МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517. 956

На правах рукописи

ШАРИПОВ БОБОАЛИ

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Душанбе-2022

Оглавление

Литературный обзор работы, предисловие 5
ГЛАВА 1 68
§ 1.1. Системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями 68
§ 1.1.1. Совместные системы двух уравнений в частных производных первого порядка (системы в полных дифференциалах) 68
§ 1.1.2. Случай, когда одно из уравнений с разделяющимися переменными 72
§ 1.1.3. Случай, когда правая часть одного из уравнений-однородная функция нулевого порядка 76
§ 1.1.4. Случай, когда правая часть одного из уравнений-обобщенная однородная функция 78
§ 1.1.5. Случай, когда одно из уравнений системы - типа Бернулли 79
§ 1.2. Об интегрировании системы двух нелинейных уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями 82
§ 1.3. Об интегрировании одного класса п.д.- систем, для которых правая часть одного из уравнений с разделяющимися переменными 99
§1.4. О формуле представления решений однородных п.д.- систем с сингулярными линиями 107
§ 1.5. О формулах представления решений одного класса нелинейных п.д.- систем 111
§ 1.6. О формулах представления решений системы уравнений с разделяющимися переменными п.д.- систем с сингулярными линиями .. 119
§ 1.7. О формуле представления решений некоторых линейных п.д. систем с сингулярными линиями 125
§ 1.8. О поведении решений одной нелинейной п.д.- систем на линии вырождения 131
§ 1.9. О поведении решений одного класса нелинейных п.д.- систем на линиях вырождения плоскости 140
§ 1.10. О формуле представления решений некоторых квазилинейных п.д.- систем с однородными правыми частями 155
§ 1.11. Системы уравнений в полных дифференциалах с тремя уравнениями, с сингулярными линиями 164

§ 1.12. Системы уравнений в полных дифференциалах произвольного числа независимых переменных, с сингулярными коэффициентами 176
ГЛАВА 2. ФОРМУЛЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ С СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ 194
§ 2.1. О формуле представления решений двух уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками 194
§ 2.2. О формуле представления решений нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками в трехмерном пространстве 213
§ 2.3. Формулы представления решений системы с произвольным числом независимых переменных с сингулярной точкой 251
Глава 3. 273
§ 3.1. Обобщенные аналитические функции одной комплексной переменной (линейные и нелинейные уравнения) 273
§ 3.1.1. Обобщенные аналитические функции многих комплексных независимых переменных 275
§ 3.2. Некоторые классы двух переопределённых обобщённых систем Коши-Римана с разделяющимися переменными с сингулярными коэффициентами 281
§ 3.3. О некоторых п.о.с.К.-Р. с линейными правыми частями и приводящиеся к линейным 308
§ 3.4. О некоторых квазилинейных п.о.с.К.-Р. С правой частью специального вида 318
§ 3.5. Представление некоторые классы системы дифференциальных уравнений Коши-Римана с тремья комплексными переменными 322
§ 3.6. О некоторых п.о.с.К.-Р. с произвольным числом независимых переменных с сингулярными коэффициентами 353
§ 3.7. О представлении решений одного вида нелинейных п.о.с.К.-Р 365
§ 3.8. Представление решений некоторых п.о.с.К.-Р. с однородными функциями 372
Список литературы 381

Основные классы функций и функциональные пространства

В предлагаемой работе вводим некоторые основные классы функций и функциональные пространства, которые часто будут пользоваться во всех главах работы. Ограничимся рассмотрением этих классов функций для двух переменных в действительных и комплексных плоскостях.

1.Пусть дан класс C($f, \overline{D}$). Его называют множеством непрерывных функций в замкнутой области по каждым ее аргументам. Откуда следует ограниченность функции на данной замкнутой области.

2.Если дан класс функций $C^1(f, \overline{D})$, то это означает, что функции этого класса являются непрерывно- дифференцируемые. Следовательно, производные первого порядка функций, также в области $\overline{D}$ -непрерывны.

3.Если дан класс функций $C^2(f, D_0)$, то это означает, что функции этой области непрерывно-дифференцируемые до второго порядка почти во всей данной области, не содержащиеся особые точки данной области.

4.Пусть функция *f(z) (*или *f(x))* на данных областях (комплексной либо действительной областях) удовлетворяют неравенству

$$\left| f(z_1) - f(z_2) \right| \le H \left| z_1 - z_2 \right|^{\lambda},\ 0 < \lambda < 1$$

то говорят, что данная функция f на данной области удовлетворяет условию Гёльдера со степенью $\lambda > 0$. Если на данном неравенстве $\lambda = 1$, то говорят, что функция f в данной точке удовлетворяет условию Липщица.

5.Если рассматривать класс функций RA(*f*, $\overline{D}$), то это означает, что функция *f(x,y)* на данной области разлагается в равномерно сходящее двойного степенного ряда на данной области

$$f(x, y) = \sum_{k,j} f_{k,j}(x_0, y_0)(x - x_0)^k \cdot (y - y_0)^j.$$

Если дан класс функций $C^1_{\bar{z}}(f,\overline{D})$, $C^2_{\bar{z}}(f,\overline{D})$, то это означает, что функции этого класса непрерывно-дифференцируемые первого и второго порядка, а интегралы понимаются в виде интеграла Коши, а также Коши-Векуа соответственно: $Sf = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt$, $Tf = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(\tau)}{\tau - z}dS_\varsigma$, $dS_\varsigma = dx\,dy$.

Эти указанные свойства функций верны и в многомерных пространствах.

Литературный обзор работы, предисловие

Актуальность темы. Исследование и методы нахождения многообразия решений систем дифференциальных уравнений вида уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем), с прошлых веков по настоящее время, привлекают особое внимания многих учёных мира, поскольку они очень часто применяются к решению задач механики, газодинамики, гидродинамики, теории упругости, потенциала поля, электромагнитных волн, экологии, экономики, медицины и других отраслях прикладных наук. Там они определялись как переопределённые системы уравнений с частными производными как с двумя, так и со многим количеством неизвестных функций с двумя, тремя и несколькими независимыми переменными. Здесь, термин переопределённость системы уравнений в частных производных вида в п.д.- системах означает, что в системах уравнений в частных производных, количество её уравнений больше, чем количество неизвестных функций.

Нелинейные переопределённые системы уравнений в полных дифференциалах с одной неизвестной функцией (в действительных а также комплексных плоскостях), и системы дифференциальных уравнений в частных производных первого, второго и старшего порядка, в прошлом широко были изучены в работах Якоби, Рикье, Л. Эйлера, Коши, Римана, С. Ковалевской, а также в работах других учёных: [23], [346], [231]-[232], [349].

В двадцатом веке, многие учёные России, а именно М.В.Келдыш [43], А.В.Бицадзе [13] и другие, исследуя уравнения в частных производных второго порядка, решают задачи Дирихле на отрезке [0,1] верхней полуплоскости, именно в действительной оси, для данных уравнений. В.Н.Монахов и его ученик Р.М.Гарифулин [25], изучая фильтрации жидкостей, приходят к переопределённым системам уравнений с двумя неизвестными функциями, Л.Г.Михайлов, Р.Пиров, Э.Рузметов [148-150] исследовали задачу определения деформации твёрдых тел, М.Юнуси его ученики [350], Б.Шарипов, А.Менгниев [282], [287], [343] и другие, исследуя задачи экономики и экологии, решали задач по построению математические модели в процессе торговля, а также экономики и экологии в отрасли пчеловодства. В случае тождественного выполнения условий совместности, решение изучаемых систем находится в явном виде. В процессе решения задачи о рекламе торговли народного потребления, была получена экономическая модель продаваемого товара. А также, исследования системы дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения в различных направлениях естественных наук изучались в работах: [1], [22], [35-45], [228]. В изучаемых работах: [32], [35-45], [54-57], [120], [245-248], [258], [282], [347-349] и других работах исследуются системы дифференциальных уравнений в частных производных второго и высшего порядков, в которых заменами определёнными видами, приводятся к эквивалентным системам уравнений первого порядка, либо к системам вида в полных дифференциалах. Решая эти систем, определёнными способами, затем, переходя к прежним переменным, в случае тождественного выполнения условий совместности, найдём многообразия решений последних систем. После этого, переходя к прежним переменным, получаем многообразия изучаемых уравнений второго

порядка, которые выражаются через произвольную постоянную и некоторые произвольные функций ограниченного количества аргументов. Заметим, что эти задачи возникают в изучение колебание волны, на линии или струнах, плоскости и пространств. Построение математических моделей этих задач приводят к исследованию работ, указанных выше. В этих выше указанных работ находятся приложения изучаемой работы в естественных науках.

В настоящей работе, исследуются некоторые классы переопределённых систем уравнений в полных дифференциалах первого порядка с одной неизвестной функцией, действительными переменными в классе непрерывно-дифференцируемых функций, а также по комплексным переменным в классе вещественно-аналитических функций, двух, трёх и произвольного числа независимых переменных. В этом и заключается актуальность темы настоящей предлагаемой работы.

Целью настоящей диссертации является выделение некоторых классов переопределённых систем уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем) и нахождение многообразия всех решений систем одной функции, от двух, трёх, и произвольного числа независимых переменных в декартовых, полярных и сферических координатах, с сингулярными линиями, поверхностями и точками. А также в классе вещественно-аналитических функций, исследуя аналогичные системы, как в действительных, так и в комплексных плоскостях, находятся многообразия всех решений, изучаемых переопределённых обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Во всех случаях исследуется поведение решений систем в области, в точках линии вырождения и особых точках данной области.

Методы исследования в диссертационной работе, базируются на классическом вещественном анализе, теории функций комплексного

переменного, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, соответственно, в действительных и комплексных плоскостях. Нами используются некоторые методы решений п.д.- систем с регулярными и сингулярными коэффициентами, изложенные в некоторых работах академика Л.Г.Михайлова «Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями», изданной в 1986-м году, а также результаты моей кандидатской диссертации.

В научной новизне диссертационной работы установлены следующие новые результаты:

- в случае тождественного выполнения условий совместности системы нелинейных и квазилинейных уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками, либо сингулярными линиями на плоскости, либо в трёхмерном и **n**- мерном пространстве, находятся частные, либо особые решения системы. А в случае тождественного выполнения условия совместности, определяются многообразия всех решений систем, а также единственное решение задачи Коши для исходных систем;
- во многих случаях в п.д.- системах, считая некоторые функций из правых частей уравнений как известными функциями, определяется взаимосвязь между оставшимися функциями в уравнениях систем. В классах этих систем определяемых функций, во- первых, условия совместности систем выполняются тождественно, во – вторых, особенность в некоторых уравнениях систем устраняется. При этом обеспечивается непрерывность многообразия решений систем по некоторым независимым переменным;

- в работах Л.Г.Михайлова были исследованы свойства вырождения порядка в п.д.- системах с линейными правыми частями. А также изучались свойства зануления в особых точках, либо в особых линиях вырождения плоскости, в трёхмерном и многомерных пространствах в линейном случае. Во многих научных работах результаты, полученные Л.Г.Михайловым, будут обобщены на случай, когда в уравнениях систем данные функции являются нелинейными, а также квазилинейными, что выделяет некоторые затруднения. Аналогичным образом будут изучены и некоторые классы переопределённых нелинейных обобщённых систем Коши- Римана в классе вещественно-аналитических функций;
- указано, что в рассматриваемых п.д.- системах плоскости в особых точках, либо особых линий вырождения, задачу Коши ставить нельзя. Поскольку, в этих случаях, из правых частей уравнений систем можно определить некоторые особые, либо частные решения. Эти результаты можно применять в п.д.- системах произвольного числа независимых переменных, а также для переопределённых нелинейных обобщённых систем Коши-Римана. Такой результат впервые был получен Л.Г.Михайловым в 2002 г;
- указано, что в некоторых линейных и нелинейных п.д.- систем, в случае тождественного выполнения условий совместности, многообразия их решений могут быть однозначными, а иногда многозначными;
- многообразия решений, изучаемых в работе п.д.- систем, в трёхмерном и ***n***-мерном пространствах в действительной плоскости являются однозначными, а в комплексной плоскости во всех случаях, оно всегда

многозначно. Полученные результаты автором в выполнения настоящей работы, впервые.

Практическая и теоретическая значимость настоящей работы, в основном, имеет теоретический характер. Все полученные результаты, изложены в диссертации и являются новыми. Практическая значимость исследования в работе заключается в том, что она может быть применена в теории переопределённых систем уравнений в частных производных второго и более высокого порядка. А также для решений многих задач гидродинамики, газодинамики, теоретической прикладной механики, математической физики, медицины, биологии, решении многих задач экономики, рекламы торговли, экологии, решений некоторых задач сейсмологии и других направлений прикладных наук. Научная ценность работы состоит в том, что полученные в ней результаты расширяют и углубляют представления о построении решений всех видов п.д.- систем с вырождением различного конечного порядка.

Из учебного материала курса математического анализа известно, что полные дифференциалы одной неизвестной функции двух либо нескольких действительных независимых переменных выражаются формулами, изученные в: [29, 31-59], [71], [84, 94, 137, 142-171, 190], [205, 229, 231, 257, 269, 272] и других работах.

Сперва рассматривается уравнений в полных дифференциалах видов:

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = a(x,y,u)dx + b(x,y,u)dy\,, \qquad (0.1)$$

$$du \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k = \sum_{k=0}^{n} a(x,u)dx_k\,,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (0.2)$$

Формулы вида (0.1) и (0.2) равносильны следующим системам уравнений в полных дифференциалах (называемым п. д.- системами):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y, u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = a_k(x, u), \ (k = \overline{1, n}), \ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m). \tag{0.4}$$

Если в системе уравнений (0.4) $m = n$, то её называют системой уравнений в полных дифференциалах. В случаях, когда $m > n$, либо $m < n$, систему (0.4) соответственно называют переопределённой, либо неполной системой уравнений в частных производных. Системы уравнений вида (0.3), (0,4) будем называть переопределёнными системами уравнений в частных производных потому, что в этих п.д.- системах не менее двух уравнений, а неизвестная функция – одна. Аналогично, в некоторых других видах систем количество неизвестных функций ($m > 2$) меньше, чем количество её уравнений ($n \geq 3$). В настоящей работе рассматривается один класс переопределённых систем уравнений в частных производных, для которых неизвестная функция – одна, а количество уравнений совпадает с количеством независимых переменных. Если в п.д.- системах (0. 3), либо (0. 4) функции $a,\ b,\ a_k$ не зависят от искомой функции u, то их называют линейной (классической) п.д.- системой. П.д.- системы (0.3), либо (0.4) называют совместными, если они имеют некоторые определённые решения (частные, либо общие). И наоборот, если указанные п.д.- системы (0.3) и (0.4) не имеют каких - либо решений, то их называют несовместными системами.

Как указано, например, в [18,25], [58,91,94] системы вида (0.3) и (0.4) могут иметь частные решения, либо многообразие решений, содержащих одну произвольную постоянную, либо имеют единственное решение,

удовлетворяющее задаче Коши. Заметим, что единственное решение систем (0.3), (0.4) находится с помощью задачи Коши вида:

$$u = u_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, y = y_0, \text{ либо } u = u_0 \text{ при } x_k = x_k^{(0)}, (k = \overline{1,n}). \qquad (0.5)$$

Производя перекрестные дифференцирования в системах (0.3) и (0.4), соответственно, получим

$$\frac{\partial a}{\partial y} + b\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial x} - a\frac{\partial b}{\partial u} = 0, \qquad (0.6)$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + a_i\frac{\partial a_k}{\partial u} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - a_k\frac{\partial a_i}{\partial u} = 0, \ (i,k = \overline{1,n}), \ i \neq k. \qquad (0.7)$$

Формулы вида (0.6) для системы (0.3), а также (0.7) для системы (0.4) соответственно называют условиями их совместности. Количество соотношений в (0.7) равно целому числу $C_n^2 = 0{,}5n(n-1), n \geq 2$. Также отметим, что если условия совместности выполняются, но не тождественно, тогда из этих неявных соотношений по аналогии с теоремой о неявных функциях, либо о системе неявных функций [251], можно определить некоторые функции, которые могут быть, либо могут и не быть решениями системы (0.4). В таком случае, эти найденные из (0.6) и (0.7) функции, возможно, будут только лишь частными решениями систем (0.3) и (0.4). В случаях тождественного выполнения условий совместности (0.6) и (0.7), будет найдено многообразие решений систем (0.3) и (0.4). Отметим, что выполнение указанных условий является необходимыми и достаточными; при этом системы (0.3) и (0.4) будем называть вполне интегрируемыми системами, а условия (0.6), (0.7) - условиями полной интегрируемости (у. п. и.), или условиями совместности указанных выше систем. Системы вида (0.3), (0.4) называют вполне интегрируемыми, если для них будут выполнены условия (0.6), (0.7) (тождественно) и указанные системы имеют решения.

Исследованием систем уравнений с частными производными различного порядка не менее чем с двумя неизвестными функциями (для некоторого класса аналитических функций) посвящены работы Клебше, Якоби, Рикье, Майера, Э.Камке, Коши, С. Ковалевской, В. Тучке и других учёных, которыми были получены весомые результаты. С 1970-го года представители математической школы Таджикистана Л.Г.Михайлов, Б.М.Бильман, З.Д.Усманов, Э.М.Мухаммадиев,

Э.Рузметов, Н.Раджабов, С.Байзоев, Дж.Сафаров, А.Расулов, Р.Пиров, Ф.Шамсуддинов, [84]-[92], [156]-[185], [224], [207], [121], [264], и другие, а также их ученики занимались исследованием переопределённых систем уравнений в частных производных, в действительных и комплексных плоскостях, и внесли весомые вклады в развитие этого направления науки. Во второй половине 20-го века в Институте гидродинамики СО АН СССР, под руководством академика АН России В.Н. Монахова [120], была исследована теория систем дифференциальных уравнений в частных производных, применялась для решения задач гидродинамики и газодинамики. Например, учеником В.Н.Монахов, Р.М.Гарифулином [23] и другими изучались фильтрация жидкостей, при этом, также исследовались переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+b(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+b(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+a(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

С учетом выполнения условий совместности в исходной системе $\frac{\partial a}{\partial u}=\frac{\partial b}{\partial v},\frac{\partial a}{\partial v}=\frac{\partial b}{\partial u}$ ими найдено единственное решение данной системы.

В работах профессоров Э.М.Мухаммадиева и С.Байзаева [4-9], [121]-[122] изучались линейные обобщённые системы Коши-Римана (о.с.К.- Р.) вида

$$Lw \equiv \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + a(z)\, w + b(z)\, \overline{w} = 0$$

с ограниченными функциями на всей комплексной плоскости коэффициентами $a(z),\ b(z) \in C^1_{\bar{z}}$. Авторами этой работы были найдены необходимые и достаточные условия нётеровости дифференциального оператора в пространстве Гёльдера, а также было изучено поведение медленно растущих обобщённых решений на бесконечности, в работах Сафарова Дж. исследовано свойство двояко периодичности функции в обобщённых систем Коши-Римана [86,87].

Начиная с 1963 года академиком АН РТ Л.Г.Михайловым [71]-[81]. был внесён весомый вклад в развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, а также обобщённых систем Коши-Римана. Исследованием этой тематики также занимались З.Д. Усманов [235], Н.Раджабов, Э.Рузметов, Р.Пиров, А.Расулов, А.Мирзоев, Б.Шоймкулов, Ф.Шамсудинов [261]-[264], и другие. Л.Г.Михайлову [84-117], принадлежал оптимальный вариант решения некоторых классов линейных и нелинейных п. д.- систем, приемлемый и для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярными и сингулярными коэффициентами, на действительной плоскости, а также для линейных обобщённых систем Коши-Римана с регулярными и сингулярными коэффициентами. Во всех случаях исследуются поведения решений систем в точках линий вырождения и особой точки области. Также велики заслуги Л.Г. Михайлова в развитии теории квазилинейных обобщённых систем Коши-Римана в классах непрерывно-дифференцируемых функций, ($C^k\ (k \geq 2),$ C), классе вещественно - аналитических функций (RA) , и других классах, а также в развитии других направлений задачи сопряжения. Во второй половине 20-го

века, под общим руководством Л.Г. Михайлова стали творчески развивать эту теорию его ученики З.Д. Усманов, Н. Раджабов, Э. Рузметов, Н. Усмонов, Г.Джангибеков, Р. Акбаров, Р. Пиров, ученики Раджабова Н., А.Сатторов, А.Джобиров, Ф.М. Шамсиддинов, Б. Шоимкулов и другие. Академиками З.Д. Усмановым, Н.Раджабовым и Г.Джангибековым [32] организованы свои направления научных школ. Н. Раджабов и его ученики, в некоторых своих работ, исследуют и преобразуют линейные уравнения в частных производных второго и высшего порядка к эквивалентным системам линейных уравнений, с регулярными и сингулярными коэффициентами [159]-[200]. В случае тождественного выполнения условий совместности изучаемых систем, находятся многообразия решений полученных линейных систем. Также в этих работах проводились исследования переопределённых систем линейных уравнений первого и второго порядка с сингулярными линиями и сингулярными точками различного порядка. Изучена обобщённая система Коши-Римана с сингулярными точками в работе [71-100] и других работ.

В монографиях М.В. Келдыша [43] и А.В. Бицадзе [13] были изучены эллиптические уравнения второго порядка с параболическим вырождением на границах области их задания. В их трудах рассматривались линейные неоднородные либо однородные уравнения, найдены решение задача Е на верхней полуплоскости

$$L(u) \equiv y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y),$$

в случае $m=0$, $n \neq 0$, либо $m \neq 0$, $n=0$, (когда $f(x,y)=0$ либо $f(x,y) \neq 0$). Для указанного уравнения особыми линиями считаются линии $y=0$, $x=0$. Авторами допускается, что в особых точках линий $y=0$, $x=0$ начальные условия ставить нельзя, поскольку при учёте этих условий находятся некоторые частные

решения задачи Дирихле в верхней полуплоскости, проходящей через точки (0,0) и (1,0) по оси абсцисс.

Системам с сингулярными дифференциальными и интегральными уравнениями посвящены монографии Н.П.Векуа и А.Д.Джураева [17,34]. Однако исследование этой тематики выходят за области нашего исследования, по системам уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками, либо сингулярными линиями.

Ученику Л.Г.Михайлова, Р.Пирову [143-148] принадлежит исследование «Нелинейные и квазилинейные переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя и более неизвестными функциями». Он, продолжая исследования Л.Г.Михайлова по этой тематике, для переопределённых систем с частными производными различного порядка получает следующие результаты: определяет вид условий совместности, доказывает теорему существования и единственности решений для некоторых линейных и квазилинейных систем уравнений, тем самым обобщает теоремы Фробениуса о совместности системы уравнений в полных дифференциалах; исследует поведение интегральных представлений решений систем в окрестности особых точек на плоскости и в трёхмерном пространстве; находит применение своих теоретических результатов к некоторым задачам механики (по деформации твёрдого тела и др.).

В работах ученика академика Раджабова Н., Шамсудиновым Ф.М. [156-195] исследуется системы линейные и нелинейные дифференциальные уравнений первого и второго порядка с сингулярными коэффициентами. Производя специальными заменами в данных систем, они преобразуют к системам дифференциальных уравнений первого порядка. В случаи тождественного выполнения условия совместности систем, находятся

многообразия решений изучаемых систем, через определённого количество произвольных постоянных.

Обзор материалы главы 1.

Материалы, входящие в эту и последующие главы, посвящаются классам п.д.- систем с сингулярными линиями и поверхностями.

В §1.2.1-1.2.10 исследуются некоторые квазилинейные п.д.- системы общего вида, например, для одного из случаев [279-289]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y; u)}{x^n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y; u), \tag{1.2.6}$$

где $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0), D_0 = \overline{D} - \{(x, y) | \tilde{A}_1 : x = 0\}, R^1 = [0, k]$, D_0- та же область, но без точки линии вырождения $x = 0$. Также рассматриваются такие виды п.д. - систем, для которых в знаменателях присутствуют особые точки линий $x = 0$, либо $y = 0$, либо $x = 0, y = 0$ и другие виды особенностей с различными порядками особенностей. Для существования непрерывных решений системы (1.2.6) будем требовать, чтобы выполнялось условие (M_0), то есть имеет место [110]:

Лемма. *Пусть в п.д.- системе (1.2.6) в случае ограничении частных производных неизвестной функции, и обращается к нулю* $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$

Тогда необходимо в случаи выполнения условии $a(0, y; u) = 0$, *либо найдётся некоторая функция,* $u = h(y)$, *которая будет частным, либо особым решением исходной системы.*

Поскольку эта функция удовлетворяет системе (1.2.6), то она будет лишь частным, либо особым решением исходной системы. Также допустим, что условие совместности системы (1.2.6) выполняется, но не тождественно. Тогда из условия совместности исходной системы вида

$$\frac{\partial a}{\partial y} + b\frac{\partial a}{\partial u} = x^n \frac{\partial b}{\partial x} + a\frac{\partial b}{\partial u}, \qquad (N_1)$$

в силу теоремы о неявной функции [290], сможем найти некоторую функцию $u = h(x, y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.2.6), то она будет лишь частным решением системы. В противном случае, система (1.2.6) считается несовместной. Далее допуская, что условие (N_1) выполняется тождественно, будем искать решение системы (1.2.6). Далее, если допустить, что функция $a(x, y; u) = o(x^{n-\lambda}), \quad (0 \le \lambda < 1)$, т.е. бесконечно малая, то получим непрерывное всюду в области $\overline{D}$ решение системы. Если считать, что в области $\overline{D}$ функции $-a, b$ являются аналитическими по всем своим аргументам, то на этой линии вырождения, аналогично работе Л.Г.Михайлова [108], применяя теорему о вычетах, получим решение исходных задач, непрерывное во всей области. При этом решение системы (1.2.6) в случае тождественного выполнения условия (N_1), в области $(\overline{D} \times R^1)$, в частности, в многомерном параллелепипеде $(\overline{D} \times R^1) = \{(x, y)| : 0 \le x \le \alpha, 0 \le y \le \beta, 0 \le u \le k\}$ будет непрерывным. В работе показывается, что решение системы также войдёт в этой же области. Если эти указанные условия не выполняются, то решение исходной системы в области D_0 будет непрерывным, а в точке линии вырождения $\Gamma : x = 0$ имеет особенности $(n-1)$- го порядка при $n>1$, и логарифмическую особенность при $n=1$.

Теорема 1.2. *Пусть в п.д.- системе (1.2.6)* $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1), \quad u \in C^2(D_0)$, *и будут выполнены условия леммы 1, а также выполнено условие совместности* (N_1), *но не тождественно, тогда находятся некоторые частные, либо особые решения системы (1.2.6). Пусть условие* (N_1) *по всем переменным выполняется тождественно. Если функция* $a(x, y; u)$ *удовлетворяет условию*

малости, то решение системы всюду в замкнутой области непрерывно. В противном случае решение системы (1.2.6) в области D_0 *непрерывно, а в точках линии вырождения* $\Gamma_1 : x = 0$ *имеет особенность* $(n-1)$*- го порядка при* $n>1$ *и логарифмическую особенность при* $n=1$*, а для значений* $0 \le n < 1$ *во всей области - непрерывно.*

В п. **1.2.2**. работы рассматривается п.д.- система вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y; u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x, y; u)}{x^n}, (n \ge 0), \tag{1.2.7}$$

где $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u(x, y) \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \{\Gamma_1 : x = 0\}$, $R^1 = [0, k]$.

Условие совместности п.д.- системы (1.2.7) имеет вид:

$$D_{\acute{o}}(a) = D_x\left(b / x^n\right): \quad x^{n+1} a'_y + x\left(b\, a'_u - b'_x - a\, b'_u\right) + nb = 0. \quad (N_2)$$

По аналогии системы (1.2.6), для п.д.- системы (1.2.7) справедлива следующая.

Теорема 1.3. *Пусть в п.д.- системе (1.2.7)* $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u(x, y) \in \tilde{N}^2(D_0)$ $D_0 = \overline{D} - \{\tilde{A}_1 : x = 0\}$. *Если выполняется условие леммы 1, и условие совместности (*N_2*) будет выполнено, но не тождественно, тогда, найдётся некоторая функция являющаяся частным, либо особым решением системы (1.2.7). Если же условие (*N_2*) для п.д.- системы (1.2.7) будет выполнено тождественно, то существует многообразие всех решений системы (1.2.7), либо решение задачи Коши для п.д.- системы (1.2.7), и оно определяется формулой* $u(x, y) = h\left[x, y; \hat{O}(y, u_0)\right]$, *которое непрерывно во всей области* $\overline{D}$

.

Аналогичный результат верен и для квазилинейной п.д.- системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y; u)}{y^n}, \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y; u)}{(y - y_0)^n}, \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y; u),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x, y; u)}{(x - x_0)^n},$$

когда условие совместности системы выполняется тождественно, ее решение во всей области непрерывно, и для него имеет место теорема, равносильной теореме 1.3 (т.е. в указанным системам, особые линии, либо линии вырождений устраняются, и их решений в $\overline{D}$ непрерывно).

В п. 1.3.1. изучается п.д.- система с разделяющимися переменными с произвольными особыми линиями, например, вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}\,m(y,u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y;u)}{y^n}\ , \tag{1.2.39}$$

где $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in D_0,\ D_0=\overline{D}-\{\tilde{A}: y=0\}$. Допустим, что в точках линии $y=0$ частные производные искомой функции по переменным $x,\ y$ считаются ограниченными. Тогда в силу леммы Михайлова Л.Г. [110], требуя выполнение условий (M_0), т.е.

Лемма. (Михайлова Л.Г.). *Пусть задана некоторая п.д.- система,* $x^n\frac{\partial u}{\partial x}=a(x,y),\ y^n\frac{\partial u}{\partial y}=b(x,y),a,b\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-(L_1+L_2)$, *тогда для существования непрерывного решения данной системы в области необходимо, чтобы при ограниченности* $u'_x,\ u'_y$ *существовали и были равны к нулю следующие пределы:* $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^n\cdot u'_x\right)=0,\quad \lim\limits_{y\to 0}\left(y^n\cdot u'_y\right)=0$. *При этом, данная система имеет лишь тривиальное решение* $u(x,y)\equiv C.$

Легко заметить, что предыдущая лемма верна для классического вида п.д.- систем с сингулярными коэффициентами. На первом случаем обобщаем ее для системы вида (1.2.39).

Лемма 1. *Пусть в п.д.системе (1.2.39) ее функций удовлетворяют условии* $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in D_0,\ D_0=\overline{D}-\{\Gamma: y=0\}$. *Также в исходной п.д.- системе неизвестная функция и ее частные производные по каждым*

независимым переменным u'_x, u'_y *на данной области ограничены. Если существуют и равны к нулю пределы* $\lim\limits_{y\to 0}\left(y^n \cdot u'_x\right)=0, \quad \lim\limits_{y\to 0}\left(y^n \cdot u'_y\right)=0$. *То существуют некоторые частные, либо особые решения исходной системы, отличающиеся от тривиального решения системы.*

Действительно, в случаи выполнения условий,

$$\lim_{y\to 0}\left(y^n \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right)=0, \lim_{y\to 0}\left(y^n \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

получаем необходимое условие того, что $a(x,0)=a_0=0,\ m(0,u)=0,$ $b(x,0;u)=0$. Из этих соотношений сможем получить $u=const,$ а также $u=h(x)$. Эти найденные функции будут некоторыми частными, либо особыми решениями системы в особой точке линии вырождения $y=0$, а в других точках области- непрерывно. Пусть условие совместности системы (1.2.39) выполняется, но не тождественно. Тогда в силу теоремы о неявных функциях [251], из этого соотношения можем найти некоторую функцию $u=h_0(x)$. Если найденная функция удовлетворяет данной системе, то она возможно будет также частным решением системы. Для того чтобы найти многообразие решений системы необходимо и достаточно, чтобы условия совместности системы (1.2.39) по всем переменным выполнялась тождественно, т.е.

$$\begin{aligned} b(x,y;u) &= y^n\left\{\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial y}+f\left[y;M(y,u)-A(x,y)\right]\right\}\cdot m(y,u), \\ A(x,y) &= \frac{1}{y^n}\int_0^x a(t,y)dt, M(y,u)=\int_0^u \frac{d\tau}{m(y,\tau)}, (m(y,u)\neq 0). \end{aligned} \tag{1.2.40}$$

Далее, требуя выполнение этого условия, проинтегрируем систему (1.2.39). В результате чего придём к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (о.д.у.) вида

$$\frac{d\psi}{dy} = f(y,\psi),$$

где функция $f(y,\psi)$ определяется из формулы (1.2.40). Интегрируя это регулярное о.д.у. методом последовательных приближений, имеем вполне определённого вида ее решения, и общее решение исходной системы по формуле $u(x,y) = M^{-1}\left[y; A(x,y) + V(y,C)\right]$. Причём решение системы по переменной x всюду в области $\overline{D}$ будет непрерывным, а по переменной y в точках линии вырождения $y = 0$ (оси Ox) имеет особенности порядка *n*, (*n* - порядок особенности по линии *y=0)*.

В п.1.3.12 рассматривается п.д.- система

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y;u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^n} b\left(x, y; \frac{u}{x}\right), \quad a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0), \quad (1.2.43)$$

причём $a(x,y;u)$ - однородная функция нулевого порядка по переменным x, u, либо обобщённая однородная функция. Делая замену в данной системе $u = x \cdot V, (V = V(x,y))$, преобразуем (1.2.43) к виду

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{a(1,y;V) - V}{x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{b(x,y;V)}{xy^n}.$$

Условие совместности этой п.д.- системы выполняется тождествен-но тогда и только тогда, когда функция $b(x,y;V)$ принимает вид:

$$b(x,y,V) = x \cdot y^n \cdot \left\{ -\frac{\partial A(y,V)}{\partial y} + f\left[y; A(y,V) - \ln x\right] \right\} \cdot [a(1,y;V) - V], (a \neq V).$$

Учитывая это значение функции $b(x,y;V)$, интегрируем исходную систему и находим $u(x,y) = x \cdot A^{-1}\left[x; \ln x + V(y,C)\right]$. Полученное нами решение системы

(1.2.43) во всей области $\overline{D}$ по переменной y является непрерывным, а по переменной x имеет особенность логарифмического характера, и в частности - непрерывно во всей данной области.

В 1.3.5 рассматриваются п.д.- системы, где правая часть одного из уравнений является частью полинома, например, вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}u+\frac{h(x,y)}{y^n}u^k,\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y;u)}{x^n},$$
$$n\geq 0, a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1), u\in C^2(D_0), k\neq 1. \qquad (1.2.44)$$

Заметим, при k=1, и a(x,y)=h(x,y) данной системе применима теории, указанные о системе (1.2.39). Для существования непрерывного решения системы (1.2.44) необходимо, чтобы при ограниченности частных производных функции u'_x, u'_y, существовали и равны нулю пределы

$$\lim_{y\to 0}\left(y^n\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\lim_{x\to 0}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

При этом из системы (1.2.44) найдём $u=0, a(x,0)=a_0=0,\quad b(0,y,u)=0$, откуда имеем $u=g(y)$. Если эти две функции удовлетворяют системе (1.2.44), то они будут особыми, либо частными решениями системы (причём непрерывными). Если условие совместности системы (1.2.44) по всем переменным выполняется, но не тождественно, тогда в силу теореме о неявные функции, существует некоторые частные решения системы. В противном случае, система (1.2.44) несовместна. Условие совместности системы (1.2.44) выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда функция $b(x,y,u)$, в зависимости от правых частей системы, представима формулой

$$b(x,y,u)=x^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A}{y^n}\right)\cdot u+\frac{x^n}{1-k}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial B}{\partial y}+f\left[y,\exp\big((k-1)A(x,y)\big)u^{1-k}-B(x,y)\right]\right\}\cdot\exp\big((1-k)A\big)u^k.$$

При этом система (1.2.44) разрешима и многообразие её решений определяется формулой $u(x,y)=\exp\{A(x,y)\}\cdot\left[B(x,y)+V(y,C)\right]^{1/(1-k)}$. Причём решение системы в области D_0 - непрерывно, а в точках линии вырождения $y=0$ имеет особенность показательного характера, а по переменной x – всюду непрерывно [270-284].

В п. 1.3.6 рассматриваются такие классы п.д.- систем, в которых правая часть одного из уравнений является однородной относительно двух аргументов, либо обобщённо - однородными функциями. Например, рассмотрим п.д.- систему вида [269-276]

$$x^k\frac{\partial u}{\partial x}=a(x^{k-1},y;u),\quad x^{k-1}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x,y;x^{k-1}\cdot u),$$
$$k\geq 0,\ a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0). \qquad (1.2.59)$$

Допустим, что в этой п.д.- системе частные производные функции по каждой переменной считаются ограниченными. Тогда при выполнении условий леммы 1, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^k\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{k-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$, из (1.2.59) сможем найти $u=h(y),\quad b(0,y,0)=b_0=0$. При этом необходимо находим, что $u=h_i(y),i=1,2$ будут частными решениями системы. Для того чтобы условие совместности системы (1.2.59) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(x,y,V)$, ($V=x^{k-1}u$) имела вид:

$$b(x,y;V)=\left\{-\frac{\partial A}{\partial y}+f\left[y;A(y,V)-\ln x\right]\right\}\cdot[a(1,y;V)-(k-1)V],$$
$$A(y,V)=\int_0^V\frac{d\tau}{a(1,y;\tau)-(k-1)\tau},\ (a\neq(k-1)V). \qquad (1.2.61)$$

Учитывая функцию $b(x,y;V)$ по формуле (1.2.61), проинтегрируем систему (1.2.59) и придём к о.д.у. вида (1.2.26), где функция $f(y,\psi)$ определяется из соотношений (1.2.61). Если это уравнение разрешимо, тогда многообразие решений исходной системы определяется следующей формулой

$$u(x,y)=x^{1-k}\cdot A^{-1}[y;\ln x+\psi(y,C)].$$

При этом решение исходной системы в области D_0 является непрерывным, а в точках линии вырождения $x=0$ имеет особенность (k-1)-го порядка (при k>1), либо частично логарифмическую особенность (при к=1).

В п. 1.11 рассматриваются квазилинейные п.д.- системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,z)}{(x-x_0)^n}m(y,z;u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,z;u)}{(y-y_0)^n},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{c(x,y,z;u)}{(z-z_0)^n}, \qquad (1.11.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,z)}{(x-x_0)^n}m(z,u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,z)}{(y-y_0)^n}m(z,u),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{c(x,y,z;u)}{(z-z_0)^n}, \qquad (1.11.6)$$

где $a,b,c,m\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in C^2(D_0)$. Если для системы (1.11.1) и (1.11.6) выполнены условия (M_0), а также условия совместности (N_7) выполнены, но не тождественно, то найдётся некоторые частные, либо особые решения системы. Для того чтобы условия (N_7) для системы (1.11.1) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции $b(x,y,z,u),c(x,y,z,u)$ определялись формулами вида (1.11.2). Если п.д.- система (1.11.4) имеет решение, то система (1.11.1) также разрешима и многообразие её решений определяется формулой вида (1.11.5). При этом решения системы по переменным y,z всюду в области $\overline{D}$ являются непрерывными, по переменной

x, в точках поверхности $x = x_0$ имеет особенность *(n-1)*-го порядка (при $n>1$), а при $n=1$ имеет логарифмическую особенность. Аналогичное утверждение верно и для системы (1.11.6).

В п. 1.11.7 и п.1.11.8 рассматриваются п.д.- система с однородными функциями в правых частях, так, например;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^{-k}\, a(x,y,z;u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{-k+1} + b(x,y,z;x^{k-1}u), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{-k+1} + c(x,y,z;x^{k-1}u), \text{ (1.11.19)}$$

где $a,b,c \in C^1(\overline{D}\times R^1), u \in C^2(D_0), a(x^{k-1}t,y,z;tu) = a(x^{k-1},y,z;u)$.

Совершая замену вида $x^{k-1}\cdot u = v$, преобразуем систему (1.11.19) к такому виду, что с учётом (1.2.61), условия её совместности выполняются тождественно. При этом многообразие всех её решений будет определяться явной формулой

$$u = x^{1-k}\cdot A^{-1}[y,z;H(y,z;u_0) + \ln x]. \qquad (1.11.23)$$

В п. **1.12** рассматриваем квазилинейную п.д.- систему и некоторые её его случаи, например, вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n;u)}{x_i^m},\ (i=\overline{1,n}),\ m \ge 1, \qquad (1.12.1)$$

где $f_i \in C^1(\overline{D}\times R^1), u \in C^2(D_0), D_0 = \overline{D} - \{S_i \,|\, x_i = 0\}, (i=\overline{1,n}), R^1 = [0,k]$. $\overline{D}$- n – мерный параллелепипед.

Если для системы (1.12.1) будут выполнены условия (M_0), то есть при ограниченности частных производных искомой функции по переменным x_i, $\lim\limits_{x_i\to 0}\left(x_i^m\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0, (i=\overline{1,n})$, то необходимо следует $f_i(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1}\ldots,u) = 0$.

Из этих n равенств легко имеем: $u = f_{10}(0,x_2,\ldots,x_n)$, $u = f_{20}(0,0,x_3,\ldots,x_n) = C,\ldots,\ u = f_{n0}(0,0,\ldots,0) = C$. Эти найденные функции

могут быть лишь частными либо особыми решениями системы. При этом необходимо, чтобы в системе (1.12.1) искомая функция и их производные первого порядка по всем независимым переменным были непрерывны и следовательно ограниченными всюду в области $\overline{D}$.

Если условия совместности системы (1.12.1) будут выполнены, но не тождественно, то найдутся некоторые частные, либо особые решения системы. Допустим, что условия совместности системы (1.12.1) выполняются тождественно. Тогда, интегрируя систему по каждым из переменных последовательно, получим

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x^{1-m} \cdot F[x_1, x_2, \ldots, x_n; \varphi_n(x_n; u_0)].$$

Заметим, что в случаи $m=1$, когда будут выполнены все равенства из (M_0), тогда решение системы во всей области $\overline{D}$, включая особую точку, будет непрерывным.

В **п.1.12.10** рассматривается п.д.- система вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i^m} u + \frac{h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_i^m} u^k, (i = \overline{1, n}), m \geq 0, \quad (1.12.25)$$

где $a_i, h_i \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$. Если допускать, что для системы (1.12.25) выполняются условия (M_0), то из правых частей системы получаем тривиальное решение системы $u = 0$, а также некоторые другие функции. Если условия совместности системы (1.12.25) выполняются, но не тождественно, то также можем получить $u = H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), (k = \overline{(1, n-1)})$, $u = 0$. Если из функции $u = H_k(x_1, \ldots, x_n)$ хотя бы одна из них удовлетворяет системе (1.12.25), то она будет некоторым частным, либо особым решением системы. В противном случае утверждаем, что данная система кроме тривиального, других решений не имеет. Допустим, условия *(N_{43})* выполняются

тождественно. Тогда система (1.12.25) разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (1.12.27). Если в всяких точках области $(x_1, x_2,...,x_n) \in \overline{D}$, $\omega_1(x_1,...,x_n) \le 0$, то решение системы во всей области будет непрерывным, в противном случае решение системы в D_0 -непрерывно, а в точках $x_i = 0$ имеет особенности $(m-1)$-го порядка при $m > 1$.

В дальнейших параграфах первой главы работы, рассматриваются различные виды нелинейных и квазилинейных п.д.- систем, для которых некоторая часть уравнений представляет собой уравнения с разделяющимися переменными, либо однородную функцию по двум переменным, либо уравнения типа Бернулли и других видов. Во всех указанных случаях проверяется выполнение условий (M_0), (M_1) и других условий. При этом будут получены многообразия решений изучаемых систем в явном виде. Также проверяется поведение решений систем в точках линий и точках поверхностей вырождений. В конце главы выделяется такой класс нелинейных и квазилинейных п.д.- систем, в которых особые линии поверхностей в каждом уравнении системы не совпадают с частными производными функции в системе. В случае тождественного выполнения условий совместности таких классов систем, многообразия решении систем находятся определёнными видами непрерывными функциями.

Обзор главы 2

В **главе 2** рассматриваются п.д.- системы с одной неизвестной функцией от двух, трёх и произвольного числа независимых переменных с сингулярной точкой $r^2 = x^2 + y^2 = 0$ на плоскости, либо $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ - в трёхмерном

пространстве и $\rho^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ в n- мерном пространстве. В процессе интегрирования п.д.- систем, вида

$$r^n \frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y; u), \quad r^n \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y; u), \tag{2.1.1}$$

$$\rho^n \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i(x_1, x_2, ..., x_m; u), (i = \overline{1, m}), \tag{2.1.2}$$

где $p, q, a_i \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$, переходя в полярную систему координат, используя замены вида:

$a)$ $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi;$

$b)$ $x = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ z = \rho\cos\varphi$ ’

$c)$ $x_1 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-1},\ x_2 = \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, ...$

$x_{n-1} = \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ x_n = \rho\cos\varphi_1,$

$d)$ $x_1 = \rho\cos\varphi_1\cos\varphi_2 ... \cos\varphi_{n-1},\ x_2 = \rho\cos\varphi_1\cos\varphi_2 ... \cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, ...$

$x_{n-1} = \rho\cos\varphi_1\sin\varphi_2,\ x_n = \rho\sin\varphi_1$

преобразуем указанные системы к следующим видам

$r^n \frac{\partial u}{\partial r} = a(r, \varphi; u),\ r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b(r, \varphi; u)$, либо

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a(r, \varphi; u)}{r^n},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(r, \varphi; u)}{r^{n-1}}, \tag{2.1.3}$$

а также в случаях $n \geq 3$ имеем п.д.- систему

$$\rho^n \frac{\partial u}{\partial \rho} = a_1(\rho, \phi, u), \rho^n \frac{\partial u}{\partial \phi_i} = a_{i+1}(\rho, \phi; u), (\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{n-1})),$$
$$(i = \overline{1, (n-1)}). \tag{2.1.4}$$

В работах [293-295] дается следующее утверждение: когда функции a, b в системе (2.1.3) не зависят от искомой функции, то решение системы (2.1.3) в

окрестности особой точки r=0 определяется как многозначное (частично), а в многомерной сфере (при $n \geq 3$), всегда однозначно. Для того чтобы всюду в замкнутой области $\overline{D}$, (включая особую точку), существовало непрерывное решение систем (2.1.1) и (2.1.3), необходимо, чтобы выполнялись следующие условия леммы [101-104]:

Лемма 2. *Пусть в системах (2.1.3), (2.1.4) выполняются условий:*

1) функции $a(r,\varphi;u), b(r,\varphi;u), a_j(\rho,\varphi;u) \in C^1(\overline{D})$;

2) для всяких $0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \varepsilon \leq r, \rho \leq 1$, *существуют и конечны следующие пределы* $\lim\limits_{r\to 0} a(r,\varphi;u), \lim\limits_{r\to 0} b(r,\varphi;u), \quad \lim\limits_{\rho\to 0} a_k(\rho,\varphi;u)$;

3) при ограниченных значениях частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \rho}, \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial u}{\partial \varphi_i}$

(i=1,2,...,n) существуют пределы, и равны к нулю

$$\lim_{r\to 0}\left(r^n \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \lim_{r\to 0}\left(r^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0, \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0, \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi_i}\right) = 0,$$

то необходимо чтобы $a(0,\varphi;u) = 0, b(0,\varphi;u) = 0, \quad a_k(0,\varphi;u) = 0, (k = \overline{1,n})$,

находятся функции $u = h_i(\varphi), (i = 1,2)$, *или* $u = f_j(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})$), *являющиеся некоторыми частными, либо особыми решениями системы.*

Для того чтобы определить многообразие решений указанных систем, необходимо и достаточно, чтобы условия совместности систем выполнялись тождественно, т.е. для исходных систем выполнялись необходимые теоремы Фробениуса [112-113]. Пусть эти условия совместности систем выполняются тождественно. Тогда, интегрируя систему (2.1.3), получим решение исходной системы явной формулой вида

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{r^{n-1}} F\left[r,\varphi; \Phi(\varphi, C)\right] \text{ либо } u(r,\varphi) = \frac{1}{r^{n-1}} F\left[r,\varphi; \Phi(\varphi; u_0)\right]. \quad (2.1.8).$$

При этом для системы (2.1.3) справедлива следующая:

Теорема 2.1. *Пусть в п.д.- системе (2.1.3)* $a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$, *а также будут выполнены условия леммы 2, условия совместности системы (2.1.3) выполняются, но не тождественно. Тогда система (2.1.3) может иметь лишь некоторое частное, либо особое решение. Пусть условия совместности системы (2.13) выполняются тождественно. Если о.д.у. вида (2.1.5) имеет решение (в общем случае регулярное, либо сингулярное по r), и система (2.1.3) разрешима, тогда многообразие её решений определяется формулой (2.1.8). Если в системе (2.1.3) её правые части не зависят от искомой функции, то решение системы вблизи особой точки r=0, при* $0 \le \varphi \le 2\pi$, *может быть многозначной функцией по переменной* φ.

В **п.2.1.2.** исследуем п.д.- систему вида [115-116]

$$r^n \frac{\partial u}{\partial r} = a(r,\varphi)\, m(\varphi;u), \quad r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b(r,\varphi;u), \tag{2.1.10}$$

где $a,m,b \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$. Допустим, что для нее будут выполнены условия (M_0). Тогда из системы (2.1.10) можно определить некоторые частные, либо особые решения системы формулами $u = h_i(\varphi), (i = 1,2)$. Также, если условия совместности системы (2.1.10) выполняется, но не тождественно, тогда из этого соотношения можно находить некоторое частное решение системы. Для того чтобы условие совместности системы (2.1.10) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(r,\varphi,u)$ (вне особой точки) имела вид

$$b(r,\varphi,u) = r^{n-1}\left\{\frac{\partial A}{\partial \varphi} - \frac{\partial M}{\partial \varphi} + f\left[\varphi;\, M(\varphi;u) - A(r,\varphi)\right]\right\} \cdot m(\varphi;u), \tag{2.1.11}$$

где $M(\varphi;u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\varsigma}{m(\varphi;\varsigma)}$, $A(r,\varphi)=-\int\limits_{r}^{1}\frac{a(t,\varphi)}{t^n}dt$. При этом значении функции $b(r,$ $\varphi,\mathrm{u})$ интегрирование системы (2.1.10) приводит к о.д.у. вида

$$\frac{dV}{d\varphi}=f(\varphi,V), \tag{2.1.12}$$

где функция $f(\varphi,V)$ определяется из соотношения (2.1.11). Если о.д.у. (2.1.12) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой

$$u(r,\varphi)=M^{-1}\left[\varphi;\ A(r,\varphi)+\hat{O}(\varphi,C)\right]. \tag{2.1.14}$$

Теорема 2.2. *Пусть в п.д.- системе (2.1.10)* $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1), u\in C^2(D_0)$ *и выполнены условия леммы 2, и условие совместности системы (2.1.10) выполняется, но не тождественно, тогда найдётся некоторые частные решения системы. Для тождественного выполнения условия совместности системы (2.1.10), необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(r,\varphi,u)$ *определялась в виде формулы (2.1.11). Если задача Коши для о.д.у. (2.1.13) имеет решение, то система (2.1.10) также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (2.1.14). Если в постановке задачи требовать, чтобы* $a\in C^{n+1}(\overline{D}), b\in C^n(\overline{D})$, *то решение системы, представленное в виде разложения Тейлора, явно выявляется порядок особенности решения системы (2.1.10).*

В **п.п.2.1.4 – 2.1.8** рассматриваются некоторые подклассы системы (2.1.3), когда в ней функция $a(r,\varphi;u)=\alpha(r,\varphi)\cdot u+h(r,\varphi)\cdot u^n$, либо $a(r,\varphi;u)$-однородная по первому и третьему аргументам различного вида, например, (2.1.27), (2.1.31), (2.1.35) и другого вида. Во всех случаях находятся классы функций $b(r,\varphi;u)$, для которых обеспечивается тождественное выполнение условий

совместности рассматриваемых систем. При этом многообразие всех решений систем определяются аналогично формулами вида (2.1.8), (2.1.14), исследуется поведение решения в особой точке. Также можем рассматривать п.д.- систему

$$r^n \frac{\partial u}{\partial r} = a(r,\varphi;u) \qquad r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b(r,\varphi)\cdot m(\varphi;u)$$

и получить предыдущий результат и теорему 2 для системы (2.1.10).

Приведены конкретные примеры, когда решения некоторых нелинейных п.д.- систем в окрестности особой точки на плоскости могут быть однозначными, либо многозначными.

В **§2.2** изучен сингулярный полный дифференциал функции трёх переменных

$$\rho^n du = p(x,y,z;u)dx + q(x,y,z;u)dy + r(x,y,z;u)dz\,, \qquad (2.1.15)$$

где $p,q,r \in C^1(\overline{D}\times R^1), u \in C^2(D_0), \overline{D} = \{(x,y,z)\,|\, 0 \le \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \le 1\}, D_0 = \overline{D} - (0;0;0)$.

