Отзыв

на диссертационной работе Шарипова Бобоали «Вполне интегрируемые системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами», представленное на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02- «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Теория дифференциальных уравнений является одним из актуальных направлений теории вещественного и комплексного анализа, поскольку она применяется в решении многих задач прикладных наук: гидродинамики, газодинамики, теории поля, химии, биологии, экономики, сейсмологии, экологии и других направлений. Актуальность исследования различных задач по исследование систем дифференциальных уравнений типа полных дифференциал функций с сингулярными коэффициентами функций многих действительных и комплексных независимых переменных, а также их приложения в различных направлениях естественных наук не вызывает сомнений.

Диссертация Шарипова Б. посвящена изучению основных задач систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. В случаи тождественного выполнения условия совместности, многообразия решений изучаемых систем находятся определёнными формулами.

В главе 1 диссертации рассматриваются задачи по исследованию переопределённых систем дифференциальных уравнений с нелинейными и квазилинейными правыми частями. Для этих систем записываются условия совместности. Учитывая некоторых из функции систем известными, определяются остальные функции систем, которые обеспечивают тождественного выполнения совместности, а многообразия решений находятся определёнными формулами явно, либо в неявном виде.

1. Рассматривается система уравнений в полных дифференциалах вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y;u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y;u)}{x^n}, \quad (n \geq 0), \qquad (1)$$

где $a, b \in C^1(\overline{D}), u(x,y) \in C^2(D_0), D_0 = \overline{D} - \{\Gamma_1 : x = 0\}$, условие совместности имеет вид:

$$D_y(a) = D_x\left(\frac{b}{x^n}\right); \quad x^{n+1}a'_y + x(b\,a'_u - b'_x - a\,b'_u) + nb = 0. \qquad (N_1)$$

Если условие совместности системы (1) выполняется тождественно, то интегрируя систему (1) получим многообразия решений системы в виде

$u(x,y)=h[x,y;\Phi(C,y)]$ либо $u(x,y)=h[x,y;\Phi(u_0,y)]\in C(\overline{D})$. (2)

Аналогично предыдущим случаям, рассматривается система

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}u+\frac{h(x,y)}{y^n}u^k,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y;u)}{x^n},\ n\ge 0, k\ne 1,\ a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0). \quad (3)$$

Для существования непрерывного решения системы (3) необходимы выполнение условия леммы Михайлова Л.Г., т.е.

$\lim\limits_{y\to 0}\left(y^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^n\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$ Тогда из (3) получаем, $u=0$, $u=h_1(y)$, где эти функций будут частными, либо особыми непрерывными решениями исходной системы. Условие совместности системы (6) выполняется тождественно тогда и только тогда, когда функция $b(x,y,u)$ представима следующей формулой:

$$b(x,y,u)=x^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{y^n}\right)u+\frac{x^n}{1-k}\left\{\frac{\partial B}{\partial y}+f\left[y,\exp\big((1-k)A(x,y)\big)u^{1-k}-B(x,y)\right]\right\}\exp\big((k-1)A\big)u^k.$$

При этом система (3) разрешима, и многообразие её решений определяется в виде $u(x,y)=\exp\{A(x,y)\}\cdot[B(x,y)+V(y,C)]^{1/(1-k)}$. Заметим, что в последней формуле, во всей области $(\overline{D}\times R^1)_0$ непрерывно, а в точках линии вырождения $y=0$, имеет особенности экспоненциального характера.

В главы 2 рассматриваются системы уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными точками.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y;u)}{x^n},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y;u)}{x^n},\quad (n\ge 0) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{a_k(x;u)}{x_k^m},(x=(x_1,x_2,...,x_n),\quad (k=1,2,...,n), \quad (5)$$

В этих системах переходя в полярные системы координат, преобразуются на плоскости как круг радиуса r, а в n-мерной пространстве, как шар радиусом ρ

$$r^n\frac{\partial u}{\partial r}=p(r,\varphi;u),\ r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial r}=q(r,\varphi;u);$$

$$\rho^n\frac{\partial u}{\partial \rho}=a_1(\rho,\varphi;u),\quad \rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \varphi_k}=a_{k+1}(\rho,\varphi;u),(k=\overline{1,(n-1)}),\ \varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}). \quad (6)$$

Если в системе (6) в сингулярной точке ставить задачи Коши, то по лемме Михайлова Л.Г. найдётся функции $u=h_i(\varphi)$, которые будут частными, либо особыми решениями системы.

