрягина является то, что существует такое значение C^*, что $\psi(C^*) \neq 0$. Однако существуют системы, для которых условия $\psi(C^*) \neq 0$ (условия дифференцируемости) не выполняется. Следовательно, остается открытым вопрос о изучении существования периодических решений системы (1) для случая непрерывности функций $P(x, y, \mu)$ и $Q(x, y, \mu)$.

Во второй главе данной диссертационной работе доказана, существование периодических решений системы (1) при условии непрерывности $P(x, y, \mu)$ и $Q(x, y, \mu)$, и в отличие от работы Л.С.Понтрягина не требуется дифференцируемость функции $\psi(C^*)$.

Другим объектом исследования является существование периодических решений в нелинейной системе (2). При $\mu = 0$, получаем гамильтонову систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}}, \\ \dot{\mathrm{y}} = \dfrac{\partial \mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y})}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

решение которой сводится к решению функции $\mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y}) = \mathrm{C}$.

Данная система также исследована Л.С.Понтрягином для случая аналитических функций $p(\varphi, y, \mu)$ и $q(\varphi, y, \mu)$:

Третья теорема Л.С.Понтрягина [15, с.215]. *Для того чтобы у системы (2) существовал предельный цикл, рождающийся из кривой* $y = f(\varphi, C_0)$ *необходимо, чтобы*

$$I(C_0) = \int_0^{2\pi} \left[q(\varphi, f(\varphi, C_0), 0) - p(\varphi, f(\varphi, C_0), 0) \cdot f'_\varphi(\varphi, C_0)\right] d\varphi = 0,$$

и достаточно, чтобы при условии $I(C_0) = 0$ *выполнялось*

$$I_1(C_0) = \int_0^{2\pi} \frac{p'_\varphi(\varphi, f(\varphi, C_0), 0) + q'_y(\varphi, f(\varphi, C_0), 0)}{-H'_y(\varphi, f(\varphi, C_0))} d\varphi \neq 0.$$

Если $I(C_0) = 0$ *и* $I_1(C_0) \neq 0$, *то рождающийся цикл единственный и притом устойчивый, если* $\mu I_1(C_0) < 0$, $H'_y\big(\varphi, f(\varphi, C_0)\big) > 0$ *или* $\mu I_1(C_0) > 0$, $H'_y\big(\varphi, f(\varphi, C_0)\big) < 0$, *и неустойчивый, если* $\mu I_1(C_0) > 0$, $H'_y\big(\varphi, f(\varphi, C_0)\big) > 0$ *или* $\mu I_1(C_0) < 0$, $H'_y\big(\varphi, f(\varphi, C_0)\big) < 0$.

В параграфе 2.3 второй главе данной работы доказана, существование периодических решений системы (2) при условии непрерывности $P(\varphi, y, \mu)$ и $Q(\varphi, y, \mu)$, и в отличие от работы Л.С.Понтрягина не требуется дифференцируемость функции $I_1(C_0)$.

Для доказательства основных утверждений, полученных во второй главе диссертационной работы, используется топологические методы, в частности аппарат вращения векторных полей.

Топологические методы функционального анализа, применяемые к дифференциальным уравнениям, восходят к именам Л.Брауэра, Г.Хопфа, Ж.Лере, Ю.Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты в работах М.А.Красносельского, Н.А.Бобылева, П.П.Забрейко, А.И.Перова, А.И.Поволоцкого, Ю.И.Сапронова, Э.М.Мухамадиева и других ученых.

Приведем нужные сведения из этой теории опираясь на работы М.А.Красносельского [41], Ж.Лере [47], Р.О.Азизова [2] и Дж.Ахмедова [14] в следующем параграфе данной диссертационной работы.

§ 1.2. Методы локального исследования существования периодических решений

Основным аппаратом исследования существования периодических решений в работах М.А.Красносельского и его последователей является

фундаментальный принцип, развитый Ж.Лере и Ю.Шаудером [47], которого будем использовать, при доказательстве полученных основных утверждений во второй главе данной диссертационной работы. Следовательно, сформируем этот принцип в общем виде.

Прежде всего, напомним некоторые определения и понятия (см., например, [42]).

Пусть E - вещественное банахово пространство и $\Omega \subset E$ ограниченная область. Пусть на замыкании Ω области $\overline{\Omega}$ определен действующий в E вполне непрерывный оператор A, причем $Ax \neq x$ для любого $x \in \dot{\Omega}$; здесь $\dot{\Omega}$ - граница области Ω. Тогда определена целочисленная характеристика $\Upsilon(I - A, \dot{\Omega})$, которая называется вращением вполне непрерывного векторного поля $\Phi x = x - Ax$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω.

Во многих случаях, как будет выяснено ниже, точное значение вращения и способы его определения для нас не играет особой роли. В дальнейшем важны лишь некоторые указываемые ниже свойства вращения. Но так как в этой главе при доказательстве основных утверждений вращение определяется в промежутке, следовательно, ниже приведем нужные сведения об определении вращения в одномерном пространстве.

Два невырожденных на $\dot{\Omega}$ вполне непрерывных векторных полей $\Phi_0 x = x - A_0 x,\ \ x \in \dot{\Omega},\ \ \Phi_1 x = x - A_1 x,\ \ x \in \dot{\Omega}$, называют гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует семейство невырожденных на $\dot{\Omega}$ векторных полей

$$\Phi(\lambda, x) = x - A(\lambda, x),\ \ x \in \dot{\Omega},\ \lambda \in [0,1],$$

такое, что оператор $A(\lambda, x)$ вполне непрерывен по совокупности переменных λ и x, при этом $\Phi(0, x) = \Phi_0 x,\ \ \Phi(1, x) = \Phi_1 x$.

Отношение гомотопии векторных полей обладает следующими свойствами [45, с.16]:

Свойство 1.2.1. Если Φ_0 и Φ_1 гомотопны на $\dot{\Omega}$ то

$$\Upsilon\left(\Phi_0, \dot{\Omega}\right) = \Upsilon\left(\Phi_1, \dot{\Omega}\right).$$

Свойство 1.2.1. позволяет сводить вычисление вращения сложных векторных полей к вычислению более простых полей.

Свойство 1.2.2. Если образ $A\overline{\Omega}$ области $\overline{\Omega}$ лежит в подпространстве $E_0 \subset E$ и $\Omega \cap E_0 \neq 0$, то определено поле $\Psi x = x - Ax$ на границе $\dot{\Omega}_0$ области $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$ со значением на E_0. Пусть $\Omega_0 \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\Upsilon(\Phi, \dot{\Omega}) = \Upsilon(\Psi, \dot{\Omega}_0).$$

Свойство 1.2.3. Если вполне непрерывное векторное поле $\Phi x = x - Ax$ не вырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω и непрерывно на ее замыкании $\overline{\Omega}$ и $\Upsilon(\Phi, \dot{\Omega}) \neq 0$. Тогда поле Φ имеет в области Ω по крайне мере одну особую точку.

Из свойства 1.2.3 вытекает, что каждый признак отличия от нуля вращения поля Φ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω является признаком существования у уравнения $\Phi x = 0$ по крайней мере одного решения в области Ω.

Далее, приведем принцип Лере-Шаудера. Рассмотрим уравнение

$$Ax = x, \quad x \in E, \tag{1.2.1}$$

где A - вполне непрерывный оператор, действующий в E. Из свойства 1.2.1 и 1.2.2 следует следующее утверждение

Теорема [42]. *Пусть оператор* $A(x, \lambda)$ $(x \in E,\ 0 \leq \lambda \leq 1)$ *вполне непрерывен по совокупности переменных и* $A(x, 0) = Ax$. *Пусть для всех решений* x *всех уравнений*

$$x = A(x, \lambda), \ \ 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{1.2.2}$$

справедлива общая априорная оценка $\|x\| = R_0$. *Пусть, наконец, векторное поле* $x = A(x, 1)$ *имеет ненулевое вращение на сфере* $\|x\| = R_1$, *где* $R_1 > R_0$. *Тогда уравнение* (1.2.1) *имеет по крайней мере одно решение.*

Эффективность принципа Лере-Шаудера, заключается в том, что для доказательства разрешимости уравнения (1.2.1) строится вспомогательное семейство уравнений (1.2.2), которое при $\lambda = 1$ таково, что разрешимость уравнения $x = A(x, 1)$ либо совершенно явно, либо известна априорно.

Использование принципа Лере-Шаудера в задачах о существовании периодических решений уравнений вида (1) и (2) требует, в первую очередь, построения вполне непрерывного оператора A, неподвижные точки которого определяют периодические решения уравнений (1) и (2). Такие операторы могут быть построены различными способами (см., например, [41], [42]). Ниже при доказательстве утверждений во второй главе данной диссертационной работы указывается один из таких способов. Далее, рассмотрим вращение векторных полей в одномерном пространстве [45, с.17]. Связная область Ω в одномерном пространстве R это промежуток; ее границей $\dot{\Omega}$ поля распадаются на четыре гомотопических класса. Один из гомотопических классов образуют поля, векторы которых на каждом конце промежутка направлены во внешнюю от промежутка сторону; по определению вращение таких полей равно 1. Второй и третий гомотопические классы состоят из полей, векторы которых на обоих концах промежутка направлены одинаково; вращение таких полей полагается равным нулю. Четвертый гомотопический класс состоит из полей, векторы которых на обеих концах промежутка направлены внутрь этого промежутка; вращение таких полей полагается равным -1.

Другой подход к исследованию существования периодических решений в данной работе, является использование теоремы Арцела [39].

Следует отметит, что определение о равностепенной непрерывности было сделано одновременно Джулио Асколи (1883—1884) и Чезаре Арцела (1882—1883). Слабая форма теоремы была доказана Асколи в 1883—1884 г.г., который установил достаточное условия компактности, и Арцелой в 1895, который привёл необходимое условие и дал первую четкую интерпретацию результата.

Теорема Арцела [39]. *Если множество Ω числовых функций равномерно ограниченна и равностепенно непрерывно, то из любой последовательности функций этого множества можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящую к некоторой функции.*

Равномерная ограниченность [35], [38], [39], [41], [48], [83] означает, что $\exists M > 0,\ |f_n(x)| < M$.

Семейство функций $f_n(x)$ называется равностепенно непрерывно, если $\forall \mathcal{E} > 0,\ \exists \delta > 0$, что при любых x_1, x_2: $|x_1 - x_2| < \delta$ неравенства $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ выполняются для всех функций $f_n(x)$.

Названная теорема в основном применяется при предельном переходе и установление ограниченности в нелинейных системах зависящего от скалярного параметра.

Нелинейные системы зависящих от малых параметров исследовались и другими авторами, в частности А.Н.Тихоновым [86] показаны применения метода малого параметра. Например, в задачах химической кинетики, где в качестве малого параметра присутствует масса катализатора. В работе А.Д.Морозова [58] для изучения подобных систем используются методы компьютерного моделирования.

Несмотря на то, что изучению периодических решений систем дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ, многообразие конкретных систем и значительная сложность проблемы не позволяют пока найти общего подхода к ее решению. Так, мало изученным является вопрос о существовании периодических решений в нелинейных системах, зависящих от малого параметра.

Таким образом, задача определения условий существования стационарных и периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений в данной диссертационной работы представляется весьма актуальной.

§ 1.3. Анализ и обзор отыскания стационарных решений систем нелинейных дифференциальных уравнений

Большой интерес представляют изучения стационарных решений нелинейных дифференциальных уравнений и их поведения в окрестностях особых точек, когда линеаризованное уравнение являются вырожденным и дополнительно, если они содержат различные параметры.

При изучении поведения решений дифференциальных уравнений в окрестностях особых точек широкое распространение получил подход, основанный на применении методов функционального анализа, алгебры и геометрии. Данный подход показал свою эффективность в работах В.И.Арнольда [10]-[13], П.П.Забрейко, М.А.Красносенльского [32], Э.М.Мухамадиева [62], [63] и многих других математиков.

Система называется автономной, если правые части уравнений явно не зависят от переменной t. В таких системах сперва исследуются стационарные точки (решения), затем в окрестности каждой стационарной точки, правые части исследуемой системы разлагается по формуле Тейлора и выделяется в них линейная часть. По линейным частям составляется линейная автономная система, которая не имеет чисто мнимых собственных значений. В таком случае, в качественной теории дифференциальных уравнений используется известная теорема Гробмана-Хартмана [90, с.291], которая гласит: качественное поведение траекторий нелинейной автономной системы в малой окрестности стационарной точки будет эквивалентным поведению траекторий линейной автономной системы.

Дополнительно к этому, большой интерес представляет устойчивость найденных стационарных решений.

Теория устойчивости связана с именем русского математика Александра Михайловича Ляпунова (1857-1918) [49]. На сегодняшней день, теория устойчивости по Ляпунову является общепринятой и применяется во многих

областях естествознания. В современной математике теорию устойчивости начали применять при решении задач химической кинетики, экологии, экономики и др. В связи с этим приведем некоторые теоремы об устойчивости.

Вводим в рассмотрение систему обыкновенных дифференциальных уравнений [1], [9], [30], [88-89] записанную в векторной форме вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1.3.1}$$

и ее частное решение $x = \varphi(t)$, где t - время; $x = (x_1, \dots, x_n)^T$; $f = (f_1, \dots, f_n)^T$. Дополнительно, все $\partial f_i / \partial x_i$ определены и непрерывны.

Решение системы (1.3.1) $x = \varphi(t)$, с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$, называется устойчивым (или устойчивым по Ляпунову) (см.[1], [30], [49], [88]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\tilde{x}_0$, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, решение $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ при $t \in [t_0, \infty)$ существует и $|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t \in [t_0, \infty)$.

Из этого следует, что всякое решение с начальным условием из δ - окрестности точки $x_0 \epsilon R^n$ существует при $t \in [t_0, \infty)$ и не выходит из ε-трубки, ось которой - решение $x = \varphi(t)$, (см. рис.1.3.1).

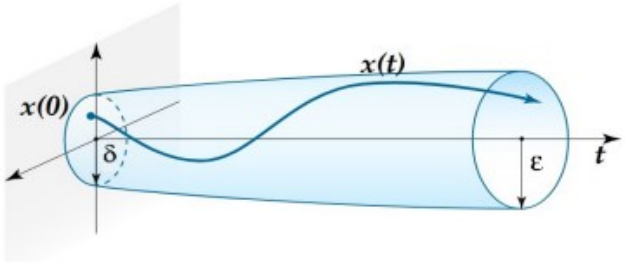

Рис. 1.3.1. Устойчивость по Ляпунову

Решение системы (1.3.1) $x = \varphi(t)$ называют асимптотически устойчивым (см. [1], [30], [49], [88]), если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, при $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$ выполнено условие

$$\lim_{t \to +\infty} |\tilde{x}(t) - \varphi(t)| \to 0.$$

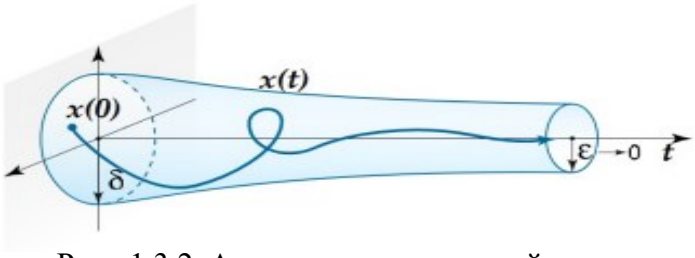

Рис. 1.3.2. Асимптотическая устойчивость

Рассмотрим однородную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [1]:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{1.3.2}$$

где $A = (a_{ij}$ - матрица размера n с действительными постоянными элементами $a_{ij} = const,\ i,j = 1, \dots, n)$. Характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ можно привести к виду

$$\lambda^n + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,\ \ a_1, \dots a_n \epsilon R. \tag{1.3.3}$$

Теорема об асимптотической устойчивости [1]. *Для асимптотической устойчивости нормальной однородной системы (1.3.2) из n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы любой из m различных корней* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *характеристического уравнения* $\det(A - \lambda E) = 0$ *этой системы имел отрицательную действительную часть, т.е.* $Re\lambda_j < 0, j = 1, \dots, m.$

Условия, при которых действительные части корней характеристического уравнения (1.3.3) отрицательны, выражает следующая теорема, названная по имени английского математика и физика Э. Рауса (1831-1907) и немецкого математика А. Гурвица (1859-1919). Данная теорема предоставляет возможность определить, является ли рассматриваемый многочлен (1.3.4) устойчивым по Гурвицу. Была доказана в 1895г. А.Гурвицем и названа в честь Э. Дж.Рауса (предложившего в 1876 г. другой - но эквивалентный критерию Гурвица - критерий устойчивости многочлена) и А.Гурвица.

Теорема Рауса - Гурвица [1]. *Действительные части всех корней уравнения (1.3.3) отрицательны тогда и только тогда, когда положительны все главные диагональные миноры матрицы Гурвица*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

т.е. когда

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \tag{1.3.4}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \ldots; \ \Delta_n = a_n \Delta_n - 1.$$

Условия (1.3.4) называют условиями Рауса - Гурвица.

При написании истории этого вопроса и приведенных утверждений по теории устойчивости автор использовала работу А.М.Гулова [30].

Утверждения приведенных в параграфе 1.3 используются в третьем главе данной диссертации, при доказательстве основных утверждений в нелинейной системы трех дифференциальных уравнений, описывающий фотосинтез в автотрофных системах.

В нелинейной системы трех дифференциальных уравнений (3) выделена область, инвариантная относительно движения вдоль траектории системы при возрастании времени. В этой области установлено существование единственного стационарного решения, исследованы вопросы его устойчивости, а также приведен алгоритм и код программы автоматизации выявление стационарных решений. Следует, отметить, что все полученные результаты являются новыми. Естественно, в системе (3) остаются открытым следующие нерешенные задачи: будут ли устойчивыми решения в глобальном смысле; каково будет поведения решений в случае переменных коэффициентов и т.п.

Глава 2. Периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром

В этой главе рассматривается существование периодических решений-циклов нелинейных уравнений с малым параметром в пространстве непрерывных функций $C[0, 2\pi]$. Получены необходимые и достаточные условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Л.С.Понтрягина [15] из теории динамических систем на плоскости и на цилиндре. В отличие от метода Понтрягина, не предполагается дифференцируемость всех входящих функций в системах, и применяются методы вычисления вращения векторных полей [45], [67], [69], которые определяют существования 2π – периодических решений рассматриваемых уравнений. На основе предложенного метода сформулированыи доказаны теоремы существования периодических решений-циклов для случая непрерывности всех входящих в системах функций.

Отметим, что существование периодических решений для разнообразных классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами исследовались А.Пуанкаре [76], А.А.Андроновым [5], Л.С.Понтрягином [97], В.А.Брусином [21], А.Н.Тихоновым [86], А.Д. Морозовым [58], Э.М.Мухамадиевым [64] и других.

Результаты данной главы связаны с работами [1-А - 3-А, 5-А, 8-А - 10-А, 13-А] автора.

§ 2.1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Введем в рассмотрение систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu \cdot P(x, y, \mu), \\ \dot{y} = x + \mu \cdot \mathrm{Q}(x, y, \mu), \end{cases} \tag{2.1.1}$$

где функции $P(x, y, \mu)$, $\mathrm{Q}(x, y, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных x, y, μ в области $|\mu| < \mu_0$, $(x, y) \in R^2$. По функциям $P(x, y, 0)$, $\mathrm{Q}(x, y, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(r) = \int_0^{2\pi} (cos\varphi \cdot P(rcos\varphi, rsin\varphi, 0) + sin\varphi \cdot Q(rcos\varphi, rsin\varphi, 0))d\varphi. \tag{2.1.2}$$

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (2.1.1) отправным пунктом для авторов послужила классическая теорема Л.С.Понтрягина [15], которая сформулирована при предположении аналитичности функций $P(x, y, \mu)$, $\mathrm{Q}(x, y, \mu)$ по совокупности переменных x, y, μ [15, с. 214]:

Теорема [15]. *Если для некоторого $\rho = \rho_0$ выполняются условия $F(\rho_0) = 0$, $F'(\rho_0) \neq 0$, то существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что:*

а) для любого μ, $|\mu| < \delta$, система (2.1.1) имеет в ε – окрестности кривой $x^2 + y^2 = \rho_0$ один и только один предельный цикл, причем при $\mu \to 0$ он стягивается к окружности $x^2 + y^2 = \rho_0$ (являющейся траекторией системы (2.1.1) при $\mu = 0$);

б) этот предельный цикл является грубым предельным циклом, устойчивым, когда $\mu \cdot F'(\rho_0) < 0$, и неустойчивым, когда $\mu \cdot F'(\rho_0) > 0$.

Функция (2.1.2) определена и непрерывна, если функции $P(x, y, \mu)$, $\mathrm{Q}(x, y, \mu)$ лишь непрерывны по совокупности переменных. Но это условие не гарантирует дифференцируемости функции $F(r)$. В связи с этим возникает вопрос: как сформулировать утверждение, содержащее аналог теоремы

Л.С.Понтрягина или аналог какой-либо ее части для случая непрерывных функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$?