Переходя к сферической системе координат заменой

$x = \rho\sin\varphi\sin\theta, \qquad y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = \rho\cos\varphi\,, \quad (0\le\rho\le 1, \quad 0\le\varphi,\theta\le 2\pi)$,

преобразуем (2.1.15) к следующей равносильной п.д.- системе

$$\rho^n \frac{\partial u}{\partial \rho} = a(\rho,\varphi,\theta;u), \quad \rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = b(\rho,\varphi,\theta;u), \quad \rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \theta} = c(\rho,\varphi,\theta;u), \quad (2.1.16)$$

$a = p\sin\varphi\cos\theta + q\sin\varphi\sin\theta + h\cos\varphi, \;\; b = p\cos\varphi\cos\theta - h\sin\varphi,$
$c = -p\sin\varphi\sin\theta + q\sin\varphi\cos\theta.$

В этих формулах функции p,q,h зависят от всех переменных (ρ,φ,θ). Аналогично работам Л.Г.Михайлова [108-110], допуская выполнение условий

(M_0): $\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^n \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0, \lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0, \lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0,$ получаем

необходимые условия: $a(0,\varphi,\theta;u) = 0, b(0,\varphi,\theta;u) = 0, c(0,\varphi,\theta;u) = 0$. Из трёх равенств имеем $u = h_i(\varphi,\theta), (i = 1,2,3)$. Причём эти функции, будут лишь

непрерывными особыми, или частными решениями системы. Также, если в системе (2.1.16) функции $a,b,c-$удовлетворяют условиям малости $a=o(\rho^{n-\lambda}),b,c=o(\rho^{n-\lambda})$ $(0\le\lambda<1,)$, то при выполнении условий (N_1) решении исходной системы во всей области $\overline{D}$ является непрерывно.

Допустим, что условия (N_1) для системы (2.1.16) выполняются тождественно. Тогда, считая $0<\varepsilon\le\rho\le1,0\le\varphi,\theta\le2\pi$ за область интегрирования системы (2.1.16), методом последовательных приближений получаем [111-112], что многообразие решений системы находится формулой $u(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{\rho^{n-1}}h\left[\rho,\varphi,\theta;V(\rho,C)\right]$ или

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{\rho^{n-1}}h\left[\rho,\varphi,\theta;V(\rho,u_0)\right]. \qquad (2.1.17)$$

При этом, справедлива следующая

Теорема 2. 3. *Пусть в п.д.- системе (2.1.16)* $a,b,c\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in C^2(D_0)$. *Если условия совместности* (N_1) *выполняются, но не тождественно, тогда существуют некоторые частные, либо особые решения системы. Если функции* a,b,c *- удовлетворяют условиям* (M_0), (M), *то полученные решения системы во всей области* $\overline{D}$ *будут непрерывными. Если условия* (N_1) *выполняются тождественно, то система (2.1.16) разрешима и многообразие её решений определяется формулой (2.1.17). Причём этого вида решения системы в случае* $0\le n<1$ *в области* $\overline{D}$ *и при* $n\ge1$ *в* D_0 *, является непрерывным, в точке* $\rho=0$ *соответственно имеет особенность логарифмического порядка при* $n=1$ *и* $(n-1)-$ *го порядка при* $n>1$. *Во всех других случаях решение системы, частное либо общее ее решений, в данной области является однозначным.*

В **п.2.2.3** рассматривается п.д.- система с разделяющимися переменными относительно искомой функции

$$\rho^n \frac{\partial u}{\partial \rho} = a(\rho,\varphi,\theta)s(u),\ \ \rho^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b(\rho,\varphi,\theta)g(u),\ \ \rho^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \theta} = c(\rho,\varphi,\theta)h(u), \quad (2.1.18)$$

Если для системы (2.1.18) будут выполнены условия (M_0), то, получим $s(u)=0, g(u)=0, h(u)=0$; тогда только $u = const.$ будет частным решением системы в особой точке данной области. Если в системе (2.1.18) будут выполнены условия малости, $a(\rho,\varphi,\theta) = o(\rho^{n-\lambda})$, $b(\rho,\varphi,\theta) = o(\rho^{n-1-\lambda})$, $h(\rho,\varphi,\theta) = o(\rho^{n-1-\lambda})$, $(0 \le \lambda < 1)$, то при тождественном выполнении условия совместности, решение системы во всей области будет непрерывным. Тождественное выполнение условия совместности системы (2.1.18) возможно, если функции, находящиеся в правых частях системы, определяются формулами

1) $a = \rho^n \alpha(\rho),\quad b = \rho^{n-1}\beta(\varphi),\quad c = \rho^{n-1}\gamma(\theta),\quad g = h = \lambda s(u),\ \lambda = const.$

При этом система (2.1.18) разрешима и многообразие её решений определяется формулой $u(\rho,\varphi,\theta,) = S^{-1}\left[C + A(\rho) + B(\varphi) + F(\theta)\right]$.

2) Если считать, что $a(\rho,\varphi,\theta)$ - вполне определённая функция, то необходимо выполнение условий

$$b(\rho,\varphi,\theta) = \rho^{n-1}\alpha(\varphi,\theta)\exp\left(\lambda\, A(\rho,\varphi,\theta)\right),\ \ A(\rho,\varphi,\theta) = -\int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n} dt,$$

$$c(\rho,\varphi,\theta) = \rho^{n-1}\,\beta(\varphi,\theta)\cdot\exp\left(\lambda\cdot A(\rho,\varphi,\theta)\right),\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} = \frac{\partial\beta}{\partial\varphi} \quad (2.1.19)$$

$$g(u) = h(u) = \left[1 + \exp\left\{-S(u)\right\}\right]\cdot s(u)$$

При этих видах функций a, b, c, g, s, h - условия совместности системы (2.1.18) выполняются тождественно и многообразие её решений определяется формулой

$$u(\rho,\varphi,\theta)=S^{-1}\left[A(\rho,\varphi,\theta)+\frac{1}{\lambda}\ln\left(C+\lambda\cdot\omega(\varphi,\theta)\right)\right]. \qquad (2.1.20)$$

Решения системы вида (2.1.18), как и функции $A(\rho,\varphi,\theta)$ в области D_0, являются непрерывными, в точке $\rho=0$ при $n<1$ также -непрерывными, а в случаях $n\geq 1$ имеют особенность порядка (n-1) и логарифмическую особенность соответственно.

В **п.2.2.4** рассматривается п.д. - система вида

$$\rho^n\frac{\partial u}{\partial\rho}=a(\rho,\phi,\theta)\cdot h(\theta,u),\ \rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\phi}=b(\rho,\phi,\theta)\cdot h(\theta,u),\rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\theta}=c(\rho,\phi,\theta;u)\text{,} \quad (2.1.21)$$

где $a,b,c,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in C^2(D_0)$. Если для этой системы будут выполнены условия (M_0), то из (2.1.21), аналогично [108-110] можно определить некоторые частные, либо особые решения системы. По аналогии с **п.3.2.3** утверждаем, что условия совместности системы (2.1.21) выполняются тождественно, если

$$c(\rho,\varphi,\theta;u)=\rho^{n-1}\left\{\frac{\partial\omega_0}{\partial\theta}-\frac{\partial H}{\partial\theta}+f\left[\theta;H(\theta;u)-\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}\cdot h(\theta;u)\text{,} \quad (2.2.22)$$

где $H(\theta;u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\tau}{h(\theta;\tau)}$, $\frac{\partial\omega_0}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}$, $\frac{\partial\omega_0}{\partial\varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}$.

Теорема 2.4. *Пусть в системе (2.2.21)* $a,b,c,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in C^2(D_0)$. *Если для этой системы выполняются условия (M_0), а также условия совместности системы выполняются, но не тождественно, тогда найдётся некоторое частное, либо особое решение системы. Для того чтобы условия совместности системы (2.2.21) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функции* $c(\rho,\varphi,\theta;u)$ *с функциями* $a(\rho,\ldots)$, $b(\rho,\ldots)$ *и* $h(\rho,\ldots)$ *определялась формулой (2.2.22). Если о.д.у. вида (2.1.13) имеет решение, то система (2.2.21) также разрешима и многообразие её решений*

определяется явной формулой. Причём это решение системы (2.2.21) в случае $n<1$ *во всей области* $\overline{D}$*, при* $n\geq 1$ *в точках области* D_0 *непрерывно, а в точке* $\rho=0$ *имеет особенность* $(n-1)-$*го порядка. Для устранения порядка особенности в точке* $\rho=0$ *необходимо, чтобы в этой точке* $a(\rho,\varphi,\theta)=o(\rho^{n-\lambda}),(0\leq\lambda<1)$.

В **п.2.2.6 -2.2.10** рассматриваются некоторые нелинейные п.д.- системы, где они преобразуются к линейным системам. Для этих систем, учитывая взаимосвязь коэффициентов, устанавливается тождественное выполнение условий совместности. Далее находятся точные решения рассматриваемых систем и исследуются поведения решений систем в особой точке.

В §4 главы 2 в основном рассматриваются п.д.- системы с произвольным числом независимых переменных (в n - мерной сфере) с сингулярной точкой.

Рассматриваем п.д.- систему вида

$$\rho^m\frac{\partial u}{\partial x_k}=a_k(x,u),\quad (k=\overline{1,n}),\quad m\geq 0,\ (\rho^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2). \tag{2.4.1}$$

Переходим к n-мерным сферическим координатам вида:

$$\begin{cases} x_1=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-1},\ x_2=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}=\rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\quad x_n=\rho\cos\varphi_1 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Тогда предыдущая система преобразуется к виду

$$\rho^n\frac{\partial u}{\partial\rho}=a_1(\rho,\phi;u),\ \rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\phi_k}=a_{k+1}(\rho,\phi;u),\ (k=\overline{1,(n-1)}),\ \phi=(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{n-1}). \tag{2.4.3}$$

Легко заметить, что для системы (2.4.3) в сингулярной точке нельзя поставить задачу Коши, ибо при $\rho=0$ из системы (2.4.3) имеем $a_i(0,\varphi;u)=0,(i=\overline{1,n})$.

Из этих соотношений можно определить функции $u = h_i(\varphi)$, которые будут частными решениями системы. Причём эти требования совпадают с выполнением условий (M_0) к данной системе. Если далее считать, что $\rho \neq 0$, то получаем, что задачи Коши с заданием $\rho \neq 0$ для системы (2.4.3) может быть поставлена в виде

$$u = u_0 \text{ при } \rho = \rho_0, \quad \varphi_k = \varphi_k^{(0)}, \quad (0 \le \varphi_k^{(0)} \le 2\pi, 0 < \varepsilon \le \rho = \rho_0 \le 1) \ . \qquad (2.4.4)$$

Очевидно, что если условия совместности системы (3) выполняются, но не тождественно, то можно находить некоторые частные решения системы. Допустим, эти условия выполняются тождественно, и кроме того потребуем, чтобы функции $a_k(\rho, \varphi; u)$ удовлетворяли условиям (**M**) [110],[190-191]:

1) $a_k(\rho, \varphi; u) \in C^1(\overline{D} \times R^1), \ |a_k(\rho, \varphi; u)| \le K, \quad \dfrac{\partial a_k}{\partial u} \neq 0; \quad (K = const.), (k = \overline{1, n})$

2) в силу п. 1, функции $a_k(\rho, \varphi; u)$ по переменной ρ будут удовлетворять условию Гёльдера $|a_k(\rho, \varphi; u) - a_k(0, \varphi; u)| \le L_k |\rho|^{\lambda}$ $(0 \le \lambda < 1)$;

3) тогда существуют числа a_0, b_o, h такие, что при $|\rho| \le a_0$, $|u - u_0| \le b_0$ и при достаточно малом числе $h_0 = \min(a_0, b_0 / K)$ обеспечивается единственность решения задачи Коши для исходной системы (2.4.3). Имеет место следующая:

Теорема 2. 5. *Пусть в п.д. - системе (2.4.3)* $a_k \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$, *и кроме того будут выполнены все три условия (**M**). Если для системы (2.4.3) будут выполнены условия леммы 2, и условия совместности данной системы выполняются, но не тождественно, то существует некоторые частные, либо особые решения системы. Пусть условия совместности системы (2.4.3) выполняются тождественно; тогда существует единственное решение задачи Коши (2.4.4) вне особой точки* $\rho = 0$, *а в точке* $\rho = 0$ *решение системы*

имеет особенность порядка (n-1) и логарифмическую особенность соответственно.

Допустим, что в системе (2.4.3) функции $a_i = a_i(\rho,\phi), i = \overline{1,n}$, то есть

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_k} = \frac{a_{k+1}(\rho,\varphi)}{\rho^{m-1}}, \quad m \geq 0, \ (k = \overline{1,(n-1)}), \qquad (2.4.5)$$

причём $a_1(\rho,\varphi)$ считается вполне определённой функцией, тогда условия совместности системы выполняются, если

$$a_{k+1}(\rho,\varphi) = \rho^{m-1}\left[\beta_{k+1}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi_{k+1}}\left(-\int_\rho^1 \frac{a_1(t,\varphi)}{t^m}dt\right)\right], (k = 1,(n-1)), \qquad (2.4.6)$$

где $\beta_{k+1}(\varphi)$ являются некоторыми вполне определёнными функциями. При этих значениях функций $a_{k+1}(\rho,\varphi)$ условия совместности системы (2.4.5) $\frac{\partial \beta_j}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_j}, (k \neq j,\ k,\ j = 1,2,....)$ будут выполнены и многообразие её решений определяется формулой вида

$$u(\rho,\varphi) = C + \Phi(\varphi) + A(\rho,\varphi); \qquad (2.4.7)$$

где $\Phi(\varphi) = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(0,...,0,\varsigma_k,...,\varphi_{n-1})d\varsigma_k, \quad A(\rho,\varphi) = -\int_\rho^1 \frac{a_1(t,\varphi)}{t^m}dt$.

Заметим, что в формуле (2.4.7), если $0 \leq m < 1$, то решение системы в замкнутой области $\overline{D}$ и в области D_0, в случаях $m \geq 1$, является непрерывным. Причём решение системы, в точке $\rho = 0$, при $m = 1$, и $m > 1$, соответственно имеет логарифмическую особенность, и особенность *(m*-1)-го порядка. Допустим, что во внешней части n - мерного шара $\overline{D}$, то есть в $D^- = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 > \rho^2, (1 < \rho < \infty \ , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ функция $a_1(\rho,\varphi)$ удовлетворяет

условию разрешимости для п.д.- системы (2.4.5), то есть, если $\rho \to \infty$, тогда требуются следующие условия [293-296], [190-193]:

1) функция $a_1(\rho,\varphi)$ всюду в $\overline{D}$ была ограничена и однозначна;

2) аргументы φ_i удовлетворяют неравенствам $0 \le \varphi_i \le 2\pi\,(i=\overline{1,n})$;

3) существуют конечные пределы $\lim\limits_{\rho\to 0} a_i(\rho,\varphi),\,(i=\overline{1,n})$;

4) функция $\dfrac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}$ $(m\ge 1)$ была интегрируема на промежутке $(1,\infty)$.

Тогда вне области $\overline{D}$ все решения п. д. - системы (2.4.5) однозначно, непрерывно и определяются следующей формулой:

$$u(\rho,\varphi) = C + \Phi(\varphi) - \int_{\rho}^{\infty} \frac{a_1(t,\varphi)}{t^m}\,dt,\ (\rho>1)\ . \qquad (2.4.8)$$

Тем самым для исходной п.д.- системы решается граничная задача.

Теорема 2.6. *Пусть в п.д.- системе (2.4.5)* $a_1, a_{k+1} \in C^1(\overline{D}\times R^1), u \in C^2(D_0)$. *Если для системы (2.4.5) будут выполнены условия (M_0), то получим, что в точке вырождения* $\rho = 0$ *искомая функция всюду в области постоянна. Для того чтобы условия совместности системы (2.4.5) выполнялись во всей области, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями* a_{k+1} *с* a_1 *- определялись формулами вида (2.4.6). Тогда задача Коши (2.4.4) для п.д.- системы (2.4.5) имеет единственное решение и определяется формулой (2.4.7). При этом, такого вида решения системы (2.4.5) в случаи* $0 \le m < 1$ *в области* $\overline{D}$ *и при* $m \ge 1$ *в области* D_0 *будут непрерывными, а в точке* $\rho = 0$ *при* $m \ge 1$ *соответственно имеют логарифмическую особенность (при* $m = 1$*), и особенности* $(m-1)$*-го порядка при* $m > 1$. *Если в п.д.- системе (2.4.5)* $a_1, a_{k+1} \in C^1(D^-), u \in C^2(D^-)$, *и для этой системы будут выполнены условии*

совместности, тогда вне области $\overline{D}$ *решение п.д.- системы (2.4.5) будет представлено формулой (2.4.8). Причём такой вид решения системы вне области* $\overline{D}$ *является ограниченным, непрерывным и однозначным.*

Замечание. *Отметим, что условия предыдущей теоремы 2.6 можем применять во всех случаях, (в двумерном и произвольном случаях), п.д.- систем с сингулярной точкой на плоскости и в пространствах.*

В **п.2.4.3 - 2.4.4** рассматриваются линейные системы, приводящие к линейным п.д.-системам, для которых определяются взаимосвязи коэффициентов, обеспечивающие тождественное выполнение условий совместности вида

$$\rho^m \frac{\partial u}{\partial x_k} = p_k(x)u + q_k(x)u^k, (k = \overline{1,n}), m \geq 0, x = (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (2.5.16)$$

при $k \neq 0,$ и $k = j \in \mathrm{Z}; p_k, q_k \in C^1(\overline{D}), u \in C^2(D_0)$. Для этих п.д.- систем при проверке условий (M_0), (N_1) и других, находятся многообразия решений в явном виде. Причём исследуется поведение решений систем в точке $\rho = 0$.

В **п.2.4.5** рассматривается нелинейная п.д.- система вида

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a(\rho,\varphi)}{\rho^m} p(\varphi;u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_k} = \frac{b_k(\rho,\varphi;u)}{\rho^{m-1}}, (k = \overline{1,(n-1)}), \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}), \quad (2.5.23)$$

где $a, p, b_k \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$. Если для системы (2.5.23) будут выполнены условия (M_0), то из этой системы находятся её частные решения формулами $u = h_j(\varphi), j = \overline{1,n}$. Тем самым, из этих формул определяется поведение решения системы в точке вырождения. Допустим, что условия совместности системы выполняются, но не тождественно, тогда найдётся некоторые функции $u = \mathrm{h}_i(\rho,\varphi), (i = \overline{1, C_n^2})$, которые могут быть (либо не быть) некоторыми частными решениями системы [110], [190].

Для того чтобы условия совместности системы (2.5.3) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции $b_k(\rho,\varphi;u)$ определялись следующими формулами

$$b_k(\rho,\phi;u)=\rho^{m-1}\left\{\frac{\partial A}{\partial \phi_k}-\frac{\partial P}{\partial \phi_k}+f_k\left[\phi;\,P(\phi,u)-A(\rho,\phi)\right]\right\}p(\phi,u), \quad (k=\overline{1,(n-1)}). \tag{2.5.24}$$

Учитывая (2.5.24), проинтегрируем систему (2.5.23) и получим п.д.- систему с регулярными правыми частями

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k}=f_k(\varphi;V),\quad (k=\overline{1,\,(n-1)}), \tag{2.5.25}$$

если задачи Коши (2.5.4) для этой системы имеет решение, то исходная система (2.5.23) также разрешима и многообразие её решений определяется формулой [295]

$$u(\rho,\varphi)=P^{-1}\left[\varphi;\,A(\rho,\varphi)+V(u_0,\varphi)\right] \text{ или } u(\rho,\varphi)=P^{-1}\left[\varphi;\,A(\rho,\varphi)+V(C,\varphi)\right]. \tag{2.5.26}$$

Теорема 2.7. *Пусть в п.д.- системе (2.5.23)* $a,b_k\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0)$. *Если в точке вырождения для системы (2.5.23) выполняются условия (M_0), то можно определить* ***n****- частных, либо особых решений системы. Если условия совместности п.д.- системы (2.5.23) выполняются, но не тождественно, то найдутся не более чем* $C_n^2=0{,}5n(n-1)$ *функций, которые могут быть частными решениями исходной системы. Для того чтобы условия совместности системы (2.5.23) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями* $b_k(\rho,\varphi;u)\ (k=\overline{1,(n-1)})$ *и* $a(\rho,\varphi),\ p(\varphi,u)$ *определялись формулами вида (2.5.24). Если задача Коши для системы (2.5.25) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (2.5.26). Причём такой вид*

решения системы (2.5.23) (без учёта предыдущих условий) ,в случае $0 \le m < 1$ *в* $\overline{D}$ *и при* $m \ge 1$ *в области* D_0, *являются непрерывными, а в точке* $\rho = 0$ *соответственно имеют логарифмическую особенность при m=1, и особенности (*$m-1$*)-го порядка при m>1.*

В п.2.4.6 рассматривается п.д.- система вида

$$\rho^k \frac{\partial u}{\partial \rho} = a(\rho^{k-1}, \phi; u),\ \rho^{k-1} \frac{\partial u}{\partial \phi_i} = b_i(\rho, \phi;\ \rho^{k-1} u),$$
$$i = \overline{(1, n-1)},\ k \ge 0, \phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n), \qquad (2.5.28)$$

где $a, b_i \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$, причём функция $a(\rho^{k-1}, \varphi, u)$- однородная функция по первому и последнему аргументам. Если проверять выполнение условий (M_0) для системы (2.5.28), то получим единственную функцию $u = h(\varphi)$, являющуюся частным решением системы. Если условия совместности системы выполняются, но не тождественно, то можем получить C_n^2 функций, где они могут быть (или не быть) некоторыми частными решениями системы. Для того чтобы условия совместности системы (2.5.28) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции $b_i(\rho, \varphi; z), (z = \rho^{k-1}\ u)$ имели вид

$$b_i(\rho, \phi; z) = \left\{ -\frac{\partial A(\rho, \phi)}{\partial \phi} + f_i\left[\phi; A(\phi, z) - \ln \rho\right] \right\} \cdot [a(1, \phi; z) - (k-1)z], \qquad (2.5.30)$$
$$(i = \overline{1, (n-1)}).$$

Учитывая формулы (2.5.30), интегрируем систему (2.5.28) и приводим её к виду (2.5.25). Если задача Коши для этой системы имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие её решений определяется формулой

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^{k-1}} A^{-1}\left[\varphi; \ln \rho + V(u_0, \varphi)\right].$$

При этом для решения системы (2.5.28) имеет места условия теорема 1.12.

ОБЗОР ГЛАВЫ 3

Материалы главы 3 посвящаются некоторому классу **обобщённых систем Коши-Римана** для системы двух и ***n*** –комплексных независимых переменных.

3.1. Некоторые сведения из теории функций и комплексных дифференциальных уравнений

Класс A (аналитические функции). К этому классу мы относим широко известные аналитические по комплексным переменным функции $f(z)$, а также $f(z,\zeta)$, где $z = x + iy,\ \zeta = \xi + i\eta$ либо $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ где $z_k = x_k + iy_k$.

Класс RA (вещественно - аналитические функции). К этому классу относятся функции $f(x,y)$, которые в окрестности каждой внутренней точки (x_0, y_0) данной области могут быть представлены сходящимися степенными рядами

$$f(x,y) = \sum_{k,n=0}^{\infty} f_{kn}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^k \cdot (y - y_0)^n. \qquad (3.1.1)$$

Аналогично определяются функции произвольного числа независимых переменных из класса RA. Заметим, что всякая такая функция допускает аналитического продолжения на комплексные переменные (заменами x, y на z, ς). С другой стороны, любую такую функцию (четного числа переменных) можно считать аналитической функцией по комплексно сопряженным переменным $z, \bar{z}$, ибо можно в (3.1.2) заменить $x = 0{,}5(z + \bar{z}),\ \ y = 0{,}5(z - \bar{z})$. На аналитические функции комплексных переменных можно перенести многие

результаты из вещественного анализа и теории дифференциальных уравнений. Поскольку для переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial z} = f(z,\varsigma;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma} = q(z,\varsigma;W), \tag{3.1.3}$$

где p,q - заданные функции, а также W - неизвестная функция, аналитические по всем переменным, справедливы такие же результаты, как и для систем вещественных дифференциальных уравнений в полных дифференциалах. Не будем приводить этих материалов, изложенные в известном учебнике Э.Гурса и других материалов [4], [5], [7-10], [17-20], [70-78], [82-85], [121-122], а также в других работах.

В **п.3.1** рассматриваются основные понятия обобщённых систем Коши-Римана (о.с.К.- Р.), для двух и более независимых комплексных переменных. Также рассматриваются некоторые виды (классы) о.с.К.- Р., с регулярными коэффициентами. В случаи тождественного выполнения условий совместности систем, многообразия решений изучаемых систем определяются через произвольную аналитическую функцию двух и большего количества комплексных независимых комплексных переменных.

A - класс аналитических функций, для которых выполняются равенства

$\partial_{\bar{z}} f = 0$ либо $\partial_{\bar{z}_i} f = 0, (i = 1,2,\ldots);$

RA- класс вещественно-аналитических функций, указанные выше формулой (3.1.1).

$\mathbf{C^k}$ - класс непрерывно дифференцируемых до порядка **k** функций.

В работах И.Н.Векуа ([17-20]) и Л.Г.Михайлова [72-77], [82-88] [93], [98,100] и других авторов, в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций, были изучены линейные и квазилинейные

о.с.К.-Р. как с одним, двумя, так и с многим числом комплексным независимым переменным, с регулярными правыми частями вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = f_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \qquad (3.1.4)$$

где $f_1, f_2 \in RA(\overline{\Pi}_2)$ по $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ и аналитические по переменной W функции, то есть $\frac{\partial f_k}{\partial \overline{W}} = 0$. При этом за областью $\overline{\Pi}_3$ считаем бицилиндр (то есть топологическим пересечением цилиндров) в комплексной плоскости, $\overline{\Pi}_2$-полицилиндр. Поэтому в работе будем пользоваться обозначениями $\overline{\Pi}_3 = \left\{(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \middle| |\bar{z}_k - \bar{z}_k| \le a, (k = 1,2), |W| \le b\right\}$, $z_k = x_k + iy_k$, $\bar{z}_k = x_k - iy_k$, $(k = 1,2)$;

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)$, $(k = 1,2)$ [37], [41-43].

Также И.Н. Векуа и Л.Г. Михайловым были исследованы квазилинейные переопределённые обобщённые системы Коши-Римана и п.о.с. К.-Р. (переопределенная обобщённая система Коши-Римана), например, вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_n, \bar{z}_n; W), \quad (k = \overline{1,n}) \qquad (3.1.5)$$

где $f_k \in RA(\overline{\Pi}_n)$ по всем комплексным переменным, аналитический по переменной W, то есть $\partial_{\overline{W}} f_k = 0, W \in RA(\overline{\Pi}_{n+1})$, где $\overline{\Pi}_{n+1}$ - $(n+1)$ –мерный полицилиндр: $\overline{\Pi}_{n+1} = \left\{(\bar{z}) \middle| |\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)}| \le a, (k = \overline{1,n}), |W| \le b\right\}$, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n)$. Иначе говоря, в системах (3.1.1) и (3.1.4) функции $f_k(z, \bar{z}), (k = 1,2)$ и $(k = \overline{1,n})$ будем считать вещественно - аналитическими по независимым переменным $\bar{z}_k$, и аналитическими по искомой функции.

Обобщенными аналитическими функциями называют решения обобщенной системы Коши-Римана

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = a(z)W + b(z)\overline{W} + c(z) \qquad (3.1.6)$$

Теория обобщенных аналитических функций изложена в монографиях И.Н. Векуа [17-20] и Л.Г.Михайлова [71-77], З.Д.Усмонова [235], Раджабова Н. [160-162, 175-177] С.Х.Сафарова [85-86], Э.М.Мухаммадиева, С.Байзаева[4], [122] и других авторов. Если в (3.1.6) $a(z) = 0, b(z) = 0$, то неоднородная система Коши-Римана имеет частное решение

$$W_0(z) \equiv T(c) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{c(\varsigma)dS_\varsigma}{\varsigma - z}, \ (dS_\varsigma = d\xi\, d\eta),$$

а общее решение определяется формулой $W(z) = \Phi(z) + T(c)$, где $\Phi(z)$ - произвольная аналитическая функция. В другом частном случае, когда $a(z) \equiv 0, \quad c(z) \equiv 0$, многообразие всех решений даётся формулой $W = \Phi(z) \cdot \exp(\omega(z))$, где $\omega(z) \equiv Tb$. В общем случае решение однородной системы (3.1.6), когда $c(z) \equiv 0$ (но $a(z) \neq 0, \quad b(z) \neq 0$), тем же способом, получаем первую основную формулу теории обобщенных аналитических функций

$$W(z) = \Phi(z) \cdot \exp(\Omega(z)), \quad \Omega(z) = T\left(a \cdot \frac{\overline{W}}{W} + b\right). \qquad (3.1.7)$$

Хотя формула (3.1.7) и не является явной, она весьма полезна для качественного изучения свойств функции W*(z).*

С другой стороны, в общем случае, непосредственно интегрируя однородное уравнение, из (3.1.6) при $c(z) = 0$ получаем интегральное уравнение

$$W(z) = \Phi(z) + T\left(a \cdot \overline{W} + bW\right). \qquad (3.1.8)$$

Как доказывается в работах И.Н.Векуа [17-20], и [12], [72-75] оно всегда имеет единственное решение вида

$$\mathrm{W}(z) = \Phi(z) + \Gamma_1(\Phi) + \Gamma_2(\overline{\Phi}), \qquad (3.1.9)$$

где Γ_1, Γ_2 – резольвенты интегрального уравнения. Формулу (3.1.7) называют формулой представления 1-го рода, а (3.1.9)-формулой представления 2-го рода.

В качестве начальных данных для систем (1) и (2) примем

$$W_0 = \Phi(z_1, z_2) \text{ при } \varsigma_k = \varsigma_k^{(0)} \ (k = 1,2), \text{ или } W_0 = \Phi(z_1, z_2, ..., z_n), \ (k = \overline{1,n}). \quad (3.1.10)$$

В этой главе настоящей работы, в отличие от предыдущих работ, рассматриваются некоторые классы п.о.с. К.- Р. с линейными, нелинейными и квазилинейными правыми частями и с сингулярными коэффициентами (сингулярными точками). Учитывая результаты работ [71]-[80], [82] (для регулярных правых частей систем), для изучаемых п.о.с. К.-Р. устанавливается тождественное выполнение условий совместности изучаемых систем. Далее находятся многообразия их решений явными формулами, и анализируется поведение решений систем в особых точках, и в их окрестностях.

В п.**3.2** по аналогии с [100] рассматривается п.о.с. К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}} m(z_1, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}} m(z_1, z_2; W), \qquad (3.2.1)$$

где $a, b \in RA(\overline{\Pi}_2), m \in A(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$ по всем переменным. Для непрерывности решений системы (3.2.1) будем требовать, что если выполнены условия леммы Михайлова Л.Г.

1) $\lim\limits_{z_k \to z_k^{(0)}} \left((\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)}) \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} \right) = 0, \quad (k = 1,2)$, то необходимо выполнение условий $a(z_1, \bar{z}_1^{(0)}, z_2, \bar{z}_2^{(0)}) = a_0 = 0, \quad b(z_1, \bar{z}_1^{(0)}, z_2, \bar{z}_2^{(0)}) = b_0 = 0, \quad m(z_1, z_2; W) = 0$. ($M_0$)

Из последнего равенства имеем $W = h(z_1, z_2)$. Такая найденная функция является частным решением исходной системы (см. [100], [121]). После

аналитического продолжения функции в системе (3.2.1) заменой $\bar{z}_k$ $(k=1,2)$ на ς_k преобразуем систему (3.2.1) к виду

$$\begin{aligned}(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})\frac{\partial W}{\partial \varsigma}&=a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)m(z_1,z_2;W),\\(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}&=b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)m(z_1,z_2;W).\end{aligned}\qquad(3.2.2)$$

Допустим, что в системе (3.2.2) $a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$ считается вполне определённой функцией. Тогда утверждаем, что условие совместности системы (3.2.2) выполняется тождественно, если $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\big(q(z_1,z_2,\varsigma_2)+A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\big)$, где $q(z_1,z_2,\varsigma_2)$ ~~как~~ и $b(z_1,...)$-известные функции. Учитывая значение функций $b(z_1,...)$, проинтегрируем систему (3.2.2) и, переходя к прежним переменным, получим явное решение исходной системы формулой

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=M^{-1}\big[z_1,z_2;Q(z_1,z_2,\bar{z}_2)+A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)+\Phi(z_1,z_2)\big].\qquad(3.2.3)$$

При этом решение системы, как и функция, $A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$ в точке $\bar{z}_1=\bar{z}_1^{(0)}$ имеет логарифмическую особенность. Если считать, что в системе (3.2.2) функции в её правых частях в области $\overline{\Pi}_3$ являются аналитическими, то применяя теорему вычетов к интегралам, будем иметь непрерывную функцию вида : $A(z_1,\varsigma_1,z_2,\bar{z}_2)=2\pi i a(z_1,z_1^{(0)},z_2,z_2^{(0)})$. При этом решение системы во всей замкнутой области будет непрерывным.

В **п.3.2.4** рассматривается п.о.с. К.-Р. с различными разделяющимися переменными вида [93], [100]

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^n}m(z_1,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)})^n}p(z_1,z_2;W),\ (3.2.3)$$

где $a, b, m, p \in RA(\overline{\Pi}_2),\ m, p \in A(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$. Аналитически продолжая функций в области $\overline{\Pi}_2$, заменой $\overline{z}_k$ на новые переменные ς_k $(k=1,2)$, преобразуем систему (3.2.3) к следующему виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} m(z_1, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n} p(z_1, z_2; W). \quad (3.2.4)$$

Допустим, что в системе (3.2.4) $\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}$ $(k=1,2)$ всюду на данной области считаются ограниченными. Тогда, если в системе (3.2.4) выполняются условия (M_0), то есть

$\lim\limits_{\bar{z}_k \to \bar{z}_k^{(0)}} \left((\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^n \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0, (k=1,2)$, то необходимо $a_0 = 0, b_0 = 0, m(...), p(...) = 0$.

Из последних двух равенств получим $W = h_i(z_1, z_2), (i=1,2)$. Эти найденные функции, возможно, будут частными, либо особыми решениями системы. Это означает, что если для данной системы требовать выполнение условий (M_0), то в точке вырождения система может иметь только лишь частное, либо особое решение. Допустим, что в системе (3.2.14) функции a, b удовлетворяют условию малости, тогда при тождественном выполнении условия совместности, решение системы во всей области непрерывно. Для того чтобы условие совместности системы (3.2.4) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями $p, m; b, a$ определялись следующими формулами

$$\begin{aligned} a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) &= (\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n \alpha(z_1, z_2, \varsigma_2), \\ b(z_1, ..., \varsigma_2) &= (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \beta(z_1, \varsigma_1, z_2) \\ p(z_1, z_2; W) &= \lambda\, m(z_1, z_2; W),\ \lambda = const, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

либо

$$b(z_1,\ldots,\varsigma_2)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\,\beta(z_1,z_2,\varsigma_2)\exp\bigl(-\lambda A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\bigr),$$
$$p(z,z;W)=\bigl[1+\exp\bigl(\lambda M(z_1,z_2;W)\bigr)\bigr]m(z_1,z_2;W). \qquad (3.2.16)$$

При этом, исходная система разрешима и многообразия её решений определяются формулами вида

$$W(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)=M^{-1}\bigl[z_1,z_2;\Phi(z_1,z_2)+A(z_1,\bar z_1,z_2)+B(z_1,z_2,\bar z_2)\bigr] \qquad (3.2.17)$$

либо

$$W(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)=M^{-1}\left[z_1,z_2;A(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)+\frac{1}{\lambda}\ln\bigl(\Phi(z_1,z_2)+\lambda B(z_1,z_2,\bar z_2)\bigr)\right]. \qquad (3.1.8)$$

Тогда многообразие решений системы (3.1.16), определяемое формулой (3.1.17), во всей данной замкнутой области непрерывно и формула вида (3.1.18)- непрерывна по переменной $\bar z_2$, а при $\bar z_1=\bar z_1^{(0)}$, имеет особенность *(n*-1*)*-го порядка при $n>1$, и логарифмическую особенность при *n=1*и непрерывно, если ей применять теорем о вычетах.

В п.**3.2.5.** рассматривается квазилинейная п.о.с. К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar z_1}=\frac{a(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)}{(\bar z_1-\bar z_1^{(0)})^n}\,m(z_1,z_2,\bar z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial\bar z_2}=\frac{b(z_2,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W)}{(\bar z_2-\bar z_2^{(0)})^n}, \qquad (3.2.19)$$

где $a,b,m\in RA(\overline{\Pi}_2),W\in RA(\Pi_3^{(0)}),m\in A(\overline{\Pi}_3)-$по переменным z_1,W. В системе (3.2.19) аналитически продолжив в функций в данной области, заменой переменных $\bar z_k$ на ς_k $(k=1,2)$, получим

$$(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial\bar z_1}=a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\,m(z_1,z_2,\varsigma_2;W),$$
$$(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W). \qquad (3.2.20)$$

Допуская, что в системе (3.2.19) будут выполнены условия (M_0), при переходе к пределу, будем иметь

$$a_0=0,\quad m(z_1,z_2,\varsigma_2^{(0)};W)=0,\quad b(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2^{(0)};W)=0.$$

Из последних двух равенств имеем, что $W = h_k(z_1, z_2), (k = 1,2)$ в точке вырождения будут частными решениями исходной системы. Из условии совместности системы (3.2.19) имеем, что для тождественного её выполнения необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ принимала вид

$$b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \cdot \left(\frac{\partial (A - M)}{\partial \varsigma_2} \right) m(z_1, z_2, \varsigma_2; W) + \\ + (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \, f\left[z_1, z_2, \varsigma_2; M(z_1, z_2, \varsigma_2; W) - A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) \right] m(z_1, z_2, \varsigma_2; W). \quad (3.2.21)$$

Учитывая формулы (3.2.21), проинтегрируем систему (3.2.20) и затем, переходя к прежним переменным, получим [110-111]:

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = M^{-1}\left[z_1, z_2, \bar{z}_2; \Phi(z_1, z_2) + A(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + F(z_1, z_2, \bar{z}_2) \right]. \quad (3.2.22)$$

Теорема 3.3. *Пусть в п.о.с. К.-Р. (3.2.19)* $a, b, m \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$, $m \in A(\Pi_2^{(0)}), b -$ *аналитическая по переменной W функция. Если в системе уравнений (3.2.19) её данные функции удовлетворяют условию (M₀), и условие совместности системы (3.2.20) выполняется, но не тождественно, то, определяется некоторое частное решение данной системы, либо такие решения отсутствуют. Для того чтобы условие совместности системы (3.2.20) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ *принимала вид формулы (3.2.21). Если комплексное дифференциальное уравнение, полученное из интегрирования системы (3.2.20), имеет определённое решение, то система (3.2.19) также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (3.2.22). Причём такой вид решения системы (3.2.21) является непрерывным по* $\bar{z}_2$ *всюду в области, в точке* $\bar{z}_1 = \bar{z}_1^{(0)}$ *имеет особенность* $(n-1)-$*го порядка при* $n > 1$, *а при* $n = 1$ *имеет логарифмическую особенность. Если в системе (3.2.19) её правые части как функции в области* $\overline{\Pi}_3$ *считать аналитическими, то решение данной системы непрерывно всюду в области.*

В **п.3.2.8.** рассматривается п.о.с. К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)\, m(z_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^n}, \qquad (3.2.35)$$

где $a, b, m \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_2^{(0)}), m, b \in A(\overline{\Pi}_3)$ – по переменной W. Если считать, что система (3.2.35) удовлетворяет условию (M_0), то аналогично предыдущему п.3.2.5., получим два частные решения системы. Для того, чтобы условия совместности системы (3.2.35) выполнялась тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функции $b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ и $a(z_1, \cdots), m(z_1, \cdots; W)$ определялась формулой вида (3.2.37), где в этой формуле функция, $A(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \int_0^{\bar{z}_1} a(z_1, t, z_2, \bar{z}_2) dt$ - регулярная и непрерывная в $\overline{\Pi}_2$. При этом, в силу формулы (3.2.21), процесс интегрирования системы приводится к регулярному комплексному дифференциальному уравнению (к.д.у.). Интегрируя это к.д.у., получим непрерывное его решение. Затем, переходя к предыдущим переменным, находим многообразие решений исходной системы формулой вида (3.2.25), непрерывной, всюду в области $\overline{\Pi}_2$, и для него будут справедливыми условия равносильна теоремt, к теоремы 3.5.

В **п.3.2.9.** рассматривается п.о.с. К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^n} m(z_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^n}, \qquad (3.2.43)$$

где $a, b, m \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), b \in A(\overline{\Pi}_3), m -$ аналитическая по переменным z_1, W функция. Делая замену $\bar{z}_k$ на ς_k, аналитически продолжим в функции в системе (3.2.43). Тогда она преобразуется к следующей форме

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} m(z_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n}. \qquad (3.2.44)$$

Если считать, что система (3.2.44) удовлетворяет условию (M_0), т.е.

$$\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}\right)=0,(k=1,2),$$

то необходимо, получаем $a_0=0, m(z_1,z_2,\varsigma_2;W)=0,\qquad b(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2;W)=0.$ Из последних двух равенств имеем $W=h_i(z,z,\varsigma_2),(i=1,2)$. Эти найденные функции будут лишь частными решениями системы (3.2.44). Для того чтобы условие совместности системы (3.2.44) выполнялась тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ определялась в виде

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)=$$
$$=(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\left\{\frac{\partial(A-M)}{\partial\varsigma_2}+f\left[z_1,z_2,\varsigma_2;M(z_1,...;W)-A(z_1,...,\varsigma_2)\right]\right\}m(z_1,...;W),\qquad(3.2.45)$$

где $M(z_1,z\ ,\varsigma_2;W), A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$ определяются интегральными формулами, как и п.3.2.4. Учитывая значение функции $b(z_1...,W)$ из (3.2.45), проинтегрируем систему (3.2.44) и затем, переходя к прежним переменным, получим многообразие решений системы явной формулой вида (3.2.22).

В **п.3.4.1-3.4.2. (в** случаях $n=1$, и $n>1$**)** рассматриваются п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar z_1}=\frac{a(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)}{(\bar z_1-\bar z_1^{(0)})^n}W+\frac{h(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)}{(\bar z_1-\bar z_1^{(0)})^n}W^k,\quad \frac{\partial W}{\partial\bar z_2}=\frac{b(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2;W)}{(\bar z_2-\bar z_2^{(0)})^n},\qquad(3.4.1)$$

где $a,h,b\in RA(\overline{\Pi}_2), W\in RA(\Pi_3^{(0)}), n\ge 0, k-$произвольное целое число. В системе (3.4.1) аналитически продолжив в ее функций, по переменным $\bar z_k$ на ς_k, преобразуем данную систему к виду

$$\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}W+\frac{h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}W^k,\quad \frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=\frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}.\ (3.4.2)$$

В силу [40-46], если потребовать, чтобы для системы (3.4.77) выполнялись условия (M_0), то в необходимом условии, в особых точках имеем $a(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2^{(0)})=a_0=0, h(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2^{(0)})=h_0=0$, $W=0$, $b(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2^{(0)};W)=0$.

Из последнего соотношения получим: $W = 0,\ W = h(z_1, z_2)$. Эти функции будут двумя частными, либо особыми решениями исходной системы.

При этом достаточно, чтобы частные производные функции W по переменным ς_1, ς_2 были ограниченны всюду в данной области. Если в системе (3.4.2) функции $a, h, b -$ удовлетворяют условиям малости, то при тождественном выполнении условий совместности, система (3.4.2) имеет непрерывное решение.

Для того чтобы условие совместности системы (3.4.2) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ принимала вида

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \frac{\partial A}{\partial \varsigma_2} W + \frac{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n}{1-k} \frac{\partial B}{\partial \varsigma_2} \cdot \exp\{(1-k)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\} W^k + \quad (3.4.3)$$

$$+ \frac{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n}{1-k} f\left[z_1, z_2, \varsigma_2; \exp\{(k-1)A(z_1,\ldots)\} W^{1-k} - B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right] \exp\{(1-k)A(z_1,\ldots)\} \cdot W^k.$$

Учитывая такое значение функции $b(z_1,\ldots;W)$, проинтегрируем систему (3.4.2) и получим к.д.у. вида (3.2.29), то есть: $\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = f(z_1, z_2, \varsigma_2; V)$, где функция $f(z_1,\ldots;V)$ определяется из формулы (3.4.3). Далее, интегрируя к.д.у. вида (3.2.3) по переменной ς_2, аналогично [98], будем иметь

$$V = V[z_1, z_2, \varsigma_2; \Phi(z_1, z_2)]. \quad (3.4.5)$$

Затем, переходя к прежним переменным, определим многообразие решений системы (3.4.2) формулой

$$W(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) = \exp\left[A(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)\right] \left\{B(z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2) + V[z_1, z_2, \overline{z}_2; \Phi(z_1, z_2)]\right\}^{1/(1-k)}. \quad (3.4.5)$$

Теорема 3.10. *Пусть в п.о.с. К.-Р. (3.4.1)* $a, h, b \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}),$ $n \geq 0,\ k -$ *целое число. Если для системы (3.4.1) будут выполнены условия (M₀),*

то можно найти два частных решения системы. Если функции a, h, b *удовлетворяют условию малости, то при выполнении условия совместности системы (3.4.1), также имеет непрерывное решение. Для того чтобы условие совместности системы (3.4.2) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1,...,W)$ *принимала вид (3.4.3). Если к.д.у. (3.2.28) имеет решение вида (3.4.3), то система (3.4.1) также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (3.4.5). Причём такого вида решения, системы (3.4.1) в точке* $\varsigma_1 = \varsigma_1^{(0)}$ *области* $\overline{\Pi}_2$, *при* $n=1$ *имеет логарифмическую особенность и особенность* $(n-1)-$*го порядка при* $n>1$. *Если считать, что в системе (3.4.1), на данной области функции* a, h, b *являются аналитическими, то по теореме вычетов функция* $A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$ *и решение системы будут непрерывными на данной области.*

В **п. 3.5.1.** рассматриваются некоторые классы п.о.с. К.- Р., в которых правые её части являются однородными, либо обобщёнными однородными функциями, либо квазилинейными функциями. В первом пункте этой темы рассматривается п.о.с. К.- Р. следующего вида:

$$\bar{z}_1 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \bar{z}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \tag{3.5.1}$$

где $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$, $f, g -$ аналитические по переменной W функции. Выполняя аналитическое продолжение в функции переменным $\bar{z}_k$, на новые переменные ς_k, преобразуем систему (3.5.1) к виду

$$\varsigma_1 \frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad \varsigma_2 \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W). \tag{3.5.2}$$

Учитывая [306, 308, 314, 323, 334] и другие, в системе (3.5.2) переходя к пределу при $\varsigma_k \to 0$, проверим выполнение условий (M_0). То есть, если

$$\lim_{\varsigma_k \to 0}\left(\varsigma_k \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0, (k = 1,2),$$

то необходимо, чтобы $f(z_1,0,z_2,0;W) = 0,\ g(z_1,0,z_2,0;W) = 0$. Из этих двух равенств получим: $W = h_1(z_1, z_2, \varsigma_2), W = h_2(z_1, z_2, \varsigma_1)$. Найденные нами функции будут частными, либо особыми решениями исходной системы. Если в системе (3.5.2) функции $f(z_1,...;W), g(z,...;W)$ по переменным ς_k $(k = 1,2)$ удовлетворяют условию Гёльдера по показателю $\lambda\ (0 \le \lambda < 1)$, то есть

$$\left| f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W) - f(z_1, 0, z_2, \varsigma_2; W) \right| \le K \left| \varsigma_1 \right|^{\lambda},$$

$$\left| g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W) - g(z_1, \varsigma_1, z_2, 0; W) \right| \le K \left| \varsigma_2 \right|^{\lambda}, \qquad (\mathrm{M}_1)$$

то в случае тождественного выполнения условия совместности, многообразие решений системы (3.5.2) во всей области $\overline{\Pi}_2$ будет непрерывным. Допустим, что условие совместности системы (3.5.2) выполняется тождественно. Тогда аналогично [323], интегрируя систему (3.5.2) и переходя к прежним переменным, получим

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = H\left[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; F[z_1, z_2, \bar{z}_2; \Phi(z_1, z_2)] \right]. \qquad (3.5.3)$$

Заметим, что если правые части системы уравнений (3.5.2) в области $\overline{\Pi}_3$ считаются аналитическими, то применяя ей теорему о вычетах, сможем определить непрерывное решение системы. В противном случае решение исходной системы в особой точке $\varsigma_1 = 0$ имеет логарифмическую особенность.

В **п. 3.5.3.** рассматривается п.о.с. К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^m}, \qquad (3.5.11)$$

где $f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in WA(\Pi_3^{(0)}), m \ge 0,\ f, g -$аналитические функции по переменной W. В системе (3.5.11) аналитически продолжим в области $\overline{\Gamma}_2$, заменой $\bar{z}_k$ на ς_k. Тогда система (3.5.11) преобразуется к виду

$$(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=f(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W),$$
$$(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m\frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W). \qquad (3.5.12)$$

Теперь проверим, что если система (3.5.12) удовлетворяет условиям (M_0), то в особых точках необходимо $f(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2^{(0)};W)=0,\ g(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2^{(0)};W)=0.$ Из этих двух соотношений будем иметь: $W=h_1(z_1,z_2,\varsigma_2), W=h_2(z_1,z_2,\varsigma_1)$, и эти функций будут частными решениями исходной системы. А также если условие совместности системы (3.5.12) выполняется, но не тождественно, то из него сможем определить функцию $W=h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$, которая, возможно, будет решением системы (3.5.12). Допустим, что условие совместности системы (3.5.12) выполняются тождественно. Тогда, интегрируя первое уравнение системы (3.5.12) по переменной ς_1 от точки $\varsigma_1=0$ до $\varsigma_1\neq\varsigma_1^{(0)}$, аналогично [37], получим $W=V(z_1,z_2,\varsigma_2)+\int_0^{\varsigma_1}\frac{f(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m}dt_1$. Очевидно, что этот интеграл в точке $t_1=\varsigma_1^{(0)}$ не существует. Поэтому в некоторой окрестности этой точки, применяя результаты [22], методом последовательных приближений из того интеграла имеем: $W(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=F_1[z_1,(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^{-m+1},z_2,\varsigma_2;V(z_1,z_2,\varsigma_2)]$. Дифференцируя последнее соотношение по переменной ς_2, подставим её результат во второе уравнение системы (3.5.12). С другой точки зрении, если считать, что в системе (3.5.12) правые ее части (то есть функции $f,g\in A(\overline{\Pi}_3)$) в области $\overline{\Pi}_3$ являются аналитическими функциями, то к интегралам от этих функций, можно применять теорему вычетов. Тогда в результате интегрирование, получим непрерывную функцию

$$\int_L \frac{f(z,t_1,z,\varsigma_2;W_0)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\,dt_1=\frac{2\pi i}{(m-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{m-1}f}{\partial\varsigma_1^{(m-1)}}\right).$$

Такая функция очень хорошо влияет на непрерывность решений системы (3.5.12).

В **§ 3.5.4.** рассматривается п. о. с. К.-Р. с нелинейными правыми частями произвольного числа независимых переменных [323-334]

$$\frac{\partial W}{\partial\,\bar z_k}=\frac{f_k(z_1,\bar z_1,\ldots,z_n,\bar z_n;W)}{(\bar z_k-\bar z_k^{(0)})^m},\ (k=\overline{1,n}),\qquad (3.5.13)$$

где $f_k\in RA(\overline{\Pi}_n), W\in RA(\Pi_{n+1}^{(0)}), n\ge 0$. Выполняя аналитическое продолжение в системе (3.5.13), заменяя $\bar z_k$ на ς_k, преобразуем её к виду

$$(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m\frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}=f_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\ldots,z_n,\varsigma_n)\ \text{или}\ \frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}=\frac{f_k(z_1,\varsigma_1,\ldots,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m}.\quad (3.5.3)$$

По аналогии с [39-46], если для системы (3.5.13) будут выполнены условия (M_0), то есть $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})\dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_k}\right)=0,$ то при ограниченности $\dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_k}$ необходимо, чтобы выполнялись равенства $W=h_1(z_1,z_2,\varsigma_2,\ldots), W=h_2(z_1,z_2,\varsigma_1,\ldots)$. Тогда получим ограниченное решение системы (3.5.3). Если же в области $\overline{\Pi}_n$ функции f_k удовлетворяют условию малости, то также получим непрерывное решение системы. Допустим, что предыдущие условия не выполняются, а будут выполнены условия совместности системы. Тогда, интегрируя систему (3.5.3) по всем переменным в классе $RA(\Pi_{n+1}^{(0)})$, будем иметь

$$W(z,\varsigma_1,\ldots,z_n,\varsigma_n)=\Phi(z_1,\ldots,z_n)+\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\varsigma_k}\frac{f_k(z_1,0,\ldots,0,t_k,z_{k+1},\ldots,z_n,\varsigma_n)}{(t_k-\varsigma_k^{(0)})^m}\,dt_k\ .\ (3.5.14)$$

Легко заметить, что в (3.5.14) в случаи (слабой особенности) $0\le m<1$ интегралы представляют как непрерывные функции, при $m=1$ все интегралы

в соответствующих точках $\varsigma_k = \varsigma_k^{(0)}$, будут иметь логарифмические особенности, а при $m>1$ имеют особенность $(m-1)$- го порядка. По аналогии с [44], считая, что в системе (3.5.13) и в (3.5.14) функции $f_k(z_1,...,\varsigma_n)$ являются аналитическими по всем аргументам, применяя теорему вычетов, получим непрерывную функцию вида:

$$\int_L \frac{f_k(0,0,...,0,t_k,z_{k+1},...,z_n,\varsigma_n)}{(t_k-\varsigma_k^{(0)})^m}\,dt_k = \frac{2\pi i}{(m-1)!}\lim_{t_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left(\frac{\partial^{m-1}f_k}{\partial\varsigma^{m-1}}\right).$$

Тогда, после перехода к прежним переменным, решение исходной системы также в области $\overline{\Pi}_n$, по всем переменным будет непрерывным.

