

**Отзыв официального оппонента на диссертацию Шарипова Бобоали
«Вполне интегрируемые системы уравнений в полных дифференциалах
с сингулярными коэффициентами», представленную на соискание
учёной степени доктора физико-математических наук по специальности
01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление**

Актуальность темы диссертации. Системы уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами возникают в процессе математического моделирования многих практических задач в механике, газодинамике, гидродинамике, теории упругости, теории электромагнитных волн, океанологии, сейсмологии, медицины, экологии, экономики и др. Поэтому теория таких уравнений является одним из основных направлений научных исследований в современной математике. Одним из классов таких систем дифференциальных уравнений является класс систем уравнений в полных дифференциалах (п.д.-систем) с сингулярными коэффициентами. Именно этому классу посвящена диссертационная работа Б.Шарипова, что свидетельствует об актуальности диссертационного исследования. Среди авторов работ, посвященных исследованиям таких систем можно отметить Л.Г.Михайлова, Н.Раджабова, Э.Рузметова и др.

Оценка содержания диссертации. Диссертационная работа занимает 418 страниц, и состоит из разделов «Основные классы функций и функциональные пространства», «Литературный обзор работы, предисловие», трёх глав и списка литературы, насчитывающего 356 наименований.

В введении обосновываются актуальность темы и степень её научной разработанности, формулируются цель исследования, задачи исследования, а также приведены научная новизна исследования, и положения, выносимые на защиту.

В разделе «Основные классы функций и функциональные пространства» даётся определения классов функций $C(f, \bar{D})$, $C^1(f, \bar{D})$, $C^2(f, D_0)$, $RA(f, \bar{D})$, $C_{\bar{z}}^1(f, \bar{D})$, $C_{\bar{z}}^2(f, \bar{D})$, которые затем используются в последующих частях диссертации.

В разделе «Литературный обзор работы, предисловие» приведены обзор научной литературы по теме диссертации, цели работы, основные методы, с помощью которых получены основные научные результаты диссертации и обоснована актуальность темы исследования, а также в этом разделе приводится научная новизна полученных в диссертации результатов и изложено краткое содержание разделов диссертации.

Первая глава диссертации состоит из 12 параграфов и посвящена изучению нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах. В первые десяти параграфах рассмотрены системы двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно одной неизвестной функции u от двух неизвестных действительных переменных x и y , имеющих

общий вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u). \quad (1)$$

Сначала рассматривается классический случай, то есть, когда правые части уравнений в системе (1) непрерывны по совокупности своих переменных и имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам, а затем рассматривается различные варианты системы (1), когда функции $A(x, y, u)$, $B(x, y, u)$ имеют сингулярности на линиях $x = 0$, $y = 0$. Рассматриваются следующие случаи:

1. функция $A(x, y, u)$ допускает разделение переменных по первому и последнему аргументам, то есть $A(x, y, u) = a(x, y)m(y, u)$;
2. правая часть одного из уравнений является однородной функцией нулевого порядка или обобщенно-однородной функцией;
3. первое уравнение в системе (1) является уравнением Бернулли по параметру y ;
4. $A(x, y, u) = a(x, y) + h(x, y)u^n$;
5. $A(x, y, u) = \frac{a(x, y, u)}{x^n}$;
6. $A(x, y, u) = \frac{a(x, y, u)}{y^n}$;
7. $A(x, y, u) = \frac{1}{x^n}a(x^{(n-1)}, y, u)$;
8. $A(x, y, u) = a(x, y)u + h(x, y)u^k$;
9. $A(x, y, u) = \frac{a(x, y)}{x^n}p(u)$;
10. $A(x, y, u) = \frac{a(x, y)}{y^n}p(u)$.

Такие предположения делаются относительно правой части второго уравнения системы (1), то есть функции $B(x, y, u)$. Для всех, рассмотренных случаях системы (1), в диссертации найдены условия их совместности и в случае тождественного выполнения этих условий найдены решения исследуемых систем в явном виде.