В данной главе сделано попытка ответить на сформулированный вопрос и получены теоремы существования цикла у системы в условиях непрерывности функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ в терминах самой функции $F(r)$. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $\rho_0 > 0$ *- решение уравнения* $F(\rho) = 0$ *и в окрестности точки* ρ_0 $[\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0]$, $\rho_0 - \varepsilon_0 > 0$ *функция* $F(\rho) \neq 0$ *при* $\rho \neq \rho_0$, *причем значения функции* $F(\rho)$ *меняют знак при переходе через точку* ρ_0. *Тогда система (2.1.1) при достаточно малых значениях* μ *имеет периодическое решение* $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, *удовлетворяющее условию* $\left|\sqrt{x^2(t, \mu) + y^2(t, \mu)} - \rho_0\right| < \varepsilon_0$.

Теорема 2.1.2. *Пусть существуют числа* $0 < \rho_1 < \rho_2$ *такие, что* $F(\rho_2) \cdot F(\rho_1) < 0$. *Тогда система (2.1.1) при достаточно малых значениях* μ *имеет периодическое решение* $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, *удовлетворяющее условию* $\rho_1 < \sqrt{x^2(t, \mu) + y^2(t, \mu)} < \rho_2$.

Доказательства теорем (2.1.1) и (2.1.2) основаны на применении топологических методов – вычисления вращения соответствующих вполне непрерывных векторных полей, нули которых определяют периодическое решение системы (2.1.1).

§ 2.2. Переход к полярным координатам и необходимое условие существования цикла

Для исследования необходимого условия существования циклов, приведем систему (2.1.1) к более простому виду. С этой целью переходим к полярной системе координат.

Пусть $(x(t), y(t))$ - решение системы (2.1.1), не обращающееся в нуль. Полагая

$$\begin{cases} x(t) = r(t)cos\varphi(t), \\ y(t) = r(t)sin\varphi(t), \quad 0 \le \varphi(0) \le 2\pi, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

и дифференцируя систему (2.2.1) по t и умножая на $(cos\varphi, sin\varphi)$ и $(-sin\varphi, cos\varphi)$ затем складывая их, имеем следующую систему

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \dot{x}(t)cos\varphi(t) + \dot{y}(t)sin\varphi(t), \\ r(t) \cdot \dot{\varphi}(t) = \dot{y}(t)cos\varphi(t) - \dot{x}(t)sin\varphi(t), \quad 0 \le \varphi(0) \le 2\pi. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Далее, из системы (2.1.1) вставляя значение $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ в системе (2.2.2), получаем

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu \cdot (P(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot cos\varphi + Q(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot sin\varphi), \\ r \cdot \dot{\varphi} = r + \mu \cdot (Q(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot cos\varphi - P(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot sin\varphi). \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Если для решения $(x(t), y(t))$ системы (2.1.1) при данном значении μ, правая часть второго уравнения системы (2.2.3) положительна при всех t , то время t можно выразить через полярный угол φ: $t = T(\varphi)$. Относительно функции $\rho(\varphi) = r(T(\varphi))$ от системы (2.2.3) перейдём к скалярному уравнению

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \mu \cdot G(\rho, \varphi, \mu), \tag{2.2.4}$$

где

$$G(\rho, \varphi, \mu) = \frac{\rho \cdot (P(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot cos\varphi + Q(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot sin\varphi)}{\rho + \mu \cdot (Q(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot cos\varphi - P(rcos\varphi, rsin\varphi, \mu) \cdot sin\varphi)}.$$

При этих предположениях справедлива следующая

Лемма 2.2.1. *Решение* $(x(t), y(t))$ *системы (2.1.1) при данном значении* μ *периодическое, т.е.* $\big(x(t+\omega), y(t+\omega)\big) = \big(x(t), y(t)\big)$, $\omega = \omega(\mu) > 0$ *тогда и только тогда, когда соответствующее решение* $\rho(\varphi) = r(T(\varphi))$ *скалярного уравнения (2.2.4)* 2π *– периодическое, т.е.* $\rho(\varphi + 2\pi) = \rho(\varphi)$.

Доказательство леммы 2.2.1. Так как $x(t), y(t)$ решение системы (2.1.1), то $\rho(t), \varphi(t)$ являются решениями системы (2.2.3). С учётом их периодичности имеем

$$\begin{cases} x(t+\omega) \equiv x(t), \\ y(t+\omega) \equiv y(t). \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho(t+\omega) \equiv \rho(t), \\ \varphi(t+\omega) \equiv \varphi(t). \end{cases}$$

Из системы (2.2.1), имеем

$$cos\varphi(t) = \frac{x(t)}{\rho(t)}, \qquad sin\varphi(t) = \frac{y(t)}{\rho(t)}.$$

Следовательно,

$$cos\varphi(t+\omega) = \frac{x(t+\omega)}{\rho(t+\omega)} = \frac{x(t)}{\rho(t)}, \quad sin\varphi(t+\omega) = \frac{x(t+\omega)}{\rho(t+\omega)} = \frac{x(t)}{\rho(t)}.$$

$$cos\varphi(t+\omega) \equiv cos\varphi(t), \qquad sin\varphi(t+\omega) \equiv sin\varphi(t), \quad \forall\omega.$$

Обозначим $\varphi(t+\omega) = \alpha, \quad \varphi(t) = \beta$. Имеем, $cos\alpha \equiv cos\beta,\ sin\alpha \equiv sin\beta$.

Следовательно, имеем

$$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$sin\alpha - sin\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \pi k, \quad \alpha+\beta = 2\pi k, k \in \mathrm{Z}.$$

$$\varphi(t+\omega) - \varphi(t) = 2\pi k, \quad \varphi(t+\omega) \equiv \varphi(t) + 2\pi k, \qquad k \in \mathrm{Z}.$$

Следовательно, уравнение (2.2.4) имеет $2\pi k$ периодическое решение вида $\rho(\varphi + 2\pi k, \mu) \equiv \rho(\varphi, \mu)$. Лемма 2.2.1. доказана.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что для некоторой последовательности значений* $\mu = \mu_k \neq 0,\ \mu_k \to 0$ *при* $k \to \infty$ *система (2.1.1) имеет периодическое решение* $(x_k(t),\ y_k(t))$, *с периодом* $\omega_k > 0$, *удовлетворяющие условию* $M_0 \leq \sqrt{{x_k}^2(t) + {y_k}^2(t)} \leq M,\ M_0 > 0$. *Тогда существует такое* $\rho_0 \epsilon [M_0, M]$, *что* $F(\rho_0) = 0$.

Доказательство теоремы 2.2.1. Пусть $\rho_k(\varphi)$ - 2π периодическое решение скалярного уравнения (2.2.4), соответствующее решению $(x_k(t), y_k(t))$ системы

(2.1.1) при $\mu = \mu_k$. Подставляя данное решение в уравнение (2.2.4) и полагая $\mu = \mu_k$, затем интегрируя полученное тождество на промежутке $[0,\ 2\pi]$, в силу условия $\mu_k \neq 0$ получим

$$\int_0^{2\pi} G(\rho_k(\varphi), \varphi, \mu_k)d\varphi = 0. \qquad (2.2.5)$$

В силу условия теоремы последовательность функций $\rho_k(\varphi)$ равномерно ограниченна, а в силу уравнения (2.2.4), она равностепенно непрерывна, и более того, $\rho_k(\varphi) - \rho_k(0) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно на промежутке $[0,\ 2\pi]$. В силу теоремы Вейерштрасса без ограничения общности можно считать, что числовая последовательность $\rho_k(0)$ при $k \to \infty$ сходится к некоторому числу $\rho_0 \epsilon [M_0, M]$. В силу непрерывности функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$, и условия $\mu_k \to 0$, последовательность функций $G(\rho_k(\varphi), \varphi, \mu_k)$ при $k \to \infty$ равномерно сходится к функции

$$G(\rho_0, \varphi, 0) = P(\rho_0 cos\varphi, \rho_0 sin\varphi, 0) \cdot cos\varphi + Q(\rho_0 cos\varphi, \rho_0 sin\varphi, 0) \cdot sin\varphi.$$

Теперь, переходя к пределу в равенстве (2.2.5), получаем

$$F(\rho_0) = \int_0^{2\pi} (cos\varphi \cdot P(\rho_0 cos\varphi, \rho_0 sin\varphi, 0) + sin\varphi \cdot Q(\rho_0 cos\varphi, \rho_0 sin\varphi, 0))d\varphi = 0.$$

Теорема доказана.

§ 2.3. Существование периодических решений нелинейной системы, близких к гамильтоновым на цилиндре

В предыдущих параграфах внимание было уделено системе, для которой плоскость служила фазовым пространством, однако существуют системы, для которых плоскость не может служить в качестве фазового пространства [15, с.207]. Например, система, которая описывает физический маятник. Состояние физического маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия φ и скоростью φ′. При изменении отклонения на 2π, мы получаем такое же положение маятника, которое физически ничем не отличимое от

исходного. Подобные системы в настоящее время играют большую роль в различных областях техники. К указанным системам можно отнести инерционные системы телевизионной синхронизации, фазовые системы радионавигации, фазовые системы автоматической подстройки частоты, а также системы, определяющие динамику синхронных генераторов и многие другие системы, положение которых определяется углом, поэтому изучение таких систем с использованием цилиндрической фазовой поверхности является актуальным.

Введем в рассмотрение систему вида

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -\frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial y} + \mu \cdot P(\varphi, y, \mu), \\ \dot{y} = \frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial \varphi} + \mu \cdot Q(\varphi, y, \mu), \end{cases} \tag{2.3.1}$$

где функции $H(\varphi, y) \equiv H(\varphi + 2\pi, y)$, $P(\varphi, y, \mu) \equiv P(\varphi + 2\pi, y, \mu)$, $Q(\varphi, y, \mu) \equiv Q(\varphi + 2\pi, y, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных φ, y, μ в области $|\mu| < \mu_0$ и 2π - периодические относительно φ. В данном параграфе изучается вопрос о существовании решения $(\varphi(t), y(t))$ системы (2.3.1) удовлетворяющее условиям: $\varphi(T) = \varphi(0) + 2k_0\pi$, $k_0 \epsilon Z$, $y(T) = y(0)$ при $\mu \neq 0$, где T-неизвестный период. Разрешая уравнение $H(\varphi, y) = h$, $(h - \text{const})$ относительно y при предположении, что $(\partial H(\varphi, y)/\partial y) \neq 0$, определим функцию $y = Y(\varphi, h)$. Далее, по функциям $P(\varphi, y, 0)$, $Q(\varphi, y, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(h) = \int_0^{2\pi} \left[Q(u, Y(u,h), 0) - P(u, Y(u,h), 0) \cdot \frac{dY}{du}(u,h) \right] du. \tag{2.3.2}$$

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (2.3.1) как и в системе (2.1.1) отправным пунктом послужила классическая теорема Л.С.Понтрягина [15], которая сформулирована при предположении аналитичности функций $P(\varphi, y, \mu)$, $Q(\varphi, y, \mu)$ по совокупности переменных φ, y, μ [15, с. 209]:

Теорема [15]. Для того чтобы у системы (2.3.1) существовал предельный цикл, рождающийся из кривой $y = Y(\varphi, h_0)$, *необходимо, чтобы*

$$F(\mathrm{h}_0)=\int_0^{2\pi}\left[Q(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0),0)-P(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0),0)Y'_\varphi(\varphi,\mathrm{h}_0)\right]d\varphi=0,$$

и достаточно, чтобы при условии $F(\mathrm{h}_0)=0$ *выполнялось*

$$F_1(\mathrm{h}_0)=\int_0^{2\pi}\frac{\left[P'_\varphi(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0),0)+Q'_y(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0),0)\right]}{-H'_y(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0))}d\varphi\neq 0.$$

Если $F(\mathrm{h}_0)=0$ *и* $F_1(\mathrm{h}_0)\neq 0$, *то рождающийся цикл единственный и притом устойчивый, если* $\mu F_1(\mathrm{h}_0)<0$, $H'_y\big(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0)\big)>0$ *или* $\mu F_1(\mathrm{h}_0)>0$, $H'_y\big(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0)\big)<0$, *и неустойчивый, если* $\mu F_1(\mathrm{h}_0)>0$, $H'_y\big(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0)\big)>0$ *или* $\mu F_1(\mathrm{h}_0)<0$, $H'_y\big(\varphi,\mathrm{Y}(\varphi,\mathrm{h}_0)\big)<0$.

Сформулируем утверждение для случая непрерывных функций $P(\varphi,y,\mu)$, $\mathrm{Q}(\varphi,y,\mu)$ в терминах самой функции (2.3.2). А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $h_0>0$ *- решение уравнения* $F(h)=0$ *и в окрестности точки* h_0 $[h_0-\varepsilon_0,h_0+\varepsilon_0]$, $h_0-\varepsilon_0>0$ *функция* $F(h)\neq 0$ *при* $h\neq h_0$, *причем значения функции* $F(h)$ *меняют знак при переходе через точку* h_0. *Тогда система (2.3.1) при достаточно малых значениях* μ *имеет периодическое решение* $(\varphi(t,\mu),y(t,\mu))$, *удовлетворяющее условию* $|H(\varphi(t),y(t))-h_0|<\varepsilon_0$.

§ 2.4. Алгебраические преобразования и необходимые условие существования цикла в гамильтоновых системах

Введем в рассмотрение систему (2.3.1) при $\mu=0$, следовательно имеем систему вида

$$\begin{cases}\dot{\varphi}=-\frac{\partial \mathrm{H}(\varphi,\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}},\\ \dot{\mathrm{y}}=\frac{\partial \mathrm{H}(\varphi,\mathrm{y})}{\partial \varphi},\end{cases}$$

решение которой сводится к решению уравнении $\mathrm{H}(\varphi,\mathrm{y})=\mathrm{h}$, $(\mathrm{h}-\mathrm{const})$.

Лемма 2.4.1. *Пусть* $\left(\varphi(t),\ y(t)\right)$ *- решение системы (2.3.1) при* $\mu = 0$. *Тогда* $H(\varphi, y) = h$.

Доказательство леммы 2.4.1. Данное утверждение доказывается просто. Предположим, что $\left(\varphi(t),\ y(t)\right)$ – решение системы (2.3.1), тогда вставляя найденные решения в данную систему имеем тождество. Первое уравнение полученного тождества умножаем на $\frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial \varphi}$, а второе на $\frac{\partial H(\varphi,y)}{\partial y}$, затем суммируя первое и второе имеем

$$\frac{\partial H(\varphi(t), y(t))}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi}(t) + \frac{\partial H\left(\varphi(t), y(t)\right)}{\partial y} \cdot \dot{y}(t) \equiv 0.$$

С учётом производной от сложной функции последнее тождество можем написать в виде

$$\frac{dH(\varphi(t), y(t))}{dt} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $H\left(\varphi(t), y(t)\right) = h$. Нашей целью является получение необходимого условия существования периодических решений в системе (2.3.1) при $\mu \neq 0$. Предположим, что $(\varphi(t,\mu), y(t,\mu))$ являются решениями системы (2.3.1), при $\mu \neq 0$ и удовлетворяющее следующим условиям: $\varphi\left(t + T_\mu, \mu\right) \equiv \varphi(t,\mu) + 2\pi$, $y\left(t + T_\mu, \mu\right) \equiv y(t,\mu)$. Дополнительно, предполагая, что эти решения ограничены, то есть $|\varphi(t,\mu)| \leq M$, $|y(t,\mu)| \leq M$, $T_\mu \leq M$. Вставляя данные решения в системе (2.3.1), имеем

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t,\mu) \equiv -\dfrac{\partial H(\varphi(t,\mu), y(t,\mu))}{\partial y} + \mu \cdot P(\varphi(t,\mu), y(t,\mu), \mu), \\ \dot{y}(t,\mu) \equiv \dfrac{\partial H\left(\varphi(t,\mu), y(t,\mu)\right)}{\partial \varphi} + \mu \cdot Q(\varphi(t,\mu), y(t,\mu), \mu). \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Аналогично, применяя вышеприведённые алгебраические преобразования, первое уравнение системы (2.4.1) умножая на $\partial H(\varphi(t,\mu), y(t,\mu))/\ \partial\varphi$, а второе уравнение на $\partial H(\varphi(t,\mu), y(t,\mu))/\ \partial y$, затем суммируя, получим

$$\dot{\varphi}(t,\mu)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{\partial\varphi}+\dot{y}(t,\mu)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{\partial y}\equiv$$

$$\equiv\ \mu\cdot[P(\varphi(t,\mu),y(t,\mu),\mu)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{\partial\varphi}+$$

$$+Q(\varphi(t,\mu),y(t,\mu),\mu)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{\partial y}].$$

С учетом производной от сложной функции левую часть последнего тождества перепишем в виде

$$\frac{dH\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{dt}\equiv\mu\cdot[P(\varphi(t,\mu),y(t,\mu),\mu)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{\partial\varphi}+$$

$$+Q(\varphi(t,\mu),y(t,\mu),\mu)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)}{\partial y}]. \qquad (2.4.2)$$

Теорема 2.4.1. *(Аналог теоремы Л.С.Понтрягина). Предположим, что для некоторой последовательности значений* $\mu=\mu_k\neq 0,\ \mu_k\to 0$ *при* $k\to\infty$ *система (2.4.1) имеет периодическое решение* $\big(\varphi_k(t),y_k(t)\big)$ *с* периодом $T_k>0$, *удовлетворяющее условию* $|\varphi(t,\mu_k)|+|y(t,\mu_k)|\leq M,\ M>0$. *Тогда существует такое* h_0, *что* $F(h_0)=0$.

Доказательство теоремы 2.4.1. Пусть $\big(\varphi(t,\mu),y(t,\mu)\big)$ - периодическое решение системы (2.3.1) соответствующее решению $\big(\varphi(t,\mu_k),\ y(t,\mu_k)\big)$ при $\mu=\mu_k$. Вставляя данное решение в (2.4.2) и полагая $\mu=\mu_k$, затем интегрируя полученное тождество на промежутке $\big[0,\ T_{\mu_k}\ \big]$ получим

$$H\Big(\varphi\big(T_{\mu_k},\mu_k\big),y\big(T_{\mu_k},\mu_k\big)\Big)-H\big(\varphi(0,\mu_k),y(0,\mu_k)\big)\equiv$$

$$\equiv\mu_k\int_0^{T_{\mu_k}}[P(\varphi(t,\mu_k),y(t,\mu_k),\mu_k)\cdot\frac{\partial H\big(\varphi(t,\mu_k),y(t,\mu_k)\big)}{\partial\varphi}+$$

$$+Q(\varphi(t,\mu_k),y(t,\mu_k),\mu_k)\cdot\frac{\partial H(\varphi(t,\mu_k),y(t,\mu_k),\mu_k)}{\partial y}]dt.$$

С учётом $\varphi\big(T_{\mu_k}\big)=\varphi(0)+2\pi$, имеем

$$\mathrm{H}\big(\varphi(0,\mu_k)+2\pi, y(0,\mu_k)\big)-\mathrm{H}\big(\varphi(0,\mu_k), y(0,\mu_k)\big)\equiv$$

$$\equiv \mu_k\int_0^{T_{\mu_k}}[\mathrm{P}(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k),\mu_k)\cdot\frac{\partial \mathrm{H}\big(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k)\big)}{\partial\varphi}+$$

$$+\mathrm{Q}(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k),\mu_k)\cdot\frac{\partial \mathrm{H}\big(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k)\big)}{\partial y}]dt.$$

Используя условия $\mathrm{H}(\varphi, y)\equiv \mathrm{H}(\varphi+2\pi, y)$ и $\mu_k\neq 0$ получим

$$\int_0^{T_{\mu_k}}[\mathrm{P}(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k),\mu_k)\cdot\frac{\partial \mathrm{H}\big(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k)\big)}{\partial\varphi}+$$

$$+\mathrm{Q}(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k),\mu_k)\cdot\frac{\partial \mathrm{H}\big(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k)\big)}{\partial y}]dt=0. \qquad (2.4.3)$$

Для компактности введем следующее обозначение

$$\mathrm{G}(\varphi, y,\mu)=\mathrm{P}(\varphi(t,\mu), y(t,\mu),\mu)\cdot\frac{\partial \mathrm{H}\big(\varphi(t,\mu), y(t,\mu)\big)}{\partial\varphi}+$$

$$+\mathrm{Q}(\varphi(t,\mu), y(t,\mu),\mu)\cdot\frac{\partial \mathrm{H}\big(\varphi(t,\mu), y(t,\mu)\big)}{\partial y} \qquad (2.4.4)$$

С учетом (2.4.3) перепишем интеграл (2.4.4)

$$\int_0^{T_{\mu_k}}\mathrm{G}(\varphi(t,\mu_k), y(t,\mu_k),\mu_k)dt=0. \qquad (2.4.5)$$