В **п.3.5.5.** нами рассматривается п.о.с. К.- Р. с разделяющимися переменными

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f_1(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^m}\,p(z_1,...,z_n;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_i} = \frac{f_i(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_i-\bar{z}_i^{(0)})^m}\,q(z_1,...,z_n;W),\quad (3.5.15)$$

где $f_1, f_i \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in RA(\Pi_{n+1}^{(0)}), i=\overline{2,n}$. Выполняя аналитическое продолжение в функций предыдущей системе по переменным $\bar{z}_k$, заменяя их на ς_k, преобразуем её к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{f_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\,p(z_1,...,z_n;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = \frac{f_i(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\,q(z_1,...,z_n;W)\,.\ (3.5.16)$$

Если в системе (3.5.16) будут выполнены пределы $\lim_{\varsigma_i\to\varsigma_i^{(0)}}\left((\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m\,\frac{\partial W}{\partial\varsigma_i}\right)=0,$

то необходимо $f_{io}=0, W=h_i(z_1,...,z_n),(i=\overline{1,n})$. Эти найденные функции будут частными решениями исходной системы. Если в системе (3.5.16) считать, что функции $f_1, f_i \in A(\overline{\Pi}_{2n+1})$, то в процессе интегрирования системы (3.5.16) сможем применять теоремы вычетов. В результате получим непрерывную функцию, являющуюся решением системы (3.5.16). Во всех

этих случаях, получим некоторые частные решения системы. Для того, чтобы условия совместности системы (3.5.16) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями $f_i(...)$ с $f_1(...)$, а также $q(z_1,...)$ с $p(z_1,...)$ определялась следующими формулами

$$1)\begin{cases} f_1 = (\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m \alpha_1(z_1, \varsigma_1, z_2, ..., z_n), \\ f_k = (\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m \beta_k(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n) \\ q(z_1, ..., z_n; W) = \lambda\ p(z_1, ..., z_n; W) \end{cases} \quad (3.5.17)$$

либо

$$2)\begin{cases} f_k(z_1, \varsigma_1, ...z_n, \varsigma_n) = (\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m g_k(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n) \exp\left[F_1(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, _n)\right] \\ q(z_1, ..., z_n; W) = \left[1 + \exp\left(-\lambda P(z_1, ..., z_n; W)\right)\right] p(z_1, ..., z_n; W). \end{cases} \quad (3.5.18)$$

В этих случаях многообразия решений исходной системы, после перехода к прежним переменным определяются соответствующими формулами

$$W(z_1, \overline{z}_1, ..., z_n, \overline{z}_n) =$$
$$= P^{-1}\left\{ z_1, ..., z_n; \Phi(z_1, ..., z_n) + \int_0^{\overline{z}_1} \alpha_1(z_1, t_1, ..., z_n) dt_1 + \lambda \sum_{i=2}^{n} \int_0^{\overline{z}_i} \beta_i(z_1, ..., t_i, ..., z_n, \overline{z}_n) dt_k \right\} \quad (3.5.19)$$

либо

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1, \overline{\mathrm{z}}_1, ..., \mathrm{z}_n, \overline{\mathrm{z}}_n) = \quad (3.5.20)$$
$$= \mathrm{P}^{-1}\left\{ \mathrm{z}_1, ..., \mathrm{z}_n; \mathrm{F}_1(\mathrm{z}_1, \overline{\mathrm{z}}_1, ...\mathrm{z}_n, \overline{\mathrm{z}}_n) + \frac{1}{\lambda} \ln[\Phi(\mathrm{z}_1, ..., \mathrm{z}_n) + \lambda\omega(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \overline{\mathrm{z}}_2, ..., \mathrm{z}_n, \overline{\mathrm{z}}_n)] \right\}$$

Теорема 3.17. *Пусть в п.о.с. К.-Р. (3.5.15)* $p, q, f_1, f_i \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in RA(\Pi_{n+1}^{(0)}),\ m \geq 0,\ p, q \in A(\overline{\Pi}_{n+1})$. *Если для системы (3.5.15) будут выполнены условий (M_0), и условия совместности данной системы выполняются, но не тождественно, то система может иметь определённого количества частных, либо особых решений (либо такие решения отсутствуют). Для того чтобы условия совместности системы (3.5.15) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы*

взаимосвязь между функциями $f_i(...), f_1(...)$ *и* $q(...), p(...)$ *определялась соответствующими формулами (3.5.17) и (3.5.18). При этом исходная система разрешима, и многообразия её решений определяются соответствующими формулами (3.5.19) и (3.5.20). Причём решение системы вида (3.5.19) во всей области являются непрерывными вида (3.5.20) при* $0 \le m < 1$ *в* $\overline{\Pi}_n$, *и при* $m \ge 1$ *в* $\Pi_{n+1}^{(0)}$ *непрерывно, а в точке* $\varsigma_1 = \varsigma_1^{(0)}$ *при* $m \ge 1$ *имеет соответственно логарифмическую особенность (при* $m = 1$*) и особенность* $(m-1)$*–го порядка при* $m > 1$.

В п.**3. 5. 6** рассматривается п. о. с. К.-Р., содержащая правую часть с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_i} = \dfrac{f_i(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n)}{(\bar{z}_i - \bar{z}_i^{(0)})^m}\, p(z_1, ..., z_{k-1}, z_k, \bar{z}_k ..., z_n, \bar{z}_n; W), (i = \overline{1,k}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{f_j(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n; W)}{(\bar{z}_j - \bar{z}_j^{(0)})^m}, (j = \overline{k+1,n}), \end{cases} \tag{3.5.22}$$

где $f_i, f_j \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in WA(\Pi_{n+1}^{(0)}), m > 0, f_i, f_j -$ аналитические функции по W.

Выполняя аналитические продолжения в функциям системы (3.5.22), по переменным $\bar{z}_k$ и заменяя их на новые переменные ς_k $(k = \overline{1,n})$, преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = \dfrac{f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n)}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m}\, p(z_1, ..., z_{k-1}, z_k, \varsigma_k, ..., z_n, \varsigma_n; W), (i = \overline{1,k}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_j} = \dfrac{f_j(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; W)}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m}, \ (j = \overline{k+1,n}). \end{cases} \tag{3.5.23}$$

Если в системе (3.5.23) в случае ограниченности функции W'_{ς_k} будут выполнены условия (M_0), то есть, если

$$\lim_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} \left((\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0,$$

то необходимо $f_{i0} = 0, p(z_1,...,z_n,\varsigma_n^{(0)};W) = 0,\ f_j(z_1,...,z_n,\varsigma_n^{(0)};W) = 0$.

Из этих двух равенств имеем частные решения системы $W = h_k(z_1,...,z_n), (k = \overline{1,n})$. Пусть условия совместности системы (3.5.23) выполняются, но не тождественно, тогда из этих соотношений сможем определить некоторые функции, которые могут быть, либо могут и не быть решениями системы. Для того чтобы условия совместности системы (3.5.23) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функции $f_j(...)$ $(j = k+1,...,n)$ с данными функциями $f_i(...), p(...)$- определялись формулами

$$f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W) = (\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varsigma_j} - \frac{\partial P}{\partial \varsigma_j} \right) p(z_1,...,z_{k-1},z_k,\varsigma_k,...,z_n,\varsigma_n;W) + \quad (3.5.24)$$

$$+ (\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m g_j[z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;P(z_1,...,\varsigma_n;W) - \omega(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)]p(z_1,...;W).$$

Действительно, при этих значениях функций $f_j(...)$ условия совместности системы (3.5.23) выполняются тождественно и процесс её интегрирования приводится к интегрированию системы (3.5.26). Аналогично [323], интегрируя эту систему, затем переходя к прежним переменным, получим многообразие решений исходной системы следующей формулой

$$W(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n) = \quad (3.5.27)$$

$$= P^{-1}\left[z_1,...,z_k,z_{k+1},\bar{z}_{k+1},...,z_n,\bar{z}_n;\Phi(z_1,...,z_n) + \omega(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n) + H(z_1,...,z_k,z_{k+1},\bar{z}_{k+1},...,z_n,\bar{z}_n)\right]$$

Теорема 3.19. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.5.23)* $f_i, f_j, p \in RA(\bar{I}_n), W \in RA(\bar{I}_{n+1}^{(0)})$, p, f_j *– аналитические функции по переменной* W. *Если для системы (3.5.24) будут выполнены условия* (M_0) *в точках вырождений, и условия совместности системы (3.5.24) выполняются, но не тождественно, то система может*

иметь некоторое частные, либо особые решения, или несовместна. Для того чтобы условия совместности (N_{20}) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функции $f_j(...)$ с функциями $f_i, p-$ определялась формулами вида (3.5.24). Если система вида (3.5.26) имеет решение, то система (3.5.23) также разрешима и многообразия её решений определяется формулой (3.5.27). Если считать, что в системе (3.5.24) $f_i, f_j, p \in A(\overline{I}_{2\grave{o}+1})$, *то есть являются аналитическими функциями по всем переменным, то в силу теоремы вычетов, системы (3.5.24) и (3.5.23) во всей области имеют непрерывное решение . Если в системе (3.5.23) указанные условия не выполняются, то решение системы в случаи* $0 \le m < 1$ *в области* $(\overline{\Pi}_n)$, *при* $m \ge 1$ *в* $\ddot{I}^{(0)}_{n+1}$ *является непрерывным, а при* $m \ge 1$ *в области* $\overline{\Pi}_n$ *соответственно имеет логарифмическую особенность (при* $m=1$*) и особенность* $(m-1)-$*го порядка*

(при $m>1$*).*

Замечание. *Если в работе рассматриваются систем дифференциальных уравнений выше чем первого порядка, то производя замены, уменьшаем порядка дифференциальных уравнений. Решая полученные системы уравнений как в работе, затем переходим к прежним уравнениям. Тем самым, получаем, что многообразия решений данной системы будет богатым, чем систем дифференциальных уравнений первого порядка.*

Приложение теории систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка в решении задач экономики и экологии

Известно, что задачи экономики решаются на основу математические теории. В том числе в действия свободного рынка, реклама продаваемых товаров выполняют главную роль. Например, моделью торговля товаров, с

учётом рекламы, и скорость получаемые дохода посредников (магазинах) определяется формулой [282], [287], [307]:

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = a_k u \cdot (N-u),\ a_k = const., (k = 1....,n). \quad (1)$$

Условия совместности данной системы выполняются тождественно, а многообразие ее решений определяется следующей формулой

$$u(t) = \frac{N}{1+\exp\{-N\sum_{}^{n} a_k \cdot t_k\}},\ t = (t_1, t_2, ...t_n). \quad (2)$$

Формула вида (2) называется уравнением логистики в процессе торговля товаров. В частном случае, в случаи $k = 1,2;\ N = 10, a_1 = 2,\ a_2 = 5, u(0) = 0,9$ как начальное условие исходной задачи,

$0 \le t_1 \le 16$ *час* $\left(t_1^1 = 0,\ t_1^2 = 2, ...t_1^9 = 16\right)$, $0 \le t_2 \le 8$ *час* $\left(t_1^1 = 0,\ t_1^2 = 1, ...t_1^9 = 8\right)$,

найдётся модели количество покупателей товаров, определяемой формулой

$$u(t_1, t_2) = \frac{10}{1+\exp\{-10(2t_1 + 5t_2)\}}.$$

Таким образом, получено, что использование различных форм рекламы (на примере компании Индиго), число клиентов постоянно увеличивается. Проведённый анализ в работе [287] показывает, что в 2005 году по сравнению с 2003 годом этот показатель составил 198%. В компании Индиго были применены всевозможные виды реклам, кроме использования сети Интернета. А также в работе исследуются приложения п.д.- систем случаи эластичности функции экономических задач, в решении задач экологии, биологии, а также экономики пчеловодство.

Приложение систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками

Во второй главе работы, рассматриваются задачи о применении системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах (п. д.- систем), в

которых если условия совместности систем выполняются тождественно, то многообразия решений изучаемых систем находятся определяемыми формулами. Причём исследуя решения систем вне шаров, тем самым находятся решение граничных задач внутри, вне данной области, а также в центре шара многомерной действительной плоскости. Тем самым, для п.д.-систем с сингулярными точками, находятся решения граничных задач.
Приложение переопределённых обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами.

В третьей главы работы, рассматриваются классы систем уравнений в частных производных в комплексной плоскости, в классе вещественно аналитических функций. Очевидно, если в некоторых точек области данные функций систем являются аналитическими, то вещественные и мнимые их части функций удовлетворяют условиями Коши-Римана, а также дифференцируемые по каждым переменным, и т.д. в окрестности некоторые фиксированных точек данной области, функции систем в окрестности некоторой особой точки могут быть разлагаются в сходящие степенные ряды, или в ряды Тейлора (по вещественным, либо по комплексным переменным). В случаи тождественного выполнения условий совместности, системы разрешимые определёнными формулами (явно либо неявно). Вторая сторона задачи заключается в том, что при каких видов линейных, или нелинейных, либо квазилинейного вида функций изучаемых систем, условия совместности систем выполняются тождественно? Решению этой задачи посвящается вся предлагаемая диссертация, в том числе и третьей главы диссертации. Поскольку в решении задач появляются сингулярные решения задач, поэтому для исключения эти точки вырождения в работе, применяя к полученным решениям, изучаемым систем теоремы о вычетах. Тем самым получаем

многообразия решений систем, содержащиеся произвольную аналитическую функцию, непрерывным на всей данных областей. Причём, в этих найденных в явном, либо неявном видах решений систем, произвольные аналитические функций могут быть зависимы от одной, либо от произвольного числа комплексных переменных z, либо от других комплексных независимых переменных z_k (k=1,2,…,n).

ГЛАВА 1

§ 1.1. Системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями

Вначале приведём некоторые вспомогательные материалы из класса регулярных систем уравнений в полных дифференциалах первого порядка с одной неизвестной функцией на плоскости и в многомерном пространстве.

§ 1.1.1. Совместные системы двух уравнений в частных производных первого порядка (системы в полных дифференциалах)

Аналогично [229-231], [257] будем рассматривать, п.д.- систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y, u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u), \tag{1.1.0}$$

где $a, b \in C^1(\overline{D})$, - заданные функции из класса C^1, а искомая функция $u = u(x, y)$ принадлежит классу C^2, то есть $u \in C^2(\overline{D})$. Дифференцируя первое уравнение системы (1.1.0) по переменной y, а второе по x, и, приравнивая вторые смешанные производные, получим условие совместности системы, соотношением

$$a_y + b \cdot a_u = b_x + a \cdot b_u, \tag{N$_1$}$$

которое, является необходимым и достаточным условием совместности системы (1.1.0). Для систем типа (1.1.0) имеется несколько различных наименований. Во- первых, их называют совместными системами, во-вторых переопределенными и в- третьих, системами в полных дифференциалах (п.д.-системы). .Это последнее название объясняется тем её частным случаем, когда заданные функции $a(x, y; u), b(x, y; u)$ не зависят от неизвестной функции u, т. е. $a'_u = 0, \quad b'_u = 0$. Тогда условие (N$_1$) принимает вид $a'_y = b'_x$.

В этом случае выражение $a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ будет полным дифференциалом функции $u(x,y)$, как du, и нахождение функции $u = u(x,y)$ осуществляется известным интегрированием по переменным x и y:

$$u(x,y) = C + \int_{x_0}^{x} a(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} b(x_0,\tau)d\tau.$$

В общем случае для системы (1.1.0) условие (N_1) либо может выполняться на какой-то конкретной функции, являющейся единственным решением системы, либо может выполняться тождественно по всем переменным, и только в этом случае существует многообразие решений с одной произвольной постоянной.

Определение 1. Система (1.1.0) называется вполне интегрируемой, если она разрешима и её решение содержит одну произвольную постоянную.

Определение 2. Соотношение (N_1), когда оно выполняется тождественно, называется условием полной интегрируемости системы (1.1.0).

Определение 3. Система вида (1.1.0) называется переопределённой, если в ней количество неизвестных функции меньше числа уравнений.

Теорема 1. Тождественное выполнение соотношения (1.1.0) является необходимым и достаточным условием полной интегрируемости системы (N_1).

Необходимость. Допустим, что существует многообразие решений системы (1.1.0), и имеет вид $f(x,y,u) = C$. Требуется доказать, что условие совместности (N_1) выполняется тождественно относительно $\boldsymbol{u}$ **.** Допустим противное, т.е. условие (N_1) выполняется, но не тождественно. Тогда по теореме о неявной функции [251], существует решение, и оно представляет $u = u(x,y)$, как функцию от x и y, и эта функция, не содержащая

произвольного постоянного, может быть единственным, либо некоторым частным решений системы (1.1.0), что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Пусть (N_1) выполнено тождественно. Интегрируя первое уравнение системы (1.1.0) по переменной x, считая y параметром, можем записать

$$u = \varphi\,[x, y, V(y)] \tag{1.1.1}$$

Подставляя (1.1.1) во второе уравнение (1.1.0), будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial V}\frac{dV}{dy} = b(x, y, u)\,,$$

или

$$\frac{dV}{dy} = \frac{b[x, y; \varphi(x, y; V(y))] - \varphi'_y(x, y; V(y))}{\varphi'_V}, (\varphi'_V \neq 0). \tag{1.1.2}$$

Покажем, что правая часть (1.1.2) не зависит от переменного x. Для этого, дифференцируем правую часть обыкновенного дифференциального уравнения (о.д.у.) (1.1.2) по переменной x, и покажем, что оно равно нулю. Тогда в числители этой дроби, получим соотношение, которое преобразуется к виду

$$(b'_x + b'_u\ \varphi'_x - \varphi''_{yx})\ \varphi'_V - (b - \varphi'_y)\ \varphi''_{xV} = 0\,. \tag{1.1.3}$$

Так как функция $u = \varphi[x, y; V(y)]$ из (1.1.1) есть решение первого уравнения системы (1.1.0), то имеем:

$$\mathcal{U}_x = \varphi_x = a,\ \varphi_{yx} = [a(x, y, u)] = a_y + a_u \cdot u_y = a_y + a_u \cdot \varphi_y,$$

$$\varphi''_{xV} = (\varphi'_x)'_V = [a(x, y; u)]'_V = a'_u\ u'_V = a'_u\ \varphi'_V\,.$$

Тогда соотношение (1.1.3) принимает вид

$$(b'_x + \varphi'_x\, b'_u - a'_y - \varphi'_y\ a'_u)\,\varphi'_V - a'_u\ \varphi'_V\,(b - \varphi'_y) = 0\,.$$

Поскольку условие (N_1) выполняется тождественно, то перенесение его слагаемых справа налево даёт нуль. Это означает , что правая часть о.д.у.

(1.1.3) зависит только от независимого переменного y. Интегрируя (1.1.3), найдем общее решение о.д.у.. Подставляя найденное значение *V(y)* в (1.1.2), получим многообразие всех решений системы (1.1.0), и оно содержит одну произвольную постоянную. Тем самым, теорема полностью доказана.

Совершенно аналогично рассматривается система в полных дифференциалах для функции от произвольного числа независимых переменных. Пусть функция $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ удовлетворяет п.д.-системе

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n; u), \quad (k = 1,2, \dots, n). \tag{1.1.4}$$

Находя и приравнивая вторые смешанные производные из уравнений с номерами i и j, получим соотношения

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial f_j}{\partial u} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + f_j \frac{\partial f_i}{\partial u}, \quad (i, j = \overline{1,n};\ i \neq j)\ . \tag{N_2}$$

Аналогично предыдущим, для системы (1.1.4) с условиями (N_2) справедливы определения 1.1.3, а также имеет место утверждение, аналогичное теореме 1.1.

Теорема 2. *Для полной интегрируемости системы (1.1.4) необходимо и достаточно, чтобы тождественно выполнялись условия (N_2).*

Необходимость. Пусть система (1.1.4) разрешима, и многообразием её решений будет $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathcal{U}) = C$. Будем доказывать тождественное выполнение условий (N_2). Допустим противное, т.е. предположим, что известно многообразие решений системы (1.1.4) и хотя бы одно из условий (N_2) выполнено, но не тождественно. Тогда из этого соотношения по теореме о неявной функции (см.[251]) существует функция $\mathcal{U} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которая будет единственным либо частным решением, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Пусть условия (N_2) выполняется тождественно.

Интегрируем первое уравнение системы (1.1.4) по x_1 (считая в ней $x_2, x_3, \dots, x_n$- параметрами). Полученное решение должно удовлетворять оставшимся (n-1) уравнениям системы (1.1.4). Для этого, продифференцировав полученное решение вида $\mathcal{U} = \varphi[(x_1, x_2, \dots, x_n; \mathcal{U}_1(x_2, \dots, x_n)]$ по переменным $x_2, x_3, \dots, x_n$, подставим результат в систему (1.1.4) и получим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_j} = \frac{f_j\left\{x_1,\dots x_n; \varphi[x_1,\dots,x_n; u_1(x_2,\dots,x_n) - \varphi'_{x_j}]\right\}}{\varphi'_{u_1}}, \qquad (j = \overline{2,n})$$

Аналогично вышеуказанным, можно доказать, что правые части уравнений последней системы не зависят от переменного x_1. Продолжая этот процесс, на (n-1) –м шагу, получим одно о.д.у., не зависящее от независимых переменных $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Интегрируя этого систему уравнения, получим решение о.д.у. по одной переменной x_n. Переходя к прежним переменным, получим общее решение исходной системы (1.1.4), содержащее одно произвольное постоянное.

Специально остановимся на том хорошо известном частном случае, когда в (1.4) функции f_k не зависят от $\mathcal{U}$, то есть; $\frac{\partial u}{\partial x_k} = P_k(x_1, x_2,\dots,x_n)$,

условия совместности которого примут вид $\partial_{x_j} P_i = \partial_{x_i} P_j \qquad (i, j = 1,2, \dots, n, \quad i \neq j)$. Тогда решение этой системы даётся формулой

$$u(x_1,\dots,x_n) = C + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k^{(0)}}^{x_k} P_k(x_1^{(0)},\dots,x_{k-1}, t_k, x_{k+1},\dots,x_n)dt_k$$

§ 1.1.2. Случай, когда одно из уравнений с разделяющимися переменными

Пусть в системе (1.1.0) первое из уравнений с разделяющимися переменными, (см. [257]]) иначе говоря, пусть

$$a(x,y,u)=\alpha(x,y)\,m(x,y) \qquad (1.1.5)$$

В этом случае условие полной интегрируемости (у.п.и.) (N_1) принимает вид

$$b_x+\alpha\, m\, b_u=\alpha\, m_u\, b+a_y\, m+\alpha\, m_y\ . \qquad (N_2)$$

Как указано выше, вначале решим уравнение относительно функции b_0

$$b_x+a\cdot m\cdot b_u=a\cdot m_u. \qquad (1.1.6)$$

Вводя неявную функцию $V(x,y,u,b)=0$, имеем:

$$V_x+a\cdot m\cdot V_u+a\cdot m_u\cdot V_b=0. \qquad (1.1.7)$$

Уравнение (1.1.7) равносильно системе о.д.у. в симметричной форме

$$\frac{dx}{1}=\frac{du}{a\cdot m}=\frac{db}{a\cdot m_u}=\frac{dy}{0}.$$

Эта система имеет три функционально- независимых первых интеграла

$$\psi_1\equiv b-lnm(y,u)=C_1,\qquad \psi_2\equiv y=C_2,\qquad \psi_3\equiv M(y,u)-A(x,y)=C_3,$$

где $M(y,u)$ и $A(x,y)-$ первообразные соответственно к функциям $\frac{1}{m(y,u)}$ по u и $a(x,y)$ по x соответственно. Тогда решение уравнения (1.1.7) будет

$$F[b-lnm(y,u);y;\ M(y,u)-\ A(x,y)]=0,$$

где $F-$ произвольная функция от своих аргументов.

Обращая функцию F относительно первого аргумента, получим общее решение уравнения (1.7)

$$b(x,y,u)=lnm(y,u)+g[y,M(y,u)-A(x,y)],$$

где $g-$некоторая вполне определённая, как и b, M, A функция.

Одним из частных решений уравнения (1.7) будет

$$b_0(x,y,u)=lnm(y,u)+M(y,u)-A(x,y).$$

Будем искать общее решение уравнения (1.7) в виде

$$b(x,y,u)=e^{b_0(x,y,u)}\cdot U \quad \text{или} \quad b(x,y,u)=m(y,u)\cdot U\cdot e^{M(y,u)-A(x,y)},$$

(1.1.8)

где $U-$ новая неизвестная функция.

Подставляя (1.1.8) в (N_1), получим:

$$m \cdot U_x + a \cdot m^2 \cdot U_u = \left(a_y \cdot m + a \cdot m_y\right) \cdot e^{M-A}. \qquad (1.1.9)$$

Решение уравнения (1.10) состоит из суммы частного решения уравнения (1.10) и общего решения однородного уравнения $mU_x + a \cdot m^2 \cdot U_u = 0.$

Это уравнение равносильно системе

$$\frac{dx}{m(y,u)} = \frac{du}{a(x,y)\cdot m^2(y,u)} = \frac{dy}{0}, \qquad (1.1.10)$$

первыми интегралами которой, будут $y = C_1$ и $M(y,u) - A(x,y) = C_2$.

Отсюда получаем общее решение однородного уравнения

$$\widetilde{U} = \varphi[y; M(y,u) - A(x,y)], \text{ где } \varphi -$$

произвольная функция. Одним из частным решений уравнения (1.1.9) будет $U_0 = [A_y(x,y) - M_y(y,u)] \cdot e^{A(x,y)-M(y,u)}$. Тогда общее решение уравнения (1.1.9) примет вид

$$U = \varphi[y; M(y,u) - A(x,y)] + [A_y(x,y) - M_y(y,u)] \cdot e^{A(x,y)-M(y,u)}.$$

Подставляя значения U в (1.1.8), получим:

$$b(x,y,u) = \left\{f[y; M(y,u) - A(x,y)] + [A_y(x,y) - M_y(y,u)]\right\} \cdot m(y,u), \qquad (1.11)$$

(где $f[y; M(y,u) - A(x,y)] = e^{M(y,u)-A(x,y)} \cdot \varphi[y; M(y,u) - A(x,y)]$),

$f(y, M-A)$-произвольная, либо вполне определённая как и $b(x,y;u)$ функция. Формула (1.1.11) даёт класс всех функций $b(x,y,u)$, которые удовлетворяют у.п.и. (N_1), при заданной функции $a(x,y,u)$ вида (1.1.5). Если $b(x,y,u)$ задана, то, конечно, и *f(y; M-A)* будет известной функцией.

Надо отметить, что решение уравнения (1.1.6) относительно $b(x,y,u)$, а также системы (1.1.4) можно находить и другим методом.

Пусть считаются заданными $a(x,y,)$, $m(y,u)$, и условие (N_1) выполняется тождественно. Требуется найти вид $b(x,y,u)$. Учитывая (N_1), перепишем первое уравнение системы (1.1.5):

$$\frac{u_x}{m(y,u)} - a(x,y,) = 0 \quad \text{или} \quad \partial_x[M(y,u) - A(x,y)] = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$M(y,u) - A(x,y) = \varphi(y), \tag{1.1.12}$$

где $\varphi -$ некоторая неизвестная функция.

Дифференцируем соотношение (1.1.12) по y:

$$M_y(y,u) - [A_y(x,y) + M_u(y,u) \cdot u_y = \varphi'(y)$$

или

$$\varphi'(y) = \frac{b(x,y,u)}{m(y,u)} + M_y(y,u) - A_y(x,y). \tag{1.1.13}$$

Легко показать,что правая часть о.д.у. (1.1.13) не зависит от переменного x, то есть:

$$D_x\left[\frac{b(x,y,u)}{m(y,u)} + M_y(y,u) - A_y(x,y)\right] = 0.$$

Действительно, раскрывая последнее равенство, имеем:

$$\frac{b_x + a \cdot m \cdot b_u}{m} - \frac{b}{m^2} \cdot m_u \cdot a \cdot m - \frac{a \cdot m_y}{m} - a_y = 0,$$

что равносильно соотношению

$$b_x + a \cdot m \cdot b_u - a \cdot m_u \cdot b - a \cdot m_y - a_y \cdot m = 0,$$

которое заведомо выполняется в силу (N_1). Это означает, что правая часть о.д.у. (1.13) не зависит от переменного x, и есть некоторая функция вида $f = f(y,\psi)$ или (после подстановки значения ψ из (1.1.12))

$$f = f[y; M(y,u) - A(x,y)].$$

Тогда о.д.у. (1.1.13) принимает вид $\psi' = f(y,\psi)$, где

$$f(y,\psi)=\frac{b(x,y,u)}{m(y,u)}+M_y(y,u)-A_y(x,y) \qquad (1.1.14)$$

Теорема 3. *Пусть в системе (1.1.4)* $a(x,y,u)$ *имеет вид (1.1.5),* $a,m,b\epsilon C^1,\ u\epsilon C^2$. *Для полной интегрируемости системы (1.4) необходимо и достаточно, что* $b(x,y,u)$ *имела вид (1.1.10). Тогда система (1.1.4) эквивалентна о.д.у. (1.1.13). Если о.д.у. (1.1.13) с учетом (1.1.14) разрешимо в квадратурах, то исходная система также разрешима в квадратурах, и многообразие ее решений выражается формулой* $\mathcal{U}(x,y)=M^{-1}[y;A(x,y)+\psi(y)]$ где $\psi-$ *является общим решением о.д.у. (1.1.13).*

§ 1.1.3. Случай, когда правая часть одного из уравнений-однородная функция нулевого порядка

Будем рассматривать систему уравнений в частных производных (см. [229]- [2315])

$$\mathcal{U}_x=a(x,y,u),\ \mathcal{U}_y=b(x,y,\frac{u}{x}) \qquad (1.1.15)$$

где $a(x,y,u)$- однородная функция нулевого измерения по переменным x,u, то есть, при любым значениям переменной t, будет выполнено $a(tx,y;tu)=a(x,y;u)$. Подстановкой $\mathcal{U}=x\cdot\vartheta$ приводим систему (1.1.15) к виду

$$\vartheta_x=\frac{1}{x}[a(1,y,\vartheta)-\vartheta,]\quad \vartheta_y=\frac{1}{x}\cdot b(x,y,\vartheta,). \qquad (1.1.16)$$

у.п.и. для системы (1.1.16) примет вид

$$x\cdot b_x+(a-\vartheta)\cdot b_\vartheta=a_\vartheta\cdot b+x\cdot a_y. \qquad (N_3)$$

Решая соотношение (N_3) как линейное уравнение относительно $b(x,y;v)$, получим:

$b(x,y,\vartheta,) = \frac{1}{x}\left\{e^{2A(y,\vartheta)} \cdot \varphi[y; A(y,\vartheta) - lnx] - x^2 \cdot A_y(y,\vartheta)\right\} \cdot [a(1,y,\vartheta) - \vartheta]$,(1.1.17)

где $A(y,\vartheta) -$ одна из первообразных к $\frac{1}{a(1,y,\vartheta)-\vartheta}$ по переменной ϑ (причём предполагается, что $a \neq \vartheta$), $\varphi -$ произвольная функция. Тогда система (1.1.16) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{x} \cdot [a(1,y;v) - v] \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2} \cdot \left\{e^{2A(y,v)} . \varphi[y; A(y;v) - \ln x]\right\} \cdot [a(1,y;v) - v]. \end{cases}$$

Так как $\frac{1}{x^2} = e^{-2lnx}$, то первое слагаемое в правой части второго уравнения из последней системы, можно переписать в виде $\frac{1}{x^2} e^{2A(y,\vartheta)}$. $\varphi[y; A(y,\vartheta) - lnx] = e^{2[A(y,\vartheta)-lnx]} \cdot \varphi[y; A(y,\vartheta) - lnx] = f[y; A(y,\vartheta) - lnx]$, где $f -$ новая неизвестная функция. Тогда, окончательно система (1.16) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{x}[a(1,y,v) - v] \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \left\{ f[y; A(y,v) - \ln x] - \dfrac{\partial A}{\partial y} \right\} [a(1,y,v) - v] \end{cases} . \qquad (1.1.18)$$

Теперь приступим к интегрированию системы (1.1.18).

Интегрируя первое уравнение системы по переменной x, получим:

$$A(y,\vartheta) - lnx = \psi(y)$$

Продифференцируем последнее равенство по переменной y:

$$A'_v . v'_y + A'_y = \frac{d\psi}{d\,y} \quad \text{или} \quad \frac{d\psi}{dy} = \frac{b(x,y;v)}{x \cdot [a(1,y;v) - v]} + A'_y(y;v). \qquad (1.1.19)$$

Теорема 4. *Пусть в системе (1.1.15)* $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$, $a(x,y,v) -$ *однородная функция нулевого*

измерения по переменным x, u. *Для полной интегрируемости системы (1.1.15), необходимо и достаточно, чтобы* $b(x, y; v)$ *имела вид (1.1.17). Если о.д.у. (1.1.19) с учетом (1.1.17) разрешимо в квадратурах, то исходная система также разрешима, и многообразие ее решений выражается формулой* $\mathcal{U}(x, y) = x \cdot A^{-1}[y; lnx + \psi(y)]$. *При этом, решение системы (1.1.15) по переменной* $\boldsymbol{y}$ *всюду в области непрерывно, а по переменной* $\boldsymbol{x}$ *в точке* $\boldsymbol{x=0}$ *имеет логарифмическую особенность*.

§ 1.1.4. Случай, когда правая часть одного из уравнений-обобщенная однородная функция

Рассмотрим систему уравнений

$$\mathcal{U}_x = a(x, y, u), \quad \mathcal{U}_y = b\left(x, y, \frac{u}{x^k}\right), \tag{1.1.20}$$

где $a(x, y, u)$ - обобщенная однородная функция по x, u, то есть для любого t

и некоторого целого числа k $a(tx, y, t^k u) = t^{1-k} a(x, y, u)$

Заменив в системе (1.20) $\mathcal{U} = x^k \cdot \vartheta$, будем иметь [229-231]

$$\vartheta_x = \frac{1}{x}[a(1, y, \vartheta) - k\vartheta], \quad \vartheta_y = \frac{1}{x^k} \cdot b(x, y, \vartheta). \tag{1.1.21}$$

Условии совместности системы (1.1.21) будет

$$x \cdot b_x + (a - k\vartheta) \cdot b_\vartheta = a_\vartheta \cdot b + x^k \cdot a_y. \tag{1.1.22}$$

По аналогию с предыдущим случаям, решая (1.1.22) как линейное уравнение относительно функции $b(x, y, \vartheta)$, получим:

$$b(x, y, v) = \frac{1}{x}\left\{e^{(k+1)A(y,v)} \varphi[y;\ \tilde{A}(y, v) - \ln x] - \tilde{A}'_y(y, v)\, x^{k+1}\right\} \cdot [a(1, y, v) - kv], \tag{1.1.23}$$

где $\tilde{A}(y, \vartheta)$ одна из первообразных по ϑ к функции $\frac{1}{a(1,y,\vartheta)-k\vartheta}$ (при, $a \neq k\vartheta$), $\varphi -$ произвольная функция. Тогда система (1.1.21) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{x}\left[a(1, y, v) - kv\right] \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \left\{ f[y; \tilde{A}(y, v) - \ln x] - \dfrac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \right\} \cdot [a(1, y, v) - kv] \end{cases}.$$

Делая замену

$$\tilde{A}(y, \vartheta) - lnx = \psi(y), \qquad (1.1.24)$$

приведём последнюю систему к о.д.у. вида (1.1.13), в правой части которой функция f - определяется через функции a и b формулой

$$f(y, \psi) = \frac{b(x,y,\vartheta)}{x^{k.}}[a(1, y, \vartheta) - k\vartheta] + A_y(y, \vartheta). \qquad (1.1.25)$$

Если о.д.у. (1.1.13) с учётом (1.1.25) имеет решение, то исходная система также разрешима, и многообразия её решений найдётся определённой формулой. При этом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть в системе (1.1.20)* $a, b \in C^1$, $u \in C^2$ и $a(x, y, u)$- *обобщенная однородная функция. Для полной интегрируемости системы (1.1.21) необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x, y, \vartheta)$ *имела вид (1.1.23). Если о.д.у. (1.1.19) с учетом (1.1.25) разрешимо в квадратурах, то исходная система разрешима в квадратурах, и многообразие ее решений выражается формулой* $\mathcal{U}(x, y) = x^k \cdot \tilde{A}^{-1}[y; lnx + \psi(y)]$, *непрерывной во всей области.*

§ 1.1.5. Случай, когда одно из уравнений системы - типа Бернулли

Пусть в системе (1.0) $a(x, y, u)$ имеет вид $a(x, y; u) = a(x, y)\, u + h(x, y)\, u^n$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y)\, u + h(x, y)\, u^n, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y; u). \qquad (1.1.26)$$

Тогда условие совместности (1.1.26) примет форму [229-231]

$$b_x + (a \cdot u + h \cdot u^n) \cdot b_u = (a + n \cdot h \cdot u^{n-1}) \cdot b + a_y \cdot u + h_y \cdot u^n.$$

Преобразуем систему (1.1.26) к более простому виду. Для этого умножим обе части уравнений системы (1.1.26) на $(1-n)e^{(n-1)A(x,y)} \cdot u^{-1}$, где $A(x,y)$- одна из первообразных от $a(x,y)$ по x, а затем объединим обе стороны второго уравнения с $(1-n) \cdot A_y(x,y) \cdot e^{(n-1)A(x,y)} \cdot u^{1-n}$.

Тогда система (1.1.26) примет вид

$$\begin{cases} (n-1)e^{(n-1)A(x,y)}u^{-n}\dfrac{\partial u}{\partial x}+(n-1)a(x,y)e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-n}=(1-n)e^{(n-1)A(x,y)}h(x,y), \\ (n-1)e^{(n-1)A(x,y)}u^{-n}\dfrac{\partial u}{\partial y}+(n-1)A'_y(x,y)e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-n}= \\ =(n-1)A'_y(x,y)\,e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-n}+ \\ +(n-1)A'_y(x,y)\,e^{(n-1)A(x,y)}u^{-n}\,b(x,y;u), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-n}\right]=(1-n)h(x,y)\,e^{(n-1)A(x,y)} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left[e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-n}\right]=(n-1)A'_y(x,y)e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-n}+ \\ +(n-1)\,e^{(n-1)A(x,y)}u^{-n}b(x,y;u) \end{cases}$$

Сделав замену

$e^{(n-1)A(x,y)} \cdot u^{1-n} = \vartheta$, и обозначая

$$\begin{cases} (1-n)\,h(x,y)\exp\{(n-1)A(x,y)\}=q(x,y), \\ (n-1)A'_y(x,y)\,v+(1-n)\,v^{n/(n-1)}\,f\left[x,y;\exp\{A(x,y)\}v^{n/(n-1)}-Q(x,y)\right]=\beta(x,y;v) \end{cases} \quad (1.1.27)$$

приведём данную систему к виду

$$\vartheta_x = q(x,y), \quad \vartheta_y = \beta(x,y,\vartheta). \quad (1.1.28)$$

Система (1.1.28) относится к типу, изученному в п.1.1. Для полной интегрируемости системы (1.1.28) необходимо и достаточно, чтобы

$$\beta(x,y,\vartheta) = Q_y(x,y) + f[y;\vartheta - Q(x,y)],$$

где $Q(x,y)$ – одна из первообразных к $q(x,y)$ по x, f –произвольная, либо некоторая вполне определённая функция. Подставляя значение $\beta(x,y,\vartheta)$ во второе равенство из (1.1.27), будем иметь: $b(x,y,\vartheta) = A_y(x,y)\cdot \mathcal{U} + \frac{1}{1-n}\cdot \{Q_y(x,y) + f[y; e^{(n-1)A(x,y)}\cdot u^{1-n} - Q(x,y)]\}\cdot e^{(n-1)A(x,y)}\cdot u^n$

(1.1.29)

Таким образом, исходная система привелась к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = a(x,y)u + h(x,y)\,u^n \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial A}{\partial y}u + \dfrac{1}{1-n}\left\{\dfrac{\partial Q}{\partial y} + f\left[y; e^{(n-1)A(x,y)}\,u^{1-n} - Q(x,y)\right]\right\} e^{(n-1)A(x,y)}\,u^n \cdot \end{cases}$$

Сделав замену $e^{(n-1)A(x,y)}\cdot u^{1-n} - Q(x,y) = \psi(y)$

получим о.д.у. вида (1.1.19), где функция f определяется равенством

$$f(y,\psi) = (1-)\left[b(x,y,u) - A_y(x,y)\cdot \mathcal{U}\right]\cdot e^{(n-1)A(x,y)}\cdot u^{-n} - Q_y(x,y).$$

(1.1.30)

Здесь функция $\mathcal{U}(x,y)$ выражается через $\psi(y)$ формулой

$$\mathcal{U}(x,y) = [Q_y(x,y) + \psi(y)]^{\frac{1}{1-n}}\cdot e^{A(x,y)}, \qquad (1.1.31)$$

ψ -является решением о.д.у. (1.1.19)

Теорема 6. *Пусть в системе (1.1.26) $a, h, b \in C^1$, $\mathcal{U} \in C^2$. Для полной интегрируемости системы (1.1.26) необходимо и достаточно, чтобы при заданном $a(x,y)$ и $h(x,y)$ функция $b(x,y,u)$ имела вид (1.1.29). Если о.д.у. (1.1.19) с учетом (1.1.30) разрешимо в квадратурах, то система (1.1.26) разрешима в квадратурах и многообразие ее решений выражается формулой (1.1.31).*

§ 1.2. Об интегрировании системы двух нелинейных уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями

В этом параграфе работы нами рассматриваются системы уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем) с различными видами сингулярными линиями. Учитывая [269]-[276], нами исследуются случаи, когда условия совместности изучаемых систем выполняются тождественно и в этом параграфе приводятся способы, либо методы нахождения решения каждой системы. Здесь нами проверяется выполнение условий малости, либо ограниченности и другие случаи, при выполнении условий совместности которых, найдутся некоторые частные, либо единственные решения системы.

1.2.1. Рассмотрим одну квазилинейную п.д.- систему с сингулярной линией

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y,u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{y^n}, \quad (n \geq 0) \qquad (1.2.1)$$

где $a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \{(x,y)|y=0\}$, $\overline{D} = \{(x,y)|0 \leq x \leq x_0, 0 < y \leq y_0\}$.

Особую линию y=0 для системы (1.2.1) обозначим через Γ_2. Условие совместности системы (1.2.1) имеет вид:

$$D_y\big(a(x,y;u)\big) = D\left(\frac{b(x,y;u)}{y^n}\right); \quad y^n \frac{\partial a}{\partial y} + b\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial x} - a\frac{\partial b}{\partial u} = 0 \ . \quad (N_1)$$

Для формулы (N_1), будут выполняться два случая: а) Пусть условие (N_1) выполняется как функциональное соотношение, зависящее от (***x, y, u***), но не тождественно. Тогда в силу теоремы о неявной функции, из (N_1) сможем определить функцию ***u = h(x,y),*** регулярную, либо с сингулярной линией *y=0*. Если эта функция удовлетворяет системе (1.2.1), то получим некоторое частное решение системы (1.2.1). В противном случае, система (1.2.1) – несовместна. Так как второго уравнения системы (1.2.1) на точках линии *y=0* интегрировать нельзя, а также на точках этой линии y=0 ставить задачи Коши

нельзя, поэтому, исключая точки линии y=0 из области $\overline{D}$, задачу Коши для системы (1.2.1) ставим следующим образом:

$$u = u_0 \text{ при } x = x_0,\ y = y_0\ (y \neq 0),\ (0 < y_0 \leq y \leq 1) \qquad (B)$$

Тогда для существования решения этой системы требуется, чтобы (см. [109]-[113]) в случае ограниченности u'_y, имел место переход к пределу в системе уравнений (1.2.1) при $y \to 0$. Тогда получим следующие соотношения:

$$\lim_{y\to 0}\left(y^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \lim_{y\to 0}(y^n \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \quad b(x,0,u) = b_0 = 0,\ a(x,0,u) = a_0 = 0\ . (M_0)$$

Откуда имеем, что выполнение равенства $a(x,0;u) = 0, b(x,0;u) = 0$ является достаточным. Из этих двух равенств имеем: $u = h_i(x), (i=1,2)$. Эти найденные функций могут удовлетворять системе (1.2.1), поэтому они будут некоторыми частными, либо особыми решениями системы (1.2.1). Также для существования непрерывного решения системы (1.2.1), требуем, чтобы

$$b(x,y,u) = o(y^{n-\lambda}), \quad (0 \leq \lambda < 1) \qquad (M_1)$$

Выполнение условий (M_1) для существования решений системы (1.2.1) является достаточным. Также известно, что если система (1.2.1) имеет многообразие решений, то тождественное выполнение условий (N_1) является необходимым. Покажем, что оно и является достаточным. Допустим, что условие (N_1) во всех точках области $\overline{D}$ кроме точек линии Γ_2: $y=0$ выполняется тождественно и будут выполнены условии (**B**):

1)

$$a(x,y;u), b(x,y;u) \in C^1(\overline{D} \times R^1), |a(x,y;u)| \leq K,\ |b(x,y,u)| \leq K, \frac{\partial a}{\partial u} \neq 0, \frac{\partial b}{\partial u} \neq 0, (K = const.);$$

2) функция $b(x,y;u)$ по переменной y будет удовлетворять условию Гёльдера,

то есть $|b(x,y;u)-b(x,0;u)| \le L.|y|^{\lambda}, (0 \le \lambda < 1)$, либо $|b(x,y;u)-b(x,0;u)| \le L|y|^{n-\lambda}$;

3) существуют числа a_0, b_0, h_0 такие, что при выполнении $|x| \le a_0, |y| \le a_0, |u| \le b_0$ и достаточно малом числе $h_0 = \min\left(a_0, \frac{b_0}{K}\right)$ (K –константа Гёльдера) обеспечивается единственное решение задачи Коши для п.д.-системы (1.2.1).

Тогда интегрируя первое уравнение системы (1.2.1) по переменной *x*, как регулярное обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у) по переменной *x*, считая *y*- параметром, методом последовательных приближений, получим:

$$u(x,y)=H\,[x,y,y_0,\psi(y)], \qquad (1.2.3)$$

где $\psi = \psi(y)$- новая неизвестная, $H(x,y,y_0,\psi(y))$- известная функция.

Продифференцировав соотношение (1.2.3) по переменной *y,* и подставляя её результат во второе уравнение из (1.2.1) будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \psi}\cdot\frac{d\psi}{dy} = \frac{b(x,y,u)}{y^n}$$

Откуда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.)

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{b(x,y,u)-y^n H'_y}{y^n H'_\psi}, \left(\frac{d\psi}{dy} = \frac{f(x,y,\psi)}{y^n}\right), \quad f(x,y,\psi) = \frac{b-y^n H'_y}{H'_\psi}. \quad (1.2.4)$$

Для нахождения решений о.д. у. (1.2.4) по переменной *y*, прежде всего, покажем, что правая часть о.д.у. (1.2.4) не зависит от независимой переменной *x*. Дифференцируем правую часть о.д.у. (1.2.4) по переменной *x*.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{b-y^n H'_\psi}{y^n H'_\psi}\right] = 0, \qquad \frac{(b'_x + b'_u a - y^n H''_{yx})H'_\psi - (b-y^n H'_y)H''_{\psi x}}{y^n (H'_\psi)^2} = 0.$$

Поскольку $\mathrm{H}''_{yx} = a'_y + \dfrac{b}{y^n} \cdot a'_u$, тогда числитель в последней формулы принимает вид:

$$(b'_x + a\,b'_y - y^n a'_y - b\,a'_u)\,H'_\psi - (b - y^n H'_y)\,H''_{\psi x} = 0 \ . \quad (1.2.5)$$

Так как по предположению, условие (N_1) выполняется тождественно, то равенство (1.2.5) также будет выполняться тождественно. Таким образом, мы доказали, что правая часть о.д.у. (1.2.4) зависит только от переменной у. Далее интегрируя о.д.у. (1.2.4) методом последовательных приближений, учитывая задачу Коши (В), в отрезке $0 < y_0 \le y \le 1$, получим функцию $\psi(y)=P(y, u_0)$.

С другой стороны, для существования непрерывного решения о.д.у. (1.2.4) необходимо, чтобы выполнялось условие (M_0) . При этом достаточно, чтобы $f(y,\psi) \in C(\overline{D})$, где $f(y,\psi) = \dfrac{b(x,y,u) - y^n H'_y}{H'_\psi}$, $(H'_\psi \neq 0)$ и при $y \to 0$, $\lim\limits_{y\to 0} f(y,\psi) = f(0,\psi_0)$, $(f_0 = f(0,\Psi_0) = 0)$. $(\psi_0 = \psi_{(0)})$. Учитывая эти результаты, (см. [40]-[44]) имеем, что в случае существования предыдущего предела, при $0 \le n < 1$, решение системы в области $\overline{D}$ является непрерывным, а при $n \ge 1$ (в общем случае), соответственно имеет логарифмическую особенность при $n = 1$ и (n-1)- го порядка особенности, при $n > 1$. И тогда многообразие решений системы (1.2.1) определяется формулой

$$u(x,y) = H\left[x, y_0, x_0, P(y, y^{1-n}, C)\right] \ . \quad (1.2.6)$$

Теорема 1.1. *Пусть в п.д.- системе (1.2.1)* $a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, *где* $D_0 = \overline{D} - \Gamma_2$. *Если условие ($N_1$) выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное, либо особое решение системы (1.2.1).*

Пусть условие совместности (N_1) по всем переменным (x,y,u) выполняется тождественно, и о.д.у. (1.2.4) имеет решение. Тогда система (1.2.1) разрешима и задача Коши (B) для системы (1.2.1), имеет решение вида (1.2.6). Причем, это решение системы (1.2.1) при $0 \le n < 1$ в $\overline{D}$ и, при $n \ge 1$ в D_0 – непрерывно, а в особых точках линии Γ_2: $y = 0$, соответственно имеет логарифмическую (при $n = 1$) и $(n-1)$ – го порядка (в случаи $n > 1$) особенности, а по переменной x- непрерывно всюду в области $\overline{D}$.

Замечание. Если в системе (1.2.1) функция *b(x,y,u)* удовлетворяет условию: $b(x,y,u)=o(y^{n-\varepsilon})$ $(0 \le \varepsilon < 1)$, то при тождественном выполнении условий совместности (N_1) система (1.2.1) разрешима и ее решение во всей области $\overline{D}$ будет непрерывным по всем переменным.