В одиннадцатом параграфе исследуются некоторые аналоги систем, рассмотренных в предыдущих параграфах, в случае трёх дифференциальных уравнений от одной функции по трем независимым действительным переменным. В двенадцатом параграфе некоторые результаты предыдущего параграфа обобщаются для систем n дифференциальных уравнений от одной функции по n независимым действительным переменным, то есть для таких систем находится явная формула многообразия решений, а также исследуются поведения решения вблизи линии вырождения.

Вторая глава диссертационной работы Б.Шарипова посвящена систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярной точкой. Чтобы хорошо описывать поведение решения вблизи сингулярной точки, эти системы рассматриваются в полярной системе координат, и сингулярность в коэффициентах уравнений выражается множителями вида r^{-n} или ρ^{-n} , где $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости, $\rho = \rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в трёхмерном пространстве и $\rho = \rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$ в m -мерном пространстве точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Прежде чем рассмотреть системы в полных дифференциалах с сингулярной точкой с общими коэффициентами, в диссертации приведены содержательные конкретные примеры. В первом параграфе второй главы рассматриваются п.д. – системы с сингулярной точкой на плоскости, часть из которых имеют следующий общий вид

$$r^n \frac{\partial u}{\partial r} = A(r, \varphi, u), \quad r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = B(r, \varphi, u).$$

Здесь также рассматриваются п.д.-системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a(r, \varphi, u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b\left(r, \varphi, \frac{u}{r^k}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r^{k-1} a(r, \varphi, u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b\left(r, \varphi, \frac{u}{r^k}\right),$$

и т.д. Во втором параграфе второй главы изучаются аналоги п.д.-систем, рассмотренных в предыдущем параграфе, в случае трехмерного пространства, и в случае тождественного выполнения условия совместности найдены формулы многообразия её решений. В третьем параграфе рассматривается случай произвольного конечного числа независимых переменных. Этот параграф состоит из шести разделов и в этих разделах изучаются дифференциальные уравнения с сингулярной точкой вида:

$$\begin{aligned} \rho^m du &= \sum_{k=1}^n p_k(x, u) dx_k, & x = (x_1, x_2, \dots, x_n), & \rho^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2; \\ \rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} &= p_i(x)u + q_i(x), & i = 1, \dots, n; \\ \rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} &= p_i(x)u + q_i(x)u^k, & i = 1, \dots, n; \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{a(\rho, \varphi)}{\rho^m} p(\varphi, u), & \frac{\partial u}{\partial \phi_k} &= \frac{b_k(\rho, \varphi, u)}{\rho^{m-1}}, & k = 1, \dots, n-1, \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \end{aligned}$$

и т.д. Здесь, также как в предыдущих параграфах диссертации, при тождественном выполнении условия совместности найдены явные формулы многообразия решений исследуемых систем. Для рассмотренных в этом параграфе систем также найдены условия, при выполнении которых исследуемая система имеет решение непрерывное в окрестности особой точки или решение, которое имеет особенность степенного порядка

Третья глава диссертации посвящена изучению переопределенной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Для удобства чтения в первом параграфе третьей главы приведены некоторые основные результаты из теории обобщенных аналитических функций одной комплексной переменной, а также из теории обобщенных аналитических функций многих комплексных переменных, которые ранее были исследованы И.Н.Векуа и Л.Г.Михайловым. Переопределенные обобщенные системы Коши-Римана с регулярными коэффициентами также изучены в работах Л.Г.Михайлова. Основное достижение Б.Шарипова в третьей главе диссертации заключается в распространении результатов этих работ Л.Г.Михайлова на случай переопределенных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Во втором параграфе третьей главы диссертационной работы рассмотрены некоторые классы переопределенных обобщенных систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами в случае двух независимых комплексных переменных. Предполагается, что коэффициенты системы допускают разделение переменных.

