

«УТВЕРЖДАЮ»

**Директор Института математики
им. А.Джураева Национальной
академии наук Таджикистана,
академик**



З.Х.Рахмонов

«03» марта 2023 г.

**Отзыв ведущей организации
на диссертацию Шарипова Бобоали «Вполне интегрируемые системы
уравнений в полных дифференциалах с сингулярными
коэффициентами», представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 –
Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление**

Актуальность темы диссертации. Одно из основных направлений современной теории дифференциальных уравнений посвящено изучению систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами. Это обусловлено тем, что теоретические результаты этого направления имеют и практические приложения, так как такие систем уравнений возникают в процессе математического моделирования многих практических задач в механике, гидродинамике, газодинамике, теории упругости, теории электромагнитных волн, океанологии, сейсмологии, медицины, экологии, экономики и др. Одним из классов таких систем дифференциальных уравнений является класс систем уравнений в полных дифференциалах (п.д.-систем) с сингулярными коэффициентами. Именно этому классу посвящена диссертационная работа Б.Шарипова, что свидетельствует об актуальности диссертационного исследования. Среди авторов работ, посвящённых исследованиям таких систем можно отметить Л.Г.Михайлова, Н.Раджабова, Э.Рузметова и др.

Оценка содержания диссертации. Диссертационная работа Б.Шарипова состоит из разделов «Основные классы функций и функциональные пространства», «Литературный обзор работы, предисловие», трёх глав, списка литературы, насчитывающего 356 наименований.

В разделе «Основные классы функций и функциональные пространства» приведены определения и основные свойства классов функций, которые неоднократно используются в основной части диссертации. В этом разделе, в частности, изучаются классы $C(f, \bar{D})$, $C^1(f, \bar{D})$, $C^2(f, D_0)$, $RA(f, \bar{D})$, $C_{\bar{z}}^1(f, \bar{D})$, $C_{\bar{z}}^2(f, \bar{D})$.

В разделе «Литературный обзор работы, предисловие» приведён обзор научной литературы по теме диссертации и обоснована актуальность исследования. В этом разделе также выделены цели диссертационного исследования, указаны основные методы, с помощью которых получены основные научные результаты диссертации. Здесь также указана научная новизна полученных в диссертации результатов и изложено краткое содержание разделов диссертации.

Первая глава диссертации, состоящая из 12 параграфов, посвящена изучению нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах. В параграфах 1 – 10 первой главы рассматриваются системы двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно одной неизвестной функции u от двух неизвестных действительных переменных x, y . Рассмотренные в этой главе системы имеют следующий общий вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = B(x, y, u). \quad (1)$$

Для простоты изложения автор сначала рассматривает классический случай, то есть, когда правые части уравнений в системе (1) непрерывны по совокупности своих переменных и имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Затем в работе рассматриваются различные варианты системы (1), когда функции $A(x, y, u), B(x, y, u)$ имеют сингулярности на линиях $x = 0, y = 0$. В частности, рассматриваются случаи, когда:

- функция $A(x, y, u)$ допускает разделение переменных по первому и последнему аргументам, то есть $A(x, y, u) = a(x, y)m(y, u)$;
- первое уравнение в системе (1) является уравнением Бернулли по параметру y ;
- $A(x, y, u) = a(x, y) + h(x, y)u^n$;
- $A(x, y, u) = \frac{a(x, y, u)}{x^n}$;
- $A(x, y, u) = \frac{a(x, y, u)}{y^n}$;
- $A(x, y, u) = \frac{1}{x^n}a(x^{n-1}, y, u)$;
- $A(x, y, u) = a(x, y)u + h(x, y)u^k$;
- $A(x, y, u) = \frac{a(x, y)}{x^n}p(u)$;
- $A(x, y, u) = \frac{a(x, y)}{y^n}p(u)$.

Подобные предположения делаются относительно правой части второго уравнения системы (1), то есть функции $B(x, y, u)$.

Для всех, рассмотренных случаев системы (1), в диссертации найдены условия их совместности, и в случае тождественного выполнения этих условий найдены решения исследуемых систем в явном виде.

В одиннадцатом параграфе первой главы изучаются некоторые аналоги систем, рассмотренных в предыдущих параграфах, в случае трёх дифференциальных уравнений от одной функции по трём независимым действительным переменным. В последнем параграфе первой главы обобщается часть результатов параграфа 11 на случай систем n дифференциальных уравнений от одной функции по n независимым действительным переменным, где n – любое натуральное число. Кроме получения явной формулы для многообразия решений исследуемых систем автор также исследует поведения решения вблизи линии вырождения.