1.2. 2. Рассмотрим п.д.- систему вида [293-296]

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y;u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y;u)}{x^n}, \quad (n \ge 0), \qquad (1.2.7)$$

где $a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u(x,y) \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \{\Gamma_1 : x = 0\}$. Условие совместности п.д.- системы (1.2.7) имеет вид:

$$D_y(a) = D_x\left(\frac{b}{x^n}\right); \quad x^{n+1}a'_y + x(b\,a'_u - b'_x - a\,b'_u) + nb = 0\,. \quad (N_2)$$

Допустим, что необходимое условие совместности (N_2) выполняется. То есть, существует некоторое решение системы (1.2.7). Тогда, при подстановке этой условной функции в каждое уравнение системы, должны получить тождества. Покажем, что тождественное выполнение условие (N_2) является, также достаточным (для существования многообразия решений системы (1.2.7)). Для этого, учитывая задачу Коши, или начальное условие, в первом уравнении системы (1.2.7) в виде

$$u = u_0 \ \text{ при } \ x = x_0 \ (x_0 \ne 0), \quad y = y_0 \ , \qquad (1.2.8)$$

будем интегрировать первое уравнение системы (1.2.7), как обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.) по переменной x, считая y- параметром. После применения метода последовательных приближений, будем иметь:

$$u(x,y)=h\left[x,y;V(y)\right],\quad \left(h'_x=a(x,y;h)\right), \qquad (1.2.9)$$

где $V(y)=u(x_0,y),(V(y_0)=u_0)$- новая неизвестная функция, а $h[x,y;V(y)]$- известная, причём непрерывная по всем переменным. Дифференцируя соотношение (1.2.9) по переменной y, подставляя результат во второе уравнение системы (1.2.7), получим о.д.у. вида:

$$\frac{dV}{dy}=f(y;V),\quad \left(f(y;V)=\frac{1}{h'_V}\left(\frac{b}{x^n}-h'_y\right),\quad (h'_V\neq 0)\right)\ . \qquad (1.2.10)$$

Покажем, что правая часть о.д.у. (1.2.10) не зависит от переменной x, то есть, $D_x f=0$. Действительно:

$$D_x f:\quad \left[\frac{b'_x}{x^n}-\frac{nb}{x^{n+1}}+a\frac{b'_u}{x^n}-h''_{xy}\right]\frac{1}{h'_V}-\left(\frac{b}{x^n}-h'_y\right)\frac{h''_{yV}}{(h'_V)^2}=0. \qquad (1.2.11)$$

Поскольку в соотношении (1.2.11) имеет место $h''_{xy}=(h'_x)'_y=(a(x,y;u))'_y=$

$=a'_y+\frac{b}{x^n}a'_u$, и функция (1.2.9) является решением первого уравнения исходной системы, то должны показать, что она также удовлетворяет второму уравнению системы (1.2.9) и получим тождественное выполнение условия (N_2). Тем самым получим, что в о.д.у. (1.2.10) функция $f(y;V)\in C^1(\overline{D})$, и правая часть о.д.у. (1.2.10) не зависит от переменного x. Поэтому, интегрируя о.д.у. (1.2.10) по переменной y, при условии Коши вида (1.2.8), методом последовательных приближений (см.[61]), получим: $V=\hat{O}(C,y)$ или $V=\hat{O}(u_0,y)$. Тогда многообразие всех решений системы (1.2.7), либо решение задачи Коши для п.д.- системы (1.2.7) будет представлено соответствующими формулами:

$$u(x,y)=h\left[x,y;\hat{O}(C,y)\right]\ \text{либо}\ u(x,y)=h\left[x,y;\hat{O}(u_0,y)\right]. \qquad (1.2.12)$$

Теорема 1.2. *Пусть в п.д.- системе (1.2.7)* $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\{\Gamma_1\}$. *Если условие совместности (N_2) будет выполнено, но не тождественно, тогда из этого соотношения можно*

определить некоторую функцию $u = p(x, y)$, *которая будет некоторым частным решением системы (1.2.7). Если же условие* (N_2) *для п.д.- системы (1.2.7) будет выполнено тождественно, тогда существует многообразие всех решений системы (1.2.7), либо задачи Коши (1.2.8) для системы (1.2.7), и определяются соответствующими функциями вида (1.2.12), непрерывными во всей области* $\overline{D}$.

По аналогии п.д.- системы (1.2.7), можно рассматривать систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y; u)}{y^n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y; u) \ ,$$

где $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1),\ u(x, y) \in C^2(D_0),\ D_0 = \overline{D} - \{\Gamma_2 : y = 0\}.$ В случае тождественного выполнения условие совместности этой системы, можно получить равносильный результат к теореме 2.

1.2.3. Будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y, u)}{x^n} \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y, u) \ , \qquad (1.2.13)$$

где, $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1),\ u \in C^2(D_0),\ D_0 = \{(x, y) | \alpha \le y \le \beta, 0 < \varepsilon \le x \le x_0 \le 1\},$

удовлетворяющее задачу Коши (1.2.8).

Условием совместности системы (1.2.13) будет:

$$b'_x + \frac{a}{x^n} b'_u = \frac{a'_y}{x^n} + \frac{b a'_u}{x^n} \quad \text{или} \quad x^n b'_x + a b'_u = a'_y + b a'_u \qquad (N_3)$$

Если условие (N_3) выполняется, но не тождественно, тогда решая (N_3), в силу теоремы о неявных функциях, получим: $u=H(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.2.13), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.2.13) - несовместна. Если $a(x,y,u)$ в точках линии $x=0$ удовлетворяет условию малости

$$a(x, y, u) = o(|x|^{n-\varepsilon}), \quad (0 \le \varepsilon < x \le 1) \qquad (M_1)$$

то решение системы (1.2.13) всюду в $(\overline{D})$ может быть непрерывным. А также, если будут выполнены условия (M_0) (см. [301]-[304]), то есть u'_x, u'_y в точках линии $x=0$ имеют нули менее чем n - го порядка, так, чтобы при ограниченности u'_x, u'_y $\lim_{x\to 0}\left(x^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \lim_{x\to 0}\left(x^n \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$, тогда из правых частей системы будем иметь $a(0,y,u) = 0, b(0,y,u) = 0$., а из этих двух равенств, имеем $u = h_i(y), (i = 1,2)$. Эти две функции будут частными, либо особыми решениями данной системы.

С другой стороны, при $x=0$ из (N_2) имеем

$$ab'_u = a'_y + ba'_u, \; b(0,y,u) = a(0,y,u)(H(0,y,u) + C(y)),$$

(1.2.14)

где $H(0,y,u) = \int_0^u \frac{(\ln a)'_y}{a}\, dz, \; (a(0,y,u) = \alpha(y,u))$. При этом, условие совместности преобразованной п.д. - системы

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha(y,u), \; \frac{\partial u}{\partial y} = \alpha(y,u)(H(0,y,u) + C(y))$$

выполняется тождественно, а ее решение в классе $C^2(\overline{D})$ существует, и задача Коши для этой системы имеет единственное решение вида:

$$u(x,y) = P(x,y,u_0) \; . \qquad (1.2.15)$$

Только отметим, что решение системы (1.2.13), на точках границы Γ_1:{$x=0$} в виде (1.2.15) не будет содержать всякое решение системы (1.2.13). Для выполнения этого требования необходимо тождественное выполнение условий (N_3) во всей области $\overline{D}$. Пусть условие (N_3) выполняется тождественно и условии (В) будут выполнены по переменной x , считая

непрерывным по *y*. Интегрируя второе уравнение системы (1.2.13), покажем , что выполнение условий (N_3), также является достаточным. При этом, в результате интегрирования второго уравнение системы как о.д.у. по переменной *y* (считая *x*- независимым параметром), применяя метод последовательных приближений, получим:

$$u(x,y) = h\left[x, y, y_0, V(x)\right], \qquad (B_1)$$

где h(…) –известная, а *V=V(x)*- новая неизвестная функция.

Дифференцируя обе части равенства (B_1) по переменной *x*, подставим ее значение в систему (2.1):

$$h'_x + h'_v \cdot \frac{dV}{dx} = \frac{a(x,y,u)}{x^n},$$

Откуда получим о.д.у. вида:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{a - x^n h'_x}{x^n h'_V}, \quad (x \neq 0,\ h'_v \neq 0). \qquad (1.2.16)$$

Покажем, что правая часть о.д.у. (1.2.16) не зависит от переменного у.

$$D_y\left(\frac{a - x^n h'_x}{x^n h'_V}\right) = 0; \quad \frac{(a'_y + a'_u b - x^n h''_{xV})h'_V - (a - x^n h'_x)h''_{zy}}{x^n (h'_V)^2}.$$

Так как $h''_{xV} = b'_x + b'_u \frac{a}{x^n}$, то числитель последней дроби примет вид:

$$(a'_y + a'_u\ b - x^n b'_x - a b'_u)h'_V - (a - x^n h'_x)\ H''_{zy} = 0.$$

Поскольку было принято тождественное выполнение условий (N_3), то каждые множители последнего равенства зависят только от переменной *x*, то есть:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{f(x,u)}{x^n},\qquad \text{где}\quad f(x,u)=\frac{a(x,y,u)-x^n h'_x(x,y,V)}{h'_V}. \qquad (1.2.17)$$

Аналогично [301]-[304], для о.д.у. (1.2.17) будем требовать выполнение условия **(M_0):** если $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^n\frac{dV}{dx}\right)=0$, то необходимо, чтобы выполнялось $f(0,u)=f_0=0$.

Поэтому ограничивая область интегрирования в о.д.у. (1.2.17) на отрезке $(0<\delta\le x\le 1),\ (x_0\in(0;1])$ будем иметь:

$$V(x)=C-\int_x^1\frac{f(t,v)}{t^n}dt. \qquad (1.2.18)$$

Известно, что в последнем интегральном равенстве, в случаи $0\le n<1$, решение интегральное уравнение (1.2.18) на полуинтервале (0;1] непрерывно. Аналогично предыдущим случаям, можем определить, что решение о.д.у. (1.2.18) при $n=1$ и $n>1$ в области D_0 существует, и непрерывно, а на точках линий вырождения Γ_1: $x=0$, имеет логарифмическую особенность (при $n=1$) и ($n-1$)-го порядка при $n>1$.

Теорема 1.3. *Пусть в п.д.- системе (1.2.13)* $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, *.Если в точках линии Γ_1: $x=0$, $a(x,y,u)$ удовлетворяет условию (M_0) , тогда при тождественном выполнении условий (N_3), и выполнении равенства (1.2.14), существует только лишь непрерывное решение системы (1.2.13), ,определяемое формулой (1.2.15). Если условие (N_3) всюду в $\overline{D}$, кроме точки линии $x=0$ выполняется тождественно, тогда задачи Коши для о.д.у. (1.2.16) имеет единственное решение. При этом, существует многообразие решений системы (1.2.13) непрерывное в $\overline{D}$ при $0\le n<1$, а при*

n=1 и n>1 соответственно имеет особенность логарифмическую при n=1 *и (n--1)-го порядка при* n>1.

1.2.4. Будем рассматривать п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,u)}{x^n}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{y^n},\ (n\geq 0), \tag{1.2.19}$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\quad u\in C^2(D_0),\quad D_0=\{(x,y)|0<x,y\leq 1\}=\overline{D}-\tilde{A}_1-\tilde{A}_2$.

Условием совместности п.д.- системы (1.2.19) будет:

$$y^n a'_y+ba'_u=x^n b'_x+ab'_u \tag{N$_4$}$$

Как известно, система (1.2.19) в точках линий вырождений *x=0, y=0* не интегрируема. Допуская от противного, т.е. пусть в *(N$_4$) x=0, y=0* , получим:

$b_0\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)_0=a_0\left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)_0$, откуда имеем $b(0,0,u)=\lambda a(0,0,u)$.

Тогда всюду в области $\overline{D}$ имеем $u(x,y)\equiv const$. Допустим, что по аналогии с [303], в случае ограниченности u'_x,u'_y на данной области, для системы (1.2.19) будут выполнены условия (M$_0$), то есть,

если $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ \lim\limits_{\substack{y\to 0\\x\to 0}}\left(y^n\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$ то необходимо $a(0,0,u)=0,\ b(0,0,u)=0$. (M$_0$)

Из этих двух соотношений легко получим, $u=const,$ которое будет некоторым частным, либо особым решением системы. Допустим, что условие (*N$_4$*) всюду в D$_0$ (кроме точки линии *x=0, y=0*) выполняется тождественно. Более того, функции *a, b* в точках линий *x=0, y=0* удовлетворяют условиям малости:

$$a(x,y,u)=o(x^{n-\lambda}),\ \ b(x,y,u)=o(y^{n-\lambda}),\ \ (0\leq\lambda<1). \tag{M$_1$}$$

Тогда при тождественном выполнении условий совместности системы (1.2.19) $\alpha'_y+\beta\alpha'_u=\beta'_x+\alpha\beta'_u,$ в классе $C^2(\overline{D})$ существует непрерывное решение

системы (1.2.19) (см. [231]) допустим, что условие (N_4) всюду в $\overline{D}$ (кроме точки линий вырождения $x=y=0$) выполняется тождественно.

Приступим к интегрированию системы (1.2.19). Пусть в интеграле $u(x,y)=V(y)+\int_x^1 \frac{a(t,y,u)}{x^n}dt, \quad 0<\delta\le x\le x_0\le 1$, тогда на отрезке $[\delta;1]$ существует точка $x\in[\delta;1]$ такая, что применяя к интегралу метод последовательных приближений, будем иметь:

$$u(x,y)=h\left[x,x^{1-n},y,V(y)\right], \qquad (1.2.20)$$

где при $x\to 0$ и $n\ge 1$, существует $\lim\limits_{x\to 0} h(x,x^{1-n},y,V(y))$.

Дифференцируя предыдущую функцию по переменной y, подставим ее результат во второе уравнение системы (1.2.19) $\frac{\partial u}{\partial y}=h'_y+h'_v\frac{dV}{dy}=\frac{b(x,y,u)}{y^n}$, откуда имеем:

$$\frac{dV}{dy}=\frac{h-y^n h'_y}{y^n h'_V}, \text{ или } \frac{dV}{dy}=\frac{f(y,V)}{y^n} \quad \left(f(y,V)=\frac{h-y^n h'_y}{h'_V}\right). \qquad (1.2.21)$$

По аналогии с [289]-[300], допустим, что о.д.у. (1.2.21) удовлетворяет условию (M_0), то есть; если при ограниченности V'_y, $\lim\limits_{y\to 0}\left(y^n\frac{dV}{dy}\right)=0,$ то необходимо получим, что $f(0,V)=0,$ и тогда $V=const.$.

Легко показать, что правая часть о.д.у. (1.2.21) не зависит от переменной x.

Аналогично предыдущим, интегрируя о.д.у. (1.2.21) (по переменной y), получим $V=\Phi(y,C)$ или $V=\Phi(y,u_0)$. Причем решение о.д.у. (1.2.21) в точке $y=0$ при $n<1$ непрерывно, а при $n\ge 1$, соответственно будет иметь особенности логарифмического и $(n-1)$- го порядка. А также, для существования непрерывных решений о.д.у. (1.2.21) достаточно, чтобы

$f(y,V)=o(y^{n-\lambda}),(0\le\lambda<1)$. При этом, в случае выполнения условий (M_1) в области $\overline{D}$ можем определить решение о.д.у. (1.2.21) и системы (1.2.19) формулой вида (1.2.20). А задача Коши вне особых линий вырождения, для системы (1.2.19) имеет единственное решение.

Теорема 1.4. *Пусть в п.д. - системе (1.2.19)* $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $(\overline{D}=D_0+\tilde{A}_1+\tilde{A}_2)$ *. Если в системе (1.2.19)* $a(0,0,u)=b(0,0,u)=0$, *а также в точках линии x=0, y=0 выполняется условие* (M_1) *, условие малости, и условие* (M_0), *тогда существует непрерывное решение системы (1.2.19) (*$u=const.$*). Если условие* (N_4) *выполняется, но не тождественно, то определяется некоторое частное решение системы, либо такое решение отсутствует. Пусть условие* (N_4) *будет выполнено тождественно, и задача Коши для о.д.у. (1.2.21) имеет решение. Тогда существует непрерывное решение системы только при n<1 в области* $\overline{D}$, *и при n ≥1 в* D_0 *. При этом решение системы (1.2.19) при* $n\ge1$ *на точках линии вырождений, по обеим переменным имеет соответствующие логарифмическую (при n=1) и (n-1)-го порядка (при n>1) особенности .*

1.2.5. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,u)}{y^n},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{x^n}, \tag{1.2.22}$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $0<\delta\le x,y\le1$. Условием совместности системы (1.2.22) будет:

$$x^n a_y+ba'_u-nyx^n=y^n b'_x+ab'_u-nxy^n \tag{N_5}$$

Аналогично предыдущим пунктам легко заметить, что каждые уравнения отдельно в системе (1.2.22), в точках линий вырождения *x=0, y=0* области $\overline{D}$

неинтегрируемые. При $x=0,\ y=0$ из (N_5) имеем, что $a(0,0,u)=b(0,0,u)\equiv 0=const,$ и данная система на линии вырождения может иметь только лишь решение $u=const$. Если для п.д.- системы (1.2.22) будут выполнены условия $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^n\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\quad \lim\limits_{y\to 0}\left(y^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0$, то необходимо получим, что $a(0,0,u)=0,\ b(0,0,u)=0$ (см.[289]-[300]). Откуда имеем $u=const.$

Если в системе (1.2.22) $a(x,y,u),\ \ b(x,y,u)$ по переменным x,y удовлетворяют условию малости:

$$a(x,y,u)=o(y^{n-\lambda}),\ b(x,y,u)=o(x^{n-\lambda}),\quad (0\le\lambda<1) \qquad (M_1),$$

то полученная п.д.- система в случае тождественного выполнения условия (N_5), во всей области $\overline{D}=D_0+\Gamma_1+\Gamma_2$ имеет непрерывное решение. В противном случае, система (1.2.22) может иметь некоторое частное решение непрерывное только в области $D_0.$ При тождественном выполнении условий (N_5) система (1.2.22) в D_0 имеет непрерывное решение, а в точках линий Γ_1: $x=0;\ \ \Gamma_2$: $y=0$ имеет особенности n – го порядка по одной из переменных x, либо y (при $n>1$).

1.2.6. Будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,u)}{x^n},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{x^n},$$

(1.2.23)

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\qquad u\in C^2(D_0),\qquad D_0=\overline{D}-\Gamma_1;\ \Gamma_1: x=0$.

Условие совместности системы (1.2.23) принимает вид:

$$x^n\frac{\partial b}{\partial x}+a\frac{\partial b}{\partial u}=\left(\frac{\partial a}{\partial u}+nx^{n-1}\right)b-x^n\frac{\partial a}{\partial y}. \qquad (N_6)$$

Очевидно, что в точках линии: Γ_1: $x=0$ условия задачи Коши задавать нельзя.

Аналогично [300], для существования решения системы (1.2.23) предположим, чтобы

$$\lim_{x\to 0}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})=0,\quad \lim_{x\to 0}(x^n\frac{\partial u}{\partial y})=0,\quad \text{т.е.}\quad a(0,y,u)=a_0=0, b(0,y,u)=b_0=0.$$

Из этих двух равенств получаем: $u_i=\alpha_i(y)$ $(i=1,2)$.

Эти функции $u_i=\alpha_i(y)$ удовлетворяют каждому уравнению системы (1.2.23), и они будут частными, либо особыми решениями системы (1.2.23). С другой стороны, подставив $x=0$ в (N_6), имеем: $a\,b'_u=b\,a'_u$, то есть $b(x,y;u)=\gamma(y)\,a(y,u).$ В таком случае, также возможно, получим, некоторое частное решение системы. Допустим, что условие (N_6) во всей области $\overline{D}$ выполняется тождественно (кроме точек линии $x=0$). Тогда в результате интегрирования второго уравнения системы (1.2.23), как о.д.у. по переменной y, с учетом того, что x - является постоянный параметр, при $0<\varepsilon\le x\le 1$, получим:

$$u(x,y)=\frac{1}{x^n}h\left[x,y,y_0,V(x)\right]$$

Далее, дифференцируя последнее равенство по переменной x, подставим ее результат в первое уравнение системы (1.2.23)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{h'_x}{x^n}+\frac{h'_v}{x^n}\cdot\frac{d\mathrm{V}}{dx}-\frac{nh}{x^{n+1}}=\frac{a(x,y,u)}{x^n}$$

Откуда легко получим о.д.у. вида:

$$\frac{dV}{dx}=\frac{a-h'_x}{h'_v}+\frac{nh}{xh'_V}\qquad(1.2.24)$$

Аналогично предыдущим, легко доказать, что дифференцирование о.д.у. (1.2.24) по переменной y даёт соотношение:

$$(a'_u + nx^{n-1}) \cdot b - x^n a'_y - x^n \cdot b'_x - ab'_u) \cdot h'_V - (b - x^n h'_y) \cdot h''_{Vy} = 0. \quad (1.2.25)$$

Так как по условию постановки задачи, требовалось тождественное выполнение условие (N_6), то равенство (1.2.25) также будет выполняться тождественно. Если считать, что задача Коши (1.2.10) для о.д.у. (1.2.24) (вне линии вырождения) имеет определённое решение, при $0 \le \varepsilon < x \le 1$, то получим интегральное уравнение

$$V(x) = C - \int_x^1 \frac{q[t, y_0, V(t)]}{t^n} dt \quad (1.2.26)$$

.

Очевидно, что интегральное уравнение в точках линии $x=0$ (в случаи $n \ge 1$) не существует, поэтому на $0 < \varepsilon \le x \le 1$, интегрируя последнее о.д.у. на отрезке [ε,1] методом последовательных приближений, получим:

$V(x) = C + Q(x)$ либо $V(x) = u_0 + Q(x),\ (C = u_0 = u(x_0, 0)), (x_0 \ne 0)$.

При этом, если перейти к пределу последнего решения системы, при $x \to 0$, получим, что в точках линии вырождения $x=0$, решение о.д.у. (1.2.24) может иметь логарифмическую особенность при $n=1$ и (n-1)-го порядка при $n>1$. Тогда решение системы (1.2.23), по общей теории примет вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{x^{n-1}} h[x, y, y_0, C + Q(x)] \quad \text{либо} \quad u(x,y) = \frac{1}{x^{n-1}} h[x, y, y_0, u_0 + Q(x)]$$

.(1.2.27)

Тогда, многообразие решений исходной системы всюду в D_0 –является непрерывным, а в точках линии $\Gamma_1: x=0$ имеет особенности (n-1)- го порядка.

Теорема 1.5. *Пусть в п.д.- системе (1.2.23)* $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$. *Если условие совместности системы (1.2.23) выполняется, но не тождественно, тогда она имеет некоторое частное решение. Если* a(x, y,

u), b(x, y, u) удовлетворяют условия (M_0) и (M_1), тогда решение системы всюду в $\overline{D}$, будет непрерывным. Если условие (N_6) всюду в области $\overline{D}$ выполняется, но не тождественно, тогда система(1.2.23) может иметь некоторое частное решение. Пусть условие (N_6) выполняется тождественно (кроме точки линии x=0) , и если задачи Коши для о.д.у. (1.2.24) имеет решение, тогда исходная система (1.2.23) также разрешима и многообразие её решений и решение задачи Коши определяются соответствующими формулами (1.2.27). Причём решение системы (1.2.23) в области D_0 является непрерывным, а в точках линии x=0 имеет особенности (n-1)-го порядка.

1.2.7. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y,u)}{y^n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{y^n}, \quad (n \geq 0) \tag{1.2.28}$$

где $a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $R^1 = [0,k]$ $u \in C^2(D_0)$ $D_0 = \overline{D} - \Gamma_2$; $\Gamma_2 = \{(x,y) \mid y = 0\}$.

Условием совместности системы (1.2.28) будет:

$$y^n b'_x + ab'_u = y^n a'_y + ba'_u - ny^{n-1}a \quad . \tag{N_7}$$

Если для системы (1.2.28) выполняются условия (M_0) и условие малости, то система может иметь некоторые частные решения. Если аналогично предыдущего пункта условие (N_7) выполняется, но не тождественно, тогда решая (N_7) , будем иметь некоторую функцию *u=h(x,y).* Если эта функция удовлетворяет системе (1.2.28), то она будет некоторым частным, либо особым решением системы. В противном случае, система (1.2.28) – несовместна. Допустим, что условие (N_7) выполняется тождественно по всем переменным (*x,y,u)* (кроме точки линии Γ_2:*y=0).* Тогда в результате интегрирования системы (1.2.28) , аналогично п.2.4, получим:

$$u(x,y)=\frac{1}{y^{n-1}}h\left[x,y,x_0,C+Q(x)\right] \quad \text{или} \quad u(x,y)=\frac{1}{y^{n-1}}h\left[x,y,x_0,u_0+Q(x)\right]$$

А также для системы (1.2.28) имеет место предыдущая теорема. Причем, решение исходной системы в $\overline{D}$ непрерывно по переменной *x,* всюду на данной области, а по переменной *y* только в области D_0 , причём, в точке *y=0* имеет особенности *(n-1)*-го порядка.

§ 1.3. Об интегрировании одного класса п.д.- систем, для которых правая часть одного из уравнений с разделяющимися переменными

1.3.1. Рассмотрим п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a(x,y)\cdot m(y,u) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{y^n}, \tag{1.3.1}$$

где *n*- произвольное целое положительное число, $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$ искомая функция. Очевидно, что для системы (1.3.1) задачу Кошу в точках линии y=0 задавать нельзя. Потому, что при $y\to 0$, из второго уравнения системы (1.3.1) получим: *b(x,0,u)=0*. Откуда легко получим $u=\varphi(x)$. С другой стороны, если эта функция $u=\varphi(x)$ удовлетворяет первому уравнению системы (1.3.1), тогда она будет некоторым частным решением системы. Также добавим, что для существования некоторого непрерывного решения системы (1.3.1), необходимо, чтобы при ограниченности частные производные функции по каждым переменным удовлетворяющим условиям: $\lim\limits_{y\to 0}(y^n\frac{\partial u}{\partial x})=0, \lim\limits_{y\to 0}\left(y^n\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. Условие совместности п.д.- системы (1.3.1) имеет вид:

$$b'_x+a(x,y)\,m(y,u)\,b'_u-am'_ub-y^n(am'_y+a'_ym)=0 \tag{N$_8$}$$

Если условие (N_8) выполняется, но не тождественно, тогда в силу теоремы существования о неявной функции [251], из (N_8) сможем иметь некоторую функцию $u = \varphi(x, y)$. Если эта функция удовлетворяет п.д.- системе (1.3.1), тогда эта функция будет некоторым частным решением системы. В противном случае система (1.3.1) – несовместна.

Нашей главной целью является нахождение многообразий решений системы (1.3.1). Для этого потребуется тождественное выполнение условий (N_8). Это требование выполняется тогда и только тогда, когда функция $b(x, y, u)$ имеет вид (функции $a(x, y), m(y, u)$ считаются известными)

$$b(x, y, u) = \left\{ \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y} + f\left[y; M(y, u) - A(x, y)\right] \right\} \cdot y^n \cdot m(y, u) \qquad (1.3.2)$$

Итак, для функции $b(x, y, u)$ вида (1.3.2) условие (N_8) будет выполняться тождественно, и является необходимым условием существования решений п.д.- системы (1.3.1). Покажем, что оно также является достаточным. Для этого, интегрируя первое уравнение системы (1.3.1) сделаем замену:

$$M(y, u) - A(x, y) = \psi \quad , \qquad (1.3.3)$$

где $M(y, u) = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{m(y, \zeta}$, $A(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y)dt$, $\psi = \psi(y)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя обе части (1.3.3) по переменной y, подставим её значение в (1.3.1) и получим регулярное о.д.у. вида:

$$\frac{d\psi}{dy} = f(y, \psi). \qquad (1.3.4)$$

Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4) имеет решение, то существует единственное решение системы (1.3.1) и оно определяется явными формулами:

$$u(x, y) = M^{-1}[y; A(x, y) + \psi(u_0; y)] \text{ или } u = M^{-1}\{y; A(x, y) + \psi(c; y)\} \qquad (1.3.5)$$

Теорема 1.6. *Пусть в п.д.- системе (1.3.1)* $a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$. *Если условие* (M_0) *и условие совместности* (N_8) *выполняется, но не тождественно, то существуют некоторое частные решения системы, либо система (1.3.1)-несовместна. Для тождественного выполнения условий совместности* (N_8) *необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x, y, u)$ *имела вид (1.3.2). Если задача Коши для системы (1.3.1) имеет решение, тогда существует единственное решение либо многообразия решений системы (1.3.1) выражающееся явными формулами (1.3.5) . Причем эти решения системы во всей области являются непрерывными.*

1.3.2. Будем рассматривать систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{x^n} m(y,u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{y^n}, \tag{1.3.6}$$

где $a,b,m \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, a,b,m- заданные функции, $u(x, y)$-искомая функция, $n \geq 0$ (целое число). Аналогично предыдущим, для системы (1.3.6), в точках линии $x=0, y=0$ задачи Коши задавать нельзя, поскольку при $x=0, y=0, n \geq 0,$ и ограниченности u'_x, u'_y из выполнении условии (M_0), в этих особых точках получаем; $a=a_0$ $m(0,u)=0$, $b(0,y,u)=0$. Отсюда имеем, что $u \equiv const,$ и они будут частными, либо особыми решениями системы (1.3.6). Условие совместности системы (1.3.6) имеет вид:

$$x^n b'_x + amb'_u = am'_u b + y^n (a_y m + am'_y). \tag{N_9}$$

Допустим, что условие (N_9) выполняется, но не тождественно. Тогда из (N_9), в силу теоремы существования о неявной функции [251], можно определить функцию $u = \varphi_1(x, y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.3.6), то она будет некоторым частным её решением, в противном случае,

система (1.3.6)- несовместна. А также, если для системы (1.3.6) будут выполнены условия (M_0), то система может иметь некоторое частное решение. Известно, что $a,b,m \in C^1(\overline{D})$ (по постановке задачи). Кроме того, нам необходимо знать, существует ли в какой-то форме взаимосвязь между функциями *a, m, b* , причём считая *a(x,y)* и *m(y,u)* заданными вполне определенными функциями в (N_9), решим его в как линейное неоднородное уравнение относительно функции *b(x,y,u).* В результате получим:

$$b(x,y,u)=\left\{\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial y}+f\left[y;M(y,u)-A(x,y)\right]\right\}\cdot y^n\cdot m(y,u)\ , \quad (1.3.7)$$

$$A(x,y)=-\int_x^1\frac{a(t,y)}{t^n}dt, \quad M(y,u)=\int_{u_0}^u\frac{d\zeta}{m(y,\zeta)}\ . \quad (1.3.8)$$

При этом значение функции *b(x,y,u),* условие (N_9) для системы (1.3.6) выполняется тождественно. В процессе интегрирования первого уравнения системы (1.3.6) заменяем: $M(y,u)-A(x,y)=\psi$ где $\psi=\psi(y)$-новая неизвестная функция. *M(y,u)* и *A(x, y)* определяются формулой (1.3.8). Дифференцируя обе части последнего равенства по переменной *y*, подставим её значения в систему (1.3.6) и с учетом (1.3.7) имеем о.д.у. вида (1.3.4), где функция *f(y,ψ)* имеет вид:

$$f(y,\psi)=\frac{\partial M(y,u)}{\partial y}-\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}+\frac{b(x,y,u)}{y^n m(y,u)}.$$

Так, что здесь, функция *f(y,ψ)* как и *a, b, m, M, A* будет вполне определенной функцией. Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4) имеет решение, тогда система (1.3.6) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.3.5), где функция *A(x,y)* определяется по формуле (1.3.8).

Теорема 1.7. *Пусть в п.д.- системе (1.3.6)* $a,b,m \in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, *где* $(\overline{D}) = \{(x,y|0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)\}$, D_0 *– та же область* $\overline{D}$, *но без точек линий x=0. Если условия* (M_0) *и* (N_9) *выполняются, но не тождественно, тогда находится некоторое частное решение системы (1.3.6), либо система не совместна. Для тождественного выполнения условий* (N_9) *необходимо и достаточно, чтобы функция b(x,y,u) имела вид (1.3.7). Если задача Коши для о.д.у. вида (1.3.4) имеет решение, тогда система (1.3.6) также разрешима и многообразия решений, либо её единственное решение - определяется формулой вида (1.3.5). Причём этого вида решение системы в точках линии x=0 соответственно имеют логарифмическую (при n=1) и (n-1)-го порядка (при n>1) особенности, а по переменной y всюду в области* $\overline{D}$ *является непрерывным.*

1.3.3. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{y^n} m(y,u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{x^n}, (n \ge 0) \tag{1.3.9}$$

$$a,m,b \in C^1(\overline{D}\times R^1), \quad u \in C^2(D_0),\ D_0 = \overline{D} - \{(x,y|0 < \varepsilon \le x,y \le 1)\},$$

Если считать, что п.д.- система (1.3.9) удовлетворяет условию (M_0), то необходимо получим $a_0 = 0,\ m(0,u) = 0,\ b(0,0,u) = 0$. Откуда имеем $u = const.$

Условие совместности системы (2.31) имеет вид:

$$xy(y^n b'_x + amb'_u) - (ny^{n+1} + xyam'_u)b = yx^{n+1}(a'_y m + am'_y) - nx^{n+1}am \tag{N_{10}}$$

Допустим, что условие (N_{10}) выполняется, но не тождественно. Тогда из этой соотношении [251], имеем: $u = \varphi(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.3.9), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.3.9)-несовместна. В связи с тем, что нам

требуется найти многообразие решений системы, поэтому будем искать такой класс функций *b(x,y,u),* для которого обеспечивалась бы тождественное выполнение условий (N_{10}). Аналогично предыдущим случаям, из (N_{10}) получаем, что для тождественного выполнения условий совместности системы (1.3.9) необходимо и достаточно, чтобы функция *b(x,y,u)* принимала вид:

$$b(x,y,u)=\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A(x,y)}{y^n}\right)-\frac{\partial M}{\partial y}+f\left[y;M(y,u)-\frac{A(x,y)}{y^n}\right]\right\}\cdot x^n\cdot m(y,u), \qquad (1.3.10)$$

где $A(x,y)=\int_0^x a(t,y)dt, \quad M(y,u)=\int_{u_0}^{u}\frac{d\zeta}{m(y,\zeta)}$, *f(y,ψ)* – некоторая вполне определённой как и $b(x,y;u)$ функция. Затем, интегрируя первое уравнение системы (1.3.9), по переменной *x*, считая в нём *y*- независимым параметром, сделаем замену:

$$M(y,u)-\frac{A(x,y)}{y^n}=\psi, \qquad (1.3.11)$$

где $\psi=\psi(y)$-новая неизвестная функция. Дифференцируя (1.3.11) по переменной y, подставим её результат в (1.3.9), и с учетом (1.3.10) получим, о.д.у. вида (1.3.4), в котором функция *f(y,ψ)* определяется из формулы (1.3.10). Если это о.д.у. (1.3.4) имеет решение вида $u=h(C,y),$ тогда исходная система также разрешима, и многообразие её решений определяется формулой:

$$u(x,y)=M^{-1}\left\{y;\frac{A(x,y)}{y^n}+h(C;y)\right\}. \qquad (1.3.12)$$

Таким образом, для системы (1.3.9) справедлива предыдущая теорема 6. Причем это решение по переменной y в области $D_{0,}$ при $n<1$ является

непрерывным, а при $n \geq 1$ имеет особенности *(n)*-го порядка. По переменной *x* оно всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным.

1.3.4. Будем рассматривать п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{y^n} m(y,u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{y^n}, \ (n \geq 0) \tag{1.3.13}$$

где $a, m, b \in C^1(\overline{D} \times R^1), \quad u \in C^2(D_0), \quad D_0 = \overline{D} - \Gamma_2, \ \Gamma_2 = \{(x,y) | y = 0\}$

Условие совместности системы (1.3.13) принимает вид:

$$y^n b'_x + amb'_u = am'_u b + y^n (a'_y m + am'_y) - ny^{n-1} am \ . \tag{N_{11}}$$

Если в системе (1.3.13) $\lim\limits_{y \to 0} (y^n \frac{\partial u}{\partial x}) = 0, \quad \lim\limits_{y \to 0} (y^n \frac{\partial u}{\partial y}) = 0,$ то имеем, что

a(x,0) m(0,u)=0, b(x,0,u) =0. Откуда имеем: *u=const, u=u(x)*, которые могут быть некоторым частным решением системы, либо только одна из этих функций может быть решением системы (1.3.13).

Допустим, что условие (*N_{11})* выполняется, но не тождественно. Тогда в силу теоремы о неявных функциях [251], из (*N_{11}*) получим: $u = \varphi(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.3.13), то она будет некоторым частным решением системы. Если в системе (1.3.13) *a(x,y)* и *b(x, y, u)* удовлетворяют условию

$$a(x,y) = \alpha(x) o(y^{y-\lambda})), \quad b(x,y,u) = \beta(x,u) o(y^{n-\lambda})), \ (0 \leq \lambda < 1) \tag{1.3.14}$$

то при тождественном выполнении условий (*N_{13}*) в области $\overline{D}$ существует непрерывное решение системы. Аналогично предыдущим пунктам легко получим, что условие (*N_{11}*) выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда зависимость *b(x, y, u)* с функций *a (x,y)* и *m(y, u)* задаётся формулой:

$$b(x,y,u) = \left\{ \frac{A'_y(x,y)}{y^n} - \frac{nA(x,y)}{y^{n+1}} - \frac{\partial M}{\partial y} + f\left[y; M(y,u) - \frac{A(x,y)}{y^n} \right] \right\} y^n m(y,u) \tag{1.3.15}$$

где $A(x,y)=\int_0^x a(t,y)dt,\quad M(y,u)=\int_{u_o}^{u}\frac{d\varsigma}{m(y,\varsigma)}$, $f(y,\psi)$ – произвольная функция.

Итак, для п.д.- системы (1.3.13) с учетом (1.3.15) условие (N_9) выполняется тождественно. Поэтому интегрируя первое уравнение системы (1.3.13) по переменной x, как о.д.у., с параметром y, сделаем замену:

$M(y,u)-\frac{A(x,y)}{y^n}=\psi$, где $\psi=\psi(y)$ -новая неизвестная функция.

Продифференцировав это равенство по переменной y, подставим ее результат во второе уравнение системы (1.3.13). В результате получим о.д.у. вида (1.3.4), где функцию $f(y,\psi)$ можно определить по формуле (1.3.15). Если о.д.у. (1.3.4) имеет решение, либо задача Коши для о.д.у. (1.3.4) имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой $\psi=\psi(C;y)$ либо $\psi=\psi(u_0;y)$. Тогда многообразие решений исходной системы можно выразить следующей формулой:

$$u(x,y)=M^{-1}\left[y;\frac{A(x,y)}{y^n}+\psi(C;y)\right] \text{ либо } u(x,y)=M^{-1}\left[y;\frac{A(x,y)}{y^n}+\psi(u_0;y)\right]. \quad (1.3.16)$$

Теорема 1.8. *Пусть в п.д.- системе (1.3.13) где* $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\Gamma_2$, $(\Gamma_2: y=0)$. *Если условие совместности (N_{11}) выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное решение системы (1.3.13). Если функции* $a(x,y)$, $b(x, y, u)$ *удовлетворяют условию (1.3.14), тогда при тождественном выполнении условий (N_{11}) система (1.3.13) имеет только лишь непрерывное решение. Для тождественного выполнения условий (N_{11}) необходимо и достаточно, чтобы $b(x, y, u)$ имела вид (1.3.15). Если задача Коши для о.д.у. вида (1.3.4), где $f(y,\psi)$ определяется из (1.3.15), имеет решение, тогда исходная система (1.3.13) также разрешима и многообразие ее решений определяется*

формулой (1.3.16). Если в (1.3.16) n<1, в $\overline{D}$ *решение задачи непрерывно, а при n≥1, решение системы в точках линии* Γ_2*:y=0 имеет особенности порядка n по переменной y , а по переменной x всюду в области является непрерывным.*

§1.4. О формуле представления решений однородных п.д.-систем с сингулярными линиями

1.4.1. Допустим, что задана п.д.- система:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y,u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^n} b\left(x, y, \frac{u}{x}\right) \tag{1.4.1}$$

где *a(x,y,u)* –однородная нулевого порядка по *x, u,* то есть: $a(tx,y,tu) = a(x,y,u), \quad a,b \in C^1(\overline{D} \times R^1), \quad u \in C^2(D_0)$ D_0 - аналогично в п.3., та же область $\overline{D}$, но без точки линии *x=0, y=0*. Делая замену $u = x \cdot z$, преобразуем систему (1.4.1) к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(y,z) - z}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{xy^n} b(x,y,z), \tag{1.4.2}$$

Условие совместности системы (1.4.2) имеет вид:

$$xb'_x + (a - z)b'_z - xy^n a'_y - ba'_z = 0 \tag{N_{12}}$$

Допустим, что условие (N_{12}) выполняется, но не тождественно. Тогда считая (N_{12}) как линейное неоднородное уравнение, относительно функции *b(x,y,z)* будем иметь:

$$b(x,y,z) = x \cdot y^n \cdot \left\{ f\left[y; A(y,z) - \ln x\right] - \frac{\partial A(y,z)}{\partial y} \right\} \cdot \left[a(1,y,z) - z\right], \tag{1.4.3}$$

где $A(y,z) = \int_{z_0}^{z} \frac{d\tau}{a(y,z) - \tau}$ при $a \neq \tau$, и *f(y,ψ)* –как и *b(x,y,z)* , вполне определенная функция, то есть:

$$f(y,\psi)=\frac{b(x,y,u)}{xy^n\left[a(1,y,z)-z\right]}+\frac{\partial A(y,z)}{\partial y}\quad . \qquad (1.4.4)$$

Так как, с учетом функции $b(x,y,z)$ вида (1.4.3) условие (N_{12}) для системы (1.4.1) выполняется тождественно, поэтому, проинтегрируем первое уравнение системы (1.4.1): $A(y;z)-\ln x=\psi(y)$ и дифференцируя ее по переменной y, подставим ее результат во второе уравнение системы (1.4.1) и получим о.д.у. вида (1.3.4), в котором функция $f(y,\psi)$ определяется формулой (1.4.4). Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4) имеет решение, то исходная система (1.4.1) также разрешима, и многообразие её решений определяется формулой:

$$u(x,y)=xA^{-1}\left[y;\ln x+\psi(C,y)\right] \quad \text{либо} \quad u(x,y)=xA^{-1}\left[y;\ln x+\psi(u_0;y)\right]\quad . \qquad (1.4.5)$$

При этом задача Коши для системы (1.4.1) имеет единственное решение. А также полученное решение исходной системы, формулой (1.4.5) в точках линии $x=0$ имеет логарифмическую особенность при $n=1$, а особенность по линии $y=0$ устраняется.

1.4.2. Если задается п.д.- система

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a(x,y,u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y^n}b(x,y,\frac{u}{x^k}), \qquad (1.4.6)$$

где $a(tx,y,t^k u)=t^{1-k}a(x,y,u),$ т.е. $a(x,y,u)$ - обобщенная однородная функция по переменным x, u причем $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0)$, то заменой вида $u=x^k z$, преобразуем п.д.- систему (1.4.6) к п.д.- системе вида (1.4.2) Затем также определяется класс функции $b(x,y,z)$ для которых условие совместности системы (1.4.6) выполняется тождественно, а многообразие решений определяется формулой.

$$u(x,y)=x^{k}A^{-1}\left[y;\ln x+\psi(C,y)\right]. \qquad (1.4.7)$$

Теорема 1.9. *Пусть в п.д.- системе (1.4.1) a(x,y,u) однородная нулевого порядка по переменным x,u причем,* $a,b\in C^{1}(\overline{D}\times R^{1}),$ $u\in C^{2}(D_{0})$, *либо в системе (1.4.6) a(x,y,u) обобщенно-однородная функция. Если условие (N_{12}) для этих систем выполняются, но не тождественно, тогда находятся некоторые частные решения системы (1.4.1) и (1.4.6). Для тождественного выполнения условий (N_{12}) необходимо и достаточно, чтобы функция b(x,y,z) имела вид (1.4.3). Если задача Коши для о.д.у. вида (1.3.4) имеет решение, тогда исходные системы (1.4.1) либо (1.4.6) также разрешимы и многообразие их решений определяются соответствующими формулами (1.4.5), либо (1.4.7), причём эти решения в зависимости известной обратной функции, во всей данной области будут непрерывными.*

1.4.3. Рассмотрим п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^{n}}a(x^{n-1},y,u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y^{n}x^{n-1}}b(x,y,x^{n-1}u),\ (n\geq 0) \qquad (1.4.8)$$

где $a,b\in C^{1}(\overline{D}\times R^{1}),\ u\in C^{2}(D_{0}),\ D_{0}=\overline{D}-(\Gamma_{1}+\Gamma_{2}),\ \Gamma_{1}: x=0,\ \Gamma_{2}: y=0$. Причём $a(x^{n-1},y,u)$ - однородная по первому и третьему аргументам функция. Если условие совместности п.д.- системы (1.4.8) выполняется, но не тождественно, то в силу теореме о системе неявных функций [251], можно определить из этого условия некоторую функцию, которая будет некоторым частным решением системы. Допустим, что условие совместности системы (1.4.8) выполняется тождественно.

Прежде чем интегрировать систему (1.4.8), делая замену вида $x^{n-1}u = Z, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^{n-1}}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{n-1}{x^{n-1}}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^{n-1}}\frac{\partial Z}{\partial y}$, преобразуем её в следующем виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{a(1, y, Z) + (n-1)Z}{x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{xy^n} b(x, y, Z). \tag{1.4.9}$$

Условие совместности системы (1.4.9) выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда функция $b(x, y, Z)$ принимает вид:

$$b(x, y, Z) = x\, y^n \left\{ -\frac{\partial A(y, Z)}{\partial y} + f\left[y; A(a, Z) - \ln x\right] \right\} \left[a(1, y; Z) - \ln x\right],$$

$$A(y, Z) = \int_0^Z \frac{d\tau}{a(1, y; \tau) + (n-1)\tau}, \qquad \left(a(1, y; Z) \neq (1-n)Z\right) \tag{1.4.10}$$

Теперь с учётом значения функции $f(y,V), \quad (V = A(y, Z) - \ln x)$, определяющего из соотношения (1.4.10), будем интегрировать о.д.у. вида (1.3.4). Если решение о.д.у. (1.3.4) представимо формулой $V = \hat{O}(y, C)$, то многообразие решений п.д.- системы (1.4.8) принимает вид:

$$u(x, y) = \frac{1}{x^{n-1}} A^{-1}\left[y; \ln x + V(y, C)\right]. \tag{1.4.11}$$

Теорема 1.10. *Пусть в п.д.- системе (1.4.8)* $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0), D_0 = \overline{D} - \{\Gamma_1 + \Gamma_2\}$

. *Если условие совместности системы (1.4.8) выполняется, но не тождественно, тогда находится некоторое частное решение системы, либо система (1.4.8) несовместна. Для того, чтобы условие совместности системы (1.4.8) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x, y, Z) \ \ (Z = x^{n-1}u)$ *имела вид(1.4.10). Если о.д.у. вида (1.3.4) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие её*

$n \le 1$

решений определяется явной формулой (1.4.9). Если на данной системе , то решение системы (1.4.8) во всей области будет непрерывным. А в случае n>1 решение системы по переменной y всюду в области непрерывным, по переменной x по линии вырождения x=0 имеет особенности (n-1)- го порядка.

§ 1.5. О формулах представления решений одного класса нелинейных п.д.-систем

1.5.1. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y)u + h(x,y)u^k, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{h(x,y,u)}{y^n} \tag{1.5.1}$$

$a,b,h \in C^1(\overline{D} \times R^1), u \in C^2(D_0)$, D_0- та же область $\overline{D}$, но без точки линии *y=0 (0<y≤1).* Здесь же, в точках линии вырождения y=0 задачу Коши задавать нельзя. Поскольку при *y=0* и ограниченности $\frac{\partial u}{\partial y}$ в $\overline{D}$ требуется выполнение условий (M_0) , то есть, если $\lim_{y\to 0}\left(y^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \lim_{y\to 0}\left(y^n \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$, то необходимо получим $a(x,0) = a_0 = 0,\ h(x,0) = h_0 = 0,\quad u = 0$. Откуда получим $u = \varphi(x), u = 0$. Если эти функции удовлетворяют каждому уравнению системы (1.5.1) , то $u = 0, u = \varphi(x)$ будут некоторыми особыми либо частными решениями системы (1.5.1). В противном случае п.д.- система (1.5.1) – не имеет решений. Поэтому задача Коши для системы (1.5.1) выбирается в виде:

$$u = u_0 \text{ при } x = x_0,\ y = y_0\ (y_0 \neq 0). \tag{1.5.2}$$

Условием совместности системы (1.5.1) будет:

$$b'_x + (au + hu^k)\cdot b'_u - (a + khu^{k-1})\cdot b - y^n(a'_y u + h'_y u^k) = 0 \quad . \qquad (N_{13})$$

Допустим, что условие (N_{13}) выполняется, но не тождественно. Тогда в силу теоремы о неявной функции (см. [251]), решая (N_{13}) по *u*, имеем: *u=P(x,y).* Если эта функция удовлетворяет каждому уравнению системы (1.5.1), тогда она будет некоторым частным решением системы (1.5.1). В противном случае, система (1.5.1) несовместна. Решая (N_{13}) как линейное неоднородное уравнение, относительно функции *b(x,y,u)* будем иметь:

$$b(x,y,u) = y^n\left\{A'_y(x,y)u + \frac{1}{1-k}\left[H'_y(x,y) + f\left[y; e^{(n-1)A(x,y)}u^{1-k} - H(x,y)\right]\right]\right\}e^{(1-k)A(x,y)}u^k$$

, (1.5.3)

где $A(x,y) = \int_0^x a(t,y)dt, \qquad H(x,y) = (1-k)\int_0^x h(t,y)e^{k-1A(t,y)}dt,$

При этом значения функции *b(x,y,u),* условие совместности (N_{13}) выполняется тождественно.

Замечание. Если п.д.- систему (1.5.1) выбрать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{x^n}u + \frac{h(x,y)}{x^n}u^k, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{y^n} \qquad (1.5.4)$$

$a,b,h \in C^1(\overline{D}\times R^1), \qquad u \in C^2(D_0)$, D_0 - та же область $\overline{D}$, но без точек линии *x=0, y=0* $\overline{D} - \{(x,y \mid 0 \le x,y \le 1)\}$, или же $D_0 = \overline{D} - (\Gamma_1 + \Gamma_2),\ \Gamma_1 : x = 0,\ \Gamma_2 : y = 0$.

Для системы (1.5.4) условием совместности будет:

$$x^n b'_x + (au + hu^k)\cdot b'_u = (a + khu^{k-1})\cdot b + y^n(a'_y u + h'_y u^k) \qquad (N_{14})$$

Для существования непрерывного решения системы (1.5.4) необходимо чтобы $\lim_{x\to 0}(x^n \frac{\partial u}{\partial x}) = 0, \quad \lim_{y\to 0}(y^n \frac{\partial u}{\partial y}) = 0,$ (при ограниченности $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$) .

Тогда из системы (1.5.4) будем иметь $a(x,0)u + h(x,0)u^k = 0,$ $b(x,0,u) = 0$. Из этих двух равенств и из (N_{14}) получим:

$u = 0,\ u = (P(x))^{\frac{1}{k-1}},\quad u = q(x)$, $b(x,0,u) = a_0 u + h_0 u^k$

Подставляя $u = 0,$ в третье равенство, опять получим $u = q(x)$. При этом из системы (1.5.4) имеем, что либо $u \equiv const,$ либо система может иметь, лишь некоторое частное решение, либо система (1.5.4) несовместна. Для того чтобы условие (N_{14}) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями $b(x,y,u)$ с $a(x,y)$ и $h(x,y)$ определялась формулой вида (1.5.3) . Отличие между функцией $b(x,y,u)$ из (1.5.1) от новой заключается в том, что в новом виде функции $A(x,y)$ и $H(x,y)$ определяются формулами:

$$A(x,y) = -\int_x^1 \frac{a(t,y)}{t^n}\,dt, \qquad H(x,y) = (k-1)\int_x^1 \frac{h(t,y)}{t^n} e^{(k-1)A(t,y)}\,dt\,.$$

Легко заметить, что в этих формулах при $n<1$ функции $A(x,y)$, $H(x,y)$ будут непрерывными, а при $n=1$ и $n\geq 2$ в точках линии $x=0$ соответственно имеют логарифмического и особенности степенного $(n-1)$-го порядка.

Далее интегрируя первое уравнение системы (1.5.4) по переменной x, считая y- параметром, получим: $\exp\{(k-1)A(x,y)u^{1-k}\} - H(x,y) = \psi,$ $\psi = \psi(y)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя последнее равенство по переменной y, подставим ее значения во второе уравнение системы (1.5.4) и в результате получим о.д.у. вида (1.3.4) , в котором функция $f(y,\psi)$ имеет вид:

$$f(y,\psi) = (1-k)\left[b(x,y,u) - A'_y(x,y)u\right]\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{-k} - H'_y(x,y) \qquad (1.5.5)$$

Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4) с учетом (1.5.5) имеет решение, тогда

исходная система (1.5.4) также разрешима и многообразия ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=\left[H(x,y)+\Phi(C,y)\right]^{1/(1-k)}\cdot e^{A(x,y)}. \qquad (1.5.6)$$

При этом задача Коши для п.д.- систем (1.5.1) и (1.5.4) имеет единственное решение. Причем эти полученные решения исходной системы при $n<1$ являются непрерывными, а при $n=1$ и $n\geq 2$ соответственно имеют логарифмического и $(n-1)$-го порядка особенностей.