В силу условия теоремы последовательность функций $\varphi(t,\mu_k)$ и $y(t,\mu_k)$ равномерно ограниченна, а в силу уравнения (2.3.1), она равностепенно непрерывна. Отсюда, в силу теоремы Арцела из последовательности $\varphi(t,\mu_k)$, $y(t,\mu_k)$, T_{μ_k} можно выделить подпоследовательность $\varphi\left(t,\mu_{k_j}\right)$, $y\left(t,\mu_{k_j}\right)$, $T_{\mu_{k_j}}$ таких, что $\varphi\left(t,\mu_{k_j}\right)\to\varphi_0(t)$, $y\left(t,\mu_{k_j}\right)\to y_0(t)$, равномерно по t и $T_{\mu_{k_j}}\to T_0$ при $j\to\infty$, и более того $\varphi\left(t,\mu_{k_j}\right)-\varphi_0(t)=0$, $y\left(t,\mu_{k_j}\right)-y_0(t)=0$ при $j\to\infty$ равномерно на промежутке $[0, T_{\mu_k}]$. В равенстве (2.4.5) пологая $\mu=\mu_{k_j}$, затем переходя к пределу при $j\to\infty$, имеем:

$$\int_0^{T_0} G(\varphi_0(t), y_0(t), 0)dt = 0.$$

В силу непрерывности функций $P(\varphi(t,\mu_k),\ y(t,\mu_k),\ \mu_k)$, $Q(\varphi_k(t,\mu_k),\ y_k(t,\mu_k),\ \mu_k)$, и условия $\mu_k \to 0$, последовательность функций $G(\varphi(t,\mu_k),\ y(t,\mu_k),\ \mu_k)$ при $k \to \infty$ равномерно сходится к функции

$$G(\varphi_0(t), y_0(t), 0) = P(\varphi_0(t), y_0(t), 0) \cdot \frac{\partial H\big(\varphi_0(t), y_0(t)\big)}{\partial \varphi} +$$

$$+Q(\varphi_0(t), y_0(t), 0) \cdot \frac{\partial H\big(\varphi_0(t), y_0(t)\big)}{\partial y}.$$

Тогда

$$\int_0^{T_0} [P(\varphi_0(t), y_0(t), 0) \cdot \frac{\partial H\big(\varphi_0(t), y_0(t)\big)}{\partial \varphi} +$$

$$+Q(\varphi_0(t), y_0(t), 0) \cdot \frac{\partial H\big(\varphi_0(t), y_0(t)\big)}{\partial y}]dt = 0, \qquad (2.4.6)$$

где $(\varphi_0(t),\ y_0(t))$ - решение системы (2.3.1) при $\mu = 0$ и удовлетворяющее следующим условиям: $\varphi_0(t + T_0) \equiv \varphi_0(t) + 2\pi$, $y_0(t + T_0) \equiv y_0(t)$. Далее, используя систему (2.3.1) при $\mu = 0$, равенство (2.4.6) запишем в виде

$$\int_0^{T_0} [P(\varphi_0(t), y_0(t), 0) \cdot \frac{dy_0}{dt} - Q(\varphi_0(t), y_0(t), 0) \cdot \frac{d\varphi_0}{dt}]dt = 0. \qquad (2.4.7)$$

На основе (2.4.7) имеет место равенство $H\big(\varphi_0(t), y_0(t)\big) \equiv h_0$. Отсюда следует, что $y_0(t) = Y(\varphi_0(t), h_0)$. Дифференцируя обе части последнего равенства по t, получим

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial \varphi}(\varphi_0(t), h_0) \cdot \frac{d\varphi_0}{dt}.$$

Вставляя значения dy_0/dt в (2.4.7), имеем

$$\int_0^{T_0} \left[P(\varphi_0(t), Y(\varphi_0(t), h_0), 0) \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varphi}(\varphi_0(t), h_0) - Q(\varphi_0(t), Y(\varphi_0(t), h_0), 0)\right] \cdot$$

$$\cdot\, \varphi_0' dt = 0, \qquad (2.4.8)$$

В (2.4.8) введем следующую замену $\varphi_0(t) = u$, $\varphi_0' dt = du$. Следовательно, имеем

$$\int_{\varphi_0(0)}^{\varphi_0(0)+2\pi} [P(u, Y(u,h),0) \cdot \frac{\partial Y}{\partial u}(u,h) - Q(u, Y(u,h),0)]du = 0.$$

Так как $P(u, Y(u,h),0)$ и $Q(u, Y(u,h),0)$ периодические функции, то используя свойство определенного интеграла, последнее равенство можем написать в виде

$$F(h) = \int_0^{2\pi} [P(u, Y(u,h),0) \cdot \frac{\partial Y}{\partial u}(u,h) - Q(u, Y(u,h),0)]du = 0. \qquad (2.4.9)$$

Из равенства (2.4.9) находим $\frac{\partial Y}{\partial u}(u,h)$. Так как $H(u, Y(u,h)) \equiv 0$, то производная от данной функции

$$\frac{\partial H(u, Y(u,h))}{\partial u} + \frac{\partial H(u, Y(u,h))}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial H\big(u, Y(u,h)\big)}{\partial u}}{\frac{\partial H\big(u, Y(u,h)\big)}{\partial y}}.$$

Введя следующие обозначения $u = \varphi, h = V$, имеем

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -\frac{\frac{\partial H\big(\varphi, Y(\varphi,V)\big)}{\partial u}}{\frac{\partial H\big(\varphi, Y(\varphi,V)\big)}{\partial y}}. \qquad (2.4.10)$$

Следовательно, с учетом (2.4.10) получим

$$F(V) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{[P(\varphi, Y(\varphi,V),0) \cdot \frac{\partial H\big(\varphi, Y(\varphi,V)\big)}{\partial u} + Q(\varphi, Y(\varphi,V),0) \cdot \frac{\partial H(\varphi, Y(\varphi,V))}{\partial y}]}{\frac{\partial H(\varphi, Y(\varphi,V))}{\partial y}} d\varphi.$$

Теорема доказана.

§ 2.5. Аналитическое представление решений системы, близкой к гамильтоновым

Пусть $\left(\varphi(t), y(t)\right)$ - решение системы (2.3.1), тогда вводим в рассмотрение функцию $h(t) \equiv H(\varphi(t), y(t))$. Пусть функция $h(t)$ разрещима по $y(t)$. Следовательно, $y(t) = Y(\varphi(t), h(t))$. Дифференцируя функцию h по t имеем

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial H(\varphi, Y(\varphi, V))}{\partial \varphi} \cdot \varphi'(t) + \frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, V)\right)}{\partial y} \cdot y'(t).$$

Вставляя значения $\varphi'(t)$ и $y'(t)$ из системы (2.3.1) и сокращая схожих множителей, имеем

$$\frac{dh}{dt} = \mu\left[\frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, h)\right)}{\partial \varphi} \cdot P(\varphi, Y(\varphi, h), \mu) + \frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, h)\right)}{\partial y} \cdot Q(\varphi, Y(\varphi, h), \mu)\right].$$

Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} \dot{h} = \mu\left[\frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, h)\right)}{\partial \varphi} \cdot P(\varphi, Y(\varphi, h), \mu) + \frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, h)\right)}{\partial y} \cdot Q(\varphi, Y(\varphi, h), \mu)\right], \\ \dot{\varphi} = -\frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, h)\right)}{\partial y} + \mu \cdot P(\varphi, Y(\varphi, h), \mu). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Предположим, что второе уравнение системы (2.5.1) при достаточно малых значениях μ не равно нулю. Тогда введем в рассмотрение следующее вспомогательное скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dV}{d\varphi} = \mu G(\varphi, V, \mu), \quad (2.5.2)$$

где функция $G(\varphi, V, \mu) \equiv G(\varphi + 2\pi, V, \mu)$.

Пусть функция $z(\varphi) = V(\varphi, \mu)$ – есть решение уравнения (2.5.2), где $V(\varphi, \mu) \equiv V(\varphi + 2\pi, \mu)$. Во втором уравнении системы (2.5.1), пологая $h = z(\varphi)$, получим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} = -\frac{\partial \mathrm{H}\left(\varphi, \mathrm{Y}\left(\varphi, z(\varphi)\right)\right)}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}\left(\varphi, \mathrm{Y}\left(\varphi, z(\varphi)\right), \mu\right).$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому для решения $\varphi(t)$ этого уравнения справедливо тождество

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{-\frac{\partial \mathrm{H}\left(\varphi, \mathrm{Y}\left(\varphi, z(\varphi)\right)\right)}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}\left(\varphi, \mathrm{Y}\left(\varphi, z(\varphi)\right), \mu\right)} \equiv 1.$$

Интегрируя данное тождество в пределах 0 до t имеем

$$\int_0^t \frac{\dot{\varphi}(s)}{-\frac{\partial \mathrm{H}\left(\varphi(\mathrm{s}), \mathrm{Y}\left(\varphi(s), z(\varphi(\mathrm{s}))\right)\right)}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}\left(\varphi(\mathrm{s}), \mathrm{Y}\left(\varphi(\mathrm{s}), z(\varphi(\mathrm{s}))\right), \mu\right)} ds = \int_0^t ds.$$

В левой части этого равенства производя замену $|\varphi(s) = u,\ \dot{\varphi}(s)ds = du|$ и предполагая, что $\varphi(0) = 0$ получим

$$\int_0^{\varphi(t)} \frac{du}{-\frac{\partial \mathrm{H}\left(\mathrm{u}, \mathrm{Y}\left(\mathrm{u}, z(\mathrm{u})\right)\right)}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{u}, \mathrm{Y}\left(\mathrm{u}, z(\mathrm{u})\right), \mu\right)} = t.$$

Введем следующее обозначение

$$F(q) = \int_0^q \frac{du}{-\frac{\partial \mathrm{H}\left(\mathrm{u}, \mathrm{Y}\left(\mathrm{u}, z(\mathrm{u})\right)\right)}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{u}, \mathrm{Y}\left(\mathrm{u}, z(\mathrm{u})\right), \mu\right)},$$

получим $F\left(\varphi(t)\right) = t$. Таким образом, решение второго уравнения (2.5.1) имеет вид

$$\varphi(t) = F^{-1}(t).$$

Следовательно, имеем

$$h(t) = H\left(F^{-1}(t), Y\left(F^{-1}(t), z\left(\varphi(t)\right)\right)\right).$$

Вставляя найденные решения $\varphi(t)$ и $h(t)$ в $Y(\varphi(t),h(t))$, следовательно, находим $y(t)$.

Далее, находим период T из второго уравнения системы (2.5.1). Пусть

$$\varphi(t) = F^{-1}(t).$$

Тогда, $\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi, \quad \varphi(T) = 2\pi, \quad 2\pi = F^{-1}(t), \quad F(2\pi) = T,$ где

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{du}{-\frac{\partial \mathrm{H}\left(\mathrm{u}, \mathrm{Y}(\mathrm{u}, z(\mathrm{u}))\right)}{\partial \mathrm{y}} + \mu \cdot \mathrm{P}\left(\mathrm{u}, \mathrm{Y}(\mathrm{u}, z(\mathrm{u})), \mu\right)}.$$

Далее, рассмотрим вопрос о существование 2π – периодических решений уравнения (2.5.2), которая эквивалентно существованию решения интегрального уравнения

$$\mathrm{V}(\varphi) - \mathrm{V}(2\pi) = \mu \int_0^{\varphi} \mathrm{G}(\psi, \mathrm{V}(\psi), \mu) \mathrm{d}\psi$$

в пространстве $\mathrm{C}[0,2\pi]$ непрерывных функций на отрезке $[0,2\pi]$.

§ 2.6. Доказательство основных утверждений

Доказательство теоремы 2.1.1. В пространстве непрерывных функций $C[0,2\pi]$ рассмотрим область

$$\Omega = \{\rho(\varphi): |\rho(\varphi) - \rho_0| < \varepsilon_0, 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \text{ где } \varepsilon_0 < \rho_0.$$

На границе $\dot{\Omega}$ области Ω, введем в рассмотрение семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\left(\Phi_\mu \rho\right)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{G}(\rho(\psi), \psi, \mu) \mathrm{d}\psi, \tag{2.6.1}$$

$$\left(\Psi_\mu \rho\right)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu \int_0^{2\pi} \mathrm{F}\left(\rho(\psi)\right) \mathrm{d}\psi. \tag{2.6.2}$$

Отметим, что нули поля Φ_μ являются 2π -периодическими решениями уравнения (2.2.4). Покажем, что векторные поля (2.6.1) и (2.6.2) при малых значениях $\mu \neq 0$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω не имеют нулевых векторов и являются

гомотопными. Для этого достаточно показать, что следующее семейство векторных полей

$$\left(\Phi_{\mu,\lambda}\rho\right)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) -$$

$$-\mu\lambda\int_0^{2\pi} G(\rho(\psi),\psi,\mu)d\psi - \mu(1-\lambda)\int_0^{2\pi} F\left(\rho(\psi)\right)d\psi,$$

при малых значениях $\mu \neq 0$ и $\forall\rho \in \dot{\Omega}, \forall\lambda \in [0,1]$ не обращается в нуль. Действительно, если предположить противное, то существуют последовательности $\mu = \mu_k \neq 0$, $\mu_k \to 0$, $\lambda_k \in [0,1]$ и $\rho_k \in \dot{\Omega}$ такие, что $\left(\Phi_{\mu,\lambda}\rho\right)(\varphi) = 0$, при $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$ и $\rho = \rho_k$. Следовательно, функция $\rho = \rho_k(\varphi)$ является 2π - периодическим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \mu\lambda \cdot G(\rho,\varphi,\mu) + \mu(1-\lambda)F(\rho), \qquad (2.6.3)$$

и удовлетворяет условию

$$\lambda\int_0^{2\pi} G(\rho(\psi),\psi,\mu)d\psi + (1-\lambda)\int_0^{2\pi} F\left(\rho(\psi)\right)d\psi = 0, \qquad (2.6.4)$$

при $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$. В силу (2.6.3), для последовательности функций $\rho_k(\varphi)$ имеет место $\rho_k(\varphi) - \rho_k(0) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно на промежутке $[0,\ 2\pi]$. Без ограничения общности можно считать, что последовательности $\rho_k(0) \to \rho_*$, $\lambda_k \to \lambda_*$ при $k \to \infty$. В равенстве (2.6.4), полагая $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$ и $\rho(\varphi) = \rho_k(\varphi)$, затем перейдя к приделу при $k \to \infty$, получим

$$\lambda_*\int_0^{2\pi} G(\rho_*,\psi,0)d\psi + (1-\lambda_*)\int_0^{2\pi} F(\rho_*)d\psi = 2\pi F(\rho_*).$$

С другой стороны, из условия $\rho_k \in \dot{\Omega}$ следует равенство $|\rho_* - \rho_0| = \varepsilon_0$, что противоречит выбору ε_0. Полученное противоречие доказывает гомотопность векторных полей (2.6.1) и (2.6.2) на границе $\dot{\Omega}$ области Ω и справедливость равенства $\gamma\left(\Phi_\mu,\dot{\Omega}\right) = \gamma\left(\Psi_\mu,\dot{\Omega}\right)$ их вращений при достаточно малых значениях

μ . Теперь покажем, что вращение вполне непрерывного векторного поля Ψ_μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω отлично от нуля. Рассмотрим семейство векторных полей

$$\left(\Psi_{\lambda\mu}\rho\right)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu\int_0^{\varphi} F\left(\rho(\psi)\right)d\psi - \mu\lambda\int_{\varphi}^{2\pi} F\left(\rho(\psi)\right)d\psi,$$

$0 \le \lambda \le 1$. В частности, при $\lambda = 0$ имеем $\Psi_{0\mu} = \Psi_\mu$, а при $\lambda = 1$ получим

$$\left(\Psi_{1\mu}\rho\right)(\varphi) = \rho(\varphi) - \rho(2\pi) - \mu\int_0^{2\pi} F\left(\rho(\psi)\right)d\psi.$$

Векторные поля $\left(\Psi_{\lambda\mu}\rho\right)(\varphi)$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$ при малых значениях μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω не имеют нулевых векторов и, следовательно, поля $\left(\Psi_{0\mu}\rho\right)(\varphi)$ и $\left(\Psi_{1\mu}\rho\right)(\varphi)$ являются гомотопными на $\dot{\Omega}$ и поэтому $\gamma\left(\Psi_\mu, \dot{G}\right) = \gamma\left(\Psi_{1\mu}, \dot{G}\right)$.

Оператор

$$\left(A_\mu\rho\right)(\varphi) = (2\pi) + \mu\int_0^{2\pi} F\left(\rho(\psi)\right)d\psi,$$

определяющий векторное поле $\Psi_{1\mu}$, действует из пространства $C[0,2\pi]$ в подпространство постоянных функций. Это подпространство обозначим через E_0 и положим $G = \Omega \cap E_0$. Очевидно, $G = (\rho_0 - \varepsilon_0\,, \rho_0 + \varepsilon_0)$. Согласно лемме Лере-Шаудера [44], вращение вполне непрерывного векторного поля $\Psi_{1\mu}$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω совпадет с вращением его сужения $\overline{\Psi}_{1\mu}$ на границе $\dot{G}$ области G . Нетрудно видеть, что

$$\overline{\Psi}_{1\mu}\rho \equiv -\mu \cdot 2\pi \cdot F(\rho), \qquad \rho \in (\rho_0 - \varepsilon_0\,, \rho_0 + \varepsilon_0),$$

и поэтому его вращение $\gamma(\overline{\Psi}_{1\mu}, \dot{G})$ на границе $\dot{G}$ области G равно

$$\gamma(\overline{\Psi}_{1\mu}, \dot{G}) = -\mu \cdot sign(sign\, F(\rho_0 + \varepsilon_0) - sign\, F(\rho_0 - \varepsilon_0))/2.$$

Следовательно, вращение $\gamma\left(\Phi_\mu, \dot{\Omega}\right)$ поля Φ_μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω отлично от нуля. Отсюда следует существование 2π - периодического решения уравнения (2.2.4) в области Ω. Теорема 2.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.3.1. В пространстве $C[0,2\pi]$ рассмотрим область, такой

$$\Omega = \{V(\varphi): |V(\varphi) - h_0| < \varepsilon_0, 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

где $h_0 > \varepsilon_0$. На границе $\dot{\Omega}$ области Ω, введем в рассмотрение семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\left(\Phi_\mu V\right)(\varphi) = V(\varphi) - V(2\pi) - \mu \int_0^\varphi G(\psi, V(\psi), \mu) d\psi, \qquad (2.6.5)$$

$$\left(\Psi_\mu V\right)(\varphi) = V(\varphi) - V(2\pi) - \mu \int_0^\varphi F\left(V(\psi)\right) d\psi, \qquad (2.6.6)$$

здесь $G(\psi, V(\psi), \mu) = G(\varphi, V, \mu)$, а $F\left(V(\psi)\right) = \int_0^{2\pi} G(\psi, V, 0) d\psi$.

Для вывода $F\left(V(\psi)\right)$ введем в рассмотрение уравнение (2.5.2), и при $\mu \neq 0$ имеем

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{\left[\frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, V)\right)}{\partial \varphi} \cdot P(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) + \frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, V)\right)}{\partial y} \cdot Q(\varphi, Y(\varphi, V), \mu)\right]}{-\frac{\partial H(\varphi, Y(\varphi, V))}{\partial y} + \mu \cdot P(\varphi, Y(\varphi, V), \mu)}.$$

При $\mu = 0$, интегрируя функцию $dV/d\varphi$ на промежутке $[0,2\pi]$, и с учетом $V(2\pi) = V(0)$ имеем,

$$G(\psi, V, 0) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\left[\frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, V)\right)}{\partial \varphi} \cdot P(\varphi, Y(\varphi, V), 0) + \frac{\partial H\left(\varphi, Y(\varphi, V)\right)}{\partial y} \cdot Q(\varphi, Y(\varphi, V), 0)\right]}{-\frac{\partial H(\varphi, Y(\varphi, V))}{\partial y}} d\psi$$

или $F\left(V(\psi)\right) = \int_0^{2\pi} G(\psi, V, 0) d\psi$.

Отметим, что нули поля Φ_μ являются 2π-периодическими решениями уравнения (2.5.2). Покажем, что векторные поля (2.6.5) и (2.6.6) при малых значениях $\mu \neq 0$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω не имеют нулевых векторов и являются гомотопными.