Пусть в системе (5) выполняются условий указанная лемма, т.е. $|u| < K,\ u'_\rho < K, \lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^m \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0, \frac{\partial a_k}{\partial u} = 0, \Rightarrow a_1 = a_1(0,\varphi) = \widetilde{a}_1(\varphi),\ (k = \overline{1,n}))$, тогда во всей данной области решение исходной системы будет непрерывным. Допустим, что во внешней области n- мерного шара $\overline{D}$: $D^- = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 > \rho^2, (1 < \rho < \infty\ ,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi)$, выполняется условий:

Лемма 2_2. *Пусть в п.д.- системе (2.4.4) ее функций удовлетворяют условиям: 1) функция $a_1(\rho,\varphi)$ всюду в области $\overline{D}$ была непрерывна, ограничена и однозначна; 2) аргументы φ_i удовлетворяют неравенствам $0 \le \varphi_i \le 2\pi\ (i = \overline{1,n})$; 3) существуют конечные пределы функций $\lim\limits_{\rho\to\infty} a_i(\rho,\varphi), (i = \overline{1,n})$; 4) функция $\frac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}$ $(m \ge 1)$ интегрируема на промежутке $(1,\infty)$. Тогда вне области D: $(\overline{D}\times R^1)^- = D^-$ всякое решение п.д.- системы (2.4.4) однозначно, непрерывно и определяется следующей формулой:*

$$u(\rho,\varphi) = C + \Phi(\varphi) - \int\limits_{\rho}^{\infty} \frac{a_1(t,\varphi)}{t^m} dt, (\rho > 1). \quad (7)$$

Тем самым, определяется решение граничной задачи систем, с сингулярными точками, внутри, вне и на особой точке. Тем самым для исходной системы находятся решение граничной задачи.

В третьей главы работы рассматриваются переопределённые обобщённые системы Коши –Римана, в классе вещественно-аналитических функций RA(D), с нелинейными и квазилинейными правыми частями, с сингулярными точками.

В работах И.Н. Векуа , Л.Г. Михайлова, З. Д.Усманова, Э.Мухаммадиева, Г.А. Магомедова, П.Н.Паламодова, А.В.Абросимова, Н. Раджабова, С.Байзоева, А. Расулова, А.Мухсинова, Дж.Сафарова. ,С.Ц. Саркисяна и другими учёными были изучены линейные о. с. К .- Р., в случаях непрерывно-дифференцируемости, нётеровости и периодичности в некоторой области, а также двоякопериодичности и троякопериодичности функций W, в различных классах - $C^1_{\bar z}, C^2_{\bar z}$. Авторами исследуется системы, и находятся многообразия решений о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z} = a(z)W + b(z)\overline{W} + c(z)\ . \quad (8)$$

Ими были получены многообразия решений о. с. К.- Р. , интегральными представлениями или интегральными операторами Коши, а также Гурса-Векуа- ***S(f), T(f),*** в этом же классе. Причём решении задач выражаются через

произвольной аналитической функции Ф(z), от одного либо многих переменных $z=(z_1,\cdots,z_n)$. Затем в 1980 году Л.Г.Михайловым, в классе вещественно-аналитических функций RA(D), впервые был опубликован в ДАН СССР работу по исследованию п.о.с. К.- Р., с регулярными правыми частями вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_1}=f_1(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_2}=f_2(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W),\qquad (9)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_k}=f_k(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,...,z_n,\bar z_n;W),\quad (k=\overline{1,n}),\qquad (10)$$

где функций $f_k\in RA(\overline{\Pi}_n)$ и аналитические по переменной W функции.

В случаи тождественного выполнения условий совместности выше указанных систем, многообразия их решений определяются через одной произвольной аналитической функцией Ф(z).

В **п.3.2.5.** рассматривается квазилинейная система (п. о. с. К.- Р.) с сингулярными точками вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_1}=\frac{a(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)}{(\bar z_1-\bar z_1^{(0)})^n}m(z_1,z_2,\bar z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_2}=\frac{b(z_2,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W)}{(\bar z_2-\bar z_2^{(0)})^n},\qquad (11)$$

где $a,b,m\in RA(\overline{\Pi}_2), W\in RA(\Pi_3^{(0)}), n\ge 1,\quad m\in A(\overline{\Pi}_3),-$ по переменным z_1 ,W. В системе (11), выполнив аналитического продолжения к функциям комплексных переменных, заменой переменных $\bar z_k$ на ς_k $(k=1,2)$, получим систему вида

$$(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)m(z_1,z_2,\varsigma_2;W),\quad (\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W).\ (12)$$