Теорема 1.11. *Допустим, что в п.д.- системах (1.5.1) и (1.5.4)* $a,h,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, *-заданные функции,* $u\in C^2(D_0)$ *- искомая функция. Если условие* (N_{14}) *выполняется, но не тождественно, тогда может определяться некоторое частное, либо особое решение системы. Для того чтобы условие совместности* (N_{14}) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями b(x,y,u) с a(x,y) и h(x,y) и правая часть первого уравнения (1.5.1) определялась формулой (1.5.3). Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4) (с учетом значении функции f(y,ψ) вида (1.5.5)), имеет решение, тогда системы (1.5.1) и (1.5.4) также разрешимы и многообразия их решений определяются формулой вида (1.5.6).*

1.5.2. Будем рассматривать п.д. систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}u+\frac{h(x,y)}{y^n}u^k,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{y^n},\quad (n\geq 0) \qquad \textbf{(1.5.7)}$$

где $a(x,y)$, $h(x,y)$, $b(x,y,u)$- заданные функции. $u\in C^2(D_0)$ - искомая функция, $D_0=\overline{D}-\Gamma_2$, $\Gamma_2=\{(x,y)|y=0\}$. Условие совместности системы (1.5.7) принимает вид:

$$y^n b'_x + (au + hu^k)\cdot b'_u = (a + khu^{n-1})\cdot b + y^{n-1}(ya'_y - na)u + y^{n-1}(yh'_y - nh)u^k .$$

(N_{15}) Заметим, что при $y=0$ система (1.5.7) не интегрируема. Поэтому, для существования непрерывного решения системы требуем, чтобы выполнялись

(см.[109]-[113]) $\lim_{y\to 0}(y^n \frac{\partial u}{\partial y}) = 0,\ \lim_{y\to 0}(y^n \frac{\partial u}{\partial x}) = 0.$

При этом можем иметь некоторое частное решение системы (1.5.7) в виде $u = 0$. Допустим, что условие (N_{15}) по всем переменным выполняется, но не тождественно. Тогда из (N_{15}) можем иметь функцию $u = \varphi(x, y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.5.7), то она будет некоторым частным решением исходной системы. В противном случае, система (1.5.7) несовместна. Если же в системе (1.5.7) $a(x,y)$, $h(x,y)$ и $b(x,y,u)$ удовлетворяют условиям

$a(x,y) = p(x)\,o(y^{n-\lambda}),\ h(x,y) = q(x)\,o(y^{n-\lambda}),\ b(x,y,u) = r(x,u)\,o(y^{n-\lambda}),\ (0 \le \lambda < 1)$

,(M_1)

то при тождественном выполнении условий (N_{15}), и интегрируемости вида о.д.у. (1.3.4) система (1.5.7) имеет непрерывное решение во всей замкнутой области $\overline{D}$. Допустим, что в первом уравнении системы (1.5.7) $A(x,y) = \int_0^x a(t,y)dt,$ Тогда умножая обе части уравнений системы на $\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{-k}$ перепишем ее к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left[\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{1-k}\right] = (1-k)\frac{h(x,y)}{y^n}\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}, \\ \end{cases} \qquad (1.5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{1-k}\right]=(k-1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A(x,y)}{y^n}\right)\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{1-k}+$$

$$+\frac{(1-k)}{y^n}\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{-k}b(x,y,u)$$

Правые части равенств из системы (1.5.8), соответственно обозначим через $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y,v)$, и $\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{1-k}=v$. Тогда будем иметь(см.[269-271]):

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha(x,y),\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\beta(x,y,v).$$

Условие совместности этой системы выполняется тождественно, если

$$\beta(x,y,v)=B'_y(x,y)+f\left[y;v-B(x,y)\right],\quad (B(x,y)=\int_0^x\alpha(t,y)dt)$$

Переходя к прежним переменным, получим общий вид функции *b(x,y,u)* следующей формулой:

$$b(x,y,u)=$$

$$=y^n\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{nA}{y^{n+1}}\right)u+\frac{1}{1-k}\left\{\frac{\partial B}{\partial y}+f\left[y;\exp\left\{(k-1)\frac{A}{y^n}\right\}u^{1-k}-B(x,y)\right]\right\}\exp\left\{(1-k)\frac{A}{y^n}\right\}u^k\right\}\quad(1.5.9)$$

В этой формуле *f(y,ψ)* – вполне определяется через функцию *a, h, b* и их преобразования. Далее подставляя значения *b(x,y,u)* в систему (1.5.7), убедимся, что условия её совместности выполняются тождественно. Интегрируя первое уравнение из (1.5.7) по переменной *x*, считая *y* – параметром, делаем замену:

$$\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{-k}-B(x,y)=\psi,$$

где $\psi=\psi(y)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя последнее равенство по переменной *y*, подставим ее результат в (1.5.7) получим о.д.у. вида (1.3.4), где в нём функцию *f(y,ψ)* можно определить по формуле (1.5.9). Если о.д.у. (1.3.4) с учетом указанной функции *f(y,ψ)* имеет решение, тогда

исходная система также разрешима и многообразие её решений определяются формулой:

$$u(x,y)=\exp\left\{\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}\cdot\left[B(x,y)+\psi(C,y)\right]^{\frac{1}{1-k}} \qquad (1.5.10)$$

.

Если при всех $(x,y)\in\overline{D},\ A(x,y)<0,$ тогда в (1.5.10) непрерывность решении системы (1.5.7) следует из $\exp\left\{\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}\in C(\overline{D})$. В случае, когда $A(x,y)\geq 0,$ то $\exp\left\{\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}$ и *B(x,y)* одновременно в D_0 – непрерывны, а в самих точках линии вырождения *y=0* имеют особенности *(n)*-го порядка.

Теорема 1.12. *Пусть в п.д. (1.5.7)* $a,h,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$ $D_0=\overline{D}-\Gamma_2$. *Если условие* ($M_0$) *выполнено, а также условии* (N_{15}) *выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное решение системы. Для того чтобы условие* (N_{15}) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функциями b(x,y,u) имела вид (1.5.9). Если о.д.у. (1.3.4) с учетом значения функции f(y,ψ) (определяющей из (1.5.9)) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие её решений определяются формулой вида (1.5.10). Причём это решение при n≤1, A>0 и произвольное n, A<0 в* $\overline{D}$ *непрерывно, а при n≥1 и A>0 в* D_0 *непрерывно и в точках линии y=0 имеет особенности n - го порядка.*

1.5.3. Рассмотрим п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}u+\frac{h(x,y)}{y^n}u^k,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{x^n},\quad (n\geq 0) \qquad (1.5.11)$$

где $a(x,y)$, $h(x,y)$, $b(x,y,u)\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-(\Gamma_1+\Gamma_2)$, $\Gamma_1=\{(x,y)|x=0\}$, $\Gamma_2=\{(x,y)|y=0\}$. Условие совместности системы (1.5.11) будет:

$$x\cdot y^{n+1}\cdot b'_x + x\cdot y\cdot(au+hu^k)\cdot b'_u - [ny^{n+1} + x\cdot y\cdot(a+k\,hu^{k-1})]\cdot b =$$
$$= x^{n+1}(ya'_y - na)u + x^{n+1}(y\cdot h'_y - nb)u^k\ . \qquad (N_{16})$$

Если условие (N_{16}) выполняется, но не тождественно, то из этой соотношении, в силу теоремы о неявной функций (см. [251]), получаем функцию $u=\varphi(x,y)$. Если функция $u=\varphi(x,y)$ удовлетворяет системе (1.6.1), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.5.11) несовместна.

Условие совместности системы (1.5.11) выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда зависимость между функциями $b(x,y,u)$ с $\frac{a(x,y)}{y^n}$ и $\frac{h(x,y)}{y^n}$ определяется формулой:

$$b(x,y,u) = \qquad (1.5.12)$$
$$= x^n\left\{\left(\frac{\partial_y A}{y^n} - \frac{nA}{y^{n+1}}\right)u + \frac{1}{1-k}\left\{\frac{\partial B}{\partial y} + f\left[y;\exp\left\{(k-1)\frac{A}{y^n}\right\}u^{1-k} - B(x,y)\right]\right\}\exp\left\{(1-k)\frac{A}{y^n}\right\}u^k\right.$$

,

где $A(x,y)=\int_{x_0}^{x} a(t,y)dt)$, $B(x,y)=\int_{y_0}^{y}\alpha(x,\tau)d\tau)$,

$\alpha(x,y)=(1-k)h(x,y)\exp\{(k-1)A(x,y)\}$, $f(y,\psi)$ – вполне определенная функция и определяется из соотношения (1.5.12). По аналогии с п. 5.1 интегрируем первое уравнение (1.5.11) и делаем замену

$$\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{y^n}\right\}u^{1-k} - B(x,y) = \psi, \qquad (1.5.13)$$

где $\psi=\psi(y)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя обе части равенства (1.5.13) по переменной y, подставим ее значение в (1.5.11) и с учетом (1.5.12) получим о.д.у. вида (1.3.4) , где функция $f(y,\psi)$ определяется формулой:

$$f(y,\psi)=(1-k)\left[b(x,y,u)-A'_y(x,y)u\right]\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{-k}-H'_y(x,y)\ . \qquad (1.5.14)$$

Если о.д.у. (1.3.4) с учетом значения функции $f(y,\psi)$ из (1.5.14) имеет вполне определенное решение, тогда система (1.5.11) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.5.12).

Теорема 1.12(*a*). *Пусть в п.д.- системе (1.5.11)* $a,h,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, *заданные функции.* $u\in C^2(D_0)$ *- искомая функция.* $D_0=\overline{D}-(\Gamma_1+\Gamma_2)$, *. Если условие совместности* (N_{16}) *выполняется, но не тождественно, то существует некоторое частное решение системы. Для тождественного выполнения условий* (N_{16}) *необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(x,y,u)$ *с* $a(x,y)$, $h(x,y)$ *была связана формулой (1.5.12). Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4), с учётом значения функции* $f(y,\psi)$ *вида (1.6.4) имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.5.10). Причем это решение при* $n\geq 0$ *в* D_0 *непрерывно, а в точках линии* $\Gamma_1+\Gamma_2$ *имеет особенности* n*-го порядка.*

§ 1.6. О формулах представления решений системы уравнений с разделяющимися переменными п.д.- систем с сингулярными линиями

1.6.1. Теперь рассмотрим п.д.- систему вида [284-300]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{x^n}p(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y)}{y^n}q(u),\quad (n\geq 0) \qquad (1.6.1)$$

где

$$a,b,p,q\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-(\Gamma_1+\Gamma_2),\ \Gamma_1=\{(x,y)|x=0\},\Gamma_2=\{(x,y)|y=0\}.$$

Условием совместности п.д.- системы (1.6.5) будет:

$$ab(p'(u)q(u)-p(u)q'(u))+y^n a'_y p(u)-x^n b'_x q(u)=0 \qquad (N_{17})$$

Если условие (N_{17}) выполняется, но не тождественно, тогда в силу теоремы о неявной функций из (N_{17}) , можно определить функцию $u=\varphi(x,y)$. Если эта

функция удовлетворяет системе (1.6.1), то ее считаем некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.6.1)- несовместна.

Теперь потребуем, чтобы условие совместности *(N_{17})* выполнялось тождественно. А это требование возможно в двух случаях:

1) $$p'q - q'p = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{y^n}\right) = 0.$$

Откуда будем иметь:

$$a(x,y) = \alpha(y)x^n, \quad b(x,y) = \beta(y)\, y^n, \quad p(u) = \lambda q(u) \quad (\lambda = const), \qquad (1.6.2)$$

Подставляя значения a, b, p в системе (1.6.5) , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda\alpha(x)q(u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta(y)q(u),$$

Условие совместности этой системы выполняется тождественно, а многообразие ее решений можно представить непрерывной в $\overline{D}$ функцией:

$$u(x,y) = Q^{-1}[C + \lambda\int_0^x \alpha(t)dt + \int_0^y \beta(\tau)d\tau] = Q^{-1}[C + A(x) + B(y)]. \qquad (1.6.3)$$

2)Допустим, что в *(N_{17})*: $p'q - q'p \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{y^n}\right)$. Тогда из *(N_{17})* имеем

$$\frac{a}{x^n}\frac{b}{y^n}(q'p - p'q) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b(x,y)}{y^n}\right)(p-q) \quad , \quad \frac{q'p - p'q}{p-q} = -\frac{x^n}{a}\cdot\frac{y^n}{b}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{y^n}\right)$$

Так как в этом соотношении, левая часть равенства зависит только от переменного *u,* а правая часть от *(x,y)*, тогда приравнивая их некоторому постоянному λ, будем иметь:

$$q(u) = \left[1 + e^{-\lambda P(u)}\right]p(u), \quad b(x,y) = y^n e^{\lambda A(x,y)}\beta(y) \qquad (1.6.3)$$

где $A(x,y) = -\int_x^1 \frac{a(t,y)}{t^n}dt$, $P(u) = \int_{u_0}^u \frac{d\varsigma}{p(\varsigma)}$.

При этих значениях $q(u)$ и $b(x,y)$ из (1.6.3), система принимает следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{x^n}\,p(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\beta(y)\cdot\left[e^{\lambda A(x,y)}+e^{-\lambda(P(u)-A(x,y))}\right]p(u),\qquad (1.6.4)$$

Для системы (1.6.4) условие *(N_{17})* выполняется тождественно. Проинтегрируем первое уравнение из (1.6.4) по переменной *x* и делаем замену: $P(u)-A(x,y)=\psi.\quad(\psi=\psi(y))$. Дифференцируя это соотношение по переменной *y*, подставим значение во второе ее уравнение, и будем иметь:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\beta(y)e^{-\lambda\psi}\quad и\quad \psi(y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left[C+\lambda B(y)\right],\quad \left(B(y)=\int_{y_0}^{y}\beta(\tau)d\tau\right)$$

При этом значение $\psi(y)$, многообразие решений п.д.- системы (1.6.4) примет вид:

$$u(x,u)=P^{-1}\left\{A(x,y)+\frac{1}{\lambda}\ln\left[C+\lambda B(y)\right]\right\}.\qquad (1.6.5)$$

Теорема 1.13. *Пусть в п.д.- системе (1.6.1)* $a,b,p,q\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),$ $D_0=\left\{(x,y)\middle| x=0<x,y\le 1\right\}=\overline{D}-(\Gamma_1+\Gamma_2)$. *Если в системе (1.6.1)* $a,b,p(u)$ *удовлетворяют условию (1.6.2), то многообразие решений системы всюду в* $\overline{D}$ *непрерывно и выражается формулой (1.6.3). Если в п.д.- системе (1.6.1) выполняется условие* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{y^n}\right)$, *то для тождественного выполнения условий (N_{17}) необходимо и достаточно, чтобы зависимость между функциями* $b(x,y)$ *с* $a(x,y)$ *и* $p(u)$ *с* $q(u)$ *определялись формулой вида (1.6.4). Тогда п.д.- система (1.6.1) разрешима явно и многообразие ее решений определяется формулой (1.6.5).*

Заметим, что полученные решения системы формулой (1.6.5), всюду в $\overline{D}$ при $0\le x<1,\ 0\le y<1,\ n<1,$ является непрерывной при $n=1$ и $n>1$, в

особой точке соответственно имеет логарифмическую и $(n-1)$-го порядка особенностей по переменной x, а по y всюду в $\overline{D}$- непрерывно.

1.6.3. Будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{x^n}p(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y)}{x^n}q(u),\quad (n\geq 0) \tag{1.6.6}$$

где $a,b,p,q\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-(\Gamma_1),\ \Gamma_1=\{(x,y)|x=0\},$

Условием совместности системы (1.6.6) будет:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right)p(u)+\frac{ab}{x^{2n}}p'q=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)q(u)+\frac{ab}{x^{2n}}q'p, \tag{N_{18}}$$

или $x^n(a'_y p-b'_x q)+ab(p'q-q'p)-nx^{n-1}b=0.$

Допустим, что условие *(N_{18})* выполняется, но не тождественно, тогда из него получим $u=\delta(x,y)$. Если функция $u=\delta(x,y)$ удовлетворяет системе (1.6.6), то она будет некоторым частным ее решением. В противном случае, система (1.6.6)- несовместна.

Вопрос о тождественном выполнении условий *(N_{18})* можем рассматривать в следующих случаях:

а) Пусть в *(N_{20})* $\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)=0,\quad p'q-q'p=0.$

Откуда имеем:

$$a(x,y)=x^n\alpha(x),\quad b(x,y)=x^n\beta(y),\quad q(u)=\lambda p(u). \tag{1.6.7}$$

При этом, решение системы (1.6.6) определяется формулой:

$$u(x,y)=P^{-1}(C+A(x)+B(y)),\ A(x)=\int_0^x\alpha(t)dt,\ B(y)=\int_0^y\beta(\tau)d\tau. \tag{1.6.8}$$

Причем это полученное решение системы, всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным. А также если в системе (1.6.6) $a(x,y), b(x,y)$ удовлетворяют условию малости:

$$a(x,y) = o(x^{n-\lambda}),\ \ b(x,y) = o(x^{n-\lambda}),\ (0 \le \lambda < 1),\ \ q(u) = \lambda\, p(u),\quad (M_1)$$

то решение системы (1.6.6) при $\gamma(y) = const$ существует и в области $\overline{D}$ является непрерывным.

б) Допустим, что в условии (N_{18}) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a}{x^n}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{b}{x^n}\right),\quad p'q - q'p \neq 0,$

тогда из этого функционального равенства, получим:

$$b(x,y) = x^n e^{\lambda A(x,y)}\beta(y),\ \ q(u) = \left[1 + e^{-\lambda P(u)}\right]p(u)\ , \qquad (1.6.9)$$

где $A(x,y) = -\int\limits_x^1 \dfrac{a(t,y)}{t^n}dt,\ \ p(u) = \int\limits_{u_0}^u \dfrac{b\zeta}{p(\zeta)},\quad \beta(y)$ - вполне определенная функция.

При этих значениях функции $b(x,y), q(u)$ из (1.6.9), для системы (1.6.6) условий (N_{18}) выполняется тождественно, и многообразие решений системы определяется формулой вида (1.6.5). Причем $A(x,y)$ из (1.6.9) при $n<1$ в $\overline{D}$, и при $n \ge 1$ в области D_0 решение системы (1.6.6) будут непрерывными, а при $n \ge 1$, в особой точке соответственно имеют логарифмическую и $(n-1)$-го порядка особенностей.

Теорема 1.14. *Пусть в п.д.- системе (1.6.6)* $a,b,p,q \in C^1(\overline{D} \times R^1),\ u \in C^2(D_0),\quad D_0 = \overline{D} - \tilde{A}_1$. *Пусть условие* (N_{18}) *выполняется, но не тождественно. Тогда система (1.6.6) имеет некоторое частное решение системы. Для тождественного выполнения условий* (N_{18}) *необходимо и достаточно, чтобы функции* a,b,p,q *и их взаимосвязи определялись формулами (1.6.7), либо (1.6.9). Тогда система (1.6.6) разрешима и многообразие ее решений определяются соответствующими*

формулами (1.6.5) и вида (1.6.8). Причем, если функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ *удовлетворяют условию* (M_1) *, то решение системы (1.6.6) при* $\gamma(y)=const$ *существует и непрерывно в* $\overline{D}$.

Замечание. Если мы рассмотрим п.д.- систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}p(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y)}{y^n}q(u),\quad (n\geq 0)$$

где $a,b,p,q\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-(\Gamma_2),\ (\Gamma_2=\{(x,y)|y=0\})$, то для существования решений этой системы имеет место предыдущее утверждение.

г) Теперь рассмотрим п.д.- систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}p(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y)}{x^n}q(u),\quad (n\geq 0)\ ,\qquad (1.6.10)$$

$a,b,p,q\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-(\Gamma_1+\Gamma_2),\ \Gamma_1=\{(x,y)|x=0\},\ \Gamma_2=\{(x,y)|y=0\}.$

Условием совместности системы (1.6.10) будет:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{y^n}\right)p+\frac{ab}{x^n y^n}(p'q-q'p)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)q=0. \qquad (N_{19})$$

Если условие (N_{19}) выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное решение системы. Тождественное выполнение условий (N_{19}) будем рассматривать в следующих случаях:

а) Пусть в (N_{19}) : $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{y^n}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)=0,\quad p'q-q'p=0.$

Откуда имеем: $a(x,y)\equiv\alpha(x)y^n$, $b(x,y)=\beta(y)x^n$, $q(u)=\lambda p(u)$.

При этих значениях a,b,p,q система (1.6.10) разрешима, многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=P^{-1}[C+A(x)+B(y)]\ . \qquad (1.6.11).$$

б) Пусть в (N_{19}) $p'q - q'p \neq 0$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a}{y^n}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{b}{x^n}\right)$..

Тогда условие (N_{19}) выполняется тождественно, если:

$$q(u) = \left[1 + e^{-\lambda P(u)}\right]p(u), \quad \left(P(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d\zeta}{p(\zeta)}\right), \; b(x,y) = x^n \alpha(y) \exp\left(\frac{\lambda A(x,y)}{y^n}\right), \quad (1.6.12)$$

При этих значениях $q(u)$ и $b(x,y)$ система (1.6.10) разрешима и многообразие её решений определяется формулой:

$$u(x,u) = P^{-1}\left[\frac{A(x,y)}{y^n} + \frac{1}{\lambda}\ln\left[C + B(y)\right]\right]. \quad . \qquad (1.6.13)$$

Теорема 1.15. *Пусть в п.д.- системе (1.6.10)* $a,b,p,q \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \{\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\}$. *Если условие* (N_{19}) *выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное решение системы (1.6.10). Для того, чтобы условие* (N_{19}) *всюду в* $\overline{D}$ *(кроме точки линии* Γ_1, Γ_2*) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функции* $b(x,y)$ *с* $a(x,y)$, $q(u)$ *с* $p(u)$ *определялась формулами (1.6.7) и (1.6.12). При этом система (1.6.10) разрешима и многообразие её решений определяется соответствующими формулами вида (1.6.11) и (1.6.12). Причем формула вида (1.6.11) всюду в* $\overline{D}$ *является непрерывной, а решение системы формулой (1.6.12) по переменной x в* $\overline{D}$ *непрерывна, по переменной y, в* D_0 *- непрерывна, а в точках линии* Γ_2*:y=0 имеет особенность порядка n.*

§ 1.7. О формуле представления решений некоторых линейных п.д. систем с сингулярными линиями

1.7.1. Рассмотрим один случай из системы (1.5.11) в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{x^n}u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y)}{y^n}u + \frac{h(x,y)}{y^n}u^k, \qquad (1.7.1)$$

где $a,b,h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, n,k - произвольные целые числа, $n \geq 0$.

Условие совместности системы (1.7.8) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{b}{y^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right)\right]u+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{y^n}\right)-(1-k)\frac{a}{x^n}\frac{h}{y^n}\right]u^k=0. \qquad (N_{20})$$

Допустим, что условие (N_{20}) выполняется, но не тождественно. Тогда решая последнее соотношение, как линейное уравнение, будем иметь: $u(x,y)=0$, и регулярную функцию:

$$u(x,y)=\left[\frac{y^n a'_y - x^n b'_x}{(k-1)ah-h'_x}\right]^{\frac{1}{1-k}} \equiv \delta(x,y)$$

Очевидно, что $u=0$ является тривиальным решением системы (1.7.1). Если $u=\delta(x,y) \in C^1(\overline{D})$ удовлетворяет системе (1.7.1), то она будет считаться некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.7.1)- несовместна. Для существования многообразия решений системы необходимо, чтобы условие (N_{20}) по всем переменным выполнялось, тождественно. Это необходимое требование выполняется, если:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{y^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{y^n}\right)-(1-k)\frac{a}{x^n}\frac{h}{y^n}=0.$$

Пусть в этих равенствах $a(x,y)$ - считается некоторой конкретно заданной функцией. Тогда имеем:

$$b(x,y)=y^n\left[\alpha(y)+A'_y(x,y)\right],\ h(x,y)=y^n\beta(y)e^{(k-1)A(x,y)},\ A(x,y)=-\int_x^1 \frac{\partial_y a(t,y)}{t^n}dt,$$

(1.7.2)

При этих значениях функции $b(x,y),\ h(x,y)$ - п.д. система (1.7.1) разрешима явно и определяется формулой:

$$u(x,u)=\exp\{A(x,y)-\omega(y)\}\left[C+(1-k)B(y)\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad (1.7.3)$$

где $\omega(y)=\int_0^y \delta(\tau)d\tau,\ B(y)=\int_0^y \beta(\tau)d\tau.$ По последней формуле (1.7.3) легко определить, что решение системы (1.7.1) по переменной *y* всюду в $\overline{D}$ непрерывно, а по *x*, только при $n<1$. Если $n=1$ либо $n>1$, тогда решение системы в точках линии $x=0$, соответственно имеет особенности целого порядка.

Теорема 1.16. *Пусть в п.д.- системе (1.7.1)* $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0).$ *Если условие (N20) выполняется, но не тождественно, тогда система (1.7.1) кроме тривиального решения, может иметь некоторые частные решения. В противном случае система (1.7.1) кроме тривиального решения, других решений не имеет. Для тождественного выполнения условия (N20) необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(x,y),\ h(x,y)$ *из системы (1.7.1) имели вид (1.7.2). Тогда система (1.7.1) разрешима и многообразие её решений определяется формулой (1.7.3). При этом, решение исходной системы непрерывно, по переменной y для всех в* $n\ge 0$ *и по переменной x, только при* $n\le 1$. *Если* $n\ge 1$, *то решение системы (1.7.1) в точках линии вырождения* $x=0$ *имеет особенности целого порядка.*

1.7.2. Для п.д.- системы вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{y^n}u,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y)}{x^n}u+\frac{h(x,y)}{x^n}u^k, \tag{1.7.4}$$

где $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),$ D_0 - та же область, как и в предыдущих системах.

Условие совместности системы (1.7.4) принимает следующий вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{y^n}\right)\right]u+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{x^n}\right)-(k-1)\frac{ah}{y^n x^n}\right]u^k=0. \tag{N21}$$

Пусть условие *(N_{21})* выполняется, но не тождественно. Тогда решая соотношение (N_{21}), как алгебраическое уравнение, имеем:

$$u(x,y)=0,\quad u(x,y)=[\gamma(x,y)]^{\frac{1}{k-1}}.$$

Легко определить, что $u=0$ является тривиальным решением системы (1.7.4). Если $u(x,y)=[\gamma(x,y)]^{\frac{1}{k-1}}$. удовлетворяет системе (1.7.4), то она будет некоторым другим частным решением системы. В противном случае, система (1.7.4), кроме тривиального решения, других решений не имеет. Допустим, что условие *(N_{21})* выполняется тождественно, т.е.:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{y^n}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{x^n}\right)+(k-1)\frac{ah}{y^n x^n}=0$$

Если в этих двух равенствах $a(x,y)$ считается некоторой вполне определенной функцией, то $b(x,y)$, $h(x,y)$ через эту функцию выражаются следующим образом:

$$b(x,y)=x^n\left[\alpha(y)+\frac{1}{y^n}A'_y(x,y)\right],\ h(x,y)=x^n\beta(y)\exp\left\{\frac{(k-1)}{y^n}A(x,y)\right\},$$
$$A(x,y)=\int_{x_0}^{x}a(t,y)dt\,. \qquad (1.7.5)$$

В этом случае, п.д.- система (1.7.4) разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=\exp\left\{\frac{1}{y^n}A(x,y)-\omega(y)\right\}[C+(1-k)\,B(y)]^{\frac{1}{1-k}},\left(\omega(y)=\int_0^y\alpha(\tau)d\tau,\ B(y)=\int_0^y\beta(\tau)d\tau\right)$$

.(1.7.6)

Из формулы (1.7.6) легко определить, что решение п.д.- системы (1.7.4)

по переменной x - всюду в области $\overline{D}$ будет непрерывным. А также решение системы, в случаи $0 \le n < 1$ в области $\overline{D}$, и при $n \ge 1$ в D_0 по переменной y является непрерывным, в точке $y = 0$ имеет особенности n-го порядка.

Теорема 1.17. *Пусть в п.д.- системе (1.7.4)* $a, b, h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$. *Если условие* (N_{21}) *выполняется, но не тождественно, тогда система кроме тривиального решения, может иметь некоторое частное решение. В противном случае система (1.7.4) кроме тривиального, другие решения не имеет. Пусть условие совместности* (N_{21}) *выполняется тождественно. Это требование возможно тогда и только тогда, когда функции* $b(x, y)$ *и* $h(x, y)$ *имеют вид (1.7.5). При этом система (1.7.4) разрешима явно и многообразие её решений определяется формулой (1.7.5). Причем, решение системы вида (1.7.6), по переменной x для всех целых чисел* $n \ge 0$, *и по переменной y при* $A(x, y) \le 0, n < 1$ *в области* $\overline{D}$ *и при* $n \ge 1, A(x, y) \le 0$ *в* D_0, *является непрерывным, а при* $n \ge 1, A(x, y) > 0$ *по переменной y в точках линии y=0 имеет особенности целого порядка, по переменной x- непрерывно.*

1.7.3. Для п.д.- системы вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y)}{x^n} u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x, y)}{x^n} u + \frac{h(x, y)}{x^n} u^k, \quad (k, n \ge 0) \tag{1.7.7}$$

где $a, b, h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \Gamma_1$, условие совместности будет иметь вид:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right) \right] u + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{x^n}\right) + (k-1)\frac{ah}{x^{2n}} \right] u^k = 0 \ . \tag{N_{22}}$$

Если условие (N_{22}) выполняется, но не тождественно, то аналогично предыдущим, система (1.7.7), кроме тривиального решения, может иметь

некоторое частное решение. Допустим условие (N_{22}) выполняется тождественно. Это необходимое требование возможно, если:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{x^n}\right)\equiv 0,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{x^n}\right)+(k-1)\frac{ah}{x^{2n}}\equiv 0\ . \qquad (1.7.8)$$

Считая, что в последней системе $a(x,y)$ - вполне известная функция, тогда из (1.7.8) будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} b(x,y)&=x^n\left[\alpha(y)+\int_{x_0}^{x}\frac{a'_y(t,y)}{t^n}dt\right]=x^n(\alpha(y)+A'_y(x,y)\\ h(x,y)&=\beta(y)x^n\exp\{(1-k)A(x,y)\},\ A(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{a(t,y)}{t^n}dt, \end{aligned}\right\} \qquad (1.7.9)$$

При этих значениях $b(x,y)$, $h(x,y)$ условие (N_{22}) выполняется тождественно, и многообразие ее решений определяется следующей формулой:

$$u(x,u)=e^{A(x,y)+S(y)}\left[C+\omega(y)\right]^{\frac{1}{1-k}}\ ,$$

(1.7.10)

где $S(y)=\int_0^y\alpha(\tau)d\tau,\quad \omega(y)=(1-k)\int_0^y e^{(k-1)S(\tau)}\beta(\tau)d\tau$.

Теорема 1.18. *Пусть в п.д.- системе (1.7.7)* $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),$ $D_0=\overline{D}-\Gamma_1$. *Если условие (N_{22}) выполняется, но не тождественно, тогда система (1.7.7) кроме тривиального, может иметь, только лишь некоторые частные решения. Если в системе (1.7.7)* a,b,h *удовлетворяют условию малости по переменной x, т.е.:*

$a(x,y)=o(|x|^{n-\lambda}),\quad b(x,y)=o(|x|^{n-\lambda}),\ h(x,y)=o(|x|^{n-\lambda})\ (0\le\lambda<1),\qquad (M_1)$,

тогда решение системы (1.7.7) во всей области $\overline{D}$ *(в случае тождественного выполнения условий (N_{22})) непрерывно. Для того, чтобы условие (N_{22}) во всей области* $\overline{D}$ *(кроме точки линии Γ_1) выполнялось тождественно, необходимо*

и достаточно, чтобы функции $b(x,y)$ *и* $h(x,y)$ *с* $a(x,y)$ *были взаимосвязаны формулой (1.7.9). При этом система (1.7.7) разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.7.10). Причем это решение при* $0 \le n < 1$ *во всей области* $\overline{D}$ *будет непрерывным, а при* $n \ge 1$ *в точках линий* Γ_1 *имеет особенности целого порядка (либо степенного порядка).*

§ 1.8. О поведении решений одной нелинейной п.д.- систем на линии вырождения

1.8.1. В настоящем пункте рассматривается, п.д. – система

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}u + \frac{b_1(x,y)}{(x-x_0)^n}u^k, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a_2(x,y)}{(y-y_0)^n}u + \frac{b_2(x,y)}{(y-y_0)^n}u^k, \qquad (1.8.1)$$

где $a_k, b_k \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, k, n - целые числа, $(n \ge 0)$. Если в системе (1.8.1) k=1, то ее решение можно найти как в системе (1.)Условие совместности, системы (1.8.1) будет:

$$P(x,y)u + Q(x,y)u^k = 0, \qquad (N_{23})$$

где $$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_1}{(x-x_0)^n}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_2)}{(y-y_0)^n}\right),$$

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1}{(x-x_0)^n}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2)}{(y-y_0)^n}\right) + \frac{(k-1)(b_1a_2 - b_2a_1)}{(x-x_0)^n(y-y_0)^n}.$$

Заметим, что если в (N_{23}) : $P(x,y) \ne 0$, $Q(x,y) \ne 0$, тогда решая её алгебраическим путём, получим: $u(x,y) = 0$, $u(x,y) = [H(x,y)]^{\frac{1}{1-k}}$. Очевидно, что $u = 0$ является тривиальным решением п.д.- системы (1.8.1). Если $u(x,y) = [H(x,y)]^{\frac{1}{1-k}}$ удовлетворяет систему (1.8.1), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, убедимся, что система (1.8.1), кроме тривиального, других решений не имеет. Допустим, что в (N_{23}) $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = 0$, то есть условие (N_{23}) выполняется тождественно.

В системе (1.8.1) делаем замену $u^{1-k}=v$, и приведём её к линейному виду, а так же считая, что $\omega(x,y)$ являющееся полным дифференциалом функции $\frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}$, $\frac{a_2(x,y)}{(y-y_0)^n}$, так чтобы $\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{a_2(x,y)}{(y-y_0)^n}$, удовлетворяют условию $P(x,y)\equiv 0$, то есть $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_1}{(x-x_0)^n}\right)=\frac{\partial\omega}{\partial x}\left(\frac{a_2}{(y-y_0)^n}\right)$.

Тогда умножая систему (1.8.1) на $\exp\{\omega(x,y)\}$, преобразуем систему линейного уравнения, (1.8.1) к п.д.- систему вида:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(k-1)\omega}v\right)=(1-k)\frac{b_1(x,y)}{(x-x_0)^n}e^{(k-1)\omega(x,y)}\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{(k-1)\omega}v\right)=(1-k)\frac{b_2(x,y)}{(y-y_0)^n}e^{(k-1)\omega(x,y)}\end{cases}. \qquad (1.8.2)$$

Так как было требовано, что $P(x,y)=0,\ Q(x,y)=0$ следовательно для инвариантной п.д.- системы (1.8.2) предыдущее условие также будет выполняться автоматически, она разрешима явно и многообразие ее решений записывается формулой:

$$e^{(k-1)\omega}v=C+(1-k)\int_0^x\frac{b_1(t,y)}{(t-x_0)^n}e^{(k-1)\omega(t,y)}dt+(1-k)\int_0^y\frac{b(0,\tau)}{(\tau-y_0)^n}e^{(k-1)\omega(0,\tau)}d\tau$$

Переходя к прежней переменной, получим многообразие решений п.д.-системы (1.8.1) следующей формулой:

$$u(x,y)=e^{\omega(x,y)}\left[C+(1-k)\int_0^x\frac{b_1(t,y)}{(t-x_0)^n}e^{(k-1)\omega(t,y)}dt+(1-k)\int_0^y\frac{b_2(0,\tau)}{(\tau-y_0)^n}e^{(k-1)\omega(0,\tau)}dt\right]^{\frac{1}{1-k}}. \qquad (1.8.3)$$

Теперь анализируем полученное решение системы и функции $\omega(x,y)$ в точках линии вырождения $x=x_0$ и $y=y_0$:

1) Если $a_k(x,y),\ b_k(x,y)\ \ (k=1,2)$ удовлетворяют условиям малости:

$$\begin{cases} a_1(x,y)=o((x-x_0)^{n-\lambda}),\ \ b_1=o((x-x_0)^{n-\lambda}), \\ a_2(x,y)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),\ \ b_2=o((y-y_0)^{n-\lambda}),\ \ (0\le\lambda<1), \end{cases} \qquad (M_2)$$

тогда в системе (1.8.3) $\omega(x,y)$ и решение системы во всей области $\overline{D}$ при тождественном выполнении условий совместности *(N_{23})*, будут непрерывными (по каждым независимым переменным).

Если, при $n<1$, условие *(M_2)* не выполняется, то в системе (1.8.2 $\omega(x,y)$ и $u(x,y)$ на всей $\overline{D}$- непрерывны. Если же $n\ge1$ тогда решение п.д.- системы (1.8.1) в D_0- непрерывно, а в точках линии $\Gamma_1: x=x_0$ и $\Gamma_2: y=y_0$ имеет особенности степенного порядка (в целом). Заметим, что при $\alpha=1$ в $e^{\omega(x,y)}$ может оказаться интегралы виды $\int_0^x (x-x_0)^{p_0-1}dt$ или $\int_0^y (\tau-y_0)^{q_0-1}d\tau$ на линии $x=x_0$, $y=y_0$ могут сходиться, если $p_0\ge0,\ q_0\ge0$. В противном случае, такие интегралы в точках линии $x=x_0$, $y=y_0$ либо имеют логарифмическую особенность (при $p_0=q_0=0$), либо в целом имеют особенности степенного порядка $(p_0,q_0<0)$.

Теорема 1.19. *Пусть в п.д.- системе (1.8.1)* $a_k,b_k\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ \overline{D},D_0$ *- те же области, указанные в предыдущих пунктах. Если условие (N_{23}) выполняется, но не тождественно, тогда система (1.8.1) кроме тривиального решения, может иметь некоторое частное решение. Пусть условие совместности (N_{23}) выполняется тождественно. Тогда система (1.8.1) разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (1.8.3). Причем это решение в случае, когда* $a_k(x,y)$ *и* $b_k(x,y)$ *удовлет-воряют условию (M_2) , либо решение системы*

(1.8.1) при $n<1$*, во всей области* $\overline{D}$ *будет непрерывным. Если же условие (M₂) не выполняется, а также* $n\geq 1$*, тогда решение системы (1.8.1) в точках линии вырождения* $\Gamma_1: x=x_0$ *и* $\Gamma_2: y=y_0$ *имеет особенности степенного порядка.*

1.8.2. Для п.д.- системы вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}u+\frac{b_1(x,y)}{(x-x_0)^n}u^k,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{a_2(x,y)}{(x-x_0)^n}u+\frac{b_2(x,y)}{(x-x_0)^n}u^k,\quad (n,k\geq 0)\quad (1.8.4)$$

где $a_k, b_k\in C^1(\overline{D}\times R^1)$ $(k=1,2)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\Gamma_1$. Условие совместности имеет вид:

$$P(x,y)u+Q(x,y)u^k=0, \qquad (N_{24})$$

где $$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_2(x,y)}{(x-x_0)^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}\right),$$

$$Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_2(x,y)}{(x-x_0)^n}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{(x-x_0)^n}\right)+(k-1)\frac{a_1(x,y)\,b_2(x,y)-a_2(x,y)\,b_1(x,y)}{(x-x_0)^{2n}}.$$

Аналогично, предыдущему легко определить, что если условие *(N₂₄)* выполняется, но не тождественно, тогда из нее имеем: $u(x,y)=0$, $u(x,y)=[H(x,y)]^{\frac{1}{1-k}}$. Очевидно, что $u=0$ является тривиальным решением системы (1.8.4). Если вторая найденная функция, также удовлетворяет системе (1.8.4) , тогда она будет считаться некоторым частным решением системы.

Если в системе (1.8.4) функции $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$ удовлетворяют условию:

$$a_i(x,y)=o((x-x_0)^{n-\lambda}),\quad b_i=o((x-x_0)^{n-\lambda}),\quad i=1,2;\ (0\leq\lambda<1),\ (M_2)$$

то система (1.8.4) разрешима и многообразие ее решений является непрерывным во всей области $\overline{D}$. Допустим, что условие (N_{24}) выполняется тождественно. В начале, аналогично в предыдущем пункте, делая замену $u^{1-k} = v$, преобразуем систему (1.8.5) к линейной системе:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (1-k)\frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}v + (1-k)\frac{b_1(x,y)}{(x-x_0)^n},\ \frac{\partial v}{\partial y} = (1-k)\frac{a_2(x,y)}{(x-x_0)^n}v + (1-k)\frac{b_2(x,y)}{(x-x_0)^n}$$

.(1.8.6)

Если считать, что $\omega_1(x,y)$ является интегралом п.д.- системы: $\frac{\partial \omega_1}{\partial x} = \frac{a_1(x,y)}{(x-x_0)^n}$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{a_2(x,y)}{(x-x_0)^n}$, тогда умножая обе части (1.8.6) на $\exp\{(1-k)\omega_1(x,y)\}$, получим следующую преобразованную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp(k-1)\omega_1(x,y)\ v\right) = (1-k)\frac{b_1(x,y)}{(x-x_0)^n}\exp\left((k-1)\omega_1(x,y)\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\exp(k-1)\omega_1(x,y)\ v\right) = (1-k)\frac{b_2(x,y)}{(x-x_0)^n}\exp\left((k-1)\omega_1(x,y)\right) \end{cases}$$

Так как система (1.8.6) и последняя п.д.- система инвариантные, поэтому из равенства $Q(x,y) \equiv 0$ следует выполнение условий совместности последней системы. Следовательно, интегрируя последнюю систему и переходя к прежним переменным, получим:

$$u(x,y) = e^{\omega_1(x,y)}\left[C + \omega_2(x,y)\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad (1.8.7)$$

где $\omega_2(x,y) = (1-k)\int_0^x \frac{b_1(t,y)}{(t-x_0)^n}e^{(k-1)\omega_1(t,y)}dt + \frac{1-k)}{(-x_0)^n}\int_0^y b_2(0,\tau)e^{(k-1)\omega_1(0,\tau)}d\tau$.

Легко определить, что решение п.д.- системы (1.8.6), представляющее формулой (1.8.7) в области D_0 в точках линии Γ_2 по переменной y - непрерывно, а по переменной x имеет особенности порядка $(n-1)$.

Теорема 1.20. *Допустим, что в п.д.- системе (1.8.4)* $a_i, b_i \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, *(i=1,2),* $D_0 = \overline{D} - \tilde{A}_1$. *Если условие совместности* (N_{24}) *выполняется, но не тождественно, тогда система (1.8.4), кроме тривиального решения* $u = 0$, *может иметь некоторое частное решение. Если коэффициенты системы (1.8.4):* a_i, b_i *- удовлетворяют условию* (M_2), *то при* $\alpha_i, \beta_i \equiv const$, *система имеет во всей области* $\overline{D}$ *непрерывное решение. Допустим, что условие совместности* (N_{24}) *выполняется тождественно. Тогда система (1.8.4) разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.8.6). Причем найденное многообразие решений в области* D_0 *является непрерывным, причём по переменной* y *всюду в области непрерывно, в точках линии* Γ_1 *по* x *при* $n < 1$ *- непрерывно, а при* $n \geq 1$ *имеет особенности* $(n-1)$ *- го порядка.*

1. 8.3. Рассмотрим п.д.- систему с сингулярной линией вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n} u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y)}{(x-x_0)^n} u + \frac{h(x,y)}{(x-x_0)^n} u^k, \qquad (1.8.8)$$

где $a, b, h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0), D_0$. Допустим, что для системы (1.8.8) будут выполнены условии (M_0), то есть $\lim\limits_{x \to x_0} \left((x-x_0) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \lim\limits_{x \to x_0} \left((x-x_0) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$, то необходимо, чтобы выполнялись $a(x_0, y) = a_0 = 0, b(x_0, y) = b_0 = 0, h(x_0, y) = h_0 = 0$.

Условием совместности системы будет:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x,y)}{(x-x_0)^n} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n} \right) \right] u + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h(x,y)}{(x-x_0)^n} \right) - (1-k) \frac{a(x,y)\, h(x,y)}{(x-x_0)^n} \right] u^k = 0,$$

(N_{25})

Если равенство (N_{25}) выполняется, но не тождественно, тогда решая его алгебраическим методом, получим:

а) $u(x,y) = 0$, *б)* $u(x,y) = [H_1(x,y)]^{1/1-k}$, $H_1(x,y) \in C(\overline{D})$.

Нетрудно заметить, что $u=0$ является тривиальным решением системы (1.8.8). Если $u(x,y)=[H(x,y)]^{1/(1-k)}$ также удовлетворяет системе (1.8.8), то она будет частным решением системы. В противном случае убедимся, в том, что система (1.8.8) кроме тривиального, других решений не имеет. Допустим, что условие совместности *(N_{25})* выполняется тождественно. Считая $a(x,y)$ в (1.8.8) конкретно-заданной функцией, из *(N_{25})* имеем:

$$b(x,y)=(x-x_0)^n\left[\beta(y)+\int_0^x\frac{a'_y(t,y)}{(t-x_0)^n}\,dt\right],\ h(x,y)=(x-x_0)^n\gamma(y)\,e^{(1-k)}\int_0^x\frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}\,dt,$$

(1.8.9)

где $\beta(y),\ \gamma(y)$- некоторые вполне определенные функции. При этом, данная система преобразуется к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n}u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left[\beta(y)+\int_0^x\frac{a'_y(t,y)}{(t-x_0)^n}\,dt\right]u+\gamma(y)\exp\left\{(1-k)\int_0^x\frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}\,dt\right\}u^k.$$

Условие совместности этой системы выполняется тождественно, и в результате её интегрирования, будем иметь:

$$u(x,y)=e^{B(y)+A(x,y)}\left[C+(1-k)\int_0^x\gamma(\tau)\,e^{(k-1)B(\tau)}d\tau\right]^{\frac{1}{1-k}},\qquad(1.8.10)$$

где $B(y)=\int_0^y\beta(\tau)d\tau,\quad A(x,y)=\int_0^x\frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}dt$.

Аналогично предыдущим случаям, легко убедимся, что если $a(x,y),b(x,y),h(x,y)$ удовлетворяют условию *(M_2)*, а также в системе (1.8.9) при $n<1,\quad A(x,y)\le 0$, полученное решение системы формулой (1.8.8), всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным. Если же в (1.8.9) $n\ge 1$, и $A(x,y)>0$

тогда решение системы формулой (1.8.10) в D_0 будет непрерывным, а в точках линии $\Gamma_1 : x = x_0$ имеет особенности экспоненциального вида по переменной *x*.

Теорема 1.21. *Пусть в п.д.- системе (1.8.8)* $a,b,h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$ *. Если условие совместности (*N_{25}*) выполняется, но не тождественно, тогда она кроме тривиального решения* $u = 0$*, может иметь некоторое частное решение, либо кроме тривиального других решений не имеет. Для тождественного выполнения условия совместности системы (1.8.8) необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(x,y)$, $h(x,y)$, *ñ* $a(x,y)$, *были взаимосвязаны формулами (1.8.9). При этом, система (1.8.8) разрешима и многообразие ее решений определяется явной формулой (1.8.10).* *Если* a,b,h *удовлетворяют условию малости (*M_2*) и в системе (1.8.8)* $n < 1$*, то решение системы всюду в* $\overline{D}$ *будет непрерывным. Если же в этой системе* $n \geq 1$*, то решение системы в* D_0 *- будет непрерывным, а в точках линии* $\Gamma_1 : x = x_0$ *имеет особенности экспоненциального порядка.*

1.8.4. Для п.д.- системы:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n} u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y)}{(y-y_0)^n} u + \frac{h(x,y)}{(y-y_0)^n} u^k, \quad (k, n \geq 0) \qquad (1.8.11)$$

где $a,b,h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - (\Gamma_1 + \Gamma_2)$. Если для системы (1.8.11) будут выполнены условия $\lim\limits_{y \to y_0} \left((y-y_0)^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \lim\limits_{y \to y_0} \left((y-y_0)^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$, то необходимо $a(x,y_0) = a_0 = 0, b(x,y_0) = b_0 = 0, h(x,y_0) = 0$. Условие совместности будет представлено в виде:

$$P_1(x,y)u + Q_1(x,y)u^k = 0, \qquad (N_{26})$$

$$P_1(x,y)=\frac{b_x}{(y-y_0)^n}-\frac{a'_y}{(x-x_0)^n},\quad Q_1(x,y)=\frac{h'_x}{(y-y_0)^n}+(k-1)\frac{ah}{(x-x_0)^n(y-y_0)^n},$$

Если условие (N_{26}) выполняется, но не тождественно, тогда решая его как алгебраическое уравнение, получим

$$u(x,y)=0,\quad u(x,y)=\left[H_2(x,y)\right]^{\frac{1}{1-k}},\quad H_2(x,y)\in C^1(\overline{D}).$$

Аналогично предыдущим случаям, получим, что система (1.8.11) кроме тривиального решения $u(x,y)=0,$ может иметь некоторое частное решение. Пусть в системе (1.8.11) функции $a(x,y), b(x,y), h(x,y)$ удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned} &a(x,y)=\ o((x-x_0)^{n-\lambda}),\ b(x,y)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),\\ &h(x,y)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),\ (0\le\lambda<1). \end{aligned} \qquad (M_2)$$

Тогда при тождественном выполнении условий (N_{26}) , система (1.8.11) во всей области $\overline{D}$ имеет непрерывное решение. Допустим, что условие (N_{26}) выполняется тождественно, т.е. $P(x,y)=0,\ Q(x,y)=0$. Из этих двух равенств, считая $a(x,y)$ данной функции, сможем определить функции вида $b(x,y),\quad h(x,y),$ ñ $a(x,y),$ следующими формулами:

$$b(x,y)=(y-y_0)^n(\beta(y)+A_y(x,y)),$$

$$h(x,y)=(y-y_0)^n\gamma(y)\,e^{(1-k)A(x,y)},\ A(x,y)=\int_0^x\frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}dt\ . \qquad (1.8.12)$$

Действительно при этих значениях функции $b(x,y),\ h(x,y),$ условие совместности системы (1.8.11) выполняется тождественно, причем, во втором уравнении системы особенность по переменной y в точках Γ_2 устраняется, а ее решение принимает вид формулы (1.8.12) из предыдущего пункта. Причем, это решение во всей области $\overline{D}$ по переменной y, а по переменной x в D_0 является непрерывным, в точках линии $\Gamma_1: x=x_0$ при $0\le n<1$ также

непрерывны, а при $n \geq 1$, соответственно, имеет особенности степенного порядка и для исходной системы (1.8.11) и удовлетворяет условиям теоремы предыдущего пункта.

§ 1.9. О поведении решений одного класса нелинейных п.д.- систем на линиях вырождения плоскости

1.9.1. Теперь будем рассматривать более общую, чем предыдущим, п.д.-систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n} m(y,u), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{(x-x_0)^n}, \quad (n \geq 0) \tag{1.9.1}$$

где $a, m, b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \{(x,y) |\ \delta_1 \leq y \leq \delta_2,\ 0 \leq x < x_0\}$.

Прежде чем решить систему (1.9.1), проверим её поведение на линии их вырождения. При ограниченности производных от искомых функций, переходим к пределу в системе (1.9.1) при $x \to x_0$, либо стремлении u'_x, u'_y к нулю до порядка менее чем *(n-1)*-го, следующим образом (см. [283]-[292])

$$\lim_{x \to x_0} \left((x-x_0)^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a(x_0, y) m(y,u), \quad \lim_{x \to x_0} \left((x-x_0)^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) = b(x_0, y, u). \tag{M_0}$$

Если считать, что значение этих пределов равна нулю, то получим $m(y,u) = 0, \quad b(x_0, y, u) = 0$. Из этих двух равенств получим $u = h_i(y), (i = 1,2)$. Если хотя бы одна из этих функции удовлетворяет систему (1.9.1), то она считается некоторым частным решением системы. Это означает, что данная система на линии вырождения, возможно, может иметь некоторые частные решения, либо такие решения отсутствуют.

Условием совместности системы (1.9.1) будет:

$$\frac{b'_x}{(x-x_0)^n} + \frac{amb'_u}{(x-x_0)^{2n}} = \frac{(am'_u + n(x-x_0)^{n-1})b}{(x-x_0)^{2n}} + \frac{(a'_y m + am'_y)}{(x-x_0)^n}. \tag{N_{27}}$$

Допустим, что условие (N_{27}) выполняется, но не тождественно, тогда из этого соотношения имеем некоторую функцию $u = h(x, y)$. Если эта функция удовлетворяет систему (1.9.1), то она будет частным решением системы. В противном случае, система (1.9.1) не совместна.

Условие совместности (N_{27}) выполняется тождественно, если при конкретно заданных $a(x, y)$, $m(x, y)$, функция $b(x, y, u)$ принимает следующий вид:

$$b(x, y, u) = \left\{A'_y(x, y) - M'_y(y, u) + f\left[y; M(x, y) - A(x, y)\right]\right\}(x - x_0)^n \, m(y, u) \,, \quad (1.9.2)$$

где $A(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y)}{(t - x_0)^n} dt$, $M(y, u) = \int_{u_0}^u \frac{d\zeta}{m(y, \zeta)}$, $f(y; M - A)$ - вполне определенная функция, выражающаяся через функции a, m, b - формулой :

$$f(y; M - A) = \frac{b(x, y, u)}{(x - x_0)^n \, m(y, u)} + M'_y(x, y) - A'_y(x, y). \quad (1.9.3)$$

С учетом значения функции $b(x, y, u)$, из (1.9.3) условие (N_{27}) выполняется тождественно. Проинтегрируем первое уравнение системы (1.9.1) по переменной x, считая y - независимым параметром, при этом заменяем: $M(y, u) - A(x, y) = \psi$, $\psi = \psi(y)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя обе части последнего равенства по переменной y, подставим её результат во второе уравнение системы (1.9.1), и в результате, получим о.д.у. вида (1.3.4), где функция $f(y, \psi)$ определяется формулой (1.9.3). Если задача Коши для о.д.у. (1.3.4) имеет решение, тогда п.д.- система (1.9.1) (с учетом (1.9.2)), также разрешима, и многообразие ее решений определяется явной формулой:

$$u(x, y) = M^{-1}\left[y; \; A(x, y) + \psi(c, y)\right], \qquad u(x, y) = M^{-1}\left[y; \; A(x, y) + \psi(u_0, y)\right] \quad (1.9.4)$$

Поскольку $A(x,y)=\int_0^x \frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}dt$, при $x=x_0$ имеет особенности различного порядка, точнее говоря, при $n<1$ всюду в $\overline{D}$ - непрерывно, при $n=1$ и $n>1$, соответственно имеет особенности логарифмического порядка и ($n-1$)- го порядка, следовательно, решение исходной системы в зависимости функции M^{-1} может иметь особенности выше указанного порядка.