Для этого достаточно показать, что следующее семейство векторных полей

$$\left(\Phi_{\mu,\lambda}V\right)(\varphi) = V(\varphi) - V(2\pi) - \mu\lambda\int_0^{\varphi} G(\psi, V(\psi), \mu)d\psi - \mu(1-\lambda)\int_0^{\varphi} F\left(V(\psi)\right)d\psi,$$

при малых значениях $\mu \neq 0$ и $\forall\, V \in \dot{\Omega}, \forall\lambda \in [0,1]$ не обращается в нуль. Действительно, если предположить противное, то существуют последовательности $\mu = \mu_k \neq 0,\ \mu_k \to 0,\ \lambda_k \in [0,1]$ и $V_k \in \dot{\Omega}$ такие, что $\left(\Phi_{\mu_k,\lambda_k} V_k\right)(\varphi) = 0$, при $\mu = \mu_k$, $\lambda = \lambda_k$, $V = V_k$. То есть,

$$V_k(\varphi) - V_k(2\pi) -$$

$$-\mu_k\lambda_k\int_0^{\varphi} G(\psi, V_k(\psi), \mu_k)d\psi - \mu_k(1-\lambda_k)\int_0^{\varphi} F\left(V_k(\psi)\right)d\psi = 0.$$

При $\varphi = 0$, имеем $V_k(0) = V_k(2\pi)$, а при $\varphi = 2\pi$, получим

$$V_k(2\pi) - V_k(2\pi)$$

$$-\mu_k\lambda_k\int_0^{2\pi} G(\psi, V_k(\psi), \mu_k)d\psi - \mu_k(1-\lambda_k)\int_0^{2\pi} F\left(V_k(\psi)\right)d\psi = 0.$$

Следовательно, при $\mu_k \neq 0$, имеем

$$\lambda_k\int_0^{2\pi} G(\psi, V_k(\psi), \mu)d\psi - (1-\lambda_k)\int_0^{2\pi} F\left(V_k(\psi)\right)d\psi = 0.$$

Следовательно, функция $V = V_k(\varphi)$ является 2π – периодическим решением дифференциального уравнения

$$\frac{dV_k}{d\varphi} = \mu_k\,\lambda_k \cdot G(\psi, V_k(\psi), \mu_k)d\psi + \mu_k(1-\lambda_k)F\left(V_k(\psi)\right), \qquad (2.6.7)$$

и удовлетворяющая условию

$$\lambda_k\int_0^{2\pi} G(\psi, V_k(\psi), \mu_k)d\psi + (1-\lambda_k)\int_0^{2\pi} F\left(V_k(\psi)\right)d\psi = 0. \qquad (2.6.8)$$

На основе (2.5.2) при $\mu_k \to 0$ последовательность производных $V_k'(\varphi) \to 0$. Следовательно, $V_k(\varphi) \to V_k(0)$. Более, того в силу теоремы Лагранжа функция $V_k(\varphi) - V_k(0) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно на промежутке $[0,\ 2\pi]$. В силу теоремы Вейерштрасса без ограничения общности можно считать, что числовые последовательности $V_k(0) \to V_0$, $\lambda_k \to \lambda_0$ при $k \to \infty$. В равенстве (2.6.8) перейдя к приделу при $k \to \infty$, получим

$$\lambda_0 \int_0^{2\pi} G(\psi, V_0, 0)d\psi + (1-\lambda_0)\int_0^{2\pi} F(V_0)d\psi = 0.$$

Так как $\int_0^{2\pi} G(\psi, V_0, 0)d\psi = F(V_0)$ и подынтегральное выражение является константой, тогда имеем

$$\lambda_0 F(V_0) + (1-\lambda_0)F(V_0)2\pi = 0,\ F(V_0)[\lambda_0 + (1-\lambda_0)2\pi] = 0,$$

а так как $\lambda_0 + (1-\lambda_0)2\pi > 0$, то $F(V_0) = 0$. Так как $h_0 - \varepsilon_0 \le V(\varphi) \le h_0 + \varepsilon_0$, то существует $\varphi_0 \epsilon [0,2\pi]$, что $V(\varphi_0) = \varepsilon_0 + h_0$ или $V(\varphi_0) = h_0 - \varepsilon_0$. С другой стороны, из условия $V_k \in \dot{\Omega}$ следует равенство $|V(\varphi) - V_0| = \varepsilon_0$, что противоречит выбору ε_0. Полученное противоречие доказывает гомотопность векторных полей (2.6.5) и (2.6.6) на границе $\dot{\Omega}$ области Ω, и справедливость равенства $\gamma(\Phi_\mu, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi_\mu, \dot{\Omega})$ при достаточно малых значениях μ. Теперь покажем, что вращение вполне непрерывного векторного поля Ψ_μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω отлично от нуля. Рассмотрим семейство векторных полей

$$(\Psi_{\lambda\mu}V)(\varphi) = V(\varphi) - V(2\pi) - \mu\int_0^{\varphi} F(V(\psi))d\psi - \mu\lambda\int_{\varphi}^{2\pi} F(V(\psi))d\psi,$$

$0 \le \lambda \le 1$. В частности, при $\lambda = 0$, имеем

$$(\Psi_{0\mu}V)(\varphi) = V(\varphi) - V(2\pi) - \mu\int_0^{\varphi} F(V(\psi))d\psi,$$

а при $\lambda = 1$, имеем

$$(\Psi_{1\mu}V)(\varphi) = V(\varphi) - V(2\pi) - \mu\int_0^{2\pi} F(V(\psi))d\psi.$$

Следовательно, $\Psi_{0\mu} = \Psi_{1\mu}$. Покажем, что векторные поля $(\Psi_{\lambda\mu}V)(\varphi)$, при малых значениях $\mu \ne 0$ и $\forall V \in \dot{\Omega}$, и $\forall\lambda \in [0,1]$ не обращается в нуль. Действительно, если предположить противное, то существуют последовательности $\mu = \mu_j \ne 0$, $\mu_j \to 0$, $\lambda_j \in [0,1]$ и $V_j(\varphi) \epsilon \dot{\Omega}$ такие, что при $\mu = \mu_j$, $\lambda = \lambda_j$, $V = V_j$ семейство вполне непрерывных векторных полей $\left(\Psi_{\lambda_j\mu_j}V_j\right)(\varphi) = 0$, т.е.

$$V_j(\varphi) - V_j(2\pi) - \mu_j\int_0^{\varphi} F\left(V_j(\psi)\right)d\psi - \mu_j\lambda_j\int_{\varphi}^{2\pi} F\left(V_j(\psi)\right)d\psi \equiv 0.$$

В данном тождестве, пологая $\varphi = 0$, и затем $\varphi = 2\pi$, получим

$$V_j(0) - V_j(2\pi) - \mu_j \lambda_j \int_0^{2\pi} F\left(V_j(\psi)\right) d\psi = 0,$$

$$V_j(2\pi) - V_j(2\pi) - \mu_j \int_0^{2\pi} F\left(V_j(\psi)\right) d\psi = 0.$$

Так как $\mu_j \to 0$, то из этих равенств следует равенство $V_j(0) = V_j(2\pi)$. Следовательно, функция $V = V_j(\varphi)$ является 2π – периодическим решением дифференциального уравнения

$$\frac{dV}{d\varphi} = \mu(1-\lambda) \cdot F\big(V(\varphi)\big), \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi$$

удовлетворяющая условию

$$\mu(1-\lambda) \cdot \int_0^{2\pi} F\big(V(\varphi)\big) = 0, \qquad (2.6.9)$$

при $\mu = \mu_j$, $\lambda = \lambda_j$. На основе (2.5.2) при $\mu_j \to 0$ последовательность производных $V_j'(\varphi) \to 0$. Следовательно, $V_j(\varphi) \to V_j(0)$. Более, того в силу теоремы Лагранжа функция $V_j(\varphi) - V_j(0) \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно на промежутке $[0, 2\pi]$. В силу теоремы Вейерштрасса без ограничения общности можно считать, что числовые последовательности $V_j(0) \to V_0$, $\lambda_j \to \lambda_0$ при $k \to \infty$. В равенстве (2.6.9), пологая $\mu = \mu_j \neq 0$, $\lambda = \lambda_j$ и $V(\varphi) = V_j(\varphi)$, затем перейдя к приделу при $j \to \infty$, получим

$$(1-\lambda_0) \cdot \int_0^{2\pi} F\big(V_0(\varphi)\big) = 0.$$

Следовательно, имеем

$$(1-\lambda_0)2\pi F(V_0) = 0,$$

а так как $(1-\lambda_0)2\pi > 0$, при $0 < \lambda_0 < 1$ то отсюда следует, что $F(V_0) = 0$. Так как $h_0 - \varepsilon_0 \le V_j(\varphi) \le h_0 + \varepsilon_0$, $\exists \varphi_0 \epsilon [0,2\pi]$, $V_j(\varphi_0) = \varepsilon_0 + h_0$ или $V_j(\varphi_0) = -\varepsilon_0 +$

h_0. С другой стороны, из условия $V_j(\varphi) \in \dot{\Omega}$ следует равенство $\left|V_j(\varphi) - V_0\right| = \varepsilon_0$, что противоречит выбору ε_0. Следовательно, поля $(\Psi_{0\mu}V)(\varphi)$ и $(\Psi_{1\mu}V)(\varphi)$ являются гомотопными на $\dot{\Omega}$ и поэтому $\gamma(\Psi_\mu, \dot{G}) = \gamma(\Psi_{1\mu}, \dot{G})$.

Оператор

$$(A_\mu V)(\varphi) = (2\pi) + \mu \int_0^{2\pi} F(V(\psi))d\psi,$$

определяющий векторное поле $\Psi_{1\mu}$, действует из пространства $C[0,2\pi]$ в подпространство постоянных функций. Это подпространство обозначим через E_0 и положим $G = \Omega \cap E_0$. Очевидно, $G = (V_0 - \varepsilon_0, V_0 + \varepsilon_0)$. Следовательно, вращение вполне непрерывного векторного поля $\Psi_{1\mu}$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω совпадет с вращением его сужения $\overline{\Psi}_{1\mu}$ на границе $\dot{G}$ области G. Нетрудно видеть, что

$$\overline{\Psi}_{1\mu}\rho \equiv -\mu \cdot 2\pi \cdot F(V), \quad V \in (V_0 - \varepsilon_0, V_0 + \varepsilon_0),$$

и поэтому его вращение $\gamma(\overline{\Psi}_{1\mu}, \dot{G})$ на границе $\dot{G}$ области G равно

$$\gamma(\overline{\Psi}_{1\mu}, \dot{G}) = -\mu \cdot \mathrm{sign}(\mathrm{sign}\, F(V_0 + \varepsilon_0) - \mathrm{sign}\, F(V_0 - \varepsilon_0))/2.$$

Следовательно, вращение $\gamma(\Phi_\mu, \dot{\Omega})$ поля Φ_μ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω отлично от нуля. Отсюда следует существование 2π - периодического решения уравнения (2.6.7) в области Ω. Теорема 2.3.1 доказана.

§ 2.7. Об одном алгоритме аналитического построения примеров

Рассмотрим примеры систем нелинейных дифференциальных уравнений, к котором можно применить теоремы (2.1.1), (2.1.2) и теорему (2.3.1).

Введем в рассмотрение примеры для систем близких к гамильтоновым. Для создания примеров нами было получено формула, позволяющая создавать серию примеров для определенного класса функций.

Предположим, что даны функции $\mathrm{F}_0(\mathrm{V})$, $\mathrm{Q}_0(\varphi, V, \mu)$, $\mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu)$, непрерывные по совокупности переменных, причем предполагается, что функция $\mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y})$ имеет непрерывную частную производную по φ и y, причем $\mathrm{H}'_y(\varphi, \mathrm{y}) \neq 0$ при всех φ и y. Определим функцию $\mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu)$ следующим равенством

$$\mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) = \mathrm{F}_0(H(\varphi, y)) \cdot \mathrm{Q}_0(\varphi, H(\varphi, y), \mu) - \mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) \cdot \frac{\mathrm{H}'_\varphi(\varphi, \mathrm{y})}{\mathrm{H}'_y(\varphi, \mathrm{y})}. \qquad (2.7.1)$$

В равенстве (2.7.1) перенеся слагаемую $\mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) \cdot \frac{\mathrm{H}'_\varphi(\varphi, \mathrm{y})}{\mathrm{H}'_y(\varphi, \mathrm{y})}$ в левую часть, получим

$$\mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) + \mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) \cdot \frac{\mathrm{H}'_\varphi(\varphi, \mathrm{y})}{\mathrm{H}'_y(\varphi, \mathrm{y})} = \mathrm{F}_0\big(H(\varphi, y)\big) \cdot \mathrm{Q}_0(\varphi, H(\varphi, y), \mu).$$

Далее, рассмотрим уравнение $\mathrm{H}(\varphi, \mathrm{y}) = V$. Полагаем, что данное уравнение имеет решение относительно y. Фиксируя φ и V, обозначим через $\mathrm{Y}(\varphi, \mathrm{V})$ – решение этого уравнения: $\mathrm{H}(\varphi, Y(\varphi, V)) \equiv V$. В равенстве (2.7.1) полагая $y = Y(\varphi, V)$, имеем:

$$\mathrm{Q}(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) + \mathrm{P}(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) \cdot \frac{\mathrm{H}'_\varphi\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)}{\mathrm{H}'_y\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)} =$$
$$= \mathrm{F}_0\Big(H\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)\Big) \cdot \mathrm{Q}_0\big(\varphi, H\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big), \mu\big).$$

Так как, $\mathrm{H}(\varphi, Y(\varphi, V)) \equiv V$, то последнее равенство можем переписать в виде

$$\mathrm{Q}(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) + \mathrm{P}(\varphi, Y(\varphi, V), \mu) \cdot \frac{\mathrm{H}'_\varphi\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)}{\mathrm{H}'_y\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)} = \mathrm{F}_0(V) \cdot \mathrm{Q}_0(\varphi, V, \mu).$$

В этом равенстве пологая $\mu = 0$, и интегрируя от 0 до 2π по φ, получим

$$\int_0^{2\pi} [\mathrm{Q}(\varphi, Y(\varphi, V), 0) + \mathrm{P}(\varphi, Y(\varphi, V), 0) \cdot \frac{\mathrm{H}'_{\varphi}\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)}{\mathrm{H}'_{y}\big(\varphi, Y(\varphi, V)\big)}]\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{F}_0(V) \cdot \mathrm{Q}_0(\varphi, V, 0) d\varphi.$$

Тогда в силу правой части $F(V)$, имеем

$$F(V) = \int_0^{2\pi} \mathrm{F}_0\big(H(\varphi, y)\big) \cdot \mathrm{Q}_0(\varphi, H(\varphi, y), 0)\, d\varphi.$$

Пример 2.7.1. Пусть $\mathrm{F}_0(V) = (V-1)^3$, а функция $\mathrm{Q}_0(\varphi, V, 0) = 3 + cos\varphi$, тогда, получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -(2 + cos\varphi), \\ \dot{y} = -sin\varphi \cdot y + \mu \cdot [(2 + cos\varphi)y - 1]^3 \cdot (3 + cos\varphi). \end{cases}$$

В рассматриваемом примере функции $H(\varphi, y) = (2 + cos\varphi) \cdot y$, $\mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) = 0$, а функция $\mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) = [(2 + cos\varphi)y - 1]^3 \cdot (3 + cos\varphi)$, то

$$F(V) = \int_0^{2\pi} (V-1)^3 \cdot (3 + cos\varphi)\, d\varphi,$$

где V – скалярный параметр. Следовательно, имеем $F(V) = 6\pi(V-1)^3$. В точке $V = V_0 = 1$, функция $F(V_0) = 0$, а его производная в этой точке $F'(V_0) = 6\pi(V_0 - 1)^3 = 0$.

Пример 2.7.2. Пусть $\mathrm{F}_0(V) = \sqrt{|V-3|}\, sign\,(V-3)$, а функция $\mathrm{Q}_0(\varphi, V, 0) = 2 + cos^2\varphi$, тогда, получим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -2y, \\ \dot{y} = -2sin\varphi + \mu \cdot \sqrt{|y^2 + 2cos\varphi - 3|}\, sign\,(y^2 + 2cos\varphi - 3) \cdot (2 + cos^2\varphi). \end{cases}$$

Так как в рассматриваемом примере функции $H(\varphi, y) = y^2 + 2cos\varphi$, $\mathrm{P}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) = 0$, а функция $\mathrm{Q}(\varphi, \mathrm{y}, \mu) = \sqrt{|y^2 + 2cos\varphi - 3|}\, sign\,(y^2 + 2cos\varphi - 3) \cdot (2 + cos^2\varphi)$, то

$$F(V) = \int_0^{2\pi} \sqrt{|V-3|}\, sign\,(V-3) \cdot (2 + cos^2\varphi)\, d\varphi,$$

где V – скалярный параметр. Следовательно, имеем $F(V) = 5\pi\sqrt{|V-3|} sign\,(V-3)$. В точке $V = V_0 = 3$, функция $F(V_0) = 0$ и в этой точке функция не дифференцируема и выполняются условия теоремы (2.3.1).

В качестве примера для системы (2.1.1) рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\ddot{x} + x = \mu \cdot \dot{x} \cdot cosx. \tag{2.7.2}$$

Уравнение (2.7.2) эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu \cdot cosx \cdot y - x. \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Стационарной точкой системы (2.7.3) является начало координат $\xi(0,0)$. При $\mu = 0$ стационарная точка системы (2.7.3) является не гиперболической и имеет тип центр, то есть при нулевом значении параметра μ данная система имеет периодическое решение. Далее, нас интересует существование периодических решений-циклов при $\mu \neq 0$. Для дальнейшего исследования переходим в полярные координаты.

Переходя из системы (2.7.3) в полярные координаты, получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\mu \cdot \rho \cdot sin^2\varphi \cdot \cos\,(\rho cos\varphi)}{\mu \cdot sin2\varphi \cdot \cos(\rho cos\varphi) - 2}. \tag{2.7.4}$$

В силу леммы 2.2.1 уравнение (2.7.4) имеет $2\pi k,\ k \in Z$ периодическое решение. Следовательно, данное решение вставляя в уравнение (2.7.4) и интегрируя полученное тождество на промежутке $[0,2\pi]$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\rho}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu \cdot \rho \cdot sin^2\varphi \cdot \cos\,(\rho cos\varphi)}{\mu \cdot sin2\varphi \cdot \cos(\rho cos\varphi) - 2} d\varphi.$$

Далее, предполагая $\mu \neq 0$ и переходя к приделу при $\mu \to \infty$ в последнем равенстве, получим

$$F(\rho) = -\frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} sin^2\varphi \cdot \cos(\rho cos\varphi)\, d\varphi.$$

В процессе исследования существования периодических решений уравнения (2.7.4), возникают трудности связанное с тем, что выявленный интеграл не имеет явное решение в квадратуре. Следовательно, применяем численные методы [16]. В частности, метод трапеций. Значение ρ из определенного отрезка, при которых функция $F(\rho) = 0$ приведено в таблице 2.7.1.

Таблица 2.7.1

№	ρ_0	$F(\rho_0) = 0$	ρ	$F(\rho) \neq 0$
1.	3.831553	0.0001010	1	2.764919
2.	7.015999	0.0001110	2.5	1.249333
3.	10.16999	0.0005351	3	0.710123
4.	16.459999	0.0007974	7.5	0.113305

А также приведен график пересечения точек нулей функции $F(\rho)$ на рисунке 2.7.1

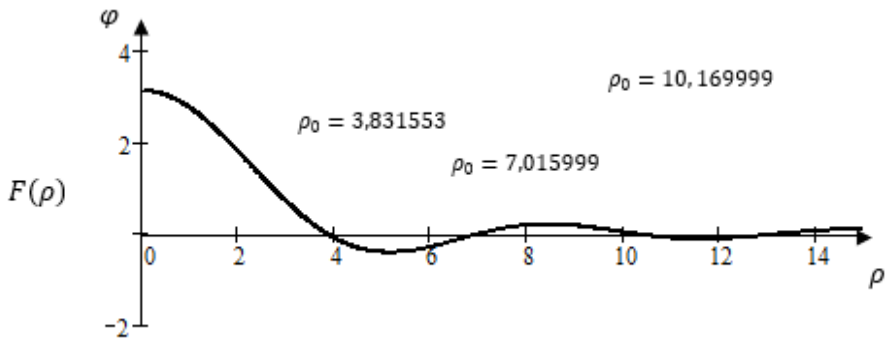

Рис.2.7.1. График пересечения точек нулей функции $F(\rho)$

Далее, проверим достаточное условие существования цикла, применяя теорему 2.1.1 и выводим результаты в виде таблицы 2.7.2.

Таблица 2.7.2

№	ε_0	$F(\rho_0+\varepsilon_0)=0$	$F(\rho_0-\varepsilon_0)=0$	ε_0	$F(\rho_0+\varepsilon_0)=0$	$F(\rho_0-\varepsilon_0)=0$
1.	0.06	-0.038595	0.040658	1	-0.395287	0.8856792
2.	0.06	0.016021	-0.01621	3	0.024757	-0.1128239
3.	0.06	-0.00864	0.009873	4.7	0.0874695	-0.393934
4.	0.06	-0.00368	0.005323	10	0.019446	-0.160584

Применяя теорему (2.1.1) вычислим вращение векторного поля соответствующее $\overline{\Psi}_{1\mu}$. Если $F(\rho_0+\varepsilon_0)>0$ и $F(\rho_0-\varepsilon_0)<0$, тогда $\Upsilon(\overline{\Psi}_{1\mu},\dot{\Omega})=-1$; и в случае $F(\rho_0+\varepsilon_0)<0$ и $F(\rho_0-\varepsilon_0)>0$, тогда $\Upsilon(\overline{\Psi}_{1\mu},\dot{\Omega})=1$.

Приведем графическую иллюстрацию возникновения циклов при $\mu\neq 0$:

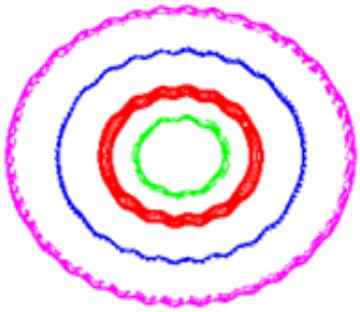

Рис.2.7.2. Циклы при $\mu=0{,}5$

Глава 3. Качественный анализ и устойчивость динамики фотосинтеза в автотрофных системах

В данной главе диссертационной работы исследуется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающий ключевой этап взаимодействия систем первичных процессов фотосинтеза с метаболическими реакциями в автотрофных системах.

В настоящее время в связи с экспоненциальным ростом численности населения, индустриальным прогрессом и, как следствие, увеличением общего загрязнения биосферы, исследование устойчивости растительных организмов к антропогенным загрязнением приобретают важнейшее практическое и теоретическое значение. Вместе с тем стала чрезвычайно актуальной проблема качественного исследования процессов фотосинтеза. В задачах, связанных с фотосинтезом, большой интерес представляет определение законов функционирования системы, а также выбор методов математического и компьютерного моделирования. Так как процесс является нелинейным, то он зависит от многих параметров. Поэтому, прежде всего следует выделять ключевые параметры. Применение элементов компьютерного моделирования намного ускоряют работу процесса.