По аналогию к предыдущим главам, имеет место следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть в системе (12), при ограниченности* W'_{ς_k} *существуют пределы, и равны к нулю* $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}\right)=0,$ *то необходимо существуют функций* $W=h_1(z_1,z_2,\bar z_2), W=h_2(z_1,z_2,\bar z_1),$ *где они будут частными, либо особыми решениями исходной системы, непрерывные на данной области.*

Учитывая процесс интегрирование (12) получаем решение исходной системы формулой

$$W(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)=M^{-1}[z_1,z_2,\bar z_2;\Phi(z_1,z_2)+A(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)+F(z_1,z_2,\bar z_2)].\qquad (13)$$

Теорема 3.1. *Пусть в п. о. с. К.-Р. (11)* $a,b,m\in RA(\overline{\Pi}_2)$, $W\in RA(\Pi_3^{(0)})$, m,b *- аналитические функции по переменной W. Если в системе уравнений (12) функциц* a,m,b *удовлетворяют условию леммы 3 и ее условие совместности выполняется, но не тождественно, то находятся два частных, либо особых*

решений системы. Для того чтобы условие совместности системы (12) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ *имела определённый вид. Тогда система (11) разрешима, и многообразие её решений, найденное формулой (13), всюду в области является непрерывным по переменной* $\bar{z}_2$, *и по* $\bar{z}_1$ *при* $0\le n<1$; *в точке* $\bar{z}_1=\bar{z}_1^{(0)}$ *и в области имеющее особенности* $(n-1)-$*го порядка для значений* $n>1$, *а в случаи* $n=1$ *имеет логарифмическую особенность. Если в системе (12) её правые части в области* $\overline{\Pi}_3$ *считать аналитическими функциями, то, получим непрерывное всюду в области решение исходной системы.*

Также в работе рассматривается п.о.с. К.- Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^n}\,m(z_1,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(z_2-\bar{z}_2^{(0)})^n}\,p(z_1,z_2;W),\qquad (14)$$

где $a,b,p,m\in RA(\overline{\Pi}_2)$, $W\in RA(\Pi_3^{(0)})$. После аналитического продолжения к ее функциям, по $\bar{z}_k$ на ς_k преобразуем данную систему следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\left(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right)^n}m(z_1,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=\frac{b(z,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n}p(z_1,z_2;W).\qquad (15)$$

Учитывая условие совместности последней системы, определяется взаимосвязь между функциями системы, и справедлива следующая теорема:

Теорема 3. 2. *Пусть в п.о.с. К.-Р. (14)* $a,b\in RA(\overline{\Pi}_2)$, $m,p\in A(\overline{\Pi}_3)$, $W\in RA(\Pi_3^{(0)})$. *Если условие совместности выполняется, но не тождественно, а также выполняется условие леммы 3, тогда определяется некоторое частное, либо особое решение. Для того, чтобы условие совместности во всей области* $\overline{\Pi}_3$ *(кроме особой точки* $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)},(k=1,2)$*) выполнялась тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(...)$ *с* $a(...)$, *а также* $p(...)$ *с* $m(...)$ *были функционально зависимыми. Тогда система уравнений (14) разрешима и многообразия её решений определяется соответствующими формулами (15), причём полученное решение системы непрерывно на данной области.*

С математической точки зрения, все полученные результаты Шариповым Б. являются новыми, подробно доказаны ее теоремы, и не вызывают сомнений. Считаю, что работа Шарипова Б. «Вполне интегрируемые системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами» является законченным научным трудом, выполненная работа автором, самостоятельно и отвечает всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

Заметно, что в работе приведены приложения изучаемых систем в решении задач экономики, биологии и экологии.

К сожалению, в автореферате обнаруживается некоторые орфографические и технические ошибки, которые не уменьшают ценности выполненную работу.

Результаты, полученные диссертантом в работе, являются новыми и достоверными. Все теоремы и утверждения обоснованные строгими математическими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в журналах рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

В заключение отмечаю, что по критериям установленным в п. 9-14 «Положением о порядке присуждение учёных степеней», представленную диссертацию можно считать научно-квалифицированной и законченной работой, где получены новые результаты, имеющие значение в теории дифференциальных уравнений в частных производных, уравнений эллиптического типа, в теории переопределённых обобщённых систем Коши-Римана в классе вещественно-аналитических функций.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Представленная диссертация соответствует основным критериям «Положения о порядке присуждения учёных степеней», а ее автор Шарипов Бобоали заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук, по специальности 01.01.02-Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальные управления.

доктор физ.-мат. наук, профессор
кафедры Математического анализа Пиров Р.
ТГПУ имени С.Айни

Подпись профессора Пирова Р. заверяю:
Начальник отдела кадров ТГПУ им.С.Айни Мустафозода А.