Теорема 1.22. *Пусть в п.д.- системе (1.9.1)* $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, D_0 *- та же область, но без точки линии* $\tilde{A}_1|\,x=x_0$ *. Для того, чтобы условие совместности* (N_{27}) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,u)$ *из системы (1.9.1) принимала вид (1.9.4). При этом, если о.д.у. (1.3.4) с учетом значения функции* $f(y,\psi)$ *из формулы (1.9.2) имеет решение, тогда система (1.9.1) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.9.4). Причем этого вида решение данной системы, при* $n<1$ *всюду в* $\overline{D}$ *является непрерывным, а при* $n=1$ *и* $n>1$ *являясь в* D_0 *- непрерывным, в точках линии* $x=x_0$ *соответственно имеет особенности логарифмического и* $(n-1)$ *-го порядка. Если же* $a(x,y)$ *на окрестности особой линий вырождения* $x=x_0$ *удовлетворяет условию (*M_0*), то решение системы (1.9.1) всюду в области* $\overline{D}$ *будет непрерывным.*

1.9.2. Далее, по аналогии п.д.- системы (1.9.1) рассмотрим систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n}m(y,u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{(y-y_0)^n},\quad (n\geq 0) \tag{1.9.5}$$

где $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$. Условие совместности системы (1.9.5) имеет вид:

$$\frac{b'_x}{(y-y_0)^n}+\frac{am}{(x-x_0)^n\,(y-y_0)^n}b'_u=\frac{am'_u}{(x-x_0)^n\,(y-y_0)^n}b+\frac{a_y m+am'_y}{(x-x_0)^n},\qquad (N_{28})$$

Если условие совместности (N_{28}) выполняется, но не тождественно, тогда решая (N_{28}) (в силу теоремы о неявной функции), относительно переменной ***u,*** получим; $u=\varphi(x,y)$. Если полученная функция удовлетворяет уравнениям системы (1.9.5), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.9.5) несовместна. Допустим, что условие (N_{28}) всюду в $\overline{D}$, кроме точки линий $x=x_0$, $y=y_0$ выполняется тождественно. Это требование выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда:

$$b(x,y;u)=\left\{A'_y(x,y)-M'_y(x,y)+f\left[y;\ M(y,u)-A(x,y)\right]\right\}(y-y_0)^n\ m(y,u),$$

где функции $A(x,y)$, $M(y,u)$ соответственно выражаются через функции $a(x,y)$, $m(y,u)$. Далее интегрируя первое уравнение системы (1.9.5) по переменной x, заменяя $M(x,y)-A(x,y)=\Psi$, $\psi=\psi(y)$, и дифференцируя по переменной y, подставим ее значения в систему (1.9.5), получим о.д.у. вида (1.3.4), где $f(y,\psi)$ определяется по формуле (1.9.6). Если о.д.у. (1.3.4), имеет решение, то п.д.- система (1.9.5) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.9.4). При этом, для системы (1.9.5) справедлива теорема 1.21 и замечание к этой теореме о гладкости решений системы (1.9.5) в области D_0, а точнее в особых точках линий $x=x_0, y=y_0$.

1.9.3.Рассмотрим п. д - систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{(y-y_0)^n}m(y,u),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{(y-y_0)^n},\qquad (1.9.6)$$

где $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, D_0 - та же область $\overline{D}$, только без точки линий $y=y_0$. Заметим, что если в системе (1.9.6) $a(x,y)=o((y-y_0)^{n-\lambda}$,

$b(x,y,u)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),(0\le\lambda<1)$ тогда при тождественном выполнении условий совместности, существует непрерывное в $\overline{D}$ решение системы.

Если для системы (1.9.6) выполняются условия (M_0), то есть $\lim\limits_{y\to y_0}\left((y-y_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ \lim\limits_{y\to y_0}\left((y-y_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$, тогда аналогично [112]-[113], из (1.9.6) будем иметь; $a(x,y_0)=a_0=0,\ m(y_0,u)=0,\ b(x,y_0,u)=0$. Из этих равенств имеем $u=const,\ u=h(x)$. Эти найденные значения искомой функции будут частными, либо особыми решениями системы. А также если функции a,b,m удовлетворяют условию малости, тогда система имеет только лишь вполне определённое решение. Для нахождения многообразия решений системы, требуется тождественное выполнение условие совместности системы исходной системы. Условие совместности п.д.- системы (1.9.6) примет вид:

$$\frac{b'_x}{(y-y_0)^n}+\frac{am}{(y-y_0)^{2n}}b'_u=\frac{am'_u}{(y-y_0)^{2n}}b+\frac{a_y m+am'_y}{(y-y_0)^n}-\frac{nam}{(y-y_0)^{n+1}},\qquad (N_{29})$$

Если условие совместности (N_{29}) выполняется, но не тождественно, то решая его как функциональное уравнение, получим $u=H(x,y),$ с регулярной, либо сингулярной в точках линии $x=x_0,\ y=y_0$ функцией. Если эта функция удовлетворяет каждое уравнение системы (1.9.6), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.9.6) несовместна.

Допустим, что условие (N_{29}) для системы (1.9.6) выполняется тождественно (кроме точки линий $x=x_0,\ y=y_0$ в области $\overline{D}$). В результате интегрирования первого уравнения системы (1.9.6) по переменной x, считая y - независимым параметром, получим:

$$M(y,u)-\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}=\psi(y),\quad \left(A(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}a(t,y)dt\right). \tag{1.9.7}$$

Дифференцируя обе части (1.9.7) по переменной y, подставим её результат во второе уравнение системы (1.9.6), и получим о.д.у. вида:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=M_y(y,u)+\frac{b(x,y,u)}{(x-x_0)^n\ m}+\frac{nA(x,y)}{(y-y_0)^{n+1}}-\frac{A'_y(x,y)}{(y-y_0)^n}\quad . \tag{1.9.8}$$

Правую часть формулы (1.9.8) обозначим через вполне определенную функцию $f(y,\psi)$, где $\psi(y)$ - определяется из формулы (1.9.7). Тогда из равенства

$$M'_y(y,u)+\frac{b(x,y,u)}{(x-x_0)^n\ m(y,u)}+\frac{nA(x,y)}{(y-y_0)^{n+1}}-\frac{A'_y(x,y)}{(y-y_0)^n}=f\left[y;\ M(y,u)-\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right]\quad ,$$

имеем

$$b(x,y,u)=\left\{\frac{A'_y(x,y)}{(y-y_0)^n}-\frac{nA(x,y)}{(y-y_0)^{n+1}}-M'_y(y,u)+f\left[y;\ M(y,u)-\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right]\right\}(x-x_0)^n\ m(y,u)$$

.(1.9.9)

Таким образом, нами получено, что взаимосвязь между функциями $b(x,y,u)$ с $a(x,y)$, $m(x,y)$, определяется формулой (1.9.9), которая обеспечит необходимое условие тождественного выполнения условий (N_{29}).

Далее интегрируя о.д.у. (1.9.8), считая $\psi=\hat{O}(y,C)$ либо $\psi=\hat{O}(y;u_0)$ общим или единственным решением, получаем многообразие решений исходной системы следующей формулой:

$$M(y,u)=\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}+\hat{O}(y;C),\ \text{èëè}\quad u(x,y)=M^{-1}\left[y;\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}+\hat{O}(y;u_0)\right]. \tag{1.9.10}$$

Теорема 1.23. *Пусть в п.д.- системе (1.9.6)* $a,m,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),u\in C^2(D_0)$, $D_0=\{(x,y)\,|\,\alpha\le x\le\beta,0\le y<y_0\}$. *Если условие* (N_{29}) *выполняется, но не тождественно, тогда система (1.9.6) может иметь*

некоторое частное решение. Для тождественного выполнения условий (N_{29}) *необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,u)$ *имела вид (1.9.9). Если задача Коши для о.д.у. (1.9.8) имеет решения, тогда исходная система также в области* D_0 *разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.9.10). При этом решение системы (1.9.6) во всей* $\overline{D}$ *по переменной* x *, является непрерывным, а по переменной* y *, в точках линии* $y = y_0$ *имеет особенности* n *-го порядка.*

1.9.4. Будем рассматривать п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n}u + \frac{h(x,y)}{(x-x_0)^n}u^k, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x,y,u) \ , \qquad (1.9.11)$$

где $a,b,h \in C^1(\overline{D} \times R^1),\ u \in C^2(D_0),\ D_0 = \{(x,y) | \alpha \le y \le \beta,\ 0 \le x < x_0\}$. Условием совместности п.д.- системы (1.9.11) будет:

$$(x-x_0)b'_x + (au - hu^k)b'_u = (a + k\ h\ u^{k-1})b + (a'_y u + h'_y u^k). \qquad (\mathrm{N}_{30})$$

Если условие совместности (N_{30}) выполняется, но не тождественно, тогда в силу теоремы существования о неявных функциях, имеем $u = H(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.9.11) , то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.9.11) несовместна.

Допустим, что для системы (1.9.11) выполняется условии (M_0), то есть

$\lim\limits_{x \to x_0}\left((x-x_0)^n \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,\ \lim\limits_{x \to x_0}\left((x-x_0)^n \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. Тогда из правых частей системы (1.9.11) будем иметь; $a(x_0,y) = a_0 = 0,\ h(x_0,y) = h_0 = 0,\ u = 0,\ b(x_0,y,u) = 0$. Откуда получим: $u = 0,\ u = \alpha(y)$. Эти найденные значения функции $u(x,y)$ будут только лишь частными решениями исходной системы. С другой стороны, допустим, что условие совместности системы выполняется, но не тождественно. Тогда из этого соотношения сможем найти некоторое частное

решение системы, либо такого решения нет. Таким образом, в этих случаях мы можем найти только частное решение системы. Но этих предположений для нахождения многообразия решений системы недостаточно. Допустим, что в системе (1.9.11) $a(x,y),\ h(x,y)$ - считаются некоторыми вполне определенными функциями. Обозначая, $\int\limits_0^x \frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}dt = A(x,y),$ умножим обе части уравнений системы (1.9.11) на $(1-n)\exp\{(k-1)\,A(x,y)\}u^{-k}$. Объединив к обеим частям равенства п.д.- системы (1.9.11) функцию $(k-1)\,A'_y(x,y)\,e^{(n-1)\,A(x,y)}\,u^{1-n}$, имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left[\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{1-k}\right] = (1-k)\,\frac{h(x,y)}{(x-x_0)^n}\exp\{(k-1)A(x,y)\} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{1-k}\right] = (k-1)\,A'_y(x,y)\exp\{(k-1)A(..)\}u^{1-k} + (1-k)\exp\{(k-1)A(.)\}u^{-k}\ b(x,y,u) \end{cases}$$

В этой системе, делая замену вида $\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{1-k} = v,$ где $v = v(x,y)$ новая неизвестная функция, обозначим в правых частях последней системы:

$$\begin{cases} (1-k)\,h(x,y)\exp\{(k-1)A(x,y)\} = \alpha(x,y) \\ (k-1)\,A'_y(x,y)\,v - (1-k)\,v^{\frac{k}{k-1}}\,e^{A(x,y)}\,b\left[x;y;e^{A(x,y)}\,v^{\frac{1}{1-k}}\right] = \beta(x,y,v) \end{cases}. \quad (1.9.12)$$

Тогда система (1.9.12) примет следующий вид:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha(x,y)}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \beta(x,y,v) \qquad (1.9.13)$$

Аналогично предыдущим пунктам, условие совместности системы (1.9.13) имеет вид (см. [271]):

$$\beta'_x + \frac{\alpha\,\beta'_v}{(x-x_0)^n} = \frac{\alpha'_y}{(x-x_0)^n}, \quad (x-x_0)^n\beta^x + \alpha\,\beta'_v = \alpha'_y. \qquad (\mathrm{N}_{31})$$

Пусть условие совместности (N_{31}) выполняется, но не тождественно. Тогда из (N_{33}) сможем определить функцию v в виде $v = Q(x, y)$. Далее переходя к прежней переменной, имеем: $u(x, y) = e^{A(x,y)} \left[Q(x, y)\right]^{1/(1-k)}$. Если эта функция удовлетворяет п.д.- системе (1.9.13), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.9.13) несовместна. Так как $A(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y)}{(t - x_0)^n} dt,$ то эта функция и функция, $u(x, y)$ как решение системы в $\overline{D}$ при $n < 1$ будут непрерывными. Также, если для всех $0 \le x < x_0$, $a(x, y) < 0$, то $\exp\{A(x, y)\}$ - будет сходящимся интегралом, поэтому $u(x, y)$ в $\overline{D}$ - непрерывна. Если же $a(x, y) > 0$ то при $n \ge 1$, $u(x, y)$ имеет особенности степенного порядка. Для того, чтобы условие (N_{31}) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы $\beta(x, y, v)$ в системе (1.9.13) имела вид:

$$\beta(x, y, v) = B'_y(x, y) + f\left[y; v - B(x, y)\right] \quad B(x, y) = \int_0^x \frac{\alpha(t, y)}{(t - x_0)^n} dt,$$

Затем подставив значение $\beta(x, y, v)$ из последнего равенство в системе (1.9.13) и с учетом замены $u^{1-k} = v\, e^{(1-k)\, A(x,y)}$, будем иметь:

$$b(x, y, u) = \frac{\partial A}{\partial y} u + \frac{1}{1-k} \left\{ \frac{\partial B}{\partial y} + f\left[y; \exp\{(k-1)A(x, y)\} u^{1-k} - B(x, y)\right] \right\} \exp\{(1-k)A(x, y)\} u^k$$

.(1.9.14)

При этом значении функций $b(x, y, u)$ и замены $\exp\{(k-1)A(x, y)\} u^{1-k} - B(x, y) = \psi$, где $\psi = \psi(y)$ новая неизвестная функция, процесс интегрирования системы (1.9.13) сводится к интегрированию о.д.у. вида (1.9.8), в котором функцию $f(y, \psi)$ можно

определить из формулы (1.9.14). Если задача Коши и регулярное о.д.у. (1.9.8) имеют решения, то исходная система также разрешима и многообразие ее решений, определяется формулой:

$$u(x,y)=e^{A(x,y)}\left[B(x,y)+\psi(y,C)\right]^{1/(1-k)}. \qquad (1.9.15)$$

Заметим, что по формуле (1.9.15) можно определить непрерывное решение системы (1.9.11) вплоть до границы области $\overline{D}$, по линии $x=x_0$. Потому что, функция $f(y,\psi)$ - непрерывна по переменной y.

Теорема 1.24. *Пусть в п.д.- системе (1.9.11)* $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-\Gamma_1.$ *Для тождественного выполнения условия совместности (N_{30}) , необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,u)$ *имела вид (1.9.14). Если о.д.у. (1.9.8) с учетом значения функции* $f(y,\psi)$, *определяющейся по формуле (1.9.14), имеет решение, тогда система (1.9.11) также разрешима, и многообразие ее решений определяется формулой (1.9.15). Причем это решение по переменной* y *- всюду в* $\overline{D}$, *а также по переменной* x *- при* $x\in[0,x_0)$, $A(x,y)<0$ *-всюду в* $\overline{D}$ *при* $A(x,y)>0$ *è* $n\ge 1$ *решение системы в* D_0 *непрерывно, а в точках линий* $x=x_0$ *имеет особенности экспоненциального порядка.*

1.9.5. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y)}{(x-x_0)^n}u+\frac{h(x,y)}{(x-x_0)^n}u^k,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{(x-x_0)^n}, \qquad (1.9.16)$$

где $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0$- та же область, что и выше. Если в системе (1.9.16) k=1, либо $a=h$, то этой системе можно применять предыдущие результаты, с п.1.9.1. Условие совместности системы (1.9.16) будет:

$$(x-x_0)b'_x+(au+hu^k)b'_u=\left(\frac{n}{x-x_0}a+k\,h\,u^{k-1}\right)b+(x-x_0)^n\,(a'_y u+h'_y u^k). \qquad (N_{32})$$

Учитывая результаты в [269]-[273], всюду в области $\overline{D}$, находим непрерывное решение системы (1.9.16). Для этого, прежде всего будем требовать выполнение условия (M_0), то есть,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left((x-x_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left((x-x_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0$. При выполнении этих условий, имеем

$a(x_0,y)=a_0=0, h(x_0,y)=h_0=0, u=0, b(x_0,y.u)=0$. Из последнего соотношения будем иметь $u=p(y)$. В этом случае, $u=0, u=p(y)$ будут только лишь частными решениями данной системы. Если в системе (1.9.16) функции a,h,b - удовлет-воряют условию малости, то также получим некоторое решение системы.

Допустим, что условие *(N_{32})* выполняется, но не тождественно. Тогда решая *(N_{32})* относительно $u=u(x,y)$, в силу теоремы о неявных функций, будем иметь: $u=Q(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.9.16), то она может быть некоторым частным решением системы. Иначе говоря, система (2.128) – несовместна. Допустим, что условие *(N_{32})* выполняется тождественно. Наша цель заключается в том, что при каких значениях функции $b(x,y,u)$ условие *(N_{32})* может быть выполнено тождественно, если $a(x,y),\ h(x,y)-$ считаются заданными функциями.

Аналогично п. 16, преобразуем систему (1.9.16). В этой системе совершив замену:

$$\begin{cases} e^{(k-1)A(x,y)}\,u^{1-k}=v, \quad A(x,y=\int_0^x \frac{a(t,y)}{(t-x_0)^n}\,dt, \\ (1-k)\,\frac{h(x,y)}{(x-x_0)^n}\exp\{(k-1)A(x,y)\}=\alpha(x;y) \\ (k-1)\,A'_y(x,y)\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{1-k}+\frac{(1-k)}{(x-x_0)^n}\exp\{(k-1)A(x,y)\}u^{-k}b(x,y,u)=\beta(x,y,v), \end{cases} \quad (1.9.17)$$

получим более простого вида систему (1.9.17). В начале, из условия *(N32)* определим функцию $\beta(x,y,v)$ в виде:

$$\beta(x,y,v)=B'_y(x,y)+f\left[y;v-B(x,y)\right] \quad (1.9.18)$$

где f – вполне определенная как $\beta(x,y,v)$ - функция. Затем подставив значение $\beta(x,y,v)$ во второе равенство последней системы и затем, переходя к прежней переменной, определим функцию $b(x,y,u)$ следующей формулой:

$$b(x,y,u)=$$
$$=\left\{\frac{\partial A}{\partial y}u+\frac{1}{1-k}\left[\frac{\partial B}{\partial y}+f\left[y;e^{(k-1)A(x,y)}\,u^{1-k}-B(x,y)\right]\right]e^{(1-k)\,A(x,y)}\,u^{k}\right\}(x-x_0)^n \quad (1.9.19)$$

.

Итак, при таком значении функции $b(x,y,u)$ из (1.9.19), условие *(N32)* выполняется тождественно, и ее интегрирование приводится к о.д.у. вида (1.9.8), где функция $f(y,\psi)$ определяется из (1.9.19). Если это о.д.у. (1.9.8) имеет решение, то система (1.9.16) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.9.15). Заметим, что если правая часть второго уравнения п.д.- системы (1.9.16) имеет вид: $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,u)}{(y-y_0)^n}$, то выполняя предыдущие действия, для новой системы определим функцию $b(x,y,u)$, обеспечивающую тождественное выполнение условия совместности (*N32*) в виде:

$$b(x,y,u) =$$

$$= \left\{ \frac{\partial A}{\partial y} u + \frac{1}{1-k} \left[\frac{\partial B}{\partial y} + f\left[y; e^{(k-1)A(x,y)} u^{1-k} - B(x,y) \right] \right] e^{(1-k)A(x,y)} u^{k} \right\} (y - y_0)^n. \quad (1.9.20)$$

И тогда, решение системы определяется в виде формулы аналогичной (1.9.15). Легко убедимся, что при значении функции $b(x,y,u)$ формулами (1.9.19) и (1.9.20), условие совместности (N_{32}) выполняется тождественно. Следовательно, интегрирование системы (1.9.16) приводится к интегрированию о.д.у. вида (1.9.8), где функция $f(y,\psi)$ определяется по формуле (1.9.19), либо (1.9.20). Если это регулярное о.д.у. имеет решение, тогда система (1.9.16) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.9.15), где $\psi = \hat{O}(y,C)$ или $\psi = \hat{O}(y,u_0)$ определяет многообразие решений, либо единственное решение задачи Коши для о.д.у. (1.9.8). Аналогично предыдущим случаям, можем определить, что в области D_0 - вся решения, а в области $\overline{D}$, при $A(x,y) < 0$, а также при $n < 1$ решение системы (1.9.16) может быть непрерывным. При других знаках: $A(x,y) < 0$ $((x,y) \in \overline{D})$ и $n \geq 1$, решение системы на границе Γ имеет особенности степенного порядка. Аналогично предыдущим, теорема 23 верна и для условий нашей системы (1.9.16).

1.9.6. Теперь рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x,y)}{(y-y_0)^n} u + \frac{h(x,y)}{(y-y_0)^n} u^k, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y,u)}{(x-x_0)^n}, \ (n \geq 0), \quad (1.9.21)$$

где $a,b,h \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - (\Gamma_1 + \Gamma_2)$. Допустим, что для системы (1.9.21) выполняются условия (M_0), то есть $\lim_{y \to y_0} \left((y-y_0)^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \lim_{x \to x_0} \left((x-x_0)^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$. При выполнении этих соотношений,

из (1.9.21) будем иметь $a(x,y_0)=a_0=0, h(x,y_0)=h_0=0,\ u=0,\ b(x_0,y,u)=0$. Откуда получим: $u=0, u=p(y)$. Эти найденные функции будут некоторыми частными, либо особыми решениями системы. Условие совместности системы (1.9.21) будет:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{(x-x_0)^n}\right)+\left(\frac{a\,u}{(y-y_0)^n}+\frac{h\,u^k}{(y-y_0)^n}\right)\frac{b'_u}{(x-x_0)^n}=$$
$$=\frac{a+k\,h\,u^{k-1}}{(x-x_0)^n\,(y-y_0)^n}\,b+\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{(y-y_0)^n}\right)u+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{(y-y_0)^n}\right)u^k \qquad (N_{33})$$

Допустим, что условие (N_{33}) выполняется, но не тождественно, тогда в силу теоремы о неявной функции [251], из этого функционального соотношения, будем иметь: $u=\varphi(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет систему (1.9.21), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.9.21) – несовместна.

Если функции a,b,h - удовлетворяют условию малости:

$$a(x,y)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),\qquad h(x,y)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),$$
$$b(x,y,u)=o((y-y_0)^{n-\lambda}),\quad (0\le\lambda<1), \qquad (M_1)$$

то при тождественном выполнении условий (N_{33}), многообразие решений системы (1.9.21) всюду в области $\overline{D}$, будет непрерывным.

Допустим, что функциональное равенство (N_{33}) считается, как линейное неоднородное уравнение относительно функции $b(x,y,u)$, а $a(x,y),\ h(x,y)$ считаются данными или известными функциями. Тогда аналогично предшествующим пунктам, решая (N_{33}), как линейное уравнение, относительно $b(x,y,u)$ получим:

$$b(x,y,u)=(x-x_0)^n\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right)u+$$

$$+(x-x_0)^n\left\{\frac{1}{1-k}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B(x,y)}{(y-y_0)^n}\right)+f\left[y;\exp\left((k-1)\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right)u^{1-k}-\frac{B(x,y)}{(y-y_0)^n}\right]\right)\exp\left((1-k)\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right)u^k\right\},\qquad(1.9.22)$$

где $A(x,y)=\int_0^x a(t,y)dt,\ B(x,y)=\int_0^x h(t,y)\exp\left\{(k-1)\frac{a(t,y)}{(y-y_0)^n}\right\}dt,\quad f(y,\psi)$ - вполне определенная, как и $b(x,y,u)$ - функция. Так как при этом, значения функции $b(x,y,u)$ условий (N_{33}) выполняется тождественно, поэтому интегрируя первое уравнение системы (1.9.22) по переменной x, как о.д.у. с параметром y, сделаем замену:

$$\exp\left\{(k-1)\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right\}u^{1-k}-\frac{B(x,y)}{(y-y_0)^n}=\psi,\quad(\psi=\psi(y)).\qquad(1.9.23)$$

Далее, дифференцируя обе части (1.9.23) по переменной y, подставим ее результат во второе уравнение системы (1.9.22), и с учетом (1.9.23) будем иметь о.д.у. вида (1.9.8), которое может иметь решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=\exp\left\{\frac{A(x,y)}{(y-y_0)^n}\right\}\left[B(x,y)+\psi(y,C)\right]^{\frac{1}{1-k}}.\qquad(1.9.24)$$

Теорема 1. 25. *Пусть в п.д.- системе (1.9.21)* $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-(\Gamma_1+\Gamma_2)$. *Если для системы (1.9.21) выполняются условия* (M_0), *и условие малости, то получим некоторое частное решение системы. Если условие совместности* (N_{33}) *выполняется, но не тождественно, тогда система (1.9.21) может иметь некоторое частное решение. Для тождественного выполнения условий совместности*

системы (1.9.21) необходимо и достаточно, чтобы функция $b(x,y,u)$ *имела вид (1.9.22). Если коэффициенты* a,b,h *удовлетворяют условию (*M_1*), то при тождественном выполнении условий (*N_{33}*), решение системы (1.9.21) во всей области* $\overline{D}$*, по обеим переменным* x,y *будет непрерывным. Если о.д.у. вида (1.9.8), с учетом значения функции* $f(y,\psi)$ *из (1.9.22) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.9.24). Причем полученное решение системы непрерывно по* x *- всюду в* $\overline{D}$*, а по* y *имеет особенности* n *-го порядка, если* $A(x,y)>0$ *и непрерывно, если* $A(x,y)\le 0$*, особенности экспоненциального порядка.*

§ 1.10. О формуле представления решений некоторых квазилинейных п.д.- систем с однородными правыми частями

1.10.1. Будем рассматривать п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a(x-x_0,y,u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=b\left(x,y,\frac{u}{x-x_0}\right), \qquad (1.10.1)$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\Gamma_1$, причем $a(x-x_0,y,u)$ однородная нулевого порядка по первой и третьей аргументам, то есть: $a(t(x-x_0),y,tu)=a(x-x_0,y,u)$. Делая замену, $u=(x-x_0)z$, преобразуем систему (1.10.1) к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a(1,y,z)-z}{x-x_0},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{b(x,y,z)}{x-x_0}, \qquad (1.10.2)$$

Допустим, что для системы (1.10.2) выполняются условия (M_0), то есть $\lim\limits_{x\to x_0}\left((x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\lim\limits_{x\to x_0}\left((x-x_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$. То из (1.10.2) имеем $a(1,y,z)-z=0,b(x_0,y,z)=0$. Из этих двух соотношений имеем $z=\alpha(y),z=f(y)$. Возможно, что хотя бы одна из них будет частным решением системы. Если условие совместности

системы (1.10.2) выполняется, но не тождественно, то получим некоторое другое частное решение системы, либо такое решение отсутствует. Условие совместности системы (1.10.2) выполняется тождественно, если функция $b(x,y,z)$ примет вид:

$$b(x,y,z)=(x-x_0)\cdot\left\{\frac{\partial A}{\partial y}+f\left[y;\,A(y,z)-\ln(x-x_0)\right]\right\}\cdot(a(1,y,z)-z). \qquad (1.10.3)$$

Отсюда легко определить функцию $f(y,v)$ в виде

$$f\left[y;\,A(y,v)-\ln|x-x_0|\right]=\frac{b(x,y,z)}{(x-x_0)(a-z)}+\frac{\partial A}{\partial y}\ . \qquad (1.10.4)$$

Интегрируем первое уравнение системы (1.10.2) по переменной χ , и делаем замену: $A(y,v)-\ln|x-x_0|=\psi,\quad (\psi\in\psi(y)-$новая неизвестная функция).

Дифференцируя обе части равенства (1.10.4) по переменной y, имеем:

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d\psi}{dy},\qquad \frac{d\psi}{dy}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{1}{a-z}\frac{b(x,y,z)}{(x-x_0)}=f(y,\psi)\ .$$

Если о.д.у. вида (1.9.8), то есть $\frac{d\psi}{dy}=f(y,\psi)$ имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=(x-x_0)\,A^{-1}\left[y;\ \ln|x-x_0|+\psi(C,y)\right], \qquad (1.10.5)$$

где $\psi=\psi(C,y)$ либо $\psi=\psi(u_0,y)$ - решение о.д.у. вида (1.9.8)

Теорема 1. 26. *Пусть в п.д.- системе (1.10.1)* $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\Gamma_1$, *причем* $a(x-x_0,y,u)$ - *однородная нулевого порядка по переменным* x,u . *Если для системы (1.10.2) условия (M₀) выполняются, то можем иметь некоторое частное решение системы. А также, если условие совместности системы (1.10.2) выполняется, но не тождественно, то*

получаем некоторое частное решение системы, либо такое решение отсутствует. Для тождественного выполнения условия совместности системы (1.10.2) необходимо и достаточно, чтобы функция $b\left(x, y; (x-x_0)^{-1}\cdot u\right)$ *имела вид (1.10.3). Если с учетом значения функции* $f(y,\psi)$ *из (1.10.3), о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, тогда п.д.- система (1.10.1) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.10.5). Причем полученное решение системы в зависимости от функции* A^{-1}*, может иметь логарифмическую особенность (в точках линии* $\Gamma_1 : x = x_0$*), либо всюду в* $\overline{D}$ *непрерывно.*

Заметим, что предыдущее утверждение верно и для п.д.- системы:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = b(x-x_0, y-y_0; u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a\left(x-x_0, y-y_0; (y-y_0)^{-1} u\right),$$

где функция $b(x-x_0, y-y_0, u)$ однородная нулевого порядка по переменным $y-y_0$ то есть $b\,(x-x_0, t(y-y_0)t\,u) = b(x-x_0, y-y_0, u)$.

1.10.2. Будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x-x_0)^{n-1} a\,((x-x_0)^n, y, u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b\left(x, y; (x-x_0)^{-n} u\right), \quad (n \geq 1) \qquad (1.10.6)$$

где $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \Gamma_1$. Причем функция $a\left((x-x_0)^n, y; u\right)$ однородная по первому и последним аргументам функции, то есть: $a\,(t\,(x-x_0)^n, y, t\,u) = a\left((x-x_0)^n, y, u\right)$. Заменяя, t на $\frac{1}{(x-x_0)^n}$, имеем: $a\left((x-x_0)^n, y, u\right) = a\,\left(1, y; (x-x_0)^{-n} u\right)$. Опять делаем замену вида: $u = (x-x_0)^n z$, и тогда система (1.10.6) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(1, y, z) - n\,z}{x-x_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(x-x_0)^n} b(x, y, z) \quad . \qquad (1.10.7)$$

Условие совместности этой системы, выполняется тождественно, если аналогично предыдущему, функция $b(x,y,z)$ примет вид:

$$b(x,y,z)=(x-x_0)^n\left\{-A'_y(y,z)+f\left[y;\ A(y,z)-\ln(x-x_0)\right]\right\}\left(a(1,y,z)-n\ z\right] \quad ,$$

(1.10.8)

где $A(y,z)=\int\limits_{z_0}^{z}\frac{d\zeta}{a(1,y,\zeta)-n\zeta}$, ($a\neq n\zeta$), f – произвольная функция.

Далее интегрируем первое уравнение системы (1.10.7) по переменной x, и делаем замену $A(y,z)-\ln(x-x_0)=\psi(y)$. Дифференцируя это равенство по переменной y, подставим результат во второе уравнение системы (1.10.7) и получим о.д.у. (1.9.8), где функция $f(y,\psi)$ определяется из формулы (1.10.8). Если о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=(x-x_0)^n\ A^{-1}\left[y;\ \ln(x-x_0)+\psi(C,y)\right], \qquad (1.10.9)$$

где $\psi(C,y)$- является решением о.д.у. (1.9.8).

Теорема 1.27. *Пусть в п.д.- системе (1.10.6)* $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\Gamma_1$, *причем функция* $a((x-x_0)^n,y,u)$ *- является однородной нулевого порядка. Если для системы (1.10.6) будут выполнены условия (M₀), то можем найти некоторое частное решение системы. А также если условие совместности системы выполняется, но не тождественно, тогда находится некоторое частное решение системы, либо такого решения нет. Для тождественного выполнения условий совместности системы (1.10.7), необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,(x-x_0)^{-n}u)$ *имела вид (1.10.8). Если о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, тогда система (1.10.8) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой*

(1.10.9). Причем полученное решение системы (1.10.6) в зависимости от обратной функции A^{-1} к A, всюду в $\overline{D}$ будет непрерывным.

1.10.3. Будем рассматривать п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot a(xy, y; u), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot b\big(x, y; u/(xy)\big), \tag{1.10.10}$$

где $a, b \in C^1(\overline{D} \times R^1),\ u \in C^2(D_0),\ D_0 = \overline{D} - \Gamma_2$. Причем $a(txy, y; tu) = a(xy, y; u)$, т.е. функция $a(xy, y; u)$ однородная нулевого порядка по (xy, u). Совершая замену $u = x\ y\ z,$ где $z = z(x, y)$ новая неизвестная функция, преобразуем систему (1.10.10) к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a(1, y; z) - z}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y; z), \tag{1.10.11}$$

Условие совместности системы (1.10.11) выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда:

$$b(x, y, z) = \big\{ -A'_y(y, z) + f\big[y; A(y, z) - \ln x\big] \big\} \cdot \big(a(1, y, z) - z\big),$$

(1.10.12)

$A(y, z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{a(1, y, \zeta) - \zeta}$, $f(y, \psi)$ – вполне определенная, как и $b(x, y, z), a(1, y, z)$ - функция. Интегрируя первое уравнение системы (1.10.11) по переменной x, считая y - независимым параметром, получим:

$$A(y, z) - \ln x = \psi, \quad (\psi = \psi(y) - \text{новая неизвестная функция}).$$

Продифференцировав последнее соотношение по переменной y, подставим результат во второе уравнение системы (1.10.11) и в результате, получаем о.д.у. вида (1.9.8), где функция $f(y, \psi)$ определяется из формулы (1.10.12). Если о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, то система (1.10.11) и заведомо система (1.10.10) интегрируется явно, и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y)=x\cdot y\cdot A^{-1}\left[y;\ \ln x+\psi(y,C)\right]. \qquad (1.10.13)$$

Теорема 1.27. *Пусть в п.д.- системе (1.10.10)* $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-\Gamma_2,u$ *функция* $a(x\,y,y,u)$ *- однородная нулевого порядка по первому и третьему аргументам. Для тождественного выполнения условия совместности системы (1.10.11), необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,z)$ *имела вид (1.10.12). Если с учетом функции* $f(y,z)$ *определяющее из (1.10.12) о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, тогда система (1.10.12) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.10.13). Причем такого вида решения системы, во всей области* $\overline{D}$ *является непрерывным.*

Заметим, что если в системе (1.10.10) $a(xy,y;u)$ - является обобщенно-однородной, то также для него будет справедливой предыдущая теорема 1.27.

1.10.4 Будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x^{k-1}\cdot a(x,y,u),\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=x^k\cdot b\left(x,y;x^{-k}u\right)\ , \qquad (1.10.14)$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-\Gamma_1$. Условием совместности системы (1.10.14) будет:

$$xb'_x+\left(a-k\ x^{-k}u\right)b'_z=\left(x^k\ a'_u-k\right)b+a'_y,\qquad z=x^{-k}u\,. \qquad (N_{36})$$

Если условие *(N_{36})* выполняется, но не тождественно, то в силу теоремы о неявной функции [251], имеем: $u=h(x,y)$. Если эта функция удовлетворяет системе (1.10.14), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.10.14) – несовместна. Заметим, что в системе (1.10.14) $a(x,\ y,u)$ - является однородной относительно,

x, u то есть $a(txy, y, tu) = a(x, y, u)$. Совершая замену: $u = x^k\ z;\quad \frac{\partial u}{\partial x} = k\ x^{k-1} z + x^k\ \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^k\ \frac{\partial z}{\partial y}$ преобразуем систему (1.10.14) к виду:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}(a - k\ z),\quad \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \qquad (1.10.15).$$

.

Тогда условие совместности (N_{36}) примет вид:

$$x b'_x + (a - k\ z) b'_z = (a'_z - k) b + a'_y, \qquad (N_{37})$$

Условие (N_{37}) выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда:

$$b(x, y, z) = \{- A'_y(y, z) + f[y;\ A(y, z) - \ln x]\} \cdot (a - k\ z) \qquad (1.10.16).$$

При этом значении функции $b(x, y, z)$, условие (N_{37}) выполняется тождественно. Интегрируя первое уравнение системы (1.10.15), делаем замену:

$A(y, z) - \ln x = \psi$ ($\psi = \psi(y)$ – новая неизвестная функция).

Продифференцировав эту функцию по переменной y, подставим ее значение во второе уравнение системы (1.10.15) и с учетом значения функции $b(x\ y, u)$ из (1.10.16), получаем о.д.у. вида (1.9.8), в которой $f(y, \psi)$ определяется из формулой:

$$f(y,\psi) = \frac{b(x, y, z)}{a(1, y, z) - k\ z} + A'_y(y, z), \quad \text{где} \quad A(y, z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{a - k\zeta},\ (a\ (1, y, z) \neq kz) \qquad (1.10.17)$$

Если задача Коши для о.д.у. (1.9.8) , с учетом значения функции $f(y,z)$ из (1.10.17) имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x, y) = x^k \cdot A^{-1}[y;\ \ln x + \psi(y, u_0)], \qquad (1.10.18)$$

Причем полученное решение системы во всей области $\overline{D}$ является непрерывным.

Теорема 1.28. *Пусть в п.д.- системе (1.10.14)* $a,b,h \in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u \in C^2(D_0)$ *.Если условие совместности (N37) выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное решение системы, либо система (1.10.14) – несовместна. Для того, чтобы условие (N37) всюду в области* $\overline{D}$ *выполнялось тождественно необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,z)$ *в системе (1.10.15) имела вид (1.10.16) . Если задача Коши для о.д.у. (1.9.8) имеет решение, тогда исходная система (1.10.14) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.10.18). Причем полученное решение системы (1.10.14), всюду в* $\overline{D}$ *является непрерывным.*

1.10.5. Теперь будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^k}\,a(x^{k-1},y,u),\quad u'_y=\frac{1}{x^{k-1}}\,b\left(x,y,x^{k-1}u\right),\quad (k\ge 0)\ ,\qquad (1.10.19)$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-\Gamma_1,\ a(x^{k-1},y,u)$ - однородная нулевого порядка функции, относительно переменных x,u . Аналогично предыдущим пунктам, делая замену:

$x^{k-1}u=z,\ \ (z=z(x,y)),\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^{k-1}}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{(k-1)}{z^k},\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x^{k-1}}\frac{\partial z}{\partial y}$, преобразуем систему (1.10.19) к более упрощенному виду:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a(1,y,z)-(k-1)z}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=b(x,y,z)\qquad (1.10.20)$$

Условие совместности п.д. – системы (1.10.20) выполняется тождественно, если

$$b(x,y,z)=\left\{-A'_y(y,z)+f\left[y;A(y,z)-\ln x\right]\right\}\left(a(1,y,z)-(k-1)\,z\right),\ A(y,z)=\int_0^z\frac{d\zeta}{a(1,y,\zeta)-(k-1)\,\zeta}\ .(1.10.21)$$

Проинтегрировав первое уравнение системы (1.10.20), по переменной x, совершим замену $A(y,z)-\ln x=\psi,\quad \psi=\psi(y)$ _новая неизвестная функция. Продифференцировав это равенство по переменной y, подставим ее результат во второе уравнение системы (1.10.20) и с учетом (1.10.21), получаем о.д.у. вида (1.9.8). Если задача Коши для о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, тогда система (1.10.19), также разрешима и многообразие ее решений, при переходе к прежним переменным имеет вид:

$$u(x,y)=\frac{1}{x^{k-1}}\,A^{-1}\left[y;\ \ln x+\psi(y,C)\right],\quad u(x,y)=\frac{1}{x^{k-1}}A^{-1}\left[y;\ \ln x+\psi(y,u_0)\right].$$

(1.10.22)

Теорема 1.29. *Допустим, что в п.д.- системе (1.10.19)* $a,b,h\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0)$, $a(x^{k-1},y,u)$ *- однородная функция нулевого порядка по переменным* x,u. *Если условие совместности (*N_{37}*) для п.д.-системы (1.10.20) выполняется, но не тождественно, тогда существует некоторое частное решение системы (1.10.20). Для тождественного выполнения условия совместности системы (1.10.20) необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(x,y,z)$ *имела вид (1.10.21) . Если о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, то система (1.10.19) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.10.22). Причем полученное решение системы в зависимости от функций* A^{-1}, *может иметь особенности не менее чем* $(n-1)$ *- го порядка.*

Заметим, что аналогичный результат справедлив, также и для п.д.- системы

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^{k-1}}\,a(x,y,y^{k-1}u),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^{k}}\ b\left(x,y^{k-1},u\right),$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ D_0=\overline{D}-\Gamma_1,\ \Gamma_2=\{(x,y)|y=0\}$, причем $b\left(x,y^{k-1},u\right)$ однородная, нулевого порядка по переменным y,u функция. При этом, многообразие решений системы представимо формулой:

$$u(x,y)=\frac{1}{y^{k-1}}\,B^{-1}\left[x;\ \ln y+\psi(x,C)\right],\quad \left(B(x,y)=\int_0^y\frac{d\zeta}{b(x,1,\zeta)-(k-1)\,\zeta}\right)$$

а это решение в D_0 является непрерывным (в зависимости обратной функции B^{-1}, на линии $\Gamma_2:\ (y=0)$ имеет особенности не менее чем $(k-1)$-го порядка.

§ 1.11. Системы уравнений в полных дифференциалах с тремя уравнениями, с сингулярными линиями

1.11.1. Будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,z)}{(x-x_0)^n}\,m(y,z,u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,z,u)}{(y-y_0)^n},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{c(x,y,z,u)}{(z-z_0)^n} \tag{1.11.1}$$

где $a,b,c\in C^1(\overline{\Pi}_3\times R^1),\ u\in C^2(\Pi_3{}^{(0)}),\ \Pi_3{}^{(0)}=\overline{\Pi}_3-\sum_{j=1}^{3}\Gamma_j, R^1=[0,k],\ (\overline{D}=\overline{\Pi}_3)$.

Условия совместности системы (1.11.1) имеют вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{c}{(z-z_0)^n}\right)+\dfrac{a\,m}{(x-x_0)^n(z-z_0)^n}\,\dfrac{\partial c}{\partial u}=\dfrac{a\,m'_u}{(x-x_0)^n(z-z_0)^n}\,c+\dfrac{a'_z\,m+a\,m'_z}{(x-x_0)^n},\\ (z-z_0)^n\,\dfrac{\partial b}{\partial z}+c\,\dfrac{\partial b}{\partial u}=(y-y_0)^n\,\dfrac{\partial c}{\partial y}+b\,\dfrac{\partial c}{\partial u},\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{b}{(y-y_0)^n}\right)+\dfrac{a\,m}{(x-x_0)^n(y-y_0)^n}\,\dfrac{\partial b}{\partial u}=\dfrac{a\,m'_u}{(x-x_0)^n(y-y_0)^n}\,b+\dfrac{a'_y\,m+a\,m'_y}{(y-y_0)^n}.\end{cases} \tag{N_{38}}$$

Допустим, что условия (N_{38}) выполняются, но не тождественно. Тогда в силу теоремы о неявной функции (см.[251]), из каждого соотношения *(N_{38})*, получим: $u=H_i(x,y,z)\ (i=1,2,3)$. Если хотя бы одна из этих функций,

удовлетворяет системе (1.11.1), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.11.1)- несовместна.

Считая первое и третье равенства из *(N_{38})*, как два линейных неоднородных уравнения, относительно соответствующих функций b,c получим:

$$b(x,y,z,u)=(y-y_0)^n\left\{\frac{\partial A}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial y}+f\left[y;z;M(y,z,u)-A(x,y,z)\right]\right\}m(y,z,u)$$
$$c(x,y,z,u)=(z-z_0)^n\left\{\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial M}{\partial y}+g\left[y;z;M(y,z,u)-A(x,y,z)\right]\right\}m(y,z,u) \qquad (1.11.2)$$

где $M(y,z,u)=\int_0^u\frac{d\zeta}{m(y,z,u)}$, $A(x,y,z)=\int_0^x\frac{a(t,y,z)}{(t-x_0)^n}dt$ $(n\geq 0)$, f,g - две произвольно определенные, как и b,c - функции. Подставляя значения $b(x,y,z,u)$ и $c(x,y,z,u)$ в систему (1.11.1) , легко получим, что третье равенство из *(N_{38})* преобразуется в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial z}+g\,\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial y}+f\,\frac{\partial g}{\partial v},\quad (\text{где}\quad v=M-A)$$

где функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ определяются из формулы (1.11.2).

Очевидно, что при значениях функции b,c из (1.11.2) условия совместности *(N_{38})* частично выполняются тождественно. Допуская, что условие *(N_{38})* выполняется тождественно, проинтегрируем первое уравнение системы (1.11.1) по переменной x.

$$M(y,z,u)-A(x,y,z)=V \qquad (1.11.3)$$

где $V=V(y,z)$ новая неизвестная функция, а $M(y,z,V)$ и $A(x,y,z)$ указанные интегралы в (1.11.2) , и с учетом значений функции b,c из (1.11.2), получим регулярную п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial V}{\partial y}=f(y,z;V),\quad \frac{\partial V}{\partial z}=g(y,z;V)\ , \qquad (1.11.4)$$

для которой условие совместности системы (1.11.4) также выполняется тождественно. Тогда, система (1.11.4) разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$V(y,z) = C + F(y,z) \quad \text{, либо } u = u_0 + F(y,z).$$

Переходя к прежней переменной в (1.11.1) получим:

$$u(x;y;z) = M^{-1}\left[y;z;A(x,y,z) + C + F(y,z)\right] \qquad (1.11.5)$$

Заметим, что решение системы (1.11.1) определяемое формулой (1.11.5), всюду в $\overline{\Pi}_3$ является непрерывным, а в точках плоскости $x = x_0$, как и функции $A(x,y,z)$ при $0 \le n < 1$ является непрерывным, а при $n \ge 1$, соответственно имеет особенности логарифмическую и $(n-1)$-го порядка.

Теорема 1.33. *Пусть в п.д.- системе (1.11.1)* $a,b,c, \in C^1(\overline{\Pi}_3 \times R^1)$, $u \in C^2(\Pi_3^{(0)})$, $\Pi_3^{(0)} = \overline{\Pi}_3 - \{x = x_0, y = y_0, z = z_0\}$. *Если в системе (1.11.1) выполняются условия (M₀), то система может иметь только лишь некоторое частное решение. Если условия (N₃₈) выполняются, но не тождественно, тогда система (1.11.1) может иметь некоторое частное решение, либо несовместна. Для тождественного выполнения условия совместности (N₃₈) , необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(x,y,z,u)$ *и* $c(x,y,z,u)$ *определялись формулами (1.11.2) и третье равенство из условия (N₃₈) выполнялось тождественно. Тогда система (1.11.1) разрешима и многообразие ее решений находится в виде (1.11.5). Причем это решение в случае* $0 \le n < 1$ *и выполнении условий (M₁) является в* $(\overline{\Pi}_3)$ *непрерывным, а при* $n \ge 1$ *в* $(\Pi_3^{(0)})$ *- непрерывно и в точках поверхности* $x = x_0$ *соответственно имеет особенности логарифмическую и* $(n-1)$ *-го порядка.*

1.11.2. Будем рассматривать п.д.- систему**:**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{a(x,y,z)}{(x-x_0)^n}\,m(z,u),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{b(x,y,z)}{(y-y_0)^n}\,m(z,u),\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{c(x,y,z,u)}{(z-z_0)^n} \qquad (1.11.6)$$

где $a,b,c,m\in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u\in C^2(D_0),\ n\geq 0$. Условие совместности системы (1.11.6) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a(x,y,z)}{(x-x_0)^n}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{b(x,y,z)}{(y-y_0)^n}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{c(x,y,z,u)}{(z-z_0)^n}\right)+\dfrac{a\,m}{(x-x_0)^n(z-z_0)^n}\dfrac{\partial c}{\partial u}=\dfrac{a\,m'_u}{(x-x_0)^n(z-z_0)^n}\,c+\dfrac{a'_z\,m+a\,m'_z}{(x-x_0)^n}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{c}{(z-z_0)^n}\right)+\dfrac{b\,m}{(y-y_0)^n(z-z_0)^n}\dfrac{\partial c}{\partial u}=\dfrac{b\,m'_u}{(y-y_0)^n(z-z_0)^n}\,c+\dfrac{b'_z\,m+b\,m'_z}{(y-y_0)^n}. \end{cases} \qquad (N_{39})$$

Если для системы (1.11.6) будут выполняться условия (M_0), то есть

$\lim\limits_{x\to x_0}\left((x-x_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\ \lim\limits_{y\to y_0}\left((y-y_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\ \lim\limits_{z\to z_0}\left((z-z_0)^n\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)=0$, при ограниченности частных производных от искомой функции по всем переменным, либо, если u'_x,u'_y,u'_z в точках особых плоскостей $x=x_0,\ y=y_0,\ z=z_0$ имеют нули порядка не менее чем порядка *n-1*, то необходимо получим $a(x_0,y,z)=a_0=0, b(x,y_0,z)=0,\ m(z,u)=0, c(x,y,z_0,u)=0$. Из этих равенств, имеем: $u=\alpha(z), u=\beta(x,y)$. Эти две функции будут частными, либо особыми решениями системы (1.11.6). Если в (N_{36}) первое равенство выполняется, а остальные два равенства выполняются, но не тождественно, тогда в силу теоремы о неявных функциях, из (N_{39}) имеем: $u=H_i(x,y,z)\ (i=1,2)$. Если хотя бы одна из этих двух функций удовлетворяет системе (1.11.6), тогда она будет считаться некоторым частным решением системы. В противном случае, система (1.11.6) – несовместна. Легко определить, что условие совместности (N_{39}) выполняется тождественно, если функция $c(x,y,z,u)$ имеет вид:

$$c(x,y,z,u)=(z-z_0)^n\left\{\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial M}{\partial z}+f\left[z;M(z,u)-\omega(x,y,z)\right]\right\}m(z,u), \qquad (1.11.7)$$

где

$$M(z,u)=\int_{u_0}^{u}\frac{d\xi}{m(z,\xi)},\ \ \omega(x,y,z)=A(x,y,z)+B(y,z),\ \ A(x,y,z)=\int_0^x\frac{a(t,y,z)}{(t-x_0)^n}dt,\ \ B(y,z)=\int_0^y\beta(\tau,z)d\tau$$

.

При этом, процесс интегрирования системы (1.11.6), приводится к интегрированию о.д.у. вида (1.9.8.), то есть $\frac{d\psi}{dz}=f(z,\psi)$, где $f(z,\psi)$ определяется из (1.11.7) а $\psi=\psi(z)$, как новая неизвестная функция является решением первых двух равенств системы (1.11.6): $M(z,u)-\omega(x,y,z)=\psi(z)$. Если решение о.д.у. вида (1.9.8) определяется в виде $\psi=\hat{O}(z,C)$ либо $\psi=\hat{O}(z,u_0)$, то исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x,y;z)=M^{-1}\left[z;\omega(x,y,z)+\psi(z,c)\right]. \qquad (1.11.8)$$

Теорема 1.34. *Пусть в п.д.- системе (1.11.6)* $a,b,c,m\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\sum_{i=1}^{3}\Gamma_i$, $n\geq 0$. *Если для системы (1.11.6) будут выполнены условия (M0),а также условия (N39) выполняются, но не тождественно, тогда находятся некоторые частные решения системы, либо такие решения отсутствуют. Для того, чтобы условия (N39) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $c(x,y,z,u)$ *имела вид (1.11.7). Если о.д.у. вида (1.9.8) имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.11.8). Причем это решение при* $0\leq n<1$ *в* $\overline{D}$, *а при* $n\geq 1$ *в* D_0 *- является непрерывным, а в точках*

поверхности $\Gamma_1 : x = x_0$ *, соответственно имеет логарифмическую особенность (при* $n = 1$ *) и особенности* $(n-1)$*-го порядка (при* $n > 1$*).*

1.11.7. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a_1(x,y,z)}{(x-x_0)^n}\, u + \frac{b_1(x,y,z)}{(x-x_0)^n}\, u^k,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{a_2(x,y,z)}{(y-y_0)^n} u + \frac{b_2(x,y,z)}{(y-y_0)^n} u^k,\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{c(x,y,z,u)}{(z-z_0)^n}, \quad (1.11.9)$$

где $n \geq 0,\quad c, a_i, b_i \in C^{\,1}(\overline{D} \times R^1), (i = 1,2), u \in C^{\,2}(D_0),\ D_0 = \overline{D} - \sum_{i=1}^{3} \Gamma_i,$. Если для системы (1.11.9) выполняются условия (M_0), то есть;

$\lim\limits_{x \to x} \left((x-x_0)^n \dfrac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,\ \lim\limits_{y \to y} \left((y-y_0)^n \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,\quad \lim\limits_{z \to z_0} \left((z-z_0)^n \dfrac{\partial u}{\partial z} \right) = 0,$ тогда из исходной системы имеем

$$a_1(x_0, y, z) = a_{01} = 0,\ b_1(x_0, y, z) = b_{01} = 0,\ a_2(x, y_0, z) = a_{02} = 0,\ b_2(x, y_0, z) = b_{02} = 0,$$
$$u = 0,\ c(x, y, z_0; u) = 0\,.$$

Откуда будем иметь некоторые частные решения $u = 0,\ u = p(x,y)$.