Рассматриваемая в этой главе система, является развитием моделей, изученных в работах [78-79], [82].

Для рассматриваемой системы в этой главе выделена область, инвариантная относительно движения вдоль траектории системы при возрастании времени. В данной области установлено существование единственного стационарного решения и исследованы вопросы его устойчивости. Полученные результаты являются новыми. К ним приложены и их доказательства.

Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [4-А, 6-А, 7-А, 11-А - 12-А, 14-А].

§ 3.1. Постановка задачи

Фотосинтетическая и дыхательная цепи переноса электронов содержат участки, на которых происходят реакции последовательного переноса двух электронов с одноэлектронного на двух электронный переносчик. Так, в фотосинтетической цепи ферредоксин (Fd), непосредственно принимающий электроны от акцепторной части фотосистемы [79], в дальнейшем дважды восстанавливает молекулу ферредоксин-НАДФ-редуктазы (FNR). Традиционно данный процесс описывают с помощью уравнений действующих масс. Следует отметит, что данной тематике посвящено много работ, приведём некоторые из них [78]-[79]. На сегодняшний день математическое моделирование проникло во все области науки и производства [29]. Основной задачей химической кинетики является нахождение концентраций неизвестных функций в любой момент времени, исходя из известных начальных концентраций, схемы реакций и констант скоростей.

Настоящая глава посвящена качественному анализу нелинейной системы, а именно существование и устойчивость стационарного решения нелинейной системы трех дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k_1 bx(1-y-z) + k_{-1} b(1-x)y - k_2 bxy + k_{-2} b(1-x)z + k_0(1-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 ax(1-y-z) - k_{-1} a(1-x)y - k_2 axy + k_{-2} a(1-x)z, \\ \dfrac{dz}{dt} = k_2 axy - k_{-2} az(1-x) - k_3 z, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

описывающую фотосинтез в автотрофных системах. Здесь параметры $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3$ - являются положительными константами, в частности k_0- константа скорости притока электронов из фотосинтетической системы; k_3- константа скорости потребления электронов в цикле фиксации углерода; a- относительная концентрация первичного акцептора ферредоксина

Fd; b - относительная концентрация FNR, а x, y, z- неизвестные функции, подлежащие определению.

Система (3.1.1) была предложена Ризниченко Г.Ю. как математическая модель, описывающая ключевой этап взаимодействия систем первичных процессов фотосинтеза с системой метаболических реакций в автотрофных (фотосинтезирующих) системах, и является развитием моделей, изученных в работах [78]-[79].

Система первичных процессов фотосинтеза является уникальной субклеточной системой с точки зрения возможностей математического моделирования и качественного исследования.

Целью работы является математическое исследование в широкой области параметров решений системы уравнений, переменные которой соответствуют концентрации Fd в восстановленной форме, а также концентрации FNR в восстановленной и дважды восстановленной форме.

Выделена область

$$\Pi = \{(x, y, z):\ 0 < x < 1,\ y > 0,\ z > 0,\ y + z < 1\}, \qquad (3.1.2)$$

инвариантная относительно движения вдоль траектории системы при возрастании времени. В этой области установлено существование единственного стационарного решения системы (3.1.1) и исследованы вопросы его устойчивости.

Геометрически данная область имеет следующий вид:

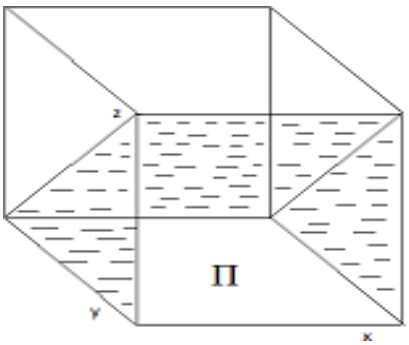

Рис.3.1.1. Область П

§ 3.2. Определение стационарных решений (особых точек)

Исследуем стационарные решения системы (3.1.1). Для этого, приравнивая к нулю правую часть системы, получим

$$\begin{cases} -k_1bx(1-y-z)+k_{-1}b(1-x)y-k_2bxy+k_{-2}b(1-x)z+k_0(1-x)=0, \\ k_1ax(1-y-z)-\ k_{-1}a(1-x)y-k_2axy+k_{-2}a(1-x)z=0, \\ k_2axy-\ k_{-2}az(1-x)-k_3z=0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Так как все параметры системы (3.2.1) положительны, первое уравнение умножаем на $(2b)^{-1}$, а второе на $(2a)^{-1}$ и третье на $(a)^{-1}$, затем складывая и вычитая полученные первые два равенства, имеем эквивалентную систему (3.2.1) системе

$$\begin{cases} -k_2xy+k_{-2}(1-x)z+\dfrac{k_0}{2b}(1-x)=0, \\ -k_1x(1-y-z)+k_{-1}(1-x)y+\dfrac{k_0}{2b}(1-x)=0, \\ k_2xy-\ k_{-2}z(1-x)-\dfrac{k_3}{a}z=0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Далее, третье уравнение системы (3.2.2) складываем с первым уравнением, получим

$$-\frac{k_3}{a}z+\frac{k_0}{2b}(1-x)=0,$$

то есть

$$z=\frac{ak_0}{2bk_3}(1-x). \quad (3.2.3)$$

С другой стороны, из третьего уравнения системы (3.2.2) получим

$$z=\frac{k_2axy}{k_{-2}a(1-x)+k_3}. \quad (3.2.4)$$

Приравнивая (3.2.3) и (3.2.4), найдем выражение k_2xy:

$$k_2xy = \frac{k_0(1-x)(a\,k_{-2}(1-x) + \ k_3)}{2bk_3}. \qquad (3.2.5)$$

Если x, y, z - решение системы (3.2.2), то из равенства (3.2.5) следует, что $x \neq 0$.

Из второго уравнения системы (3.2.2), раскрывая скобки, получим

$$-k_1x + k_1xy + k_1xz + k_{-1}(1-x)y + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0,$$

или, что то же самое,

$$-k_1x + \frac{1}{k_2}(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x})\,k_2xy + k_1xz + \frac{k_0}{2b}(1-x) = 0. \qquad (3.2.6)$$

Подставляя выражения z и k_2xy из (3.2.3) и (3.2.5) в уравнение (3.2.6), имеем

$$g(x) - k_1x + \frac{k_0(1-x)}{2b\,k_2\,k_3}\left(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x}\right)(ak_{-2}(1-x) + k_3) +$$

$$+\left(\frac{ak_0k_1}{2b\,k_3}x + \frac{k_0}{2b}\right)(1-x) = 0,$$

или

$$f(x) \equiv g(x) = 0. \qquad (3.2.7)$$

Таким образом, нами доказана следующая

Лемма 3.2.1. *Система уравнений (3.2.1) эквивалентна системе*

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ 2b\,k_2\,k_3xy - k_0(1-x)(ak_{-2}(1-x) + k_3) = 0, \\ 2b\,k_3z - ak_0(1-x) = 0. \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

Из леммы 3.2.1 следует, что по каждому решению x уравнения (3.2.7) однозначно определяется решение x, y, z системы (3.2.1). Поэтому уравнение (3.2.7) будет основным объектом для исследования вопроса разрешимости системы (3.2.7). Рациональная функция $f(x)$, определенная левой частью уравнения (3.2.7), имеет единственную точку разрыва $x = 0$.

Лемма 3.2.2. *Уравнение (3.2.7) в полуинтервале (0,1] имеет единственное решение* x_0: $0 < x_0 < 1$.

Доказательство леммы 3.2.2. Рассмотрим функцию

$$\frac{f(x)}{x} = -k_1 + \frac{k_0}{2b\,k_2\,k_3}\frac{(1-x)}{x}\left(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x}\right)(ak_{-2}(1-x)+k_3) +$$

$$+\frac{ak_0k_1}{2b\,k_3}(1-x) + \frac{k_0}{2b}\frac{1-x}{x}.$$

Так как функции $1-x$, $(1-x)/x$ монотонно убывают на отрезке (0,1] и функция $f(x)/x$ есть комбинация суммы и произведения этих функций с положительными коэффициентами, то функция $f(x)/x$ также монотонно убывает на этом отрезке. Далее значение функции $f(x)/x$ при $x=1$ равно $-k_1 < 0$, а при $x \to +0$ стремится к $+\infty$. Поэтому уравнение $\frac{f(x)}{x} = 0$, в силу теоремы Больцано-Коши, имеет решение, причем единственное. Лемма 3.2.2 доказана.

Умножая уравнение (3.2.7) на k_2x после несложных преобразований, группируя коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получим следующее уравнение относительно неизвестного x:

$$k_2xf(x) \equiv a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 = 0, \qquad (3.2.9)$$

где

$$a_1 = \frac{ak_0}{2bk_3}(k_{-2}(k_1-k_{-1}) - k_1k_2),$$

$$b_1 = \frac{ak_0}{2bk_3}(k_1k_2 + 3k_{-1}k_{-2} - 2k_1k_{-2}) - \frac{k_0}{2b}(k_1 - k_{-1} + k_2) - k_1k_2,$$

$$c_1 = \frac{k_0}{2bk_3}(ak_1k_{-2} - 3ak_{-1}k_{-2} + k_1k_3 - 2k_{-1}k_3 + k_2k_3),$$

$$d_1 = \frac{k_0}{2b}(\frac{ak_{-1}k_{-2}}{k_3} + k_{-1}).$$

Уравнение (3.2.9) является кубическим [23], [46], если $a_1 \neq 0$; квадратным, если $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ и, наконец, линейным, если $a_1 = 0$, $b_1 = 0$,$c_1 \neq 0$. Нетрудно

видеть, что при соответствующем выборе значений положительных параметров $a, b, k_0, k_{-1}, k_1, k_{-2}, k_2, k_3$ все три случая реализуются.

Ненулевое решение уравнения (3.2.9) является решением уравнения (3.2.7) и, обратно, решение уравнения (3.2.7) является решением (3.2.9). Так как коэффициент $d_1 \neq 0$, то уравнение (3.2.9) не имеет нулевого решения. Следовательно, уравнение (3.2.9) эквивалентно уравнению (3.2.7).

В силу леммы 3.2.2 уравнение (3.2.9) при любых положительных значениях параметров имеет единственный корень в интервале (0, 1). А если коэффициент $a_1 > 0$, то имеет еще два вещественных корня, один из которых отрицательный, а другой больше единицы. Заметим, что решения x, y, z системы (3.2.8), соответствующие этим корням, не принадлежат множеству $M = \{(x, y, z): x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$. Из лемм 3.2.1 и 3.2.2 следует следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Система дифференциальных уравнений (3.1.1) в множестве M имеет единственное стационарное решение, принадлежащее области (3.1.2).*

Доказательство теоремы 3.2.1. Пусть $(x, y, z) \in$ M - стационарное решение системы дифференциальных уравнений (3.1.1). В силу леммы 3.2.1 (x, y, z)- решение системы (3.2.8). Из третьего уравнения системы (3.2.8) следует, что x $\in [0,1]$ и, следовательно, из первого уравнения, в силу леммы 3.2.2, следует справедливость включения $x \in (0,1)$. Далее, из второго и третьего уравнений системы (3.2.8), следует, что $y > 0$ и z > 0.

Покажем, что точка (x, y, z) принадлежит области (3.1.2). Из определения функции $f(x)$ для решения (x, y, z) системы (3.2.8), имеем

$$k_1 x(y + z) + k_{-1}(1 - x)y + \frac{k_0}{2b}(1 - x) - k_1 x =$$

$$= -k_1 x(1 - y - z) + k_{-1}(1 - x)y + \frac{k_0}{2b}(1 - x) = f(x) = 0.$$

Следовательно,

$$k_1x(y+z)+k_{-1}(1-x)y+\frac{k_0}{2b}(1-x)-k_1x,$$

или

$$(y+z)+(k_{-1}y+\frac{k_0}{2b})\frac{1-x}{k_1x}=1.$$

Отсюда, в силу условий $x\in(0,1)$, $y>0$ и $z>0$, следует $y+z<1$. Теорема 3.2.1 доказана.

§ 3.3. Инвариантное множество относительно движения

Изучим вопрос о существовании инвариантного множества относительно движения вдоль траектории системы (3.1.1) при возрастании времени.

Теорема 3.3.1. *Если* $(x(t),y(t),z(t))$ *- решение системы (3.1.1) с начальными условиями* $(x(0),y(0),z(0))\in\Pi$, *то* $(x(t),y(t),z(t))\in\Pi$ *при* $t>0$.

Доказательство теоремы 3.3.1. По решению $(x(t),y(t),z(t))$ - системы (3.1.1) с начальным условием $(x(0),y(0),z(0))\in\Pi$ определим функцию $\varphi(t)=x(t)y(t)z(t)(1-x(t))(1-y(t)-z(t))$. Так как $\varphi(0)>0$, то наше утверждение будет доказано, если покажем, что $\varphi(t)>0$ при всех $t>0$.

Перепишем первое уравнение системы (3.1.1) в следующих формах:

$$\frac{dx}{dt}=-[k_1b(1-y-z)+k_2by]x+k_{-1}b(1-x)y+k_{-2}b(1-x)z+k_0(1-x)],$$

и

$$\frac{d(1-x)}{dt}=-[k_{-1}by+k_{-2}bz+k_0](1-x)+[k_1b(1-y-z)+k_2by]x.$$

Аналогично, из второго и третьего уравнений системы (3.1.1), имеем

$$\frac{dy}{dt}=-[k_{-1}a(1-x)+k_2ax]y+k_1ax(1-y-z)+k_{-2}a(1-x)z,$$

$$\frac{dz}{dt}=-[k_{-2}a(1-x)+k_3]z+k_2axy,$$

$$\frac{d(1-y-z)}{dt} = -k_1 ax(1-y-z) + k_{-1}a(1-x)y + k_3 z.$$

Если $(x(t), y(t), z(t))$ - решение системы (3.1.1), то приведенные выше уравнения превращаются в тождества. Ниже используются эти свойства.

Теперь предположим, что существует такое $t_0 > 0$, что $\varphi(t_0) = 0$ и $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in [0, t_0)$. Тогда все функции $x(t)$,$y(t)$,$z(t)$, $1 - x(t)$, $1 - y(t) - z(t)$, положительны на полуинтервале $[0, t_0)$ и, по крайней мере, одна из них обращается в нуль в точке $t = t_0$. Обозначим через $u(t)$ одну из обращающихся в нуль в точке $t = t_0$ функцию. Функция $u(t)$ является решением линейного дифференциального уравнения вида $u' = A(t)u + B(t)$, с начальным условием $u(0) = 0$, где функции $A(t), B(t)$ определяются в зависимости от $u(t)$, непрерывны на отрезке $[0, t_0]$, причем $B(t) > 0$, $\forall t \in [0, t_0)$.

Например, если $u(t) = 1 - x(t)$, то $A(t) = -[k_1 b(1-y-z) + k_2 by]$ и $B(t) = [k_{-1}b(1-x)y + k_{-2}b(1-x)z + k_0(1-x)]$. Поэтому $B(t) > 0$, $\forall t \in [0, t_0)$.

Так как функция $u(t)$, как решение линейного уравнения, представляется в виде $u(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tau)d\tau\right)\left[u(0) + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s A(\tau)d\tau\right)B(s)ds\right]$, то, в силу условий $u(0) > 0, B(t) > 0, \forall t \in [0, t_0)$, имеет место неравенство $u(t_0) > 0$. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Теорема 3.3.1 доказана.

Отметим, что множество $M = \{(x, y, z): x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ не является инвариантным относительно движения вдоль траектории системы (3.1.1) при возрастании времени. Действительно, пусть $(x(t), y(t), z(t))$ решение, удовлетворяющее начальному условию $\big(x(0), y(0), z(0)\big) = (2,0,2)$. Из второго уравнения системы для функции $y(t)$ имеем представление

$$y(t) = \int_0^t \exp\left(\int_0^s A(\tau)d\tau\right)B(s)ds,$$

где

$$A(t) = -[k_1 ax(t) + k_{-1}a(1 - x(t)) + k_2 x(t)],$$

и

$$B(t) = \left[k_1 a\big(1 - z(t)\big) + k_{-2} a\big(1 - x(t)\big)\right] z(t).$$

Так как

$$B(0) = \left[k_1 a\big(1 - z(0)\big) + k_{-2} a\big(1 - x(0)\big)\right] z(0) < 0,$$

то в силу непрерывности $B(t) < 0$ при достаточно малых $t > 0$. Из представления функции $y(t)$ следует, что $y(t) < 0$ при малых $t > 0$. Это означает, что решение $(x(t), y(t), z(t)) \notin M$ при малых $t > 0$. Что и требовалось доказать.

Также следует отметить, что в общем случае условия положительности параметров недостаточно для инвариантности единичного куба $K = \{(x, y, z): 0 \leq x, y, z \leq 1\} \subset M$ относительно движения вдоль траектории системы (1) при возрастании времени. Например, легко видеть, что при $k_1 > k_2$ или $a\, k_2 > k_3$ решение $(x(t), y(t), z(t))$, удовлетворяющее начальному условию $\big(x(0), y(0), z(0)\big) = (1,1,1)$, не принадлежит множеству K при достаточно малых $t > 0$. Аналогично, при $k_{-2} > k_{-1}$ решение $(x(t), y(t), z(t))$, удовлетворяющее начальному условию $\big(x(0), y(0), z(0)\big) = (0,1,1)$, также не принадлежит множеству K при достаточно малых $t > 0$.

§ 3.4. Линеаризация и особая точка

Система (3.1.1) является нелинейным. Следовательно, для дальнейшего исследования можно применить линеаризацию.

Линеаризация, является одним из методов приближенного представления замкнутых нелинейных систем, при котором исследование нелинейной системы заменяется анализом линейной системы. Исследование поведения траекторий системы (3.1.1) в окрестности стационарных решений является одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений. В силу известной теоремы о линеаризации [90], если нелинейная система имеет особую точку, тогда в малой окрестности этой особой точки фазовый портрет

нелинейной системы эквивалентен фазовому портрету линейной системы, если только особая точка не является центром. Для удобства систему (3.1.1) перепишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) - положение равновесия системы $x' = f(x)$, $(x \in R^n)$, то есть $f(x_0) = 0$. Разлагая $f(x)$ вблизи точки x_0 по формуле Тейлора до членов первого порядка малости, получаем систему

$$x_i' = a_{i1}(x_1 - x_{10}) + \cdots + a_{in}(x_n - x_{n0}) + \varphi_i(x), \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $\varphi_i(x) = o(|x - x_0|)$ при $x \to x_0$. Перенося начало координат в точку x_0 заменой $x = x_0 + y$, получаем (в векторной записи)

$$y' = Ay + \varphi_0(y), \quad \varphi_0(y) = o(|y|), \ y \to 0,$$

где $A = (a_{ij})$ матрица Якоби вектор-функции $f(x)$ в точке x_0. Применительно к системе (3.1.1), полагая $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$, $z = z_0 + w$ и разлагая систему в ряд Тейлора, имеем

$$
\begin{cases}
\dot{u} = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)w + \\
\quad + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0)uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0)v^2 + \\
\quad + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0)uw + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0)vw + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0)w^2] + \\
\qquad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w\right] \cdot f(x_0, y_0, z_0) + R_n, \\
\dot{v} = g(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v + \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)w + \\
\quad + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)u^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0)uv + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0)v^2 + \\
\quad + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0)uw + 2\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0)vw + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0)w^2] + \\
\qquad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w\right] \cdot g(x_0, y_0, z_0) + R_n, \\
\dot{u} = h(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)u + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v + \frac{\partial h}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)w + \\
\quad + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0)u^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0)uv + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0)v^2 + \\
\quad + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(x_0, y_0, z_0)uw + 2\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, z_0)vw + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0)w^2] + \\
\qquad + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w\right] \cdot h(x_0, y_0, z_0) + R_n,
\end{cases}
$$

где $R_n = \left[\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w\right]^n f(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – остаток. Отбрасывая члены высших порядков, имеем

$$
\begin{cases}
\frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w, \\
\frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w, \\
\frac{dw}{dt} = a_{31}u + a_{32}v + a_{23}w.
\end{cases}
\tag{3.4.1}
$$

Соответствующая матрица системы (3.4.1) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad (3.4.2)$$

где элементы матрицы $A = (a_{ij})$ определяются равенствами

$a_{11} = -k_1 b(1 - y_0 - z_0) - k_{-1} b y_0 - k_2 b y_0 - k_{-2} b z_0 - k_0,$

$a_{12} = k_1 b x_0 + k_{-1} b(1 - x_0) - k_2 b x_0, a_{13} = k_1 b x_0 + k_{-2} b(1 - x_0),$

$a_{21} = k_1 a(1 - y_0 - z_0) + k_{-1} a y_0 - k_2 a y_0 - k_{-2} a z_0,$

$a_{22} = -k_1 a x_0 - k_{-1} a(1 - x_0) - k_2 a x_0, a_{23} = -k_1 a x_0 + k_{-2} a(1 - x_0),$

$a_{31} = k_2 a y_0 + k_{-2} a z_0, a_{32} = k_2 a x_0,\ a_{33} = -k_{-2} a(1 - x_0) - k_3.$

§ 3.5. Устойчивость стационарного решения

Безусловно, представляется актуальным вопрос об устойчивости [17], [31], [36], [70], [85] или более точнее об асимптотической устойчивости найденного стационарного решения системы (3.1.1). Этот вопрос важен как для качественной теории дифференциальных уравнений, так и для приложения системы (3.1.1) как математической модели, описывающей биологический или физический процесс. В настоящем параграфе получен положительный ответ на сформулированный вопрос. Доказано, что стационарное решение системы (3.1.1) является асимптотически устойчивым без дополнительных ограничений на параметры $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3$ система (3.1.1) при единственном условии их положительности. Более того, доказано, что свойство асимптотической устойчивости стационарного решения системы (3.1.1) является следствием более общего свойства системы (3.1.1), а именно, что все собственные значения матрицы Якобы вектор-функции, порожденной правой частью системы (3.1.1) в любой точке области (3.1.2), имеют отрицательную вещественную часть.