Вторая глава диссертационной работы Б.Шарипова посвящена системам уравнений в полных дифференциалах с сингулярной точкой. Исследование таких систем удобно в полярной системе координат, так как сингулярную точку можно перенести в начало системы координат. Сингулярность в коэффициентах исследуемых уравнений выражается множителями вида r^{-n} или ρ^{-n} , где $r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости, $\rho = \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в трёхмерном пространстве и $\rho = \rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$ в m -мерном пространстве точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Прежде чем рассмотреть системы в полных дифференциалах с сингулярной точкой с общими коэффициентами, в диссертации приведены содержательные конкретные примеры. В первом параграфе второй главы рассматриваются п.д. – системы с сингулярной точкой на плоскости, часть из которых имеют следующий общий вид

$$r^n \frac{\partial u}{\partial r} = A(r, \varphi, u), \quad r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = B(r, \varphi, u).$$

Здесь также рассматриваются п.д.-системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a(r, \varphi, u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b\left(r, \varphi, \frac{u}{r^k}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r^{k-1} a(r, \varphi, u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b\left(r, \varphi, \frac{u}{r^k}\right)$$

и т.д.

Во втором параграфе второй главы изучаются аналоги п.д.-систем, рассмотренных в предыдущем параграфе, в случае трёхмерного пространства, и в случае тождественного выполнения условия совместности найдены формулы многообразия её решений.

В третьем параграфе второй главы рассматривается случай произвольного конечного числа независимых переменных. Этот параграф состоит из шести разделов и в этих разделах изучаются дифференциальные уравнения с сингулярной точкой следующих видов:

$$\begin{aligned} \rho^m du &= \sum_{k=1}^n p_k(x, u) dx_k, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \rho^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2; \\ \rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} &= p_i(x)u + q_i(x), \quad i = \overline{1, n}; \\ \rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} &= p_i(x)u + q_i(x)u^k, \quad i = \overline{1, n}; \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} &= \frac{a(\rho, \varphi)}{\rho^m} p(\varphi, u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_k} = \frac{b_k(\rho, \varphi, u)}{\rho^{m-1}}, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}) \end{aligned}$$

и т.д. Здесь, также как в предыдущих параграфах диссертации, при тождественном выполнении условия совместности, найдены явные формулы многообразия решений исследуемых систем. Для рассмотренных в этом параграфе систем также найдены условия, при выполнении которых исследуемая система имеет решение непрерывное в окрестности особой точки или решение, которое имеет особенность степенного порядка.

Третья глава диссертационной работы посвящена изучению переопределённой обобщённой системы Коши-Римна с сингулярными коэффициентами. Для удобства чтения в первом параграфе третьей главы приведены некоторые основные результаты из теории обобщённых аналитических функций одной комплексной переменной, принадлежащих И.Н.Бекуа, а также из теории обобщённых аналитических функций многих комплексных переменных, принадлежащих Л.Г.Михайлову. Переопределенные обобщённые системы Коши-Римана с регулярными коэффициентами также изучены в работах Л.Г.Михайлова. Основное достижение Б.Шарипова в третьей главе диссертации заключается в распространении результатов этих работ Л.Г.Михайлова на случай переопределённых обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами.

Во втором параграфе третьей главы диссертационной работы рассмотрены некоторые классы переопределённых обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами в случае двух независимых комплексных переменных. Предполагается, что коэффициенты системы допускают разделение переменных. В начале параграфа рассматривается система, коэффициенты которой имеют сингулярность первого порядка. Для этой системы найдены условия на коэффициенты, при выполнении которых система имеет непрерывное решение. Также выделен случай, когда

исследуемая система Коши-Римана имеет решение, которое в точке сингулярности имеет логарифмическую особенность. Далее, в других разделах второго параграфа третьей главы изучаются переопределённые обобщённые системы Коши-Римана, коэффициенты которых имеют сингулярность не ниже второго порядка. В работе найдены условия совместности таких систем и при тождественном выполнении этих условий найдены явные формулы их решения. Из этой формулы следует, что степень сингулярности решения системы на единицу меньше, чем степени сингулярности коэффициентов.

В пятом параграфе третьей главы изучаются некоторые классы систем дифференциальных уравнений Коши-Римана в пространстве трёх комплексных переменных. Аналоги таких систем в случае произвольного числа независимых переменных рассмотрены в шестом параграфе третьей главы.

В седьмом параграфе третьей главы рассматриваются переопределённые обобщённые системы Коши-Римана, правая часть которых содержит степени неизвестной функции, а восьмом параграфе этой главы изучены переопределённые обобщённые системы Коши-Римана с однородными функциями.

Новизна полученных результатов.