Условие совместности системы (1.11.9) имеет вид:

$$\left(\frac{a'_{2x}}{(y-y_0)^n} - \frac{a'_{1y}}{(x-x_0)^n} \right) u + \left(\frac{b'_{2x}}{(y-y_0)^n} - \frac{b'_{1y}}{(x-x_0)^n} + \frac{(k-1)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{(x-x_0)^n (y-y_0)^n} \right) u^k = 0$$

$$(x-x_0)^n\, c'_x + (x-x_0)^n\, (a_1 u + b_1 u^k)\, c'_u = (a_1 + k\, b_1 u^{k-1})\, c + \frac{(z-z_0)^n}{(x-x_0)^n} (a'_{1z}\, u + b'_{1z}\, u^k)$$

$$(y-y_0)^n\, c'_y + (y-x_0)^n\, (a_2 u + b_2 u^k)\, c'_u = (a_2 + k\, b_2 u^{k-1})\, c + \frac{(z-z_0)^n}{(x-x_0)^n} (a'_{2z}\, u + b'_{2z}\, u^k)$$

(N_{40})

Допустим, что условие (N_{40}) выполняется, но не тождественно, тогда из первого его равенства имеем: $u = 0,\ u = H_1(x,y,z)$, а из остальных двух равенств $u = H_i(x,y,z)$ $(i = 2,3)$. Очевидно, что $u = 0$ является тривиальным решением первых двух уравнений системы (1.11.9). Если же $u = 0$ удовлетворяет и третьему его уравнению, тогда может оказаться, что система

(1.11.9) имеет тривиальное решение. Если хотя бы одна из функций $u = H_i(x, y, z)$ удовлетворяет системе, то она будет частным решением системы (1.11.9). В противном случае, система (1.11.9)-несовместна.

Допустим, что условие (N_{40}) выполняется тождественно. Тогда аналогично предыдущим пунктам, в п.д.- системе (1.11.9) для двух уравнений, умножая обе части уравнений системы (1.11.9) на u^{-k}, сделаем замену $u^{-k} = v,\ v = v(x, y, z)$ и преобразуем систему (1.11.9) к виду:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - (1-k)\frac{a_1(x,y,z)}{(x-x_0)^n}v = (1-k)\frac{b_1(x,y,z)}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} - (1-k)\frac{a_2(x,y,z)}{(y-y_0)^n}v = (1-k)\frac{b_2(x,y,z)}{(y-y_0)^n},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = (1-k)\frac{c(x,y,z,v)}{(z-z_0)^n}.$$

Поскольку в (N_{40}) : $\dfrac{a'_{2x}}{(y-y_0)^n} = \dfrac{a'_{1y}}{(x-x_0)^n}$, тогда находится такая функция $\omega(x, y, z)$, $\left(\omega'_x = \dfrac{a_1(x,y,z)}{(x-x_0)^n},\ \omega'_y = \dfrac{a_2(x,y,z)}{(y-y_0)^n}\right)$, что последняя система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(e^{(k-1)\omega}v) = (1-k)\dfrac{b_1 e^{(k-1)\omega}}{(x-x_0)^n}, \quad \dfrac{\partial}{\partial y}(e^{(k-1)\omega}v) = (1-k)\dfrac{b_2 e^{(k-1)\omega}}{(y-y_0)^n} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}(e^{(k-1)\omega}v) = (k-1)e^{(k-1)\omega\omega_z}v + (1-k)\dfrac{c(x,y,z,v^{\frac{1}{1-k}})}{(z-z_0)^n}e^{(k-1)\omega}v^{\frac{k}{k-1}} \end{cases}$$ или

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha(x, y, z), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \beta(x, y, z), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma(x, y, z, w). \qquad (1.11.10)$$

Для п.д.- системы (1.11.10) условия совместности выполняются тождественно, тогда и только тогда, когда в этой системе функция $\gamma(x, y, z, w)$ имеет вид, $\gamma(x, y, z, w) = \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z} + f[z, w - \omega_1(x, y, z)]$, $\left(\omega'_{1x} = \alpha(x, y, z),\ \omega'_{1y} = \beta(x, y, z)\right)$.

где

$$\omega_1(x,y,z)=(1-k)\int_0^x \frac{b_1(t,y,z)\exp\{(k-1)\omega(t,x,y)\}}{(t-x_0)^n}dt+\frac{b_{21}(0,\tau,z)\exp\{(k-1)\omega(0,\tau,z)\}}{(\tau-x_0)^n}d\tau$$

.

Учитывая значение функций $\beta(x,y,z),\ \ \gamma(x,y,z,w)$, перепишем функцию $c(x,y,z,u)$ в следующем виде:

$$c(x,y,z,u)=$$

$$=(z-z_0)^n\left[\frac{\partial\omega}{\partial z}u+\frac{1}{1-k}+\left\{\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+f\left[z,e^{(k-1)\,\omega(x,y,z)}\,u^{1-k}-\omega_1(x,y,z)\right]\right\}e^{(k-1)\,\omega(x,y,z)}\,u^k\right]$$

.(1.11.11) Таким образом, нами получен общий вид функции $c(x,y,z,u)$, для которой

условие (N_{40}) будут выполняться тождественно. Далее, интегрируя первые два уравнения системы (1.11.10) подставим в третье уравнение и с учетом значения функции $c(x,y,z,u)$ из (1.11.11) получим о.д.у. вида (1.9.8), в котором функция $f(z,\psi)$ определяется из (1.11.11). Если $\psi=\psi(z)$ является решением о.д.у. (1.9.8) и представимо в виде $\psi=\hat{O}(z,\tilde{N})$, тогда многообразие решений системы (1.11.9) определяется следующей формулой:

$$u(x,y;z)=\exp\{\omega(x,y,z)\}\cdot\left[\omega(x,y,z)+\hat{\mathrm{O}}(z,c)\right]^{\frac{1}{1-k}}\ .\qquad(1.11.12)$$

Заметим, что в (1.11.12) особенности $\omega(x,y,z)$ и $\beta(x,y,z)$ по $(x-x_0)^n$ сохраняется, а остальные особенности системы устраняются. Поэтому в точках поверхности $x=x_0$ можно оценить решение системы (1.11.9).

Теорема 1.35. *Пусть в п.д.- системе (1.11.9)* $a_i,b_i,c\in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$, $u\in C^2(D_0)$. *Если условия совместности системы* (N_{40}) *выполняются, но не тождественно, тогда она может иметь, тривиальное решение, либо некоторые частные решения. Для того, чтобы условия* (N_{40}) *выполнялись тождественно,*

необходимо и достаточно, чтобы функция $c(x, y, z, u)$ *принимала вид (1.11.11). Если о.д.у. вида (1.9.8) для функции* $f(z, \psi)$ *определяющийся из (1.11.11), имеет какой-либо вид решения, тогда система (1.9.8) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.1.12). Причем это решение п.д.- системы (1.11.9) по переменным* y, z *- регулярное, а по переменным* x, *при* $0 \le n < 1$ *всюду в* $\overline{D}$ *и при* $n \ge 0$ *в* $D_0 = \overline{D} - \Gamma_1$ *является непрерывным, при* $n = 1$ *и* $n > 1$ *в точках поверхности* $\Gamma_1 : x = x_0$ *соответственно имеет логарифмическую и* $(n-1)$ *- го порядка особенностей.*

1.11.8. Рассмотрим п.д.- систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x + y, y, z, u),\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{(x + y)} + b(x, y, z, \frac{u}{x + y}),\ \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y)\, c\,(x, y, z, v),\ (1.11.13)$$

где $a, b, c \in C^1(\overline{D} \times R^1),\ u \in C^2(D_0),\ a(t(x + y), y, z, t\, u) = a(x + y, y, z, u)$.

Совершив замену $u = (x + y) \cdot v$, имеем: $\frac{\partial u}{\partial x} = (x + y)\, v \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y) v \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y) \frac{\partial v}{\partial z},$

преобразуем систему (1.11.13) к виду:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a - v}{x + y},\ \frac{\partial v}{\partial y} = b(x, y, z, v),\ \frac{\partial v}{\partial z} = c(x, y, z, v).\qquad (1.11.14).$$

Условия совместности системы (1.11.14) выполняются тождественно, если:

$$\begin{cases} b(x, y, z, v) = \left\{ - A'_y(y, z, v) - \dfrac{1}{x + y} + f\left[y; z; A(y, z, v) - \ln(x + y)\right] \right\} (a(1, y, z, v) - v) \\ c(x, y, z, v) = \left\{ - A'_z(y, z, v) - \dfrac{1}{x + y} + g\left[y; z; A(y, z, v) - \ln(x + y)\right] \right\} (a(1, y, z, v) - v) \end{cases}$$

(1.11.15)

При этих значениях функции b, c из (1.11.15) условия совместности системы (1.11.13) и (1.11.14) выполняются тождественно. Интегрируя первое уравнение системы (1.11.14), имеем:

$$A(y,z,v)-\ln(x+y)=w, \qquad (1.11.16)$$

где $w=w(y,z)$- новая неизвестная функция. Продифференцировав, предыдущее равенство по переменным y,z подставим в остальные уравнения системы (1.11.14) и относительно новой искомой функцией, получим:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=f(y,z,w),\quad \frac{\partial w}{\partial z}=g(y,z,w), \qquad (1.11.17)$$

где функции f,g- определяются из (1.11.15) через коэффициенты системы (1.11.14) либо (1.11.13). Поэтому систему (1.11.17) называем регулярной системой относительно переменных y,z,w. Условия совместности системы (1.11.17) совпадают с третьим условием совместности системы (1.11.14), т.е.:

$$g'_y+f\ g'_w-f'_z-g\ f'_w=0, \qquad b'_z+c\,b'_v-c'_y-b\,c'_z=0\ . \ (\mathrm{N}_{41})$$

Если условия (N_{41}) выполняются, но не тождественно, то возможно существует некоторое частное решение системы (1.11.17) определяющееся формулой $w=H(y,z,\tilde{N})$. Затем подставляя значение w в (1.11.17), обращая ее по переменной v и переходя к прежней переменной, получим:

$$u(x,y;z)=(x+y)\,A^{-1}\left[y;z;H(y,z,C)+\ln(x+y)\right]. \qquad (1.11.18)$$

Функция (1.11.18) представляющая общее решение системы (1.11.13) всюду в $\overline{D}$, кроме точек плоскости $y=-x$ в пространстве, является непрерывной, а в точках этой плоскости имеет логарифмическую особенность, в частности, в точках этой плоскости -непрерывно.

Теорема 1.36. *Допустим, что в п.д.- системе (1.11.13)* $a,b,c\in C^1(\overline{D}\times R^1)$, $u\in C^2(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\{(x,y,z)\mid x+z=0\}$, *причем* $a(x+y,y,z,u)$ *является однородной функцией по первому и последнему аргументам. Если условия совместности системы (1.11.13) либо (1.11.14) выполняются, но не тождественно, тогда возможно будет определено некоторое частное*

решение системы. Для того, чтобы условия совместности системы (1.11.14) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции b,c определялись формулой (1.11.15). Если регулярная п.д.- система (1.11.17) имеет решение вида $w = H(y,z,c)$*, либо* $w = H(y,z,u_0)$*, то система (1.11.13) и задачи Коши для системы (1.11.13) имеет и притом единственное решение вида (1.11.18). Полученное решение системы (1.11.13) всюду в* $\overline{D}$*, кроме точки плоскости* $x+y=0$ *является непрерывным, а в точках этой плоскости имеет логарифмическую особенность.*

1.11.9. Теперь будем рассматривать п.д.- систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^k} a(x,y,z,u),\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^{k-1}} + b(x,y,z,x^{k-1}u)\,,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^{k-1}} + c(x^k,y,z,x^{k-1}u)$$

,(1.11.19)

где $a,b,c \in C^1(\overline{D}\times R^1),\ u \in C^2(D_0)\cap C(\overline{D})\,, a(x,y,z,u)$ - однородная функция нулевого порядка, по x,u то есть: $a(tx,y,z,tu) = a(x,y,z,u)$. Заменяя $t = \frac{1}{x^k}$ и сделав замену

$$x^{k-1}\,u = v,\ u = \frac{v}{x^{k-1}};\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1-k)}{x^k}\,v + \frac{1}{x^{k-1}}\,\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^{k-1}}\,\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^{k-1}}\,\frac{\partial v}{\partial z},$$

преобразуем систему (1.11.19) в следующем виде:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{a(1,y,z,v) - (k-1)\,v,}{x}\ \frac{\partial v}{\partial y} = b(x,y,z,v)\,,\quad \frac{\partial v}{\partial z} = c(x,y,z,v)\ . \qquad (1.11.20)$$

Условиями совместности системы (1.11.20) будут:

$$\begin{cases} x\,b'_x + (a-(k-1)\,v)\,b'_v = (a'_v - k + 1)\,b + a'_y \\ x\,c'_x + (a-(k-1)\,v)\,c'_v = (a'_v - k + 1)\,c + a'_z \\ b'_z + c\,b'_v - c'_y - b\,c'_v = 0 \end{cases} \qquad (N_{42})$$

Допустим, что условие (N_{42}) выполняется, но не тождественно. Тогда из (N_{42}) имеем хотя бы одну из функций $v = H_i(x, y, z)$ $(1 \le i \le 3)$ которые, могут быть решением системы (1.11.19) и (1.11.20). Тогда такие решения системы (1.11.20) называем частными решениями системы. Иначе, система (1.11.20)-несовместна. Для того, чтобы условие (N_{42}) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции $b(x,\ldots)$ и $c(x,\ldots)$ имели вид:

$$\begin{cases} b(x,y,z,v) = \left\{ -A'_y(y,z,v) + f\left(y; z; A(y,z,v) - \ln x\right)\right\}\left[a(1,y,z,v) - (k-1)\,v\right] \\ c(x,y,z,v) = \left\{ -A'_z(y,z,v) + g\left(y; z; A(y,z,v) - \ln x\right)\right\}\left[a(1,y,z,v) - (k-1)\,v\right] \end{cases}$$

,(1.11.21)

где $A(y,z,v) = \int\limits_{v_0}^{v} \dfrac{d\zeta}{a(1,y,z,\zeta) - (k-1)\zeta}$, $(a \ne (k-1)\,v)$, f, g - произвольные функции.

По аналогии других пунктов, легко убедимся, что при таких значениях функции b, c условия (N_{42}) выполняются тождественно. Далее интегрируя первое уравнение системы (1.11.20) по переменной x получим:

$$A(y,z,v) - \ln x = W, \quad (W = W(y,z)) \ . \quad (1.11.22)$$

Дифференцируя соотношение (1.11.22) по переменным y и z, подставим их результат в систему (1.11.20) и с учетом функции b, c из (1.11.21), получим систему (1.11.17), где функции f, g можно выразить через b, c, a, из формул (1.11.21). Если задачи Коши для системы (1.11.20) имеет решение вида $W = H(y,z,u_0)$, то подставляя значению функции W в (1.11.22), обращая функцию $A(y,z,W)$ по переменной W и переходя к прежней переменной, будем иметь:

$$u(x,y;z) = \frac{1}{x^{k-1}}\, A^{-1}\left[y, z; H(y,z,u_0) + \ln x\right] . \qquad (1.11.23)$$

Заметим, что функция (1.11.23), представляющая многообразие решений системы (1.11.19), при $k \le 1$ всюду в $\overline{D}$ непрерывна, а при $k > 1$ $(k \ge 2)$ в точках поверхности $x = 0$ имеет особенности $(k-1)$-го порядка.

Теорема 1.37. *Пусть в п.д.- системе (1.11.19)* $a,b,c \in C^1\left(\overline{D} \times R^1\right)$, $u \in C^2(D_0)$. *В случае, когда условия* (N_{42}) *выполняется, но не тождественно, возможно существует некоторое частное решения системы. Для того, чтобы условие* (N_{42}) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* b,c *имели вид (1.11.21). Если задачи Коши для п.д.- системы (1.11.20) имеет решение, то система (1.11.19) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.11.23). Причем решение системы (1.11.19) при* $k \le 1$ *во всей области* $\overline{D}$ *и при* $k > 1$ *в области* D_0 *является непрерывным, а в точках плоскости* $x = 0$ *имеет особенности не менее чем* $(k-1)$*- го порядка.*

§ 1.12. Системы уравнений в полных дифференциалах произвольного числа независимых переменных, с сингулярными коэффициентами

1.12.1. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{f_i(x_1, \ldots, x_n, u)}{x_1^{\,m}} \quad (i = \overline{1,n}) \ , \tag{1.12.1}$$

для которой $f_i \in C^1\left(\overline{D} \times R^1\right)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \left\{(x_1, \ldots, x_n) \middle| x_1 = 0\right\}$.

Условия совместности системы (1.12.1) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{\,m} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} + f_j \dfrac{\partial f_1}{\partial u} + m\, x_1^{\,m-1} f_1 - x_1^{\,m} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_1} - f_1 \dfrac{\partial f_j}{\partial x_n} = 0, \quad (j = \overline{2,n}) \\ x_1^{\,m} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} + f_j \dfrac{\partial f_i}{\partial u} - x_1^{\,m} \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} - f_i \dfrac{\partial f_j}{\partial u} = 0, \quad (i, j = \overline{2,n}\ ,\ i \ne j) \end{cases} . \tag{N_{43}}$$

Допустим, что условие (N_{43}) выполняется, но не тождественно. Тогда решая каждое соотношение из $\frac{n(n-1)}{2}$- в (N_{43}), в отдельности сможем получить функции $u = H_k\ (x_1,\ldots,x_n)\quad (k = 1,2,\ldots)$. Если хотя бы одна из этих функций $u = H_k\ (x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет системе (1.12.1), то она будет считаться некоторым частным решением системы .

Для существования непрерывного решения системы (1.12.1) необходимо, чтобы:

1) $\lim\limits_{x_1\to 0}\left(x_1{}^m\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0$ при всех $(i = \overline{1,n})$.

2) Функция $u = u\ (x_0,\ldots,x_n)$ и все её производные $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ всюду в $\overline{D}$ были непрерывны и ограничены. Тогда аналогично (см.[319]- [322]), в точках поверхности $x_1 = 0$ в n- мерном пространстве $f_i\ (0,x_2,\ldots,x_n,u) = 0$. Применяя соотношениям (N_{43}) теорему о системе неявных , будем иметь функции $u = H_i\ (x_2,\ldots,x_n)\quad (i = \overline{1,n}-1)$, где возможно получим, некоторые частные, либо особые решения системы. А также, из условии (N_{43}) при $x_1 = 0$ будем иметь:

$\left(\ f_j\right)_{x_1=0}\cdot\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)_{x_1=0} = \left(\ f_i\right)_{x_1=0}\cdot\left(\frac{\partial f_j}{\partial u}\right)_{x_1=0},\quad (i,\ j = \overline{1,n},\ i \neq j)$ следовательно получаем: $f_j\ (0,x_2,\ldots,x_n,u) = \alpha_i(0,x_2,\ldots,x_n)\ \ f_i\ (0,x_2,\ldots,x_n,u)$. Учитывая $f_j\ (0,x_2,\ldots,x_n,u) = 0$, опять получим $f_i\ (0,x_2,\ldots,x_n,u) = 0$. Откуда следует $u = H_i\ (x_2,\ldots,x_n)$. Если хотя бы одна из этих функции удовлетворяет системе (1.12.1), то она будет некоторым частным решением системы (1.12.1). В противном случае, исходная система несовместна.

Допустим, что условие (N_{43}) выполняется тождественно и задача Коши для системы (1.12.1) имеет вид:

$$u = u_0 \text{ при } x_1 = x_1^{(0)} \ (x_1^{(0)} \neq 0),\ x_j = 0,\ (0 < x_1^{(0)} \leq x_1 \leq 1) \quad (j = \overline{2,n}). \quad (1.12.2)$$

Интегрируем подсистему уравнений из (1.12.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{f_j(x_1,\ldots,x_n,u)}{x_1^{\,m}}, \quad (j = \overline{2,n}),$$

по переменным $x_2, x_3, \ldots, x_n$, считая x_1 - параметром. Применяя теорему существование и единственности для регулярных п.д.- систем, получим:

$$u = \frac{1}{x_1^{\,m}} F\left[x_1, x_2, \ldots, x_n, v(x_1)\right], \quad (1.12.3)$$

где $v(x_1)$- новая неизвестная функция. Далее дифференцируя обе части равенства (1.12.3) по переменной x_1, подставим в систему (1.12.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{-m}{x_1^{\,m+1}} F + \frac{1}{x^m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) = \frac{f_1(x_1,\ldots,x_n,u)}{x_1^{\,m}},$$

и получим обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.) вида:

$$\frac{dv}{dx_1} = \frac{mF_1 + x_1(f_1 - F'_{x_1})}{x_1\ F'_v}\ . \quad (1.12.4)$$

Покажем, что правая часть о.д.у. (1.12.4) не зависит от переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Для этого достаточно проверить, что выполняются $\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{mF_1 + x_1(f_1 - F'_{x_1})}{x_1\ F'_v} = 0 \quad (j = \overline{2,n})$. Откуда получим:

$$\left[m\,\frac{\partial F}{\partial x_j} + x_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\ \partial x_j}\right)\right]\frac{\partial F}{\partial v} - \left[m\,F + x_1\left(f_1 - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\right]\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\ \partial v} = 0.$$

Подставляя значение $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_j} = m\frac{f_j}{x_1} + f_j \frac{\partial f_1}{\partial x_j}$ в первой скобке, получим тождество. А это означает, что правая часть последнего о.д.у. (1.12.4) зависит только от переменных x_1 и v. Если задача Коши (1.12.2) для о.д.у. (1.12.4) имеет решение, то это решение выражается формулой $v = \varphi(x_1, u_0)$, либо $v = \varphi(x_1, C)$. При этом формула (1.12.3) преобразуется к виду:

$$u(x) = \frac{1}{x_1^{\,m}} F\left[x; \varphi(x_1, C)\right], \quad \text{либо} \quad u(x) = \frac{1}{x_1^{\,m}} F\left[x; \varphi(x_1, u_0)\right], x = (x_1, x_2, ..., x_n) \quad ,$$

(1.12.5)

являющиеся решением системы (1.12.1). При этом, функция F в точке $x_1 = 0$ в наибольшем варианте, может иметь нуль, либо, логарифмическую особенность, и тогда решение системы (1.12.1) в точках поверхности вырождения $x_1 = 0$ имеет особенности $(m-1)$ - го порядка.

Допустим, что процесс интегрирования системы (1.12.1) выполняется с первого ее уравнения, тогда интегрируем первое уравнение, как о.д.у. по x_1, u считая $x_2, \ldots, x_n$ параметрами. При этом задача Коши (1.12.2) для этого уравнения имеет решение вида:

$$u = v(x_2, \ldots, x_n) - \int_{x_1}^{1} \frac{f_1(t_1, x_2, \ldots, x_n, u)}{t^m}\, dt \quad . \qquad (1.12.6).$$

Это интегральное уравнение можно преобразовать в виде:

$$u = v\,(x_2,\ldots,x_n) - \omega_{m-1}(x_1,\ldots,x_n,u) + \frac{f_1(0,x_2,\ldots,x_n,u)}{m-1}\left(1-\frac{1}{x_1^{\,m-1}}\right)+ \qquad (1.12.7)$$

$$+\sum_{k=2}^{m-2}\frac{\omega_k(0,x_2,\ldots,x_n,u)}{k-1}\left(1-\frac{1}{x_1^{\,k-1}}\right)+$$

$$+\,\omega_{m-1}(0,x_2,\ldots,x_n,u)\cdot\ln\left|\frac{1}{x_1}\right|,\ \left(\omega_j=\frac{\omega_{j-1}(x_1,\ldots,x_n,u)-\omega_{j-1}(0,x_2,\ldots,x_n,u)}{x_1}\right)\quad (j=1,\ldots,m-1)$$

Из этой формулы заметим, что (1.12.7) при $x_1 = 0$, как решение системы имеет особенности $(m-1)$-го порядка, а по оставшимся переменным – непрерывно, и в (1.12.7), $\omega_j(x) \in C^1(\overline{D})$. Для дальнейшего удобства, решение интегрального уравнения (1.12.6) перепишем в виде формулы (1.12.5) , то есть

$$u = \frac{1}{x_1^{\,m-1}}\,F_1\left[x_1, x_2, \ldots, x_n, v\,(x_2,\ldots,x_n)\right]. \qquad (1.12.8)$$

Далее дифференцируя (1.12.8) по переменным $x_2, x_3 \ldots, x_n$, подставим их результат в систему (1.12.1), и получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{f_j(x_1,\ldots,x_n,u) - x_j\cdot F'_{x_j}(x_1,\ldots,x_n,v)}{x_j\ F'_v}\quad (j=\overline{2,n})\quad . \qquad (1.12.9)$$

Теперь проверяя, что правые части системы (1.12.9) не зависят от x_1 , придем к первой группе из условий совместности (N_{35}). Тогда систему (1.12.9) в удобной нам форме , можно записать как регулярную п.д.- систему:

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = g_j(x_2,\ldots,x_n,v)\,. \qquad (1.12.10)$$

Задача Коши для этой системы будет иметь вид $v = v_0$ при $x_j = 0,\ (j=\overline{2,n})$. При этом, получим решение задачи Коши для системы (1.12.9) формулой:

$$v = F_0\left[x_2, x_3, \ldots, x_n, c\right] \quad \text{либо} \quad v = F_0\left(x_2, x_3, \ldots, x_n, u_0\right).$$

Подставляя значение $v = v(x_2, x_3, ..., x_n)$ в (1.12.9) получим многообразия решений исходной системы в виде:

$$u = \frac{1}{x^{m-1}} F\left[x_1, x_2, \ldots, x_n; F_0\ (x_2, \ldots, x_n, u_0)\right]. \qquad (1.12.11)$$

Теорема 1.38. *Пусть в п.д. – системе (1.12.1)* $f_i \in C^1\left(\overline{D} \times R^1\right)$, $u \in C^2(D_0)$. *Если условия совместности* (N_{43}) *выполняются, но не тождественно, тогда возможно найдётся, хотя бы одно из частных решений системы. Если в системе (1.12.1)* $f_i(x_1, \ldots, x_n, u)$ *по переменной* x_1 *имеет нуль m-го порядка, то при выполнении условий* (N_{43}) *существует непрерывное решение системы. Пусть условия* (N_{43}) *выполняются тождественно. Тогда существует единственное решение системы (1.12.10) удовлетворяющее задачи Коши. Причем это решение всюду в* $\overline{D}$ *непрерывно по переменным* $(x_2, \ldots, x_n)$, *и в* D_0 *по всем* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *а в точках поверхности* $x_1 = 0$ *имеет особенности* $(m-1)$ *-го порядка при* $m > 1$ *и логарифмического порядка при* $m = 1$.

Теперь в дальнейшем будем рассматривать , более конкретные случаи в п.д.-системах (1.12.1).

1.12.2. В дальнейшем будем рассматривать п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{a_1(x_1, \ldots, x_n)}{x_1^{\,m}}\, \delta(x_2, \ldots, x_n, u), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{b_i(x_1, \ldots, x_n, u)}{x_i^{\,m}}, \ (i = \overline{2, n}) \quad (1.12.12)$$

где $a_1, p, b_i \in C^1\left(\overline{D} \times R^1\right)$, $u \in C^2(D_0)$. В системе (1.12.12) a_1, p, b_i - считаются непрерывно-дифференцируемыми функциями, но правые части этой исходной системы в точках поверхностей $x_j = 0$ $(j = \overline{1, n})$ при $m \geq 1$ не интегрируемы. Поэтому, аналогично в [319]-[322] , потребуем выполнение условия (M_0)

$$\lim_{x_1\to 0}\left(x_1{}^m\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)=0,\ \lim_{x_i\to 0}\left(x_i{}^m\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0,(i=\overline{2,n})\,. \qquad (1.12.13)$$

При этом, достаточно требовать ограниченности $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, в особых точках $x_j=0\ (j=\overline{1,n})$. Тогда из системы (1.12.13) необходимо имеем: $a_1(0,x_2,\ldots,x_n)=a_{01}=0,\quad p(x_2,\ldots,x_n,u)=0,\ b_i(0,x_2,\ldots,x_n,u)=0$. Откуда получим $u=H_j(x_2,\ldots,x_n),\ \ (j=\overline{1,n})$. Если эти функции удовлетворяют систему (1.12.12), то они будут частными, либо особыми решениями системы, в противном случае, исходная система не совместна. С другой стороны в точках плоскостей $x_j=0\ (j=\overline{1,n})$ задачу Коши ставить нельзя. Поэтому, нам надо будет выбрать, начальные условия в задаче Коши не в тех точках $x_j^{(0)}$, а в какой-то $x_j{}^{(0)}\neq 0$ наиближайшие к точкам поверхностей вида $x_i=0$, то есть $u=u_0$ при $x_i=x_i{}^{(0)}\ (i=\overline{1,n})$. Условиями совместности п.д.- системы (1.12.12) записываются в виде:

$$\begin{cases} x_1{}^m\,\dfrac{\partial b_i}{\partial x_1}+a_1\dfrac{\partial b_i}{\partial u}=b_i\,\dfrac{\partial p}{\partial u}+x_i{}^m\left(p\,\dfrac{\partial a_1}{\partial x_i}+a_1\,\dfrac{\partial p}{\partial x_i}\right),\ i=\overline{2,n} \\ x_j{}^m\,\dfrac{\partial b_i}{\partial x_j}+b_j\dfrac{\partial b_i}{\partial u}=x_i{}^m\,\dfrac{\partial b_j}{\partial x_i}+b_i\,\dfrac{\partial b_j}{\partial u},\ (i,j=2,n,\ i\neq j \end{cases}. \qquad (N_{44})$$

Из этих формул также получим, что при $x_1\to 0, x_i\to 0$ $\left(a_1\,\frac{\partial b}{\partial u}\right)_0=\left(b_i\,\frac{\partial p}{\partial u}\right)_0,\left(b_j\,\frac{\partial b_i}{\partial u}\right)_0=\left(b_i\,\frac{\partial b_j}{\partial u}\right)_0$. Отсюда следует, что $b_j=\lambda\,b_i\ (x_1,\ldots,x_n,u)$ если $b_j=0$, то $b_i=0$ и $\left(\frac{\partial b}{\partial u}\right)_0=0$ и $\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_0=0$. При этом можно получить только лишь некоторое частное решение системы.

Допустим, что функциональные равенства (N_{44}) выполняются, но не тождественно. Тогда из этих равенств по теореме о системе неявных функций, возможно, получим только некоторое частное решение системы, либо и такие решения отсутствуют. Для существования многообразия решений системы (1.12.12) необходимо и достаточно, чтобы (N_{44}) выполнялись тождественно. Возможно, что эти требования можно получить частично из первых $(n-1)$ равенств (N_{44}) следующим образом:

$$b_i(x_1,\ldots,x_n,u) = \tag{1.12.14}$$

$$= x_i^{\,m}\left\{\frac{\partial A}{\partial x_j}-\frac{\partial P}{\partial x_j}+f_i\left[x_2,\ldots,x_n,P(x_2,\ldots,x_n,u)-A(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right]\right\}P(x_2,\ldots,x_{n,},u),\ (i=\overline{2,n}),$$

где $A(x_1,\ldots,x_n)=\int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1}\frac{a_1(t_1,x_2,\ldots,x_n)}{t_1^{\,m}}dt_1$, $P(x_2,\ldots,x_n,u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\tau}{P(x_2,\ldots,x_{n.},\tau)}$, f_i-вполне определенные как и $b_i(x_1,\ldots,x_n,u)$- функции. Если в (N_{44}) требовать тождественного выполнения второй группы условий, то следует интегрировать исходную систему. Поэтому в результате интегрирования первого уравнения системы (1.12.37) будем иметь [313-319]:

$$P(x_2,\ldots,x_n,u)-A(x_1,\ldots,x_n)=V\quad(V=V(x_2,\ldots,x_n)). \tag{1.12.15}$$

Дифференцируя обе части равенства (1.12.15) по переменным x_i, подставив их значения в систему (1.12.12), учитывая (1.12.14), получим регулярную п.д.- систему:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=f_i(x_2,\ldots,x_n,v)\quad(i=\overline{2,n}). \tag{1.12.16}$$

Если задача Коши для регулярной п.д.- системы имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x_1,\ldots,x_n)=P^{-1}\left[x_2,\ldots,x_n;A(x_1,\ldots,x_n)+H(x_2,\ldots,x_n;u_0)\right],\quad (1.12.42)$$

где $v=H(x_2,\ldots,x_n;u_0)$ - решение системы (1.12.41).

Причем решение п.д.- системы (1.12.41) по переменным $x_2,\ldots,x_n$ всюду в $\overline{D}$, по переменной x_1 только при $0\le m<1$ и в D_0 при $m\ge 1$ будет непрерывным, а в точках поверхности $x_1=0$ при $m\ge 1$ соответственно имеет особенности логарифмического (при $m=1$) и $(m-1)$-го порядка при $m>1$.

Теорема 1.39. *Пусть в п.д. - системе (1.12.12)* $a_i,b_j,p\in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$, $u\in C^2(D_0)$. *Если условия (N_{44}) выполняются, но не тождественно, то возможно существуют некоторые частные решения системы (1.12.12). Для того, чтобы условие (N_{44}) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b_i(x_1,\ldots,x_n,u)$ *относительно данных функции* $a(x_1,\ldots,x_n)$, $p(x_2,\ldots,x_n,u)$ *определялись формулами (1.12.14). Если задачи Коши для п.д.- системы (1.12.16) (где функции* $f_i(x_2,\ldots,x_n;v)$ *определяются из (1.12.14)) имеет решение, тогда система (1.12.12) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (1.12.17). Причем это решение системы, как и* $A(x_1,\ldots,x_n)$, *по переменным* $(x_2,\ldots,x_n)$, *всюду в* $\overline{D}$, *по* x_1 *только при* $0\le m<1$ *и в* D_0 *при* $m\ge 1$ *являясь непрерывным, в случае* $x_1=0$, *при* $m\ge 1$ *соответственно имеет логарифмическую и* $(m-1)$*-го особенностей. Если в системе (1.12.12) функции* a,p,b_i *удовлетворяют условиям* (M_1), *то решение системы (1.12.37) в области* $\overline{D}$ *будет непрерывным.*

1.12.3. Будем рассматривать п.д.- систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{a_i(x_1,\ldots,x_n)}{{x_i}^m}\,p(x_{k+1},\ldots,x_n;u),\quad \frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{b_j(x_1,\ldots,x_n,u)}{{x_j}^k},\ (i=\overline{1,k},\ \ j=\overline{k+1,n})$$

,(1.12.18)

где $a_i, p, b_j \in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$, $u\in C^2(D_0)$. Легко заметить, что правые части системы (1.12.43) при $m\geq 1$ в точках $x_i=0$, $x_j=0$ не интегрируемы. Поэтому, аналогично [313]-[319], потребуем, чтобы в особых точках существовали пределы:

$$\lim_{x_i\to 0}\left({x_i}^m\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0,\ \lim_{x_i\to 0}\left({x_j}^m\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0\,. \qquad (1.12.19)$$

При этом из первой и второй группы системы (1.12.43) соответственно получим: $P\left(x_{k+1},\ldots,x_n;u\right)=0,\quad b_j(x_1,\ldots,x_n;u)=0$. Откуда будем иметь:

$u=h_i\,(x_{r+1},\ldots,x_n),\ u=H_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ (i+j=n,\ i=\overline{1,k},\ \ j=\overline{(k+1),n})$, которые могут быть, либо не быть решениями системы (1.12.43). Условиями совместности системы (1.12.43) будут:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_s}\left(\dfrac{a_i}{{x_i}^m}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{a_s}{{x_s}^m}\right)\quad i,s=\overline{1,k,}\ \ i\neq s\\ {x_i}^m\,\dfrac{\partial b_j}{\partial x_i}+a_i\dfrac{\partial b_j}{\partial u}=b_j\,\dfrac{\partial p}{\partial u}+{x_i}^m\left(p\,\dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}+a_i\,\dfrac{\partial p}{\partial x_j}\right),\ i=\overline{1,k}\ \ ,\ j=\overline{k+1,n}\\ {x_j}^m\,\dfrac{\partial b_\ell}{\partial x_j}+b_j\dfrac{\partial b_t}{\partial u}={x_\ell}^m\,\dfrac{\partial b_j}{\partial x_\ell}+b_\ell\,\dfrac{\partial b_j}{\partial u},\ (j,\ell=\overline{k+1,n},\ \ \ell\neq\ell\end{cases}\quad .\quad (N_{45})$$

Допустим, что условия (N_{45}) выполняются, но не тождественно. Тогда из этих равенств можно определить функции $u=H_t(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,(t=1,2,\ldots,,)$ такие, что хотя бы одна из них может быть решением системы (1.12.18). Такие решения, полученные из (N_{45}) возможно будут частными решениями

системы (1.12.18). Пусть первая группа из соотношения (N_{45}) выполняются и там, же $a_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ считается конкретно заданной функцией. Тогда из этой группы имеем, что:

$$a_s(x_1, \ldots, x_n) = x_s{}^m (A_1(x_1, \ldots, x_n) + \omega_1(x_2, \ldots, x_k)),\ (s = \overline{2,k})$$

где $A_1 = \int\limits_{x_1^{(0)}}^{x_1} \frac{a_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)}{t_1{}^m} dt_1,\ \omega_1 = \sum\limits_{s=2}^{k} \int\limits_{x_s^{(0)}}^{x_s} \alpha_1(x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}, \ldots, t_s, \ldots, x_k)\, dt_s$

Обозначая $\int\limits_{u_0}^{u} \frac{d\tau}{p(x_{k+1}, \ldots, x_{n.}, \tau)} = P(x_{k+1}, \ldots, x_n, u)$, в процессе интегрирования первой группы системы (1.12.18), будем иметь:

$$P(x_{k+1}, \ldots, x_n, u) - \omega(x_2, x_3, \ldots, x_n) - A_1(x_1, \ldots, x_n) = v \quad (v = v(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

(1.12.45) Вторая группа соотношений из (N_{45}) выполняются тождественно, тогда и только тогда, когда имеет место следующее взаимосвязи функций

$$b_j(x_1,\ldots,x_n;u) = x_j^m \cdot \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_j}\right] p(x_{k+1},\ldots,x_n;u) + \qquad (1.12.21)$$

$$+ x_j^m f\left[x_{k+1},\ldots,x_n;\, P(x_{k+1},\ldots,x_n;u) - \omega(x_2,\ldots,x_n) - A_1(x_1,\ldots,x_n)\right] p(x_{k+1},\ldots,x_n;u), (j = k+1, n)$$

Из этих формул можно определить функции f_j:

$$f_j(x_{k+1}, \ldots, x_n; v) = \frac{b_j(x_1, \ldots, x_n; u)}{x_j{}^m \cdot P(x_{k+1}, \ldots, x_n; u)} - \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_j}, (j = k+1, \ldots, n)$$

.(1.12.22)

При этом, правые части равенства (1.12.22) не зависят от $(x_1, \ldots, x_k)$. Теперь дифференцируя обе части равенства (1.12.45) по переменным $(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$ подставим их результат в систему (1.12.43), и с учетом (1.12.46) получим регулярную п.д.- систему вида (1.12.41), где в этой системе

функции f_j определяются по формуле (1.12.47). Если задача Коши для регулярной п.д.- системы (1.12.41) имеет решение, тогда исходная система также будет разрешимой и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x_1,\ldots,x_n)=P^{-1}\left[x_{k+1},\ldots,x_n;A_1(x_1,\ldots,x_n)+\omega(x_2,\ldots,x_n)+H(x_{k+1},\ldots,x_n;u_0)\right].$$

(1.12.23)

Аналогично предыдущим, решение системы (1.12.43) и функции $A_1(x_1,\ldots,x_n)$ при $0\le m<1$ в $\overline{D}$ и $m\ge 1$ в D_0 являясь непрерывными, при $x_1=0$ и $m\ge 1$ соответственно имеют особенности логарифмического и $(m-1)$-го порядка.

Теорема 1.40. *Допустим, что в п.д.- системе (1.12.43)* $a_i,b_j,p\in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$, $u\in C^2(D_0)$. *Если условия* (N_{52}) *выполняются, но не тождественно, тогда возможно существуют некоторые частные решения системы. Для тождественного выполнения условий* (N_{52}), *необходимо и достаточно, чтобы функции* $b_j(x_1,\ldots,x_n,u)$ *имели вид (1.12.46). Если задача Коши для п.д.-системы (1.12.41) где функции* f_j *определяются формулами (1.12.47) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (1.12.48). Причем в* $\overline{D}$, *при* $0\le m<1$ *и в* D_0 *при* $m\ge 1$ *являясь непрерывным, а при* $m\ge 1$ *в точках поверхностей* $x_i=0\,(i=\overline{1,k})$ *соответственно имеет логарифмическую особенность (при* $m=1$ *) и особенности* $(m-1)$*-го порядка, при* $m>1$.

Замечание. Если в п.д.- системе (1.12.43) $1\le i\le n-1$ и $j=n$, то предыдущими рассуждениями от новой системы, условие теоремы 44 верно и для новой системы. Отличие предыдущего рассуждения от новой системы заключается в том, что процесс интегрирования сингулярной п.д.- системы, приводится к интегрированию одного обыкновенного дифференциального уравнения.

1.12.4. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{a_i(x_1,\ldots,x_n)}{x_i^{\,m}}u+\frac{h_i(x_1,\ldots,x_n)}{x_i^{\,m}}u^k,\quad \frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{b_j(x_1,\ldots,x_n;u)}{x_j^{\,m}},\quad (1.12.24)$$

где $a_i, h_i, b_j \in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right),\ u(x_1,\ldots,x_n)\in C^2(D_0)$ причем $i=\overline{1,r},\ 2\le r\le n-1,\ \ j=\overline{k+1,n}$.

Если для системы (1.12.24) будут выполнены условия (M_0), то есть:

$\lim\limits_{x_i\to 0}\left(x_i^m\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)=0, \lim\limits_{x_j\to 0}\left(x_j^m\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)=0,$ то при ограниченности производных по всем переменным, необходимо, чтобы $a_{0i}=0, h_{0i}=0, u=0, b_{0j}(0,...,0,u)=0.$ Откуда имеем некоторые особые решения системы.

Условия совместности п.д.- системы (1.12.24) имеют вид:

$$x_j^{\,m}\frac{\partial b_s}{\partial x_j}+b_j\frac{\partial b_s}{\partial u}=x_s^{\,m}\frac{\partial b_j}{\partial x_s}+b_s\frac{\partial b_j}{\partial u}\quad (j,s=\overline{k+1,n},\quad j\ne s)$$

$$P_{i\ell}(x_1,\ldots,x_n)\,u+Q_{i\ell}(x_1,\ldots,x_n)\,u^k=0\quad (i,\ell=\overline{1,r}\ \ i\ne\ell)\qquad (N_{46})$$

$$x_i^{\,m}\frac{\partial b_j}{\partial x_i}+(a_iu+b_i\,u^k)\frac{\partial b_j}{\partial u}=(a_iu+k\,h_i\,u^{k-1})\,b_j+x_j^{\,m}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}u+\frac{\partial h_i}{\partial x_i}u^k\right),\ (i=\overline{1,r},\ j=\overline{r+1,n})$$

Если все условия из (N_{46}) выполняются, но не тождественно, тогда из второй группы этих соотношений, будем иметь: $u=0,\ u=\left[H(x_1,\ldots,x_n)\right]^{\frac{1}{k-1}}$, а из остальных равенств $\left(u=H_j(x_1,\ldots,x_n),\left(j=1,2,\ldots,\frac{n(n-1)}{2}-\frac{r(r-1)}{2}\right)\right)$.

Очевидно, что $u=0$ для первой группы уравнений из системы (1.12.24) считается тривиальным решением. Если такая функция $u=0$ удовлетворяет остальные $(n-r)$ уравнений, а также другие функции $u=H_j(x_1,\ldots,x_n)$ и $u=\left[H(x_1,\ldots,x_n)\right]^{\frac{1}{k-1}}$ удовлетворяют системе (1.12.24), то все эти функции

будут считаться некоторыми частными решениями системы. Если в системе (1.12.24) a_i, h_i, b_j - удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} a_i(x_1,\ldots,x_n) &= \hat{\imath}\,(x_1^{\,m-\lambda})\cdot\alpha_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\\ h_i &= \hat{\imath}\,(x_i^{\,m-\lambda})\cdot\beta_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n),\\ b_j &= \hat{\imath}\;(x_j^{\,m-\lambda})\cdot b_j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n u),\quad (0\le\lambda<1) \end{aligned}, \qquad (M_1)$$

то при тождественном выполнении условий (N_{46}), существует непрерывное по $\boldsymbol{r}$ решение (r- целое положительное число). Условиями совместности системы (1.12.24) будут $P_{i\ell}\,u+Q_{i\ell}\,u^k=0,\,(i,l=\overline{1,n}),i\neq l$. Пусть эти условия выполняются тождественно, причем так, чтобы:

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}=\frac{a_i(x_1,\ldots,x_n)}{x_i^{\,m}},\quad \frac{\partial\omega_2}{\partial x_i}=(1-k)\frac{h_i(x_1,\ldots,x_n)}{x_i^{\,m}}\,e^{(n-1)\,\omega_1(x_1,\ldots,x_n)}\quad (i=\overline{1,r})$$

Тогда третья группа из условий (N_{46}) будет выполняться тождественно, если функции $b_j(x_1,\ldots,x_n,u)$ имеют вид:

$$b_j(x_1,\ldots,x_n;u)=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}u+ \qquad (1.12.25)$$

$$+\frac{1}{1-k}\left\{\frac{\partial\omega_2}{\partial x_j}+f_j\left[x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n;e^{(k-1)\omega_1(x,..)}\,u^{1-k}-\omega_2(x_1,\ldots,x_n)\right]\right\}\cdot e^{(1-k)\,\omega_1(x_1,...)}\,u^k$$

Итак, по всем требованиям для п.д.- системы (1.12.25), условия (N_{46}) выполняются тождественно, поэтому в результате интегрирования первой группы уравнений системы (1.12.24), и заменяем $e^{(k-1)\omega_1(x_1,..,x_n)}\,u^{1-k}-\omega_2(x_1,\ldots,x_n)=V$,

где $V = V(x_{r+1},\ldots,x_n)$- новая неизвестная функция. Учитывая значения функции b_j из системы (1.12.25), проинтегрируем всю систему (1.12.24). В результате, получим регулярную п.д.- систему

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = g_j(x_{r+1},\ldots,x_n;V) \quad (j = r+1,\ r+2,\ldots,n). \qquad (1.12.26)$$

Если задачи Коши для п.д.- системы (1.12.26) имеет решение, тогда исходная система (1.12.24) также разрешима и многообразие ее решений определяется явной формулой:

$$u(x_1,\ldots,x_n) = \left[\omega_2(x_1,\ldots,x_n) + H(x_{r+1},\ldots,x_n;u_0)\right]^{\frac{1}{1-k}} \cdot e^{\omega_1(x_1,\ldots,x_n)} \quad .(1.12.27)$$

Причем это решение в $\overline{D}$ при $0 \le m < 1$ и в D_0 при $m \ge 1$ является непрерывным, а в точках поверхностей $x_i = 0$, $x_j = 0$ соответственно имеет логарифмическую особенность при $m = 1$, и особенности $(m-1)$-го порядка при $m > 1$.

Теорема 1.41. *Пусть в п.д.- системе (1.12.24)* $a_i, h_i, b_j \in C^1\left(\overline{D} \times R^1\right)$, $u \in C^2(D_0)$. *Если условия совместности* (N_{46}) *выполняются, но не тождественно, то возможно существуют некоторые частные решения системы (1.12.24). Для того, чтобы условия* (N_{46}) *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b_j(x_1,\ldots,x_n,u)$ *имели вид (1.12.25). Если задача Коши для п.д.- системы (1.12.26) имеет решение, то система (1.12.24) , также разрешима и многообразие ее решений определяется явной формулой (1.12.27). Причем это решение системы в* $\overline{D}$, *при* $0 \le m < 1$ *и в* D_0 *при всех* (m) *является непрерывным, а в точках поверхностей* $x_i = 0$, $x_j = 0$ *при* $m > 1$ *соответственно имеет логарифмическую особенность (при* $m = 1$ *) и особенности* $(m-1)$*-го порядка, при* $m > 1$. *Если функции удовлетворяют*

условиям (M_1)*, то решение системы (1.12.49) во всей области* $\overline{D}$ *будет непрерывным.*

1.12.5. Рассмотрим п.д.- систему:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_1^{m-1} a_1(x_1,\ldots,x_n,u),\ \frac{\partial u}{\partial x_i} = x_i^{m} a_i\left(x_1,\ldots,x_n,x_1^{-m}u\right),\ (i=\overline{2,n})\ (m\geq 1),$$

(1.12.28)

где $a_1, a_i \in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right),\ u\in C^2(D_0)$ причем $a_1(x_1,\ldots,x_n,u)$ является однородной нулевого порядка по x_1, u, то есть $a_1(tx_1,x_2,\ldots,t,u)=a_1(x_1,\ldots,x_n,u)$. В начале заменяя t через x_1^{-m}, а затем совершая замену $u = x_1^{m}V$, преобразуем систему (1.12.28) к виду:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{a_1(1,x_2,\ldots,x_n;V)-mV}{x_1},\ \frac{\partial V}{\partial x_i} = a_i(x_1,\ldots,x_n;v)\quad (i=\overline{1,n}).\ (1.12.29)$$

Условия совместности системы (1.12.29) выполняются тогда и только тогда, когда:

$$a_i(\tilde{o};V)=\left\{-\frac{\partial A_1}{\partial x_i}(x_2,\ldots,x_n,V)+f_i\left[x_2,\ldots,x_n;A_1(x_2,\ldots,x_n,V)-\ln x_1\right]\right\}\cdot(a_1-mV)\quad (i=\overline{2,n}),$$

(1.12.30)

где функции, $f_i(x_2,x_3,\ldots)$ как и $a_i(x_1,\ldots,u)$, являются вполне определёнными функциями. Так как функции a_i - обеспечат тождественное выполнение условий совместности системы (1.12.29), поэтому интегрируя первое уравнение системы, будем иметь: $A_1(x_2,\ldots,x_n,v)-\ln x_1 = W,\quad (W=W(x_2,\ldots,x_n))$.

Дифференцируя обе части этого равенства по переменным $x_i\ \ (i=\overline{2,n})$, подставим их результаты в систему (1.12.29) и получим регулярную п.д.-

систему вида (1.12.26). Если задача Коши для этой системы имеет решение, то система (1.12.29) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой:

$$u(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{\,m}A_1^{-1}\left[x_2,\ldots,x_n;\ln x_1+H(x_2,\ldots,x_n;u_0)\right]. \qquad (1.12.31)$$

Теорема 1.42. *Пусть в п.д.- системе (1.12.28)* $a_1, a_i \in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$ *причем* a_1 *- однородная по первой и последним аргументам функция* $u\in C^2(D_0)$. *Для того, чтобы условия совместности системы (1.12.28) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $a_i(x_1,x_2\ldots,)$ *имели вид (1.12.30). Если задача Коши для п.д.- системы вида (1.12.26) имеет решение, то система (1.12.28) также разрешима и многообразие ее решений определяемое формулой (1.12.31) непрерывно во всей области* $\overline{D}$.