Функции $a_{ij} = a_{ij}(x, y, z, a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3)$ - элементы матрицы Якоби A, нам удобно представить в виде

$a_{11} = a_{11}^0 \cdot b - k_0;\quad a_{12} = a_{12}^0 \cdot b;\quad a_{13} = a_{13}^0 \cdot b;\quad a_{21} = a_{21}^0 \cdot a;\quad a_{22} = a_{22}^0 \cdot a;$

$$a_{23} = a_{23}^0 \cdot a; \quad a_{31} = a_{31}^0 \cdot a; \quad a_{32} = a_{32}^0 \cdot a; \quad a_{33} = a_{33}^0 \cdot a - k_3,$$

где функции $a_{ij}^0 = a_{ij}^0(x, y, z, a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3)$ определяются равенствами

$$a_{11}^0 = -k_1(1 - y - z) - k_{-1}y - k_2y - k_{-2}z, a_{12}^0 = k_1x + k_{-1}(1 - x) - k_2x,$$

$$a_{13}^0 = k_1x + k_{-2}(1 - x), \quad a_{21}^0 = k_1(1 - y - z) + k_{-1}y - k_2y - k_{-2}z,$$

$$a_{22}^0 = -k_1x - k_{-1}(1 - x) - k_2x, \quad a_{23}^0 = -k_1x + k_{-2}(1 - x),$$

$$a_{31}^0 = k_2y + k_{-2}z, \quad a_{32}^0 = k_2x, \quad a_{33}^0 = -k_{-2}(1 - x).$$

Сформулируем основной результат о свойстве матрицы Якоби $A = (x, y, z)$.

Теорема 3.5.1. *Пусть точка* (x, y, z) *принадлежит области (3.1.2). Тогда все собственные значения матрицы Якоби* $A = (x, y, z)$ *имеют отрицательную вещественную часть при всех положительных значений параметров* $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3$.

Доказательство теоремы 3.5.1. Собственные значения матрицы A являются корнями характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv det(\lambda E - J) = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0, \tag{3.5.1}$$

где коэффициенты b_1, b_2, b_3 определяются через элементы матрицы (3.4.2) равенствами

$$b_1 = -(\ a_{11} + a_{22} + a_{33}); \tag{3.5.2}$$

$$b_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \tag{3.5.3}$$

$$b_3 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{3.5.4}$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица [46], корни уравнения (3.5.1) имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда коэффициенты b_1, b_2, b_3 удовлетворяют условиям

$$b_1 > 0, \quad b_1 \cdot b_2 > b_3 > 0. \tag{3.5.5}$$

Поэтому теорема 3.5.1 будет доказана, если мы установим справедливость условия (3.5.5) при любых $(x, y, z) \in \Pi$ и положительных значениях параметров $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3$. Из представления элементов $a_{ij} = a_{ij}(x, y, z, a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3)$, $i, j = 1,2,3$, непосредственно следует, что $a_{ii} < 0$, $i = 1,2,3$, при всех $(x, y, z) \in \Pi$ и положительных $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2}$, k_2, k_3. Функции $a_{ij}^0 = a_{ij}^0(x, y, z, a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3)$, $i, j = 1,2,3$ зависят от параметров $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2$ и $a_{ii}^0 < 0$ $i = 1,2,3$. Наряду с функциями a_{ij}^0 определим миноры

$$\Delta_{ij} \equiv \begin{vmatrix} a_{ii}^0 & a_{ij}^0 \\ a_{ji}^0 & a_{jj}^0 \end{vmatrix}, \qquad 1 \le i < j \le 3. \tag{3.5.6}$$

Этапы доказательства справедливости неравенств (3.5.5) изложим в виде отдельных утверждений.

Лемма 3.5.1. *Функции a_{1j}^0, a_{2j}^0, a_{3j}^0, $i = 1,2,3$ удовлетворяют условиям:*

а) $a_{1j}^0 + a_{2j}^0 + 2a_{3j}^0 \equiv 0$, $j = 1,2,3$;

б) для миноров (3.5.6) справедливы представления

$$\Delta_{12} = 2 \cdot \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x \\ k_{-1} y + k_1(1 - y - z) & k_1 x + k_{-1}(1 - x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} k_1 x + k_{-1}(1 - x) & -k_1 x \\ k_2 x & k_{-2}(1 - x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = -\frac{1}{2}\Delta_{12} + \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x - k_{-2}(1 - x) \\ k_{-1} y + k_1(1 - y - z) & k_{-1}(1 - x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = -a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0) + k_{-2}(1-x)[k_{-1}y + k_1(1-y-z)] +$$

$$+[k_{-1}y + k_1(1-y-z)] \cdot k_1 x + [k_{-1}y + k_{-2}y + k_{-2}z + k_1(1-y-z)] \cdot$$

$$\cdot [k_2 x + k_{-1}(1-x) + k_{-2}(1-x)]$$

Доказательство леммы 3.5.1. а) Покажем справедливость тождества

$$a_{1j}^0 + a_{2j}^0 + 2a_{3j}^0 \equiv 0, \quad j = 1,2,3.$$

Для $j = 1$, имеем

$$a_{11}^0 + a_{21}^0 + 2a_{31}^0 = -k_1(1-y-z) - k_{-1}y - k_2 y - k_{-2}z +$$

$$+k_1(1-y-z) + k_{-1}y - k_2 y - k_{-2}z + 2(k_2 y + k_{-2}z) \equiv 0.$$

Аналогично, для $j = 2$, имеем

$$a_{12}^0 + a_{22}^0 + 2a_{32}^0 = k_1 x + k_{-1}(1-x) - k_2 x - k_1 x - k_{-1}(1-x) - k_2 x + 2k_2 x,$$

и для $j = 3$, получим

$$a_{13}^0 + a_{23}^0 + 2a_{33}^0 = k_1 x + k_{-2}(1-x) - k_1 x + k_{-2}(1-x) - 2k_{-2}(1-x).$$

б) Используя тождества а), имеем

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^0 + a_{21}^0 & a_{12}^0 + a_{22}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a_{31}^0 & -2a_{32}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} a_{31}^0 & a_{32}^0 \\ a_{21}^0 + a_{31}^0 & a_{22}^0 + a_{32}^0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2}z & -k_2 x \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1 x + k_{-1}(1-x) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{22}^0 & a_{23}^0 \\ a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22}^0 + a_{32}^0 & a_{23}^0 + a_{33}^0 \\ a_{32}^0 & a_{33}^0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -k_1x - k_{-1}(1-x) & -k_1x \\ k_2x & -k_2(1-x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k_1x + k_{-1}(1-x) & -k_1x \\ k_2x & k_2(1-x) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{11}^0 & a_{13}^0 \\ a_{31}^0 & a_{33}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^0 + a_{31}^0 & a_{13}^0 + a_{33}^0 \\ a_{31}^0 & a_{33}^0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -k_{-1}y - k_1(1-y-z) & k_1x \\ k_2y + k_{-2}z & -k_{-2}(1-x) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1x \\ k_2y + k_{-2}z & k_{-2}(1-x) \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} k_2y + k_{-2}z & k_{-2}(1-x) \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\Delta_{12} +$$

$$+\begin{vmatrix} k_2y + k_{-2}z & -k_2x \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1x + k_{-1}(1-x) \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} k_2y + k_{-2}z & k_{-2}(1-x) \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\Delta_{12} +$$

$$+\begin{vmatrix} k_2y + k_{-2}z & -k_2x - k_{-2}(1-x) \\ k_{-1}y + k_1(1-y-z) & k_1(1-x) \end{vmatrix}.$$

Второе представление Δ_{13} проверяется аналогично. Лемма 3.5.1 доказана. Из леммы 3.5.1 следует, что миноры Δ_{12} и Δ_{23} положительны, а минор Δ_{13} может принимать отрицательное значение, но следующие суммы $\Delta_{12} + \Delta_{13}$ и $a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0) + \Delta_{13}$ положительны.

Коэффициенты характеристического уравнения (3.5.1) выразим через параметры a, b, k_0, k_3, a_{ij}^0 и миноры Δ_{12}, Δ_{13} и Δ_{23}. Из равенств (3.5.2) - (3.5.4) имеем

$$b_1 = k_0 + k_3 - a(a_{22}^0 + a_{33}^0) - ba_{11}^0, \qquad (3.5.7)$$

$$b_2 = k_0k_3 - a[k_0(a_{22}^0 + a_{33}^0) + k_3a_{22}^0] - bk_3a_{11}^0 + a^2\Delta_{23} +$$

$$+ab(\Delta_{12} + \Delta_{13}), \quad (3.5.8)$$

$$b_3 = -ak_0k_3a_{22}^0 + a^2k_0\Delta_{23} + abk_3 \cdot \Delta_{12}. \quad (3.5.9)$$

Отметим, что для получения представления коэффициента b_3 были использованы свойства а) (см. лемму 3.5.1) коэффициентов a_{ij}^0. Из равенств (3.5.7) -(3.5.9), в силу условий $a_{ij}^0 < 0$ и леммы 3.5.1 следует, что коэффициенты b_1, b_2 и b_3 положительны: $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_3 > 0$.

Лемма 3.5.2. *Справедливо тождество*

$$b_1 \cdot b_2 - b_3 = k_0(b_2 - a^2\Delta_{23} + ak_3a_{22}^0) + k_3[b_2 - ab(\Delta_{12} + \Delta_{13})] + abk_3 +$$

$$+[\Delta_{13} + a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0)] - a(a_{22}^0 + a_{33}^0)(b_2 + bk_3a_{11}^0) - ba_{11}^0 \cdot b_2. \quad (3.5.10)$$

Доказательство леммы 3.5.2. Для выражения $b_1 \cdot b_2 - b_3$, из равенств (3.5.7) – (3.5.9), имеем

$$b_1 \cdot b_2 - b_3 = k_0b_2 + k_3b_2 - a(a_{22}^0 + a_{33}^0)b_2 - ba_{11}^0 \cdot b_2 + ak_0k_3a_{22}^0 -$$

$$-a^2k_0\Delta_{23} - abk_3\Delta_{13},$$

или

$$b_1 \cdot b_2 - b_3 = k_0(b_2 - a^2\Delta_{23} + ak_3a_{22}^0) + k_3[b_2 - ab\Delta_{12}] -$$

$$-a(a_{22}^0 + a_{33}^0)b_2 - ba_{11}^0 \cdot b_2. \quad (3.5.11)$$

Теперь разность $k_3[b_2 - ab\Delta_{12}] - a(a_{22}^0 + a_{33}^0)b_2$ запишем в виде

$$k_3[b_2 - ab\Delta_{12}] - a(a_{22}^0 + a_{33}^0)b_2 = k_3[b_2 - ab(\Delta_{12} + \Delta_{13})] +$$

$$+k_3ab[\Delta_{13} + a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0)] - a(a_{22}^0 + a_{33}^0)[b_2 + bk_3a_{11}^0]. \quad (3.5.12)$$

Из равенств (3.5.11) и (3.5.12) следует равенство (3.5.10). Лемма 3.5.2 доказана. Для завершения доказательства теоремы 3.5.1 заметим, что

$$b_2 - a^2\Delta_{23} + ak_3a_{22}^0 = k_0k_3 - ak_0(a_{22}^0 + a_{33}^0) - bk_3a_{11}^0 + ab(\Delta_{12} + \Delta_{13}) > 0,$$

$$b_2 - ab(\Delta_{12} + \Delta_{13}) > 0, \qquad \Delta_{13} + a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0) > 0, \quad b_2 + bk_3a_{11}^0 > 0.$$

Поэтому из равенства (3.5.10) следует, что $b_1 \cdot b_2 - b_3 > 0$. Теорема 3.5.1 доказана.

Как приложения этой общей теоремы к исследованию устойчивости мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.5.1. *Стационарное решение системы (3.1.1) (x_0, y_0, z_0), принадлежащее области (3.1.2), является асимптотически устойчивым по Ляпунову.*

Доказательства следствия 3.5.1 вытекает из теоремы 3.5.1. Далее, рассмотрим систему (3.1.1) на разнообразие фазовых портретов.

Пусть выполнены следующие условия:

a) $b_1^2 - 3b_2 > 0$ и $b_3 \epsilon [N_1, N_2]$, тогда особой точкой является типа узлом;

b) $b_1^2 - 3b_2 > 0$ и $b_3 \notin [N_1, N_2]$, тогда особой точкой является типа фокусом, где

$$N_{1,2} = \pm \frac{2}{27}\sqrt{(b_1^2 - 3b_2)^3} + \frac{b_1 b_2}{3} - \frac{2b_1^3}{27}.$$

Пусть параметры системы (3.1.1) определены равенствами $a = 2, b = 1, k_1 = 8,\ k_{-1} = 0.4,\ k_2 = 1, k_{-2} = 0.7,\ k_0 = 0.2,\ k_3 = 2$. Тогда $(x_0,\ y_0,\ z_0) = (0.904, 0.2548, 0.0906)$ является особой точкой системы (3.1.1). Следовательно, матрица (3.4.2) имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = -6.01809, \quad \lambda_2 = -3.154974, \quad \lambda_3 = -2.068.$$

Таким образом, стационарное решение системы (3.1.1) является устойчивым узлом (см. рис.3.5.1).

Приведем другой вариант подбора параметров уравнения (3.1.1). Если $a = 1,\ b = 2,\ k_1 = 1,\ k_{-1} = 1,\ k_2 = 1,\ k_{-2} = 1,\ k_0 = 3,\ k_3 = 1,\ \ (x_0, y_0, z_0) = (0.7235,\ 0.366,\ 0.207)$ особая точка системы (3.1.1). Следовательно, матрица (3.4.2) имеет следующие собственные значения:

$$\lambda_1 = -5.9907, \lambda_2 = -1.370603 - 0.388319i,\ \lambda_3 = -1.370603 + 0.388319i.$$

Отсюда следует, что фазовый портрет системы (3.1.1) будет устойчивым фокусом [30], [71], [73-74] (см. рис. 3.5.2).

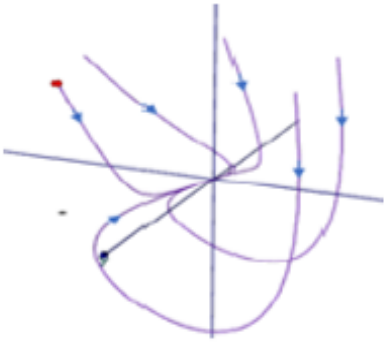

Рис. 3.5.1. Устойчивый узел

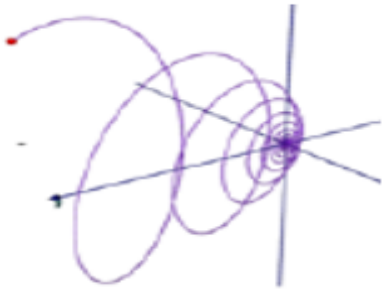

Рис. 3.5.2. Устойчивый фокус

§ 3.6. Приложения

Теоремы (3.2.1) и (3.5.1) позволяют выявить стационарное решение для системы (3.1.1) и определить тип особой точки для линеаризованной системы (3.1.1) в виде следующего алгоритма:

- Строится координаты стационарного решения на основе формул (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.7) таких, что принадлежали области (3.1.2);
- Составить линеаризованную систему для системы (3.1.1) в окрестности стационарной точки (x_0, y_0, z_0) на основе матрицы A-порожденной правой части системы $\Phi(x, y, z)$:

$$J = J(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right);$$

- Составляется программа-решения кубического уравнения относительно третьей координаты стационарной точки x_0 на основе формулы (3.2.9);
- Включен модуль Jama-matrix, который используется для решения линейной системы (3.12);
- Включен модуль Graph, для создания фазовых портретов системы (3.4.1).

Указанный алгоритм реализован автором на языке Java [94] на платформе NetBeans. В программе используются следующие блоки данных:

- блок исходных данных:

a- задаваемый параметр отношение числа молекул ферродоксина;

b- задаваемый параметр отношение числа молекул редуктазы;

$k1$-задаваемый параметр, константа скорости;

$k2$-задаваемый параметр, константа скорости;

$k3$-задаваемый параметр, константа скорости;

k_{-1} -задаваемый параметр, константа скорости;

k_{-2} -задаваемый параметр, константа скорости;

$k0$-задаваемый параметр, константа скорости.

- блок (подпрограмма CubUrRoot) вычисления первой координаты стационарной точки x0;
- блок проверки требуемого решения кубического уравнения (3.2.9) из области (3.1.2);
- блок построения координаты стационарной точки на основе (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.7) с учетом принадлежности области (3.1.2);
- блок вывода результатов (координаты стационарной точки (x_0, y_0, z_0);
- блок построения коэффициентов матрицы A;
- блок решения линеаризованной системы (3.4.1);
- блок вывода результатов (решения линеаризованной системы (3.4.1)).