Новизна полученных результатов. Все научные результаты по системам уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами, полученные в диссертации, являются новыми. Наиболее важными среди них являются:

- Найден явный вид решения п.д.-системы двух уравнений относительно одной неизвестной функции от двух независимых действительных переменных, правые части которых имеют особенности различного порядка по переменным дифференцирования, при тождественном выполнении условий совместности. Доказано, что в процессе интегрирования систем порядок особенности по каждой переменной уменьшается на единицу. В случае же простой особенности, т.е. особенности первого порядка, решение имеет логарифмическую особенность на линиях вырождения, а в случае слабой особенности система имеет непрерывное решение по всем переменным.
- Для различных видов п.д.-систем с сингулярной точкой на плоскости, в трехмерном пространстве и в многомерном пространстве, в случае тождественного выполнения условия совместности, найдены явные формулы многообразия решений. Системы, рассмотренные в трехмерном и многомерном пространствах, имеют однозначные решения, а в случае плоскости рассмотрены системы, которые имеют многозначные либо однозначные решения;
- Для переопределенных обобщенных систем Коши-Римана с произвольным числом переменных, правые части которых имеют сингулярность высшего порядка, доказано, что если в уравнениях этой системы переменная по которому берется частная производная совпадает с переменной относительно которой правая часть имеет сингулярность, то в случае тождественного выполнения условия совместности, порядок особенности решения совпадает не ниже чем порядок сингулярности коэффициентов системы.

Степень достоверности и аprobация результатов исследования. Научные положения, выводы и рекомендации, приведённые в диссертации являются обоснованными, снабжены корректными математическими доказательствами с применением методов теории уравнений с частными производными и теории функций с комплексными, что свидетельствует об их достоверности.

Основные результаты диссертации неоднократно обсуждались на международных научных конференциях, проходивших в Республике Таджикистан и Российской Федерации. Они опубликованы в 57 публикациях научной печати, в том числе, в 22 публикациях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в которых материалы диссертации отражены достаточно полно.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в научных институтах и организациях, занимающихся исследованиям по теории дифференциальных операторов в частных производных и их приложениям, в том числе в Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Институт гидродинамики СОРАН, Институте математики им. А. Джураева НАН Таджикистана, в Таджикском национальном университете, в Таджикском государственном педагогическом университете им. С. Айни и в других учебных заведениях в учебном процессе при чтении спецкурсов.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат диссертации правильно и полно отражает содержание, актуальность темы исследования, новизну и значимость полученных результатов, содержит все основные положения и выводы. Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. В диссертации имеется отдельные опечатки и стилистические погрешности, например:

- в автореферате начиная со стр. 5 используется сокращение п. о. с. К.-Р., но её определение отсутствует, это определение имеется на стр. 277 диссертации «... были рассмотрены переопределённые обобщённые системы Коши- Римана (п.о.с.К.-Р.);
- в третьей главе диссертации изучаются переопределенные обобщённые системы Коши- Римана в случаях двух независимых комплексных переменных, трех независимых комплексных переменных и произвольного числа независимых комплексных переменных, однако, эти случаи, по существу, мало отличаются друг от друга, поэтому выделяя существенные моменты, можно было значительно сократить объём третьей главы диссертации;
- до третьего параграфа третьей главы тройная нумерация формул означает, что перв-

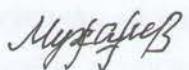
вая цифра – номер главы, второе число – номер параграфа в главе, а третье число – номер формулы в параграфе, начиная со стр. 311 это правило нарушается, в третьем параграфе третьей главы используются номера (3.4.1), (3.4.2) и т.д.; начиная со стр. 313 в третьем параграфе используются номера (3.5.1), (3.5.2) и т.д.; начиная со стр. 316 в третьем параграфе используются номера (3.6.1), (3.6.2) и т.д.,

однако они не влияют на положительную оценку диссертационной работы.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». Диссертационная работа «Вполне интегрируемые системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами», представленная на соискание учёной степени доктора физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории уравнений с частными производными, и полностью соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а её автор Шарипов Бобоали заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

Мухамадиев Эргашбай, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, член-корреспондент НАН Республики Таджикистан, профессор кафедры математики и информатики Вологодского государственного университета



Адрес места работы: 160000, Россия, Вологда, ул. Ленина, 15,

Тел. (моб.): +79535168829,

E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
Ведущий специалист по персоналу
Управления правового и кадрового
обеспечения

09.03.2023