Все научные результаты по системам уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами, полученные в диссертации, являются новыми. Наиболее важными среди них являются:

- Найден явный вид решения п.д.-системы двух уравнений относительно одной неизвестной функции от двух независимых действительных переменных, правые части которых имеют особенности различного порядка по переменным дифференцирования, при тождественном выполнении условий совместности. Доказано, что в процессе интегрирования систем порядок особенности по каждой переменной уменьшается на единицу. В случае же простой особенности, т.е. особенности первого порядка, решение имеет логарифмическую особенность на линиях вырождения, а в случае слабой особенности система имеет непрерывное решение по всем переменным.
- Для различных видов п.д.-систем с сингулярной точкой на плоскости, в трёхмерном и в многомерном пространствах, в случае тождественного выполнения условия совместности, найдены явные формулы многообразия решений. Системы, рассмотренные в трёхмерном и многомерном пространствах, имеют однозначные решения, а в случае плоскости рассмотрены

системы, которые имеют многозначные либо однозначные решения;

- Для переопределённых обобщенных систем Коши-Римана с произвольным числом переменных, правые части которых имеют сингулярность высшего порядка, доказано, что если в уравнениях этой системы переменная, по которой берётся частная производная совпадает с переменной, относительно которой правая часть имеет сингулярность, то в случае тождественного выполнения условия совместности порядок особенности решения не ниже, чем порядок сингулярности коэффициентов системы.

Степень достоверности и апробация результатов исследования. Все научные результаты, полученные в диссертации Б.Шарипова, сформулированы в виде теорем, которые приведены с подробными строгими математическими доказательствами с применением современных методов теории уравнений с частными производными и теории функций с комплексными переменными. Достоверность и новизна полученных автором результатов не вызывает сомнений. Результаты диссертационной работы были доложены на нескольких международных научных конференциях по математическому анализу и дифференциальным уравнениям. Они опубликованы в 57 публикациях в научной печати, в том числе, в 21 публикациях в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан, в которых материалы диссертации отражены полно.

Теоретическая и практическая значимость полученных автором результатов. Основные результаты диссертации носят теоретический характер, и они могут быть использованы в научных институтах и организациях, которые проводят исследования по теории дифференциальных операторов в частных производных и их приложениях в процессе математического моделирования прикладных проблем механики, газовой динамики, экономики и экологии, в том числе в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН, Институте гидродинамики СОРАН, Казанском федеральном университете, Институте математики им. А.Джураева НАН Таджикистана, Российском университете дружбы народов, Российско-Таджикским (Славянским) университете и др.

Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.

Диссертация и автореферат оформлены в соответствии с существующими требованиями. Содержание диссертации достаточно полно и подробно раскрывает постановку и методы решения рассмотренных задач. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания по содержанию и оформлению диссертации. К недостаткам диссертации можно отнести следующие:

1. Из трёх глав диссертации только вторая глава имеет название, две другие не имеют названия, хотя разбивка материалов по главам выполнена правильно. Автору следовало бы найти правильное заглавие для выбранных материалов.
2. В автореферате, начиная со стр. 5 используется сокращение п. о. с. К.-Р., но ее определение отсутствует. Это определение имеется на стр. 277 диссертации «... были рассмотрены переопределённые обобщённые системы Коши- Римана (п.о.с.К.-Р.).»
3. Во всех номерах формул параграфа 3 второй главы (стр. 251 и далее:) вместо номера параграфа написано 4, то есть вместо (2.3.1) написано (2.4.1) и т.д.

Сделанные замечания не умаляют достоинство полученных в диссертации результатов и не могут существенно повлиять на её положительную оценку.

Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней».

Вышеизложенное дает основание считать, что диссертационная работа Шарипова Бобоали «Вполне интегрируемые системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами», представленная на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, является научно-квалификационной работой и полностью соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по вышеуказанной специальности.

Б.Шарипов выступил с докладом по материалам диссертации на общеинститутском семинаре Института математики им. А.Джураева НАНТ 01 марта 2023 года.

Отзыв подготовил заместитель директора Института по науке и образованию, доктор физико-математических наук, член-корреспондент

НАН Таджикистана Исхоков Сулаймон Абунасрович. Отзыв был заслушан, обсужден и единогласно утвержден на расширенном заседании научного семинара Института математики им. А. Джураева НАНТ от «01» марта 2023 года, протокол №5.

Председатель заседания, главный научный сотрудник отдела алгебры и теории чисел, доктор физико-математических наук

Карим

Каримов У.Х.

Эксперт, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ, член-корреспондент НАНТ

Исхоков

Исхоков С.А.

Секретарь заседания, кандидат физико-математических наук

Нозиров

Нозиров О.О.

Сведения об оппонирующей организации:

Институт математики им. А.Джураева
Национальной академии наук Таджикистана,
734063, г.Душанбе, ул. Айни 299/4,
Тел: +992(37) 2258089;
E-mail: Mitas@mail.tj;
Сайт: <http://www.mintas.tj>

Подписи Каримова У.Х., Исхокова С.А., Нозирова О.О.
заверяю.

Начальник ОК ИМ НАНТ



Маллаева М.Р.