3.6.1. Текст программы

```
public TextField x11Text, aText,bText,cText, dText, koefaText, koefbText, koefk1Text,
koefk2Text, koefk3Text, koefk_1Text, koefk_2Text, koefk0Text,
a11Text,b11Text,c11Text,yyText,zzText,
xxText,x100Text,x200Text,x300Text,x34Text,x24Text;
 public boolean JamaComplexFlag; private double
a0,b0,a,b,c,d,k0,k11,k1_1,k22,k2_2,k33,a_111;
private double a11,b11,c11,yy,zz,x10,x20,x30,y10,y20,y30,z10,z20, z30,x11,x12,x13;
```

```
private double x15, x25,x35,y15,y25,y35;
private double c1,c2,c3;
public double x0,y0,z0;
gridPane.setPadding(new Insets(6));
gridPane1.setPadding(new Insets(6));
gridPane2.setPadding(new Insets(6));
Label k1Label = new Label("a=");
Label k2Label = new Label(" b=");
Label k3Label = new Label(" k1=");
Label k4Label = new Label(" k2=");
Label k5Label = new Label(" k3=");
Label k6Label = new Label("k_1=");
Label k7Label = new Label("         k_2=");
Label k8Label = new Label(" k0=");
Label ppLabel = new Label("Нуктаи ороми:");
gridPane.add(k1Label, 0, 0); gridPane.add(koefaText, 1, 0);
gridPane.add(k2Label, 0, 1); gridPane.add(koefbText, 1, 1);
gridPane.add(k3Label, 0, 2); gridPane.add(koefk1Text, 1, 2);
gridPane.add(k4Label, 0, 3); gridPane.add(koefk2Text, 1, 3);
gridPane.add(k5Label, 0, 4); gridPane.add(koefk3Text, 1, 4);
gridPane.add(k6Label, 0, 5); gridPane.add(koefk_1Text, 1, 5);
gridPane.add(k7Label, 0, 6); gridPane.add(koefk_2Text, 1, 6);
gridPane.add(k8Label, 0, 7); gridPane.add(koefk0Text, 1, 7);
gridPane.add(aLabel, 0, 9); gridPane.add(aText, 1, 9);
gridPane.add(bLabel, 0, 10); gridPane.add(bText, 1, 10);
gridPane.add(cLabel, 0, 11); gridPane.add(cText, 1, 11);
gridPane.add(x100Label, 0, 21); gridPane.add(x100Text, 1, 21);
gridPane.add(x200Label, 0, 22); gridPane.add(x200Text, 1, 22);
gridPane.add(x300Label, 0, 23); gridPane.add(x300Text, 1, 23);
gridPane1.add(x11Label, 25, 0); gridPane1.add(x11Text, 26, 0);
gridPane1.add(x12Label, 25, 1); gridPane1.add(x12Text, 26, 1);
gridPane1.add(x13Label, 25, 2); gridPane1.add(x13Text, 26, 2);
gridPane.add(x1Label, 0, 12); gridPane.add(x1Text, 1, 12);
```

```
gridPane.add(x2Label, 0, 13); gridPane.add(x2Text, 1, 13);
gridPane.add(x3Label, 0, 14); gridPane.add(x3Text, 1, 14);
gridPane.add(buttonDef, 0, 15); gridPane.add(button, 1, 15);
gridPane.add(ppLabel, 0, 16); gridPane.add(xxLabel, 0, 17);
gridPane.add(xxText, 1, 17); gridPane.add(yyLabel, 0, 18);
gridPane.add(yyText, 1, 18); gridPane.add(zzLabel, 0, 19);
gridPane.add(zzText, 1, 19); gridPane1.add(button1, 26, 3);
gridPane1.add(rotateSlider,35,0,8,1);
gridPane1.add(rotateSlider1,35,1,8,1);
gridPane1.add(rotateSlider2,35,2,8,1);
gridPane1.add(graphButton,48,0); gridPane1.add(mapButton, 48, 1);
gridPane1.add(clearButton,48, 2); gridPane1.add(checkBox1, 45, 0);
gridPane1.add(checkBox2, 45, 1); gridPane1.add(checkBox3, 45,2);
startPoint.setMaterial(new PhongMaterial(Color.RED));
newGroup.getChildren().addAll(startPoint,startPointShaddow);
gridPane.setTranslateX(360); gridPane.setTranslateY(330);
gridPane1.setTranslateX(-190); gridPane1.setTranslateY(-350);
gridPane.setRotationAxis(Rotate.X_AXIS); gridPane.setRotate(-1);
gridPane1.setRotationAxis(Rotate.X_AXIS);
gridPane1.setRotate(-0.5);
CubUrRoot CubUrRoot=new CubUrRoot();
buttonDef.setOnAction((event)->{
koefaText.setText(String.valueOf(2));
koefbText.setText(String.valueOf(200));
koefk1Text.setText(String.valueOf(0.14));
koefk2Text.setText(String.valueOf(0.01));
koefk3Text.setText(String.valueOf(0.01));
koefk_1Text.setText(String.valueOf(0.2));
koefk_2Text.setText(String.valueOf(0.2));
koefk0Text.setText(String.valueOf(1));});
button.setOnAction((event)->{
a0=Double.parseDouble(koefaText.getText());
```

```
b0=Double.parseDouble(koefbText.getText());
k11=Double.parseDouble(koefk1Text.getText());
k22=Double.parseDouble(koefk2Text.getText());
k33=Double.parseDouble(koefk3Text.getText());
k1_1=Double.parseDouble(koefk_1Text.getText());
k2_2=Double.parseDouble(koefk_2Text.getText());
k0=Double.parseDouble(koefk0Text.getText());
a_111=(a0*k0)/(2*b0*k33)*(k2_2*(k11-k1_1)-k11*k22);
a=(a0*k0)/(2*b0*k33)*(k11*k22+3*k1_1*k2_2-2*k11*k2_2)- (k0/(2*b0))*(k11-k1_1+k22)-
k11*k22; b=(k0/(2*b0*k33))*(a0*k11*k2_2-3*a0*k1_1*k2_2+k11*k33-
2*k1_1*k33+k22*k33);
c=(k0/(2*b0))*(((a0*k1_1*k2_2)/k33)+k1_1);
a=a/a_111; b=b/a_111; c=c/a_111; d=0;
aText.setText(String.valueOf(Math.round(a*1000)/1000.0));
Text.setText(String.valueOf(Math.round(b*1000)/1000.0));
cText.setText(String.valueOf(Math.round(c*1000)/1000.0));
CubUrRoot.findRoot(a, b, c); if(CubUrRoot.ComplexFlag==false)
{
x1Text.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x1*1000)/1000.0));
x2Text.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x2*1000)/1000.0));
x3Text.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x3*1000)/1000.0));
checkBox2.setDisable(false);
 if((CubUrRoot.x1>0)&& (CubUrRoot.x1<1))
{
gridPane1.setStyle("-fx-background-color:#999900;
-fx-opacity:1;"); x2Text.setStyle("-fx-background-color:’white’;
-fx-opacity:1;"); x3Text.setStyle("-fx-background-color:’white’;
-fx-opacity:1;"); x1Text.setStyle("-fx-background-color:’yellow’;-fx-opacity:1;");
xxText.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x1*1000)/1000.0));
zz=((a0*k0)/(2*b0*k33))*(1-CubUrRoot.x1);
yy=k0*(1-CubUrRoot.x1)*(a0*k2_2*(1-CubUrRoot.x1)+k33)/(2*b0*k33*
k22*CubUrRoot.x1);
//linearurav
```

```
x10=-k11*b0*(1-yy-zz)-k1_1*b0*yy-k22*b0*yy-k2_2*b0*zz-k0;
x20=k11*a0*(1-yy-zz)+k1_1*a0*yy-k22*a0*yy-k2_2*a0*zz;
x30=k22*a0*yy+k2_2*a0*zz;
y10=k11*b0*CubUrRoot.x1+k1_1*b0*(1-CubUrRoot.x1)-k22*b0*CubUrRoot.x1;
y20=-k11*a0*CubUrRoot.x1-k1_1*a0*(1-CubUrRoot.x1)-k22*a0*CubUrRoot.x1;
y30=k22*a0*CubUrRoot.x1;
z10=k11*b0*CubUrRoot.x1+k2_2*b0*(1-CubUrRoot.x1);
z20=-k11*a0*CubUrRoot.x1+k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x1);
 z30=-k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x1)-k33;
}
else if((CubUrRoot.x2>0)&& (CubUrRoot.x2<1)){
x1Text.setStyle("-fx-background-color:’white’; -fx-opacity:1;");
x2Text.setStyle("-fx-background-color:’yellow’; -fx-opacity:1;");
xxText.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x2*1000)/1000.0));
zz=((a0*k0)/(2*b0*k33))*(1-CubUrRoot.x2);
yy=k0*(1-CubUrRoot.x2)*(a0*k2_2*(1-CubUrRoot.x2)+k33)/(2*b0*
k33*k22*CubUrRoot.x2);
x10=-k11*b0*(1-yy-zz)-k1_1*b0*yy-k22*b0*yy-k2_2*b0*zz-k0;
x20=k11*a0*(1-yy-zz)+k1_1*a0*yy-k22*a0*yy-k2_2*a0*zz;
x30=k22*a0*yy+k2_2*a0*zz;
y10=k11*b0*CubUrRoot.x2+k1_1*b0*(1-CubUrRoot.x2)-k22*b0*CubUrRoot.x2;
y20=-k11*a0*CubUrRoot.x2-k1_1*a0*(1-CubUrRoot.x2)-k22*a0*CubUrRoot.x2;
y30=k22*a0*CubUrRoot.x2;
z10=k11*b0*CubUrRoot.x2+k2_2*b0*(1-CubUrRoot.x2);
z20=-k11*a0*CubUrRoot.x2+k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x2);
z30=-k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x2)-k33;
}
else if((CubUrRoot.x3>0)&& (CubUrRoot.x3<1))
{
x2Text.setStyle("-fx-background-color:’white’; -fx-opacity:1;");
x3Text.setStyle("-fx-background-color:’yellow’; -fx-opacity:1;");
xxText.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x3*1000)/1000.0));
zz=((a0*k0)/(2*b0*k33))*(1-CubUrRoot.x3);
```

```
yy=k0*(1-CubUrRoot.x3)*(a0*k2_2*(1-CubUrRoot.x3)+k33)/(2*b0*
k33*k22*CubUrRoot.x3);
x10=-k11*b0*(1-yy-zz)-k1_1*b0*yy-k22*b0*yy-k2_2*b0*zz-k0;
x20=k11*a0*(1-yy-zz)+k1_1*a0*yy-k22*a0*yy-k2_2*a0*zz;
x30=k22*a0*yy+k2_2*a0*zz;}
y10=k11*b0*CubUrRoot.x3+k1_1*b0*(1-CubUrRoot.x3)-k22*b0*CubUrRoot.x3;
y20=-k11*a0*CubUrRoot.x3-k1_1*a0*(1-CubUrRoot.x3)-k22*a0*CubUrRoot.x3;
y30=k22*a0*CubUrRoot.x3;
z10=k11*b0*CubUrRoot.x3+k2_2*b0*(1-CubUrRoot.x3);
z20=-k11*a0*CubUrRoot.x3+k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x3);
z30=-k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x3)-k33;
}
else
{
checkBox2.setDisable(false);
x1Text.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x1*1000)/1000.0));
x2Text.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.h*1000)/1000.0)+
"+i*"+String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.g*1000)/1000.0));
x3Text.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.h*1000)/1000.0)+
        "-i*"+String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.g*1000)/1000.0));
if((CubUrRoot.x1>0)&& (CubUrRoot.x1<1)){
x2Text.setStyle("-fx-background-color:'white'; -fx-opacity:1;");
x3Text.setStyle("-fx-background-color:'white'; -fx-opacity:1;"); x1Text.setStyle("-fx-
background-color:'yellow'; -fx-opacity:1;");
xxText.setText(String.valueOf(Math.round(CubUrRoot.x1*1000)/1000.0));
zz=((a0*k0)/(2*b0*k33))*(1-CubUrRoot.x1);
yy=k0*(1-CubUrRoot.x1)*(a0*k2_2*(1-CubUrRoot.x1)+k33)/(2*b0*
k33*k22*CubUrRoot.x1);
x10=-k11*b0*(1-yy-zz)-k1_1*b0*yy-k22*b0*yy-k2_2*b0*zz-k0; x20=k11*a0*(1-yy-
zz)+k1_1*a0*yy-k22*a0*yy-k2_2*a0*zz; x30=k22*a0*yy+k2_2*a0*zz;
y10=k11*b0*CubUrRoot.x1+k1_1*b0*(1-CubUrRoot.x1)-k22*b0*CubUrRoot.x1; y20=-
k11*a0*CubUrRoot.x1-k1_1*a0*(1-CubUrRoot.x1)-k22*a0*CubUrRoot.x1;
y30=k22*a0*CubUrRoot.x1;
```

```
z10=k11*b0*CubUrRoot.x1+k2_2*b0*(1-CubUrRoot.x1);
z20=-k11*a0*CubUrRoot.x1+k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x1);
z30=-k2_2*a0*(1-CubUrRoot.x1)-k33;
}
}
zzText.setText(String.valueOf(Math.round(zz*1000)/1000.0));
yyText.setText(String.valueOf(Math.round(yy*1000)/1000.0));
x100Text.setText(String.valueOf(Math.round(x10*100)/100.0)+"x+"+
"("+String.valueOf(Math.round(y10*100)/100.0)+")"
+"y+"+"("+String.valueOf(Math.round(z10*100)/100.0)+")"+"z");
x200Text.setText(String.valueOf(Math.round(x20*100)/100.0)+"x+"+
"("+String.valueOf(Math.round(y20*100)/100.0)+")"
+"y+"+"("+String.valueOf(Math.round(z20*100)/100.0)+")"+"z");
x300Text.setText(String.valueOf(Math.round(x30*100)/100.0)+"x+"+
"("+String.valueOf(Math.round(y30*100)/100.0)+")"
+"y+"+"("+String.valueOf(Math.round(z30*100)/100.0)+")"+"z");});
\\Решение линеаризованной системы
  button1.setOnAction((event)-> {
Matrix matrix = new Matrix(3, 3);
matrix.set(0,0,x10);matrix.set(0,1,y10);
matrix.set(0,2,z10); matrix.set(1,0,x20); matrix.set(1,1,y20);
matrix.set(1,2,z20); matrix.set(2,0,x30); matrix.set(2,1,y30);
matrix.set(2,2,z30); EigenvalueDecomposition eig = matrix.eig();
double[] realEigenvalues = eig.getRealEigenvalues();
// Мнимая часть собственных значений
double[] imagEigenvalues = eig.getImagEigenvalues();
x15=realEigenvalues[0];
x25=realEigenvalues[1];
x35=realEigenvalues[2];
if(imagEigenvalues[0]==0 && imagEigenvalues[1]==0 && imagEigenvalues[2]==0)
JamaComplexFlag=false; else
JamaComplexFlag=true;
if(imagEigenvalues[0]==0)
```

```
{
y15=imagEigenvalues[0]; y25=imagEigenvalues[1];
y35=imagEigenvalues[2];
x15=realEigenvalues[0];
x25=realEigenvalues[1];
x35=realEigenvalues[2];
}
 if(imagEigenvalues[1]==0){
y15=imagEigenvalues[1];
y25=imagEigenvalues[0];
y35=imagEigenvalues[2];
x15=realEigenvalues[1];
x25=realEigenvalues[0];
x35=realEigenvalues[2];
}
if(imagEigenvalues[2]==0)
{
 y15=imagEigenvalues[2];
y25=imagEigenvalues[1];
y35=imagEigenvalues[0];
x15=realEigenvalues[2];
x25=realEigenvalues[1];
x35=realEigenvalues[0];
}
x11Text.setText(String.valueOf(Math.round(x15*1000)/1000.0)+"+
"+String.valueOf(Math.round(y15*1000)/1000.0)+"i");
x12Text.setText(String.valueOf(Math.round(x25*1000)/1000.0)+"+
"+String.valueOf(Math.round(y25*1000)/1000.0)+"i");
x13Text.setText(String.valueOf(Math.round(x35*1000)/1000.0)+"+
"+String.valueOf(Math.round(y35*1000)/1000.0)+"i");
txt1.set(String.valueOf(realEigenvalues[0])+ "i"+String.valueOf(imagEigenvalues[0]));});
```

Обсуждения полученных результатов

Основными результатами диссертационной работы являются теоремы 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.3.1, 2.4.1, 3.2.1, 3.3.1, 3.5.1.

Основными теоремами второй главы являются теоремы 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.3.1, 2.4.1.

Результаты второй главы являются обобщениями работы Л.С.Понтрягина [15], где исследуются вопросы о существовании циклов в нелинейныхсистемах, зависящих от малого параметра. Следует отметить, что в работе [15] получены необходимые и достаточные условия существовании циклов в случае аналитических функций. Существенным отличием полученных во второй главе результатов автора диссертационной работы от результатов выше упоминавшей работы [15] является то, что все теоремы 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.3.1, 2.4.1 получены при условии непрерывности всех входящих функций. В отличие, от работ Л.С.Понтрягина [15] в работе автора - диссертационной работы не требуется условия дифференцируемости относительно функций

$$F(r) = \int_0^{2\pi} (cos\varphi \cdot P(rcos\varphi, rsin\varphi, 0) + sin\varphi \cdot Q(rcos\varphi, rsin\varphi, 0))d\varphi,$$

и

$$F(\mathrm{h}) = \int_0^{2\pi} [\mathrm{Q}(\mathrm{u}, \mathrm{Y}(\mathrm{u}, \mathrm{h}), 0) - \mathrm{P}(\mathrm{u}, \mathrm{Y}(\mathrm{u}, \mathrm{h}), 0) \cdot \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \mathrm{u}}(\mathrm{u}, \mathrm{h})]\mathrm{du}.$$

А также для рассматриваемой системы (2.3.1) построен алгоритм аналитическиго построение примеров, который удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1, 2.4.1.

В теореме 2.1.1 утверждается, что если $\rho_0 > 0$ - решение уравнения $\mathrm{F}(\rho) = 0$ и в окрестности точки ρ_0 $[\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0]$, $\rho_0 - \varepsilon_0 > 0$ функция $\mathrm{F}(\rho) \neq 0$ при $\rho \neq \rho_0$, причем значения функции $\mathrm{F}(\rho)$ меняют знак при переходе через точку ρ_0. Тогда система (2.1.1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(\mathrm{x}(\mathrm{t}, \mu), \mathrm{y}(\mathrm{t}, \mu))$, удовлетворяющее условию

$\left|\sqrt{x^2(t,\mu)+y^2(t,\mu)}-\rho_0\right|<\varepsilon_0$. Данное утверждение обобщает достаточную часть теоремы Л.С.Понтрягина [15].

Теорема 2.2.1 является аналогом необходимого условия существования периодических решений для теоремы Л.С.Понтрягина [15]. В нем утверждается, что для некоторой последовательности значений $\mu=\mu_k\neq 0$, $\mu_k\to 0$ при $k\to\infty$ система (2.1.1) имеет периодическое решение $(x_k(t),y_k(t))$, с периодом $\omega_k>0$, удовлетворяющие условию $M_0\leq\sqrt{{x_k}^2(t)+{y_k}^2(t)}\leq M$, $M_0>0$. Тогда существует такое $\rho_0\epsilon[M_0,M]$, что $F(\rho_0)=0$.

Во втором параграфе также справедлива следующая лемма, в которой утверждается, что решение $(x(t),y(t))$ системы (2.1.1) при данном значении μ периодическое, т.е. $\big(x(t+\omega),y(t+\omega)\big)=\big(x(t),y(t)\big),\omega=\omega(\mu)>0$ тогда и только тогда, когда соответствующее решение $\rho(\varphi)=r(T(\varphi))$ скалярного уравнения (2.2.4) 2π – периодическое, т.е. $\rho(\varphi+2\pi)=\rho(\varphi)$.

Другим основным результатом второй главы является теорема 2.3.1 в которой утверждается, что, если $h_0>0$ - решение уравнения $F(h)=0$ и в окрестности точки h_0 $[h_0-\varepsilon_0,h_0+\varepsilon_0]$, $h_0-\varepsilon_0>0$ функция $F(h)\neq 0$ при $h\neq h_0$, причем значения функции $F(h)$ меняют знак при переходе через точку h_0. Тогда система (2.3.1) при достаточно малых значениях μ имеет периодическое решение $(\varphi(t,\mu),\ y(t,\mu))$, удовлетворяющее условию $|H(\varphi(t),y(t))-h_0|<\varepsilon_0$. Данное утверждение также обобщает теорему Л.С.Понтрягина о существовании периодических решений в системах нелинейных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра μ на цилиндрической поверхности.

В теореме 2.4.1 приведено необходимое условие существования периодических решений системы (2.3.1). В нем утверждается, что, если для некоторой последовательности значений $\mu=\mu_k\neq 0$, $\mu_k\to 0$ при $k\to\infty$ система (2.4.1) имеет периодическое решение $\big(\varphi_k(t),y_k(t)\big)$ с периодом $T_k>0$, удовлетворяющее условию $|\varphi(t,\mu_k)|+|y(t,\mu_k)|\leq M$, $M>0$. Тогда существует

такое h_0, что $F(h_0) = 0$. Данное утверждение также является аналогом теоремы Л.С.Понтрягина [15].

Как выше отмечалось другим важным достижением в этой главе является алгоритм аналитической построении примеров, с помощью которого можно подобрать серию примеров для определенного класса функций удовлетворяющих условий теорем 2.3.1 и 2.4.1. В этом алгоритме по заданным непрерывным по совокупности переменных функций $F_0(V)$, $Q_0(\varphi, V, \mu)$, $P(\varphi, y, \mu)$, определена функция

$$Q(\varphi, y, \mu) = F_0(H(\varphi, y)) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, y), \mu) - P(\varphi, y, \mu) \cdot \frac{H'_\varphi(\varphi, y)}{H'_y(\varphi, y)},$$

где $H(\varphi, y)$ имеет непрерывную частную производную по φ и y, причем $H'_y(\varphi, y) \neq 0$ при всех φ и y.

Затем, после простых математических вкладок получили следующее равенство

$$F(V) = \int_0^{2\pi} F_0\big(H(\varphi, y)\big) \cdot Q_0(\varphi, H(\varphi, y), 0)\, d\varphi$$

с помощью которого можно строит примеры.

Основными теоремами третьей главы являются теоремы 3.2.1, 3.3.1, 3.5.1 и леммы 3.2.1, 3.2.2, 3.5.1 и 3.5.2.

В данной главе диссертации изучается нелинейная система трех дифференциальных уравнений, описывающий фотосинтез в автотрофных системах. Система (3.1.1) описывает ключевой этап взаимодействия систем первичных процессов фотосинтеза с системой метаболических реакций в автотрофных (фотосинтезирующих) системах и является развитием моделей, изученных в работах Г.Ю.Ризниченько [77-79], А.Б.Рубин [82].

Для рассматриваемой системы в этой главе выделена область

$$\Pi = \{(x, y, z):\ 0 < x < 1,\ y > 0,\ z > 0,\ y + z < 1\},$$

инвариантная относительно движения вдоль траектории системы при возрастании времени. В данной области установлено существование

единственного стационарного решения и исследованы вопросы его устойчивости.

В теореме 3.2.1 получено условие существования единственного стационарного решения, в котором утверждается, что система дифференциальных уравнений (3.1.1) в множестве $M = \{(x, y, z): x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ имеет единственное стационарное решение, принадлежащее области П.

Теорема 3.2.1 вытекает из лемм 3.2.1 и 3.2.2. В лемме 3.2.1 утверждается, что система уравнений (3.2.1) эквивалентна системе

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ 2b\, k_2\, k_3 xy - k_0(1-x)(ak_{-2}(1-x) + k_3) = 0, \\ 2b\, k_3 z - ak_0(1-x) = 0, \end{cases}$$

где

$$f(x) = -k_1 x + \frac{k_0(1-x)}{2b\, k_2\, k_3}\left(k_1 + k_{-1}\frac{1-x}{x}\right)(ak_{-2}(1-x) + k_3) +$$

$$+\left(\frac{ak_0 k_1}{2b\, k_3} x + \frac{k_0}{2b}\right)(1-x).$$

А в лемме 3.2.2 утверждается, что уравнение $f(x)$ в полуинтервале (0,1] имеет единственное решение x_0: $0 < x_0 < 1$.

В теореме 3.3.1 рассмотрено вопрос о существовании инвариантного множества относительно движения вдоль траектории системы (3.1.1) при возрастании времени, а именно утверждается, что если $(x(t), y(t), z(t))$ - решение системы (3.1.1) с начальными условиями $(x(0), y(0), z(0))$, то $(x(t), y(t), z(t)) \in \Pi$ при $t > 0$.

Следующим основным утверждением в третье главе является теорема 3.5.1. Теорема 3.5.1 посвящен вопросу устойчивости, а именно асимптотическойустойчивости найденного стационарного решения системы (3.1.1). Доказано, что стационарное решение системы (3.1.1) является

асимптотически устойчивым без дополнительных ограничений на параметры $a, b, k_0, k_{-1}, k_1,\ k_{-2},\ k_2, k_3$ - системы (3.1.1) при единственном условии их положительности. Более того, доказано, что свойство асимптотической устойчивости стационарного решения системы (3.1.1) является следствием более общего свойства системы (3.1.1). А именно, оказалось, что все собственные значения матрицы Якоби (3.4.2), для вектор-функции, порожденной правой частью системы (3.1.1), в любой точке области (3.1.2) имеют отрицательную вещественную часть.

Как приложение этой теоремы к исследованию устойчивости стационарного решения получено следующее утверждение, что стационарное решениесистемы (3.1.1), (x_0, y_0, z_0), принадлежащее области П, является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

А также при доказательстве теоремы 3.5.1 были получены леммы 3.5.1 и 3.5.2. В лемме 3.5.1 утверждается, что функции $\mathrm{a}_{1\mathrm{j}}^0$, $\mathrm{a}_{2\mathrm{j}}^0$, $\mathrm{a}_{3\mathrm{j}}^0$, $\mathrm{i} = 1,2,3$ удовлетворяют условиям:

а) $\mathrm{a}_{1\mathrm{j}}^0 + \mathrm{a}_{2\mathrm{j}}^0 + 2\mathrm{a}_{3\mathrm{j}}^0 \equiv 0,\ \ \mathrm{j} = 1,2,3;$

б) для миноров Δ_{ij} справедливы представления

$$\Delta_{12} = 2 \cdot \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x \\ k_{-1} y + k_1(1 - y - z) & k_1 x + k_{-1}(1 - x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} k_1 x + k_{-1}(1 - x) & -k_1 x \\ k_2 x & k_{-2}(1 - x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = -\frac{1}{2}\Delta_{12} + \begin{vmatrix} k_2 y + k_{-2} z & -k_2 x - k_{-2}(1 - x) \\ k_{-1} y + k_1(1 - y - z) & k_{-1}(1 - x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{13} = -a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0) + k_{-2}(1 - x)[k_{-1} y + k_1(1 - y - z)] +$$

$$+[k_{-1} y + k_1(1 - y - z)] \cdot k_1 x + [k_{-1} y + k_{-2} y + k_{-2} z + k_1(1 - y - z)] \cdot$$

$$\cdot\,[k_2 x + k_{-1}(1-x) + k_{-2}(1-x)]$$

В лемме 3.5.2 утверждается, справедливость следующего тождества

$$b_1 \cdot b_2 - b_3 = k_0(b_2 - a^2 \Delta_{23} + a k_3 a_{22}^0) + k_3[b_2 - ab(\Delta_{12} + \Delta_{13})] + abk_3 +$$
$$+[\Delta_{13} + a_{11}^0(a_{22}^0 + a_{33}^0)] - a(a_{22}^0 + a_{33}^0)(b_2 + bk_3 a_{11}^0) - ba_{11}^0 \cdot b_2.$$

В шестом параграфе третьей главы приводится пакет программ для численного исследования нелинейной системы (3.1.1). На основе этого пакета, автоматизированы следующие процессы: выявления особой точки с учетом формул (3.2.3), (3.2.5) и (3.2.7), построение и решение линейной системы (3.4.1).

Заключение

В диссертационной работе исследованы существования периодических и стационарных решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров. Основные научные результаты диссертационной работы заключается в следующем:

- получены условия существования периодических решений для систем нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующие системам (2.1.1) и (2.3.1);
- вычислены вращения нелинейных векторных полей, соответствующие периодическим решениям систем нелинейных дифференциальных уравнений (2.1.1) и (2.3.1);
- для нелинейной системы (3.1.1), описывающий фотосинтез в автотрофных системах, получены условия существования стационарных и инвариантность решений;
- для нелинейной системы (3.1.1), описывающий фотосинтез в автотрофных системах, получены условия асимптотической устойчивости стационарных решений;
- реализован алгоритм программы нахождения стационарного решения нелинейной системы (3.1.1).

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно использовать в прикладных вопросах: в различных областях химии, биологии, техники и физики. Потому что методы качественного исследования, в частности стационарные и периодические решения систем нелинейных дифференциальных уравнений хорошо применимы в этих областях.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в научных учреждениях и вузах, в которых ведутся исследования по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности по теории периодических решений дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Список использованных источников

[1] Агафонов С.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / С.А. Агафанов, Т.В. Муратова. - М.: Academia, 2018. - 352 с.

[2] Азизов Р. О периодических и ограниченных решениях систем трёх дифференциальных уравнений с однородными главными членами [Текст] / Р. Азизов // Диссертация, Душанбе. –1995.

[3] Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. -568 с.

[4] Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И., Гордон, А.Г. Майер. -М.: Наука, 1967. - 488 с.

[5] Андронов А.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // Уч. зап. Горьк. ун-та. -1939. - вып. 6. -С. 3-24.

[6] Андронов А.А. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. -М.: Физ-матгиз, 1959. -568 с.

[7] Андронов А.А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра, и от негрубого предельного цикла [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // Математический сб. -1956. - Т. 40, вып. 2. - С. 179 - 224.

[8] Андронов А.А. Грубые системы [Текст] / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Доклады АН СССР. -1937, -Т. 14. -№ 15. -С. 247-250.

[9] Арабов М.К. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка [Текст] / М.К. Арабов // Известия АН РТ. –2015.–№1. –С. 42-49.

[10] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.И. Арнольд. -М.: Наука, 1978. - 304 с.

[11] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.И. Арнольд. -Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. -400 с.

[12] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / В.И. Арнольд // Регулярная и хаотическая динамика, 2000. -368 с.

[13] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). -М., -1985. -С. 7-149.

[14] Ахмедов Дж.Т. Периодические и ограниченные решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Дж.Т. Ахмедов // Диссертация, Душанбе. -2020.

[15] Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости [Текст] / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. -М.: Наука, 1976. -496 с.

[16] Бахвалов Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. -М.: Наука, 1975. -632 с.

[17] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений [Текст] / Р. Беллман. -М.: ИЛ., 1954. -216 с.

[18] Биркгоф Дж. Динамические системы [Текст] / Дж. Биркгоф. -М.: ОГИЗ Гостехтеориздат,1941. -320 с.

[19] Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов. -М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1974. -504 с.

[20] Бойчук А.А. Периодические решения автономных систем в критических случаях [Текст] / А.А. Бойчук, В.А. Журавлев, В.Г. Чуйко // Укр. матем. журнал. -1990. -Т. 42.-№9. -С. 1180-1187.

[21] Брусин В.А. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров [Текст] / В.А. Брусин, Ю.И. Неймарк, М.И. Фейгин // Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика. -1963. - Т. 6. -№ 4. - С. 785 - 800.

[22] Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений [Текст] / А.Д. Брюно. -М.: Наука, -1979. - 253 с.

[23] Бугров Я.С. Высшая математика [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. -513 с.

[24] Бутенин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний [Текст] / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. –М.: Наука, 1987. -382 с.

[25] Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны [Текст] / Л.А. Вайнштейн. -М.: Радио и связь, 1988. -440 с.

[26] Гарел Д.Колебательные химические реакции [Текст] / Д. Гарел, О. Гарел. – М.: Мир, 1986. -148 с.

[27] Гребенников Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем [Текст] / Е.А. Гребенников, Ю.А. Рябов. -М.: Наука, 1979. - 431 с.

[28] Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания динамические системы и бифуркации векторных полей [Текст] / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. -560 с.

[29] Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике [Текст] / Х. Гулд, Я Тобочник. -М.: Мир, 1990. -350 с.

[30] Гулов А.М. Секторное разделение и анализ рождения предельных циклов в негладких динамических системах [Текст] / А.М. Гулов // Диссертация, Душанбе. -2018.

[31] Дайсон Ф. Устойчивость и фазовые переходы [Текст] / Ф. Дайсон, Э. Монтролл, М. Кац, М. Фишер. -М.: Мир, 1973. – 189 с.

[32] Забрейко П.П. Вычисление индекса неподвижной точки векторного поля [Текст] / П.П. Забрейко, М.А. Красносельский. // СМЖ5. -1964. -№3. -С. 509-531.

[33] Иванов А.П. Основы теории систем с трением [Текст] / А.П. Иванов. -М. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Институт компьютерных исследования, 2011. -304 с.

[34] Илолов М. Об абстрактных уравнениях с неограниченными нелинейностями и их приложения [Текст] / М. Илолов, Х.С. Кучакшоев // Доклады АН РТ.-2009.-Т. 428. -№ 3.- С. 310-312.

[35] Ильин В.А. Математический анализ. Продолжение курса [Текст] / В.А. Ильин, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 1987. -358 с.

[36] Йосс Ж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций [Текст] / Ж. Йосс, Д. Джозеф. -М.: Мир, 1983. -304 с.

[37] Каток А.Б. Введение в теорию динамических систем [Текст] / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. -М.: МЦНМО, 2005. -454 с.

[38] Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. - М.: Иностранной литературы, 1958. -475 с.

[39] Колмагоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмагоров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1981. -543 с.

[40] Колемаев В.А. Математическая экономика [Текст] / В.А. Колемаев. -М.: Выс. шк.,1998. -240 с.

[41] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Гостехиздат, 1956. -390 с.

[42] Красносельский М.А. Векторные поля в плоскости [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1963. -248 с.

[43] Красносельский М.А. Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. -332 с.

[44] Красносельский М.А. О вычислении вращения векторного поля на конечномерной сфере [Текст] / М.А. Красносельский // ДАН СССР. -1966. -Т.101. -№3.

[45] Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа [Текст] / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. -М.: Наука, 1975. -512 с.

[46] Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Г. Курош. -М.: Наука, 1968. -431 с.

[47] Лере Ж. Топология и функциональные уравнения [Текст] / Ж. Лере, Ю. Шаудер. -УМЫ, -1946.

[48] Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. -М.: Наука, 1965. -520 с.

[49] Ляпунов А.М. Общие задача об устойчивости движения [Текст] / А.М. Ляпунов. -М.: ГИТТЛ, 1950. -472 с.

[50] Марри Д. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии [Текст] / Д. Марри. -М.: Мир, 1983. -397 с.

[51] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения [Текст] / И.Г. Малкин. М.: Наука, 1966. -532 с.

[52] Малкин К.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний [Текст] / К.Г. Малкин. М.: ГИТТЛ, 1949. -246 с.

[53] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [Текст] / И.Г. Малкин. М.: Гостехиздат, 1956. - 491 с.

[54] Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний [Текст] / Л.И. Мандельштам. М.: Наука, 1972. -470 с.

[55] Медведев Н.В. Об одном принципе существования периодического решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве [Текст] / Н.В. Медведев // Математические заметки. -1968. -Т.4(1). -С.105-111.

[56] Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. -М.: Наука, 1973. -512 с.

[57] Мищенко Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст] / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. - М.: Наука, 1975. -248 с.

[58] Морозов А.Д. О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа [Текст] / А.Д. Морозов // ПММ. -1989. -№5 (53) -С. 721-730.

[59] Мустафокулов Р. К теории положительных периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Р. Мустафокулов, Э. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. -1975. -Т. 18. -№10. -С. 7-10.

[60] Мухамадиев Э.М. О построении правильной направляющей функции для систем дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. -1970. -Т.190.-№4. -С. 777-779.

[61] Мухамадиев Э.М. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. -1970. -Т.194. -№3. -С.510-513.

[62] Мухамадиев Э.М. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М.

Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // Уфим. мат. журн. -2014. -Т. 6. -№ 1. -С. 84-93.

[63] Мухамадиев Э. М. Анализ рождения предельных циклов одного класса нелинейной уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, А.М. Гулов, И.Д. Нуров // Вестник ВГУ, Воронеж. -2016. -№ 1. -С. 118–125.

[64] Мухамадиев Э.М. О разрешимости одного класса нелинейных уравнений с малым параметром в банаховом пространстве [Текст] / Э.М. Мухамадиев, А.Б. Назимов, А.Н. Наимов // Уфимский матем. журнал. -2020.-Т. 12. -№ 3.-С. 67-70.

[65] Мухамадиев Э.М. О периодических и ограниченных решениях систем двух нелинейных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. – 1976. –Т.19. –№3. -С.3-6.

[66] Мухамадиев Э.М. Формула для вычисления вращения одного класса векторных полей [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. –1977. – Т.20. -№5.-С.11-14.

[67] Мухамадиев Э.М. Исследования по теории периодических и ограниченных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Диссертация. Душанбе. -1978.

[68] Немыцкий В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М.:Наука, 1949.–552 с.

[69] Нуров И.Д. Методы теории вращения векторных полей в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа [Текст] / И.Д. Нуров, М.Г. Юмагулов // Матем. моделирование и краев. задачи. – 2005. – №3. – С. 183-184.

[70] Нуров И.Д. Исследования устойчивости состояния равновесия негладких динамических систем [Текст] / И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // ДАН РТ. – 2011. -Т. 54. – №10. – С. 815-820.

[71] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: МГУ, 1984. – 296 с.

[72] Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений [Текст] / В.А. Плисс. -М.: Наука, 1977. -303 с.

[73] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1982. -334 с.

[74] Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения [Текст] / Л.С. Понтрягин. - М.: Едиториал УРСС, 2018. - 208 с.

[75] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Пуанкаре. – М.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

[76] Пуанкаре А. Избранные труды [Текст]/ А. Пуанкаре. М.: Наука, 1971. -Т.1.- 771 с.

[77] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст] / Г.Ю. Ризниченко. -М.: Ижевск, 2002. -232 с.

[78] Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст]/ Г.Ю. Ризниченко. -М.: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика, 2011. -558 с.

[79] Ризниченко Г.Ю. Математическое и компьютерное моделирование первичных процессов фотосинтеза [Текст] / Г.Ю. Ризниченко, И.Б. Коваленко, А.М. Абатурова, Д.М. Устинин, А.Б. Рубин // Биофизика 54(1): -2009. -С. 16–33.

[80] Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости [Текст] / М. Розо. - М.: Наука, 1971. -288с.

[81] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика [Текст] / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1984.–304с.

[82] Рубин А. Б. Биофизика. Том 2. Биофизика клеточных процессов 2-изд. [Текст] / А.Б. Рубин. -М.: Издательство МГУ, 2000. -468 с.

[83] Рудин У. Основы математического анализа [Текст] / У. Рудин. -М.: Мир, 1976. – 320 с.

[84] Сабиров Т.С. К вопросу об устойчивости малых периодических решений [Текст] / Т.С. Сабиров // Доклады Академии наук СССР. -1966. -Т. 167. - С. 755 - 757.

[85] Свережев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ [Текст] / Ю.М. Свережев, Д.О. Логофет. -М.: Наука, 1979. -352 с.

[86] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А.Н. Тихонов // Матем. сб., 22(64):2 (1948). - С. 193–204.

[87] Ушно Д.С. Предельные циклы одной автономной системы с алгебраическими правыми частями [Текст] / Д.С. Ушно // Дифферен. уравнения. – 1991. –Т. 27. – №11. -С. 1915-1925.

[88] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ф. Филиппов. -М.: ЛЕНАНД, 2015. – 240 с.

[89] Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст]/ А.Ф. Филиппов. -М.: ЛКИ. 2008. -240 с.

[90] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. -М.: Мир, 1970. -720 с.

[91] Шильников Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике [Текст] / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Часть 2. -М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. -548 с.

[92] Юмагулов М.Г. Введение в теории динамических систем [Текст] / М.Г. Юмагулов. – СПб.: Лань, 2014. – 272 с.

[93] Diblik J. Some asymptotic properties of solutions of homogenous linear systems of ordinary differential equations [Text] / J. Diblik // J.Math.Anal. and Appl. - 1992. -T. 165. -№1. -p. 228-304.

[94] Gulov A. M. A software package for constructing phase portraits of dynamic systems [Text] / A.M. Gulov, Z.I. Sharifzoda // Certification: That they are the authors of the computer program of the from 21.06.2019y.

[95] Liang Z. Several problems on the global analysis of the polynomial differential systems [Text] / Z. Liang // J.Cent. China Norm. Univ. Natur. Sci. – 1991. –T. 11. -№1. -p. 137-149.

[96] Liu D. Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of limit cycles for a class of polynomial system [Text] / D. Liu // Acta Math. Sci. -1991. -T. 11. -№1. -p. 65-71.

[97] Pontryagin L.S. Uber Auto Schwingungs systeme, dieden Hamiltons chennahelegen [Text] / L.S. Pontryagin // Phys. Zeitschriftder Sowjetunion. -1934. -t.6. -h. 1-2.

[98] Wazewski T. Une methode topologique de l'examen du phenomene asymptotique relativement aux equations differentielles ordinaires [Text] / T. Wazewski // Rent. Accad. Lincei. -1947. -№3. -p. 210-215.

[99] Welch S.C. A priori bounds and modal properties for periodic solutions to a class of ordinary differential equations [Text] / S.C. Welch // J. Math. Anal. and Appl. -1992. -T. 171. -№2. -p. 395-406.

[100] Yangian Y. A new method for the proof of the equace ness of limit cycles [Text] / Y. Yangian // Repts Inst. Math. -1991. -№2. -p. 1-6.

[101] Zabreiko P.P. Principles of uniform boundedness / P.P. Zabreiko, E.I. Smirnov // Math.Notes. -35:2 (1984). -p. 151-156.

2. Список публикаций соискателя учёной степени

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК при Министерстве образования и науки РФ:

[1 - A] Шарифзода З.И. Компьютерное моделирование предельных циклов уравнений маятникового типа [Текст] / И.Д. Нуров, З.И. Шарифзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2017. -№1-2. -С. 37-43.

[2 - A] Шарифзода З.И. Рекуррентное соотношение в периодических решениях нелинейного уравнения второго порядка [Текст] / З.И. Шарифзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2018. -№3. -С. 59-64.

[3 - A] Шарифзода З.И. О периодических решениях нелинейного дифференциального уравнения, зависящего от параметра [Текст] / Э.М.

Мухамадиев, И.Д. Нуров, З.И. Шарифзода // ДАН РТ. -2018. -Т.61. -№11-12. -С. 822-828.

[4 - А] Шарифзода З.И. Качественные исследования нелинейной задачи фотосинтеза [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, З.И. Шарифзода //ДАН РТ.-2019. -Т.62. -№9-10. -С. 511-518.

[5 - А] Шарифзода З.И. О циклических решениях уравнения Понтрягина с малым параметром [Текст] / З.И. Шарифзода, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. -2021. -С. 167-171.

[6 - А] Шарифзода З.И. Качественный анализ и устойчивость динамики фотосинтеза в автотрофных системах [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, З.И. Шарифзода // Владикавказский математический журнал. -2021. -Т. 23. – №3. -С. 113-125. –DOI 10.46698/u3748-9762-0471-a.

[7 - А] Шарифзода З.И. Об устойчивости стационарного решения одной нелинейной системы дифференциальных уравнений [Текст] / З.И. Шарифзода // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. –2021. -Т.64. -№11- 12. -С. 646-651.

Материалы конференций и тезисы докладов:

[8 - А] Шарифзода З.И. Компьютерный анализ возникновения предельных циклов уравнений маятникового типа [Текст] / З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // Международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию чл. корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. -Уфа, 2017. -С. 170-171.

[9 - А] Шарифзода З.И. Методом Понтрягина исследования колебательных процессов нелинейного уравнения второго порядка [Текст] / З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана Илолова Мамадшо. (Душанбе, 14-15 марта 2018г.). -Душанбе, –2018. -С. 148.

[10 - А] Шарифзода З.И. Компьютерное прогнозирования периодических решений нелинейного уравнения маятникового типа [Текст] / З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // Двадцать пятая международная конференция "Математика-Компьютер-Образования" (Пущино, 29 января-3 февраля 2018г.). -Пущино, -2018. -С. 155.

[11 - A] Шарифзода З.И. Качественное исследование системы кинетических уравнений, описывающих взаимодействие одноэлектронного и двух-электронного переносчика [Текст] / З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // Двадцать шестая международная конференция "Математика-Компьютер-Образования" (Пущино, 28 января-2 февраля 2019г.). -Пущино, -2019. -С. 17.

[12 - A] Шарифзода З.И. Об устойчивости стационарного решения одной нелинейной системы дифференциальных уравнений [Текст] /З.И. Шарифзода // Сборник тезисов международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа – 2020. Секция нелинейные уравнения". Часть 2. (Уфа, 11-14 ноября 2020г.). УФА, -2020. -С. 152-153.

[13 - A] Шарифзода З.И. Анализ существования периодических решений уравнения Понтрягина, зависящего от параметра [Текст] / З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // Материалы республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова (Душанбе, 10-11 июня 2019г.). -Душанбе, -2019. -С. 294.

[14 - A] Шарифзода З.И. Качественный анализ задачи фотосинтеза в автотрофных системах [Текст] / З.И. Шарифзода, И.Д. Нуров // Материалы республиканской научно-практической конференции "Актуальные проблемы точных наук и ИТ" посвященную 30-летию независимости РТ и 25-летию РТСУ. Душанбе, -2021г. -С. 226- 231.