По аналогии системы (1.12.28) рассмотрим п.д.- систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=\dfrac{1}{x_1^{m-1}}a_1(x_1^m,x_2,\ldots,x_n;x_1^m u)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\dfrac{1}{x_1^m}a_i(x_1,\ldots,x_n;x_1^m u),\ (m\ge 0,\ \ i=2,\ldots,n)\end{cases}, \qquad (1.12.57)$$

где $a_1,\ a_i\in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right),\ u\in C^2(D_0)$,

$a_1(x_1^{\,m}t,x_2,\ldots,x_{n,},t\,x_1^{\,m}\,u)\ =a_1(x_1^{\,m},x_2,\ldots,x_1^{\,m}\,u)$

Заменяя t_1 на x_1^{-m}, и затем $x_1^{\,m}u=V$, преобразуем систему (1.12.57) к виду:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}=\frac{a_1(1,x_2,\ldots,x_n,V)-m\,V}{x_1},\ \frac{\partial V}{\partial x_i}=a_i(x_1,\ldots,x_n;V) \quad . \qquad (1.12.58)$$

Аналогично п.2.59, выполняя все требования к системе (1.12.58), получим многообразие решений системы (1.12.57) формулой:

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{x_1^{\,m}}A^{-1}\left\{x_2,\ldots,x_n;\ln x_1+H(x_2,\ldots,x_n;u_0)\right\}. \quad (1.12.59)$$

При этом имеем, что в случае тождественного выполнения условий совместности системы (1.12.58) многообразие её решений во всей области D_0 являясь непрерывным, в точках плоскости $x_1=0$ имеет особенности не более чем $(m-1)$-го порядка.

Замечание. В предыдущих параграфах работы нами была рассмотрены различные типы п.д.- систем с одной, либо со многими сингулярными точками на плоскости, либо в произвольном ***n***- мерном пространстве. В случаи тождественного выполнения условий совместности для исходной системы, многообразия решений систем находятся, удовлетворяющие задаче Коши (вне особых точек плоскостей). Если для таких же классов п.д.- систем, изучить и исследовать гладкость решений по некоторым сингулярным линиям, например $x=x_0, y=y_0$ либо прямых $x_i=x_i^{(0)}$, либо плоскостей $x_i=x_i^{(0)}$, то получим аналогичные результаты по виду формул представления решений и гладкость решений, а также порядок особенностей в особых точках.

ГЛАВА 2. ФОРМУЛЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ С СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

§ 2.1. О формуле представления решений двух уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками

В [293]-[296] частично наших работ, а также [102]-[110] Л.Г.Михайлова, в [208-211] Э. Рузметова, и его учеников [146-152] Пирова Р., [62-69]Мирзоева А.,[267-269] Шоймкулова Б.М., [260-264] Шамсуддинова Ф., [213-219] Саидова Б.Б., Шадманова М.Х., [125-132] Назаровой З.И., и других учеников академика Раджабова Н., были исследованы различные классы уравнений в полных дифференциалах (п.д.), функций двух и трёх независимых переменных с сингулярными точками. В случаи тождественного выполнения условия совместности изучаемых систем, авторами были найдены многообразия решений исследуемых систем, а также были исследованы, поведения решений систем вблизи и в самых особых точках вырождении данной области. Прежде чем исследовать п.д.- систем с сингулярными точками, рассмотрим следующие примеры:

1.Пусть дана п.д.- система

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2r+\sin\varphi}{r^{k}}\cdot\cos^{2}u,\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\left[\sin\varphi+\frac{\cos\varphi}{(1-k)r^{k-1}}-\frac{\cos\varphi}{(1-k)}\right]\cdot\cos^{2}u,$$ для которой

выполняется условие совместности. Интегрируя данную систему,

получаем функцию $$u(r,\varphi)=arctg\left[C-\cos\varphi+\frac{2}{(2-k)r^{k-2}}+\frac{\sin\varphi}{(1-k)r^{k-1}}+\frac{\sin\varphi}{k-1}\right],$$

однозначную и непрерывную во всей области.

2.В качестве другого примера, берём регулярную п.д.- систему вида $\frac{\partial u}{\partial r}=\cos\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=k-r\sin\varphi,$ где k- произвольное действительное число.

Условие совместности этой системы выполняется по всем переменным, и многообразие ее решений определяется формулой $u(r,\varphi) = k \cdot \varphi + r\cos\varphi + C$. Полученное решение системы, непрерывно во всей области, но на границах области – многозначно: $u(r,0) = r + C \neq 2k\pi + r + C = u(r,2\pi)$

.

3.В качестве третьего примера, выбираем п.д.- систему с сингулярными коэффициентами вида $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r - \cos\varphi}{r} \cdot u,\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = (k + \ln r \cdot \sin\varphi) \cdot u,$ где k-произвольное действительное число. В этой системе ее функций в точке r=0 имеют особенности первого порядка. Условие совместности этой системы выполняется по всем переменным, и многообразие ее решений определяется формулой вида $u(r,\varphi) = C \cdot \exp(r + k \cdot \varphi + \ln r \cdot \cos\varphi)$. Полученное решение системы, непрерывно во всей области, но на границах данной отрезки – многозначно: $u(r,0) = \exp(r + \ln r) \neq \exp(2k\pi + r + \ln r) = u(r,2\pi)$. Тем самым получаем, что многообразие решений п.д.- систем на плоскости могут быть многозначным, либо однозначным.

Во второй главе работы, аналогично предыдущим, рассматривается один класс нелинейных уравнений в полных дифференциалах первого порядка с сингулярной точкой того или иного порядка. Для изучаемых в дальнейшем п.д.- систем рассматриваются вопрос о тождественном выполнении условия совместности и нахождение многообразия решений систем в явном виде, либо в квадратурах. А также исследуются поведения решений систем, на точках вырождения, находящихся в замкнутой области.

Л.Г.Михайловым изучены классические и линейные п.д.- системы двух уравнений в полных дифференциалах ([102]-[110]), а также в [293-

298], [308-309] на плоскости и пространстве, с сингулярными точками, и доказано, что если для п.д.- системы вида

$r \cdot u'_x = a(x, y), r \cdot u'_y = b(x, y)$, или та же система в полярной системе координат $r \cdot u'_r = p(r, \varphi), \quad u'_\varphi = q(r, \varphi)$, условие совместности системы $p'_\varphi = r \cdot q'_r$ выполняется, то существует её решение, непрерывное в области D_0. Причём, решение системы в сингулярной точке $r = 0$ удовлетворяет условиям:

1) $p(r,\varphi), q(r,\varphi)$ в области $\overline{D}$ ограничены;

2) при любых $\varphi, \ 0 \le \varphi < 2\pi$, существуют $\lim\limits_{r\to 0} p(r,\varphi), \quad \lim\limits_{r\to 0} q(r,\varphi)$;

3) если существуют пределы $\lim\limits_{r\to 0}\left(r \cdot \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$, и $\lim\limits_{r\to 0}\left(r \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = 0$, то при ограниченности частных производных u'_r, u'_φ необходимо, чтобы выполнялись условия $p(0,\varphi) = p_0 = 0, \ q(0,\varphi) = q_0 = 0, u(...) = const. = C,$,

4) то решение системы существует, причём оно многозначно.

Третий пункт из предыдущих условий означает, что автор улучшает поведение решения изучаемых систем в сингулярной точке *r=0.*

2.1.1. Следуя Л.Г. Михайлову (см. [102]-[110]) допустим, что дан нелинейный полный дифференциал (п.д.) функции [309]:

$$r^n du = a(x,y,u)dx + b(x,y,u)du,$$

(2.1.1)

(1)

где $n \ge 0, \ a\ (x,y,u), \ b(x,y,u,) \in C^1(\overline{D}), \ è \in C^2(D_0),$

$\overline{D}(x,y) = \{(x,y) \mid 0 \le x^2 + y^2 \le 1\},$

$D_0 = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}.$ Делая замену независимых переменных

$x = r\cos\varphi,$ $y = r\sin\varphi$, преобразуем нелинейный полный дифференциал (2.1.1) к виду:

$$r^n du = p(r,\varphi,u)dr + rq(r,\varphi,u)d\varphi\ , \qquad (2.1.2)$$

где $p(r,\varphi,u) = a\cos\varphi + b\sin\varphi,\ q(r,\varphi,u) = -a\sin\varphi + b\cos\varphi,\quad p,q \in C^1(\overline{D})$, равносильной п.д.- системе [309]

$$r^n \frac{\partial u}{\partial r} = p(r,\varphi,u),\ \ r^{n-1}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = q(r,\varphi,u) \text{ либо } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{p(r,\varphi,u)}{r^n},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{q(r,\varphi,u)}{r^{n-1}}. \qquad (2.1.3)$$

Условием совместности системы (2.1.3) будет:

$$r^{n-1}\frac{\partial p}{\partial \varphi} - q\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial u}p + r^{n-1}\left(r\frac{\partial q}{\partial r} - (n-1)q\right). \qquad (N)$$

Прежде всего, заметим, что в обычной форме в особой точке $r = 0$ задачу Коши задавать нельзя, поскольку в системе (2.1.3), в случае $r \to 0$ имеем: $p(0,\varphi,u) = 0,\quad q(0,\varphi,u) = 0.$ Из этих двух равенств получим хотя бы одну функцию $u = \alpha(\varphi)$. Если эта функция удовлетворяет системе (2.1.3), то она будет некоторым особым, либо частным решением системы. А также, при $r = 0$ из условия *(N)* получаем взаимосвязь функции $p(0,\varphi,u) = \alpha(\varphi)\ q(0,\varphi,u)$. Подставляя решение $p(0,\varphi,u)$ =0 в систему (2.1.3), имеем равенство $u = \gamma(\varphi)$. Откуда легко получим, что $u = \gamma(\varphi)$ будет некоторым частным, либо особым решением системы (2.1.3). С другой стороны заметим, что п.д.- систему (2.1.3) в точке $r = 0$ интегрировать нельзя, поэтому, аналогично работ Л.Г.Михайлова [102]-[110], требуем, чтобы в случае ограниченности u'_r, u'_φ выполнялись следующие условий:

Лемма 2. *Пусть в системах (2.1.3), выполняются условий:*

1) функции $a(r,\varphi;u), b(r,\varphi;u) \in C^1(\overline{D})$;

2) для всяких $0 \le \varphi < 2\pi, 0 < \varepsilon \le r \le 1,$ *существуют и конечны следующие пределы* $\lim\limits_{r\to 0} a(r,\varphi;u), \lim\limits_{r\to 0} b(r,\varphi;u)$;

3) при ограниченных значениях частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$ *существуют пределы, и равны к нулю;*

$$\lim_{r\to 0}\left(r^n \cdot \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \lim_{r\to 0}\left(r^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0, \ ,$$

то необходимо чтобы

$$a(0,\varphi;u) = 0, b(0,\varphi;u) = 0, \quad a_k(0,\varphi;u) = 0, (k = \overline{1,n}),$$

находятся функции $u = h_i(\varphi), (i = 1,2)$ *,, являющиеся некоторыми частными, либо особыми решениями системы.*

Тогда из системы (2.1.3), необходимо получим предыдущие равенства $p(0,\varphi,u) = 0, q(0,\varphi,u) = 0$. Откуда, аналогично предыдущим замечаниям, получим некоторые особые, либо частные решения системы. Тем самым, не решая систему (2.1.3), сможем определить поведение решение системы в точке вырождения. Если функции p, q –удовлетворяют условии малости по r ; $p = o(r^{n-\lambda}), q = o(r^{n-1-\lambda}), \ (0 \le \lambda < 1)$, то в случае тождественного выполнения условии (N), можно получить непрерывное решение системы (2.2.3). Поскольку для системы (2.1.3), как указано выше, задачу Коши в точке $r = 0$ задавать нельзя, поэтому будем брать радиус r - отличного от нуля и ограниченным числом- $0 < r_o \le r \le 1$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$, точнее говоря; $u = u_0$ при $x \ne 0, y \ne 0$, либо $u = u_0$ при $r = r_0 (r \ne 0), \quad \varphi = \varphi_0, (0 \le \varphi_0 \le 2\pi)$.(2.1.4)

Если условие *(N)* выполняется, но нетождественно, тогда решая соотношение *(N)* как уравнении, относительно неизвестной функции, в

силу теоремы о неявной функции (см. [251]), сможем найти некоторую функцию $u = \Phi(r,\varphi)$, которая может быть, (так и не может быть) частным, либо особым решением системы (2.1.2). По этой причине, для существования многообразия решений системы (2.1.2) потребуется тождественное выполнение условие *(N)*, покажем, что оно будет также достаточным.

Пусть условие (N) выполняется тождественно, то из него получаем тождество:

$$r^{n-1}p'_{\varphi} + p'_u q - r^n q'_r - q'_u p + (n-1)r^{n-1}q = 0.$$

(N_0)

Интегрируя второе уравнение из (2.1.3), как обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.) по переменной φ, считая r параметром, (методом последовательных приближений) находим решение полученного интегрального уравнения по переменной φ: $u(r,\varphi) = \frac{1}{r^{n-1}} h\big(r,\varphi,Z(r)\big)$. Тем самым можем считать $Z(r) = u(r,0)$ - новой неизвестной функцией, а $h\big(1,\varphi,Z(r)\big)$ известной.

Дифференцируя это соотношение по переменной r, и подставляя в первое уравнение из (2.1.3), будем иметь: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1-n}{r^n}h + \frac{1}{r^{n-1}}h'_r + \frac{1}{r^{n-1}}h'_Z \cdot \frac{dZ}{dr} = \frac{p}{r^n}$

.

Тем самым, мы пришли к о.д.у. вида

$$\frac{dZ}{dr} = \frac{p + (n-1)h - rh'_r}{r \cdot h'_Z}, \text{ или } \quad \frac{dZ}{dr} = \frac{f(r;Z)}{r} \quad , \qquad (2.1.5)$$

где $f(r;Z) = \frac{p + (n-1)h - rh'_r}{h'_Z}$, $(r \neq 0$ и $rh'_Z \neq 0)$.

Покажем, что правая часть о.д.у. (2.1.5) не зависит от переменной φ. Продифференцировав правую часть (2.1.5) по переменной φ, получим :

$$\frac{\left(p'_{\varphi}+p'_{u}u'_{\varphi}+(n-1)h'_{\varphi}-rh''_{r\varphi}\right).h'_{Z}-(p+(n-1)h-rh'_{r}).h''_{Z\varphi}}{r(h'_{Z})^{2}}=0. \qquad (6)$$

Так как $r\,h''_{r\varphi}=r\,q'_{r}+\frac{q'_{u}.p}{r^{n-1}}$, $h''_{Z\varphi}=q'_{u}.h'_{Z}$, то формула (6) принимает вид;

Поскольку мы требуем, чтобы условие (N) выполнялось тождественно и

$$\left(p'_{\varphi}+p'_{u}.\frac{q}{r^{n-1}}+(n-1)q-rq'_{r}-q'_{u}.\frac{p}{r^{n-1}}\right).rh'_{Z}+(p+(n-1)h-rh'_{r}).rq'_{u}.h'_{Z}=0$$

(2.1.6)

то равенство (2.1.6) также будет выполняться тождественно. Это означает, что правая часть о.д.у. (2.1.5) зависит лишь от переменного r. Затем, проинтегрировав о.д.у. (2.1.5) по переменной r, получим функцию $Z(r)=H(r,C)$ (в случае $0<r_0\le r\le 1$. При этом, многообразие решений, либо единственное решение п.д.- системы (2.1.3), удовлетворяющее задачи Коши (4), находим следующей формулой:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{r^{n-1}}h\left[r,\varphi,H(r,C)\right] \qquad \text{либо} \qquad u(r,\varphi)=\frac{1}{r^{n-1}}h\left[r,\varphi,H(r,u_0)\right] .$$

(2.1.7)

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть в квазилинейной п.д.- системе (2.1.3)* $p,q\in C^{1}(\overline{D})$, $u\in C^{2}(D_0)$, $D_0=\overline{D}-\{0\}$ *и выполнено условие леммы 2, а также выполняется условие (N), но нетождественно, то, существует некоторое частное решение п.д.- системы (2.1.3). Если в системе (2.1.3) функции* p, q *удовлетворяют условии малости, то в случае тождественного выполнения условии (N), можно получить непрерывное решение системы*

во всей области. Пусть условие (N) выполняется тождественно, и если о.д.у. (2.1.5) имеет решение (в общем случае по r сингулярное), тогда система (2.1.3) и для неё задача Коши (2.1.4) также разрешима и её решение выражается формулой (2.1.7).Причём это решение системы при n<1 непрерывно в области $\overline{D}$, *при n=1 имеет лога-рифмическую особенность, а при n>1 имеет особенности (n-1)-го порядка.*

В частности, будем рассматривать п.д.- систему (2.1.3), в том случае, когда в ней функции p, q не зависят от переменной ***u,*** вида:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{p(r,\varphi)}{r^n}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{q(r,\varphi)}{r^{n-1}}, \tag{2.1.8}$$

Условие совместности, системы (2.1.8) будет выполняться, если функции p, q взаимно зависимы следующей формулой: $q(r,\varphi) = r^{n-1}\left[\beta(\varphi) + A'_{\varphi}(r,\varphi)\right]$, где $A(r,\varphi) = -\int_r^1 \frac{p(t,\varphi)}{t^n} dt$, $\beta(\varphi)$ -вполне определённая, как и $b(\rho,\varphi)$ функция. При этом, многообразие решений системы (2.1.8) определяется формулой вида $u(r,\varphi) = C + B(\varphi) + A(r,\varphi)$, $B(\varphi) = \int_0^{\varphi} \beta(\tau) d\tau$ - непрерывной во всей области.

Если полагать, что $p(r,\varphi) \in C^{k+1}(\overline{D})$, то разлагая её по формуле Тейлора по степеням r, многообразия решений системы (2.1.8) выразим следующей
формулой:

$$u(r,\varphi)=u_0-\sum_{j=0}^{k-2}\frac{p_j(\varphi)}{j-k+1}\left(r^{\,j-k+1}-1\right)-p_{k-1}(\varphi)\ln r+$$

$$+A_k(r,\varphi)-A_k(1,\varphi)+B(\varphi),\quad j!\,p_j(\varphi)=\left(\frac{\partial^j p}{\partial r^r}\right)_{r=0}.$$

2.1.2. Рассмотрим ещё более конкретный случай, чем п.д. (2.1.1);

$$r^k du=a(r,\varphi)m(\varphi,u)dr+r^k b(r,\varphi,u)\ ,$$

где $a,b,m\in C^1(\overline{D}),u\in C^2(D_0),0\le\varphi<2\pi$ (k-любое целое число), равносильное следующей системе:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{a(r,\varphi)}{r^k}m(\varphi,u),\quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=b(r,\varphi,u)\,. \tag{2.1.9}$$

Если потребовать, чтобы условие совместности п.д.- системы (2.1.9) выполнялось тождественно, то функция $b(r,\varphi,u)$ должна иметь вид (ср.[293-298]) :

$$b(r,\varphi,u)=\left\{\frac{\partial A}{\partial\varphi}-\frac{\partial M}{\partial\varphi}+f\left[\varphi;M(\varphi,u)-A(r,u)\right]\right\}\cdot m(\varphi,u)\,, \tag{2.1.10}$$

где

$$M(\varphi,u)=\int_{u_0}^{u}\frac{d\tau}{m(r,\tau)}\,,\ A(r,\varphi)=-\int_{r}^{1}\frac{a(t,\varphi)}{t^k}dt\,,\ f(\varphi;M-A)=\frac{b(r,\varphi,u)}{m(\varphi,u)}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[A(r,\varphi)-M(\varphi,u)\right].$$

Так как условие совместности системы (2.1.9) с учётом значения функции $b(r,\varphi,u)$ из (2.1.10) выполняется тождественно, то интегрируя первое уравнение системы (2.1.9) по переменной r, будем иметь :

$$M(\varphi,u)-A(r,\varphi)=V\,, \tag{2.1.11}$$

где $V=V(\varphi)$ -новая неизвестная функция. Дифференцируя обе части (2.1.11) по переменной φ и подставляя результат во второе уравнение системы (2.1.9),

(с учётом формулы (2.1.10)) будем иметь о.д.у. вида:

$$\frac{dV}{d\varphi} = f(\varphi, V). \qquad (2.1.12)$$

Если задач Коши (2.1.4) в о.д.у. (2.1.12) имеет решение вида $V = V(\varphi, u_0)$, то исходная система (2.1.9) также разрешима, и многообразия её решений представимо формулой

$$M(\varphi,u) - A(r,\varphi) = V(\varphi,u_0), \qquad u(r,\varphi) = M^{-1}\left[\varphi; A(r,\varphi) + V(\varphi,u_0)\right].$$

(2.1.13)

Если в настоящем пункте, как и в [293-295] потребовать, чтобы $a(r,\varphi) \in C^{k+1}(\overline{D})$, то функция $b(r,\varphi,u)$ и решение задачи Коши для п.д.-системы (2.1.9) , соответственно принимает вид[112]:

$$b(r,\varphi,u) = \left\{ -\frac{\partial M}{\partial \varphi} + \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\partial^j (a_j(r,\varphi))}{\partial r^j} \Big|_{r=0} \frac{r^{j-k+1}-1}{j-k+1} + \frac{\partial (a_{k-1}(r,\varphi))}{\partial r} \Big|_{r=0} \ln r + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[A_k(r,\varphi) - A_k(1,\varphi)\right] + f(\varphi, M-A) \right\} m(\varphi,u), \quad A_k(r,\varphi) = \int_0^r a_k(t,\varphi)dt,$$

(2.1.14)

$$u(r,\varphi) = M^{-1}\left\{ \varphi; \sum_{j=0}^{k-2} \frac{a_j(\varphi)}{j-k+1}\left(1 - r^{j-k+1}\right) + a_{k-1}(\varphi)\ln r + A_k(r,\varphi) - A_k(1,\varphi) + V(\varphi,u_0) \right\}$$

(2.1.15)

Заметим, что если $j!\cdot a_j(\varphi) = \frac{\partial^j a(r,\varphi)}{\partial r^j}\Big|_{r=0}$ имеет нули порядка менее чем (j-k+2), $(j = \overline{0,\ k-2})$, или $a(r,\varphi) = \hat{i}(r^{j-\varepsilon})\ (0 \le \varepsilon < 1)$, то полученное решение исходной системы формулой вида (2.1.15) всюду в $\overline{D}$ будет непрерывным.

Теорема 2.2. *Пусть в системе (2.1.9)* $a, m, b \in C^1(\overline{D})$ *заданные функции, ищется решение* $u \in C^2(D_0)$. *Если для п.д.- системе (2.1.9) будут*

выполнены условии леммы 2, а также условие совместности системы (2.1.9) выполняется, но не тождественно, то находятся некоторые частные решения системы. Для тождественного выполнения условий совместности системы (2.1.9) необходимо и достаточно, чтобы функция $b(r,\varphi,u)$ *имела вид (2.1.10). Если задача Коши (2.1.4) в о.д.у. (2.1.12) имеет решения вида* $V = V(\varphi, u_0)$, *то исходная система (2.1.9) также разрешима и многообразия ее решений явно выражается формулой (2.1.13). Если же,* $a(r,\varphi) \in C^{k+1}(\overline{D})$, *то для тождественного выполнения условия совместности п.д.- системы (2.1.9) необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(r,\varphi,u)$ *была представима формулой вид (2.1.14). Если задача Коши для о.д.у. (2.1.12) имеет решения вида* $V = V(\varphi, u_0)$ *(при* $r \neq 0$*), то исходная задача также разрешима в классе* $C^{k+1}(\overline{D})$ *и многообразие ее решений определяется формулой вида (2.1.15).*

2.1.3.Рассмотрим тот случай, когда п.д.- система (2.1.3) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a(r,\varphi)}{r^k} \cdot m(u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(r,\varphi)}{r^{k-1}} \cdot n(u), \tag{2.1.16}$$

где $a, b, m, n \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(D_0)$ и тогда условием совместности п.д.-системы (2.1.16) будет:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b}{r^{k-1}}\right) \cdot n(u) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{a}{r^k}\right) \cdot m(u) + \frac{ab}{r^{2k-1}} \cdot (n'm - m'n) = 0. \tag{N_1}$$

Допуская, что условие (N_1) выполняется, но не тождественно, в силу теоремы о неявной функции [251] можем получить некоторую функцию $u = H(r,\varphi)$. Если эта функция удовлетворяет системе (2.1.16), тогда она

будет одним из частных её решений. В противном случае п.д.- система (2.1.16) несовместна.

Тождественное выполнение соотношение (N_1) имеет место; если

а) $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b(r,\varphi)}{r^{k-1}}\right)=0, \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{a(r,\varphi)}{r^{k}}\right)=0,\ n'm-m'n=0,\ m(u)\neq 0,\ n(u)\neq 0$

Отсюда легко получим:

$$b(r,\varphi)\equiv \alpha(\varphi)\cdot r^{k-1}; a(r,\varphi)\equiv \beta(r)\cdot r^{k}; n(u)\equiv \lambda\cdot m(u),$$

(2.1.17)

где $\alpha(\varphi),\beta(r)$ - вполне определенные функции, как и $a(r,\varphi), b(r,\varphi), \lambda=const$

При этих значениях $a(r,\varphi),b(r,\varphi),n(u),m(u)$ п.д.- система (2.1.16) разрешима и многообразие ее решений с учетом формулы (2.1.17) представимо в виде:

$$u(r,\varphi)=M^{-1}\left[u_0+B(r)+A(\varphi)\right],\quad A(\varphi)=\int_0^{\varphi}\alpha(\zeta)d\zeta,\ B(r)=\int_0^{r}\beta(t)dt,$$

(2.1.18)

причем $A(\varphi),B(r),M(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{dt}{m(t)}\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(\overline{D})$.

б) Допустим, что в соотношении (N_1) выполняются следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{b}{r^{k-1}}\right)=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{a}{r^{k}}\right),\quad a'_{\varphi}=rb'_{r}-(k-1)b \qquad (N_2)$$

Если в условии (N_1) будет выполнено $\lim_{r\to 0} b'_r=0$, то имеем: $a(r,\varphi)=(1-k)b(\varphi)+\alpha(r)$, и $\lim_{r\to 0} a'_{\varphi}=0$, то $b(0,\varphi)=const$ $(b(r,\varphi)=r^{k-1}\cdot\beta(\varphi))$, то в точках $(r,\varphi,u)\in\overline{D},\quad a,b\in C^1(\overline{D})$. Условие ($N_1$) будет выполнено

тождественно, если функции $a(r,\varphi)$, $b(r,\varphi)$, $n(u)$, $m(u)$ взаимно связаны формулами (см. [294-299]):

$$b(r,\varphi)=r^{k-1}\exp\{\lambda A(r,\varphi)\},\quad n(u)=\left(1+\exp\{-\lambda M(u)\}\right)m(u),\ \lambda\equiv const,$$

(2.1.19)

где

$$M(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{d\tau}{m(\tau)},\ A(r,\varphi)=-\int_{r}^{1}\frac{a(t,\varphi)}{t^k}dt=\int_{r}^{1}\frac{a(t,\varphi)-a(0,\varphi)}{t^k}dt+\frac{a(0,\varphi)}{k\text{-}1}\left(\frac{1}{t^{k\text{-}1}}-1\right).$$

Тогда процесс интегрирования п.д.- системы (2.1.16) сводится к интегрированию о.д.у. вида $dV=\beta(\varphi)\cdot e^{-\lambda V}d\varphi$. Решая задачу Коши для этого уравнения, и переходя к прежней переменной, будем иметь:

$$u(r,\varphi)=M^{-1}\left\{A(r,\varphi)+\frac{1}{\lambda}\ln\left[u_0+\lambda B(\varphi)\right]\right\},\qquad B(\varphi)=\int_0^{\varphi}\beta(\tau)\,d\tau.$$

(2.1.20)

Если в постановке задачи необходимо требовать, чтобы $a(r,\varphi)\in C^{k+1}(\overline{D})$,

то, аналогично п.2.1.2, разлагая функцию $a(r,\varphi)$ по формуле Тейлора по степеням r, находим многообразие решений системы (2.1.16) следующей формулой:

$$u(r,\varphi)=M^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{k-2}\frac{a_j(\varphi)}{j-k+1}\cdot\left(1-r^{j-k+1}\right)-a_{k-1}(\varphi)\ln r+\right.$$
$$\left.+A_k(r,\varphi)+\frac{1}{\lambda}\ln\left[u_0+\lambda B(\varphi)\right]\right\}\qquad(2.1.21)$$

Теорема 2.3. *Пусть в п.д.- системы (2.1.16)* $a,b,m,n\in C^1(\overline{D})$, $u\in C^2(D_0)$. *Если для системы (2.1.16) выполняются условия леммы 2, а также условие совместности данной системы выполняется, но не*

тождественно, то данная система имеет некоторое особое, либо частное решение. Для тождественного выполнения условия (N_1) необходимо и достаточно, чтобы функции $a(r,\varphi), b(r,\varphi), n(u), m(u)$ *были взаимосвязаны соответствующими формулами (2.1.17) либо (2.1.19). Тогда п.д.- система (2.1.16) разрешима и многообразие ее решений выражается соответственно формулами (2.1.18), либо (2.1.20) . Если же в постановке задачи требуется чтобы* $a(r,\varphi) \in C^{k+1}(\overline{D})$ *, тогда многообразие ее решений выражается явной формулой (2.1.21), но возможно многозначной на данной области.*

2.1.4. Пусть в п.д.- системе:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a(r,\varphi)}{r^k}u + \frac{h(r,\varphi)}{r^k}u^n, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = b(r,\varphi,u), \tag{2.1.22}$$

где $a(r,\varphi),\ h(r,\varphi),\ b(r,\varphi,u) \in C^1(\overline{D}),\ u \in C^2(\overline{D}_0)$. Условие совместности системы уравнений (2.1.22) будет выполняться тождественно, если функция $b(r,\varphi,u)$ имеет вид:

$$b(r,\varphi,u) = \frac{\partial H}{\partial \varphi}u + \tag{2.1.23}$$

$$+ \frac{1}{1-n}\left\{\frac{\partial F}{\partial \varphi} + f\left[\varphi; \exp\left[(n-1)H(r,\varphi)u^{1-n} - F(r,\varphi)\right]\right]\right\}\exp\left((1-n)H(r,\varphi)\right)u^n,$$

где $H(r,\varphi) = \int_r^1 \frac{h(t,\varphi)}{t^n}dt,\ F(r,\varphi) = (1-n)\int_r^1 \frac{a(t,\varphi)}{t^k}\exp\left((n-1)H(t,\varphi)\right)dt.$

Так как с учетом значения функции $b(r,\varphi,u)$ из (2.1.23) условие совместности п.д.- системы (2.1.22) выполняется тождественно, поэтому, делая замену

$$\exp\left\{(n-1)H(r,\varphi)\right\}\cdot u^{1-n} - F(r,\varphi) = V, \quad (V = V(\varphi)), \tag{2.1.24}$$

и интегрируя п.д.- систему (2.1.22), получим о.д.у. вида (2.1.12), в которой функция $f(\varphi,v)$ выражается через функции $b(r,\varphi,u)$, $H(r,\varphi)$ и $F(r,\varphi)$ определённой формулой. Если задача Коши (2.1.4) для о.д.у. вида (2.1.12), с учетом значения функции $f(\varphi,V)$ из (2.1.23) имеет решение, например: $V=\hat{O}(\varphi,C),(C=u_0)$, $(0\le\varphi<2\pi)$, то исходная п.д.- система (2.1.22) также разрешима и многообразие ее решений определяется следующей формулой:

$$u(r,\varphi)=\left[F(r,\varphi)+\hat{O}(\varphi,C)\right]^{\frac{1}{1-n}}\cdot\exp\left\{H(r,\varphi)\right\}. \qquad (2.1.25)$$

Теорема 2.4. *Пусть в п.д.- системе (2.1.22)* $a,b,h\in C^1(\overline{D})$, $u\in C^2(D_0)$ *.Тогда для тождественного выполнения условия совместности системы (2.1.22) необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(r,\varphi,u)$ *принимала вид (2.1.23). Если с учетом значения функции* $f(\varphi,V)$ *из (24) о.д.у. (2.1.12) имеет решение, то задача Коши (2.1.4) и система (2.1.22), также разрешимые и их решения выражаются формулой вида (2.1.25). Если для системы (2.1.22) будут выполнены условия (*M_0*), либо леммы 2, то исходная система может иметь некоторое особое, либо частное решение.*

2.1.5. Рассмотрим п.д.- систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial r}=a(r,\varphi,u),\quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=b\left(r,\varphi,\frac{u}{r}\right), \qquad (2.1.26)$$

где $a,b\in C^1(\overline{D}),u\in C^2(D_0)$, причём $a(t\,r,\varphi,t\,u)=t^k\cdot a(r,\varphi,u)$- однородная функция по переменным r, u порядка *к.* При *к=0*, делая замену вида $u=r\,v$, из (2.1.26) будем иметь п.д.- системы вида (при $k\neq0$ преобразовании системы выполняется аналогично):

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{1}{r}\left[a(1,\varphi,v)-v\right]\ ,\ \frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{1}{r}b(r,\varphi,v)\,. \qquad (2.1.27)$$

Условие совместности п.д.- системы (2.1.27) будет выполняться тождественно, если функция $b(r,\varphi,v)$ принимает вид

$$b(r,\varphi,v)=r\cdot\left[\ f\left(\varphi;\ A(\varphi,v)-\ln r\right)-\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right].\left[a(1,\varphi,v)-v\right], \qquad (2.1.28)$$

где $A(\varphi,v)=\int\limits_0^v\frac{d\tau}{a(1,\varphi,\tau)-\tau}$, $(a\neq\tau)$, и функция $f(\varphi,W)$ - определяется из (2.1.28). Если при этом значении функции $f(\varphi,W)$, о.д.у. (2.1.12) имеет определённое решение, тогда п.д.- система (2.1.26) также разрешима, и многообразия её решений определяется формулой:

$$u(r,\varphi)=r\cdot B\left[\varphi;\ln r+H(\varphi,C)\right]. \qquad (2.1.29)$$

Легко заметить, что решение системы (2.1.26) выражающееся формулой (2.1.29) в особой точке $r=0$ может иметь логарифмическую особенность, а в частности, оно может быть всюду в области $\overline{D}$ непрерывным .

2.1.6. Рассмотрим п.д.- систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial r}=a(r,\varphi,u),\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=b\left(r,\varphi,\frac{u}{r^k}\right), \qquad (2.1.30)$$

где $a(t\,r,\varphi,t^k u)=t^{1-k}a(r,\varphi,u)$, то есть $a(r,\varphi,u)$ - является обобщённо-однородной функцией по переменным r,u. Делая замену вида $u=r^k\cdot V$ преобразуем систему (2.1.30) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{1}{r}a(1,\varphi,V),\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi}=\frac{1}{r^k}b(r,\varphi,V). \qquad (2.1.31)$$

Условие совместности системы (2.1.31) выполняется тождественно, если

$$b(r,\varphi,u)=r^{k+1}\left[f\left(\varphi;B(\varphi,V)-\ln r\right)-B'_{\varphi}(\varphi,V)\right]\cdot\left(a(1,\varphi,V)-kV\right),\qquad(2.1.32)$$

$$B(\varphi,v)=\int_0^V\frac{d\varsigma}{a(1,\varphi,\varsigma)-k\varsigma},\ a\neq k\varsigma.$$

При этом значении функции $b(r,\varphi,u)$ интегрирование п.д.- системы (2.1.31) приводится к о.д.у. вида (2.1.12). Интегрируя о.д.у. (2.1.12), и переходя к прежней переменной, решение системы (31) получим следующей формулой:

$$u(r,\varphi)=r^k\cdot H\left[\varphi;\ln r+F(\varphi,u_0)\right].\qquad(2.1.33)$$

Легко заметить, что решение п.д.- системы (2.1.30 представленное формулой вида (2.1.33), всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным, а в частности, в точке $r=0$ оно также может быть непрерывно (частично и однозначно).

Замечание. В работах [102]-[110] , Михайловым Л.Г. было доказано, что решение классической п.д.- системы в особой точке $r=0$ на плоскости – многозначно. Однако, в этом параграфе приводятся примеры, как нелинейные п.д.- системы, для которой решение всюду в области может быть однозначным.

Пример. Рассмотрим нелинейную п.д.- систему:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{2r+\sin\varphi}{r^k}m(u)\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\left[\sin\varphi+\dfrac{\cos\varphi}{(1-k)r^{k-1}}-\dfrac{\cos\varphi}{1-k}\right]m(u)\end{cases}$$

Условия совместности этой системы выполняется тождественно и её решение принимает вид:

$$u(r,\varphi)=M^{-1}\left\{C-\cos\varphi+\frac{2}{(2-k)r^{k-2}}+\frac{\sin\varphi}{(1-k)r^{k-1}}+\frac{\sin\varphi}{k-1}\right\},$$

где M^{-1} – обратная к функции $M(u)$, а $M(u)=\int_0^u \frac{d\varsigma}{m(\varsigma)}$, $(0\le\varphi\le 2\pi)$. При этом, имеем: $u(1,0)=u(1,2\pi)=M^{-1}\left(C-1+\frac{2}{2-k}\right)$. В частности, $M^{-1}\left(C-1+\frac{2}{2-k}\right)=u_0=const$, $C=\frac{k}{k-2}+p$. Тогда, получим единственное решение системы, удовлетворяющее данное начальное условие, однозначно. Причём полученное решение системы в точке вырождения $r=0$ имеет особенности $(k-1)$-го порядка. Если же $m(u)=\cos^2 u$, то решение данной системы во всей области будет непрерывным и однозначным, а в некоторых других случаях, возможно, будет многозначным.

2.1.7. Рассмотрим п.д.- систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial r}=r^{k-1}a(r,\varphi,u),\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=b\left(r,\varphi,\frac{u}{r^k}\right), \tag{2.1.34}$$

где $a(t\,r,\varphi,t^k u)=t^{1-k}a(r,\varphi,u)$, то есть $a(r,\varphi,u)$- обобщённо-однородная функция по переменным r,u. Совершая замену $u=r^k V$ преобразуем систему (2.1.34) в виде

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{1}{r}[a(1,\varphi,V)-kV],\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi}=\frac{1}{r^k}b(r,\varphi,V). \tag{2.1.35}$$

Условие совместности системы (2.1.34) выполняется тождественно, если

$$b(r,\varphi,V)=r^{k+1}\left[f\left(\varphi;B(\varphi,V)-\ln r\right)-B'_{\varphi}(\varphi,V)\right]\cdot\left(a(1,\varphi,V)-kV\right), \tag{2.1.36}$$

где $B(\varphi,V)=\int_0^V \frac{d\varsigma}{a(1,\varphi,\varsigma)-k\varsigma}$, $a\ne k\varsigma$. Функция $f(\varphi,B(\ldots)-\ln r)$ определяется из (2.1.36). При этом значении функции $b(r,\varphi,V)$ интегрирование п.д.- системы (2.1.34) приводится к интегрированию о.д.у.

вида (2.1.12). Интегрируя о.д.у. вида (2.1.12), и переходя к прежней переменной, будем иметь решение системы (2.1.34) формулой:

$$u(r,\varphi)=r^{k}H\left[\varphi;\ln r+F(\varphi,u_0)\right]. \qquad (2.1.37)$$

Легко заметить, что решение п.д.- системы (2.1.34) представленное формулой (2.1.37), всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным, и для системы (2.1.34) выполняется условие теоремы 4.

2.1.8. Рассмотрим п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r^{n+1}}a(r^{-n},\varphi,\ u),\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{1}{r^{n}}b(r,\varphi,\ r^{n}u)\ , \qquad (2.1.38)$$

где $a,b\in C^{1}(\overline{D})$ -данные функции, $u\in C^{2}(D_0)$ - искомая функция, $D_0=\overline{D}-\{0\}$, причём $a(r^{-n},\varphi,u)$ -однородная по первому и третьему аргументам функция. Совершая замену $r^{n}u=V$, преобразуем систему (2.1.38) в следующем виде

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{a(1,\varphi,V)-mV}{r},\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi}=b(r,\varphi,V)\,. \qquad (2.1.39)$$

Условие совместности системы (2.1.38) имеет следующий вид:

$$r\frac{\partial b}{\partial r}+(a-mV)\frac{\partial b}{\partial V}=\left(\frac{\partial a}{\partial V}-m\right)b+\frac{\partial a}{\partial \varphi}\,. \qquad (N_3)$$

Условие (N_3) выполняется тогда и только тогда, когда функция $b(r,\varphi,V)$ имеет вид;

$$b(r,\varphi,V)=\left\{-\frac{\partial A}{\partial \varphi}+f\left[\varphi,A(\varphi,V)-\ln r\right]\right\}\cdot(a(1,\varphi,V)-mV),\quad (a\neq mV)\,. \qquad (2.1.40)$$

Учитывая значения функции $b(r,\varphi,u)$ из (2.1.40), интегрируем систему (2.1.39), и получим о.д.у. вида (2.1.12), где функция $f(\varphi,V)$ определяется из (2.1.40). Если задача Коши (2.1.4) для о.д.у. (2.1.12), имеет решения

определённого вида, тогда п.д.- система (2.1.38) также разрешима, и многообразие её решений определяется формулой

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{r^n}\,A^{-1}\left[\varphi;\ln r+H(\varphi,u_0)\right]. \qquad (2.1.41)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2.5. *Пусть в п.д.- системе (2.1.38)* $a,b\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(D_0)$. *Если из условия* ($N_3$) *найденная функция* $V=H(r,\varphi)$ *удовлетворяет системе (2.1.38), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (2.1.38) несовместна. Для того, чтобы условие* (N_3) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(r,\varphi,V)$ *имела вид (41). Если о.д.у. вида (2.1.12) с учётом функции* $f(\varphi,...)$ *из (2.1.40) имеет решение, то исходная система (2.1.38) также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (2.1.41). Причём, такого вида решения системы (2.1.38) по переменной* φ *всюду в* $\overline{D}$, *и по переменной* r *в области* D_0 *является непрерывным, а в точке* $r=0$ *имеет особенности* n *–го порядка*.

§ 2.2. О формуле представления решений нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками в трехмерном пространстве

В работах Л.Г. Михайлова (см. [102]-[110]) были изучены полный дифференциал (п.д.) вида

$$\rho^n du=a(x,y,z)dz+b(x,y,z)dy+c(x,y,z)dz,$$ где

$a,b,c\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(D_0)$, $\overline{D}=\left\{(x,y,z)\,|\ 0\le\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le 1\right\}$, $D_0=\overline{D}-\{0\}$, ($\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$), равносильный

системе линейной уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем)

$$\rho^n \frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y,z),\ \rho^n \frac{\partial u}{\partial y} = b(x,y,z),\ \rho^n \frac{\partial u}{\partial z} = c(x,y,z)\,. \quad (2.2.1)$$

При выполнении условия совместности этой системы, в работе были исследованы свойства вырождения в сингулярной точке $\rho = 0$ и найдено многообразие решений изучаемых систем. Доказано, что решение систем в множестве всегда является однозначным.

Как известно, в особой точке $\rho = 0$ задачу Коши задавать нельзя, поскольку в этой точке предыдущую систему интегрировать нельзя. Поэтому аналогично работы Л.Г.Михайлова [110], переходя к пределу в случае $\rho \to 0$ в системе (2.2.1), будем иметь:

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,\ a(0,0,0) = a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0\,,$$

$$u(x,y,z,) = const.\,(\mathrm{M}_0)$$

Это означает, что каков бы ни было решение системы (2.2.1), в точке вырождение оно является постоянное. А также, если в системе (2.2.1) требовать, чтобы $a(x,y,z) = o(\rho^{n-\lambda}),\quad b(x,y,z) = o(\rho^{n-\lambda}), c(x,y,z) = o(\rho^{n-\lambda})$, то решение системы (2.2.1) в области $\overline{D}$ будет непрерывным. Учитывая эти условия всюду ($0 \le \varphi,\ \theta \le 2\pi$), в работе, нами рассматривается один класс квазилинейных, либо нелинейных уравнения в п.д. с сингулярной точкой $\rho = 0$ различного порядка. Доказывается, что именно в определённых случаях условия совместности классы систем выполняются тождественно и интегрируются явно. А также, нами исследуется поведение решений систем в $\overline{D}$ и самой сингулярной точке $\rho = 0$.

2.2.1. Рассмотрим нелинейный полный дифференциал с сингулярной точкой $\rho = 0$ порядка *n*, вида (см.[295]) :

$$\rho^n du = p(x,y,z,u)dx + q(x,y,z,u)dy + r(x,y,z,u)dz, \quad (2.2.2)$$

где $\forall (x,y,z)\in \overline{D},\ \overline{D}=\left\{(x,y,z)\middle|\ 0\le \rho^2=x^2+y^2+z^2\le 1\right\},\ p,q,r\in C^1(\overline{D})$, $u(x,y,z)\in C^2(\overline{D})$, $D_0=\overline{D}-\{0\}$, то есть D_0 является шаром радиуса ρ $(0<\rho\le 1)$ с выколотой точкой $\rho=0$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le 2\pi$.

Переходя в сферической системе координат, $x=\rho\sin\varphi\cos\theta$, $y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=\rho\cos\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0<\rho\le 1)$ преобразуем п.д. (2.2.2) к виду:

$$\rho^n du=a(\rho,\varphi,\theta,u)d\rho+\rho b(\rho,\varphi,\theta,u)d\varphi+\rho c(\rho,\varphi,\theta,u)d\theta, \qquad (2.2.3)$$

где функции *a*, *b*, *c* имеют вид:

$$\begin{cases} a(\rho,\varphi,\theta,u)=p\sin\varphi\cos\theta+q\sin\varphi\sin\theta+r\cos\varphi \\ b(\rho,\varphi,\theta,u)=p\cos\varphi\cos\theta+q\cos\varphi\sin\theta-r\sin\varphi \\ c(\rho,\varphi,\theta,u)=-p\sin\varphi\sin\theta+q\sin\varphi\cos\theta \end{cases}$$

при этом *p*, *q*, *r* зависят от новых переменных (ρ,φ,θ,u), например, $p=p(\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi,\ u)$ и $a,b,c\in C^1(\overline{D})$.

Уравнение (2.2.3) равносильно п.д.- системе

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^n},\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^{n-1}},\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{c(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^{n-1}}, \qquad (2.2.4)$$

для которой условием совместности будет:

$$\begin{cases} \rho^{n-1}\dfrac{\partial a}{\partial\varphi}+b\dfrac{\partial a}{\partial u}-\rho^n\dfrac{\partial b}{\partial\rho}+(n-1)\rho^{n-1}b-a\dfrac{\partial b}{\partial u}=0, \\ \rho^{n-1}\dfrac{\partial a}{\partial\theta}+c\dfrac{\partial a}{\partial u}-\rho^n\dfrac{\partial c}{\partial\rho}+(n-1)\rho^{n-1}c-a\dfrac{\partial c}{\partial u}=0, \\ \rho^{n-1}\dfrac{\partial b}{\partial\theta}+c\dfrac{\partial b}{\partial u}-\rho^{n-1}\dfrac{\partial c}{\partial\varphi}-b\dfrac{\partial c}{\partial u}=0. \end{cases}$$

(N_4)

(N_1)

Аналогично [251], утверждаем, что, если условия (N_4) выполняются, но не тождественно, тогда из этих трёх соотношений, алгебраическим способом, можно определить некоторые функции $u = F_j\ (\rho,\varphi,\theta),\ (i = 1,2,3)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (2.2.4), то она будет ее частным решением. В противном случае система (2.2.4) несовместна.

А также заметим, что для системы (2.2.4) в точке $\rho = 0$ условию Коши задавать нельзя. Потому, что в этой точке правые части системы (2.2.4) неограниченны. Для этого, аналогично работам Л.Г.Михайлова [102]-[110], требуем выполнение условий в лемме 2, т.е.:

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0,\quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0,\quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0\,. \qquad (M_0)$$

При этом, из правых частей уравнений системы (2.2.4) необходимо будем иметь $a(0,\varphi,\theta,u) = 0,\ \ b(0,\varphi,\theta,u) = 0,\ \ c(0,\varphi,\theta,u) = 0$. В силу теоремы о системе неявных функциях [251], из этих трёх равенств, получим $u = h_i(\varphi,\theta)\ \ (i = 1,2,3)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (2.2.4), то она будет некоторым частным, либо особым решением данной системы. С другой стороны, если в трёх равенствах из (N_4) подставить $\rho \to 0$, то опять получим:

$$\left(b\frac{\partial a}{\partial u}\right)_0 = \left(a\frac{\partial b}{\partial u}\right)_0,\quad \left(a\frac{\partial c}{\partial u}\right)_0 = \left(c\frac{\partial a}{\partial u}\right)_0,\quad \left(b\frac{\partial c}{\partial u}\right)_0 = \left(c\frac{\partial b}{\partial u}\right)_0. \qquad (B_1)$$

Из этих трёх уравнений также имеем $b = \alpha(\varphi,\theta)a(\varphi,\theta,u),\ c = \beta(\varphi,\theta)a(\varphi,\theta,u)$. Подставляя значения функции b, c в предыдущие равенства, получим единственную функцию $a(0,\varphi,\theta,u) = 0$.

Откуда имеем $u = h(\varphi,\theta)$, а она может оказаться частным решением системы, либо такого решения нет.

Пусть условие (N_4) $\forall(\rho,\varphi,\theta,u) \in \overline{D}$ выполняется тождественно. Тогда, интегрируя систему (2.2.4) получим, что многообразие решений системы выражается через одно произвольное постоянное. Причем, найденное решение системы (2.2.4), почти всюду в области $\overline{D}$, (кроме точки $\rho = 0$) является непрерывным, а в точке $\rho = 0$ [294-296] возможно имеет место:

а) при $n < 1$ всюду в $\overline{D}$ является непрерывным;

б) при $n \geq 1$ в области D_0 непрерывно, а в точке $\rho = 0$ имеет особенности различного порядка, т.е. логарифмического при $n=1$, или (n-1)-го порядка в случаи $n > 1$.

в) если функция $a(\rho,\varphi,\theta,u)$ в точке $\rho = 0$ имеет нуль порядка n ($n \geq 1$)

$$\lim_{\rho \to o} a(\rho,\varphi,\theta,u) = 0 \ , \ a(\rho,\varphi,\theta,u) = \gamma(\varphi,\theta,u)o(\rho^{n-\lambda}), (0 \leq \lambda < 1), \qquad (M)$$

то решение п.д.- системы (2.2.4) всюду в $\overline{D}$ будет непрерывным.

Действительно пусть условия совместности (N_4) по всем переменным выполняются тождественно. Тогда проинтегрировав последние два уравнения системы (2.2.4) по переменным φ,θ, считая ρ независимым параметром, последовательным приближением получим:

$$u(\rho,\varphi,\theta;u) = \frac{1}{\rho^{n-1}} \cdot h(\rho;u,V(\rho)), \qquad (2.2.5)$$

где $V = V(\rho,u)$- новая неизвестная функция. Далее, дифференцируя обе части (2.2.5) по переменной ρ, подставим её результат в систему (2.2.4), и получим

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{s(\rho,V)}{\rho}, \left(s(\rho,V) = \frac{a - \rho h'_\rho}{h'_V} \right). \qquad (2.2.6)$$

Проверим, что правая часть обыкновенного дифференциального уравнения

(о.д.у.) (2.2.6) не зависит от независимых переменных φ, θ. Для этого, продифференцировав правую часть (2.2.6), по указанным переменным, получим, что оно зависит только лишь от переменного ρ. То есть, получим второе и третье равенства из (N_4). Так как ранее условились, что эти равенства из (N_4) выполняются тождественно, поэтому это действие означает, что правая часть о.д.у. (2.2.6) зависит лишь от переменного ρ. Прежде чем интегрировать о.д.у. (2.2.6), проверим выполнение условия $\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho\dfrac{dV}{d\rho}\right)=0$. Если так, то необходимо $s(0,V)=s_0=0$. В силу [291], о.д.у. (2.2.6) может иметь во всей области непрерывное решение $V=V(\rho,C)$. Подставляя значение $V=V(\rho,C)$ в (2.2.5), а тогда, получаем многообразие решений системы (2.2.5) формулой

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\frac{1}{\rho^{n-1}}h\left[\rho,\varphi,\theta;V(\rho,C)\right].$$

(2.2.7)

При этом, полученное решение системы (2.2.4) в точке $\rho=0$ имеет особенности $(n-1)$- го порядка, а в других точках области является непрерывным.

Теорема 2.6. *Пусть в п.д.- системе (2.2.4)* $a,b,c\in C^1(\overline{D}), u\in C^2(D_0)$. *Если условия совместности (N_4) выполняются, но не тождественно, а также в исходной системы выполняется условии леммы 2, тогда существуют некоторые частные решения системы, либо такого решения нет. Если функции* a,b,c *удовлетворяют условии (M), то либо частное, либо общее решение системы (2.2.4) во всей области будет непрерывным.*

Если выполняются условия из (B), то в точке вырождения система, имеется некоторое частное решение исходной системы. Если условия (N_4) выполняются тождественно, тогда система (2.2.4) разрешима и многообразие её решений определяется формулой (2.2.7). Причём, многообразия решений системы (2.2.4), в виде (2.2.27), в случае $0 \le n < 1$ *в области* $\overline{D}$*, а также при* $n \ge 1$ *в* D_0 *непрерывно, а при* $n \ge 1$ *в точке* $\rho = 0$ *соответственно имеет особенность (n-1)- го порядка и логарифмическую особенность.*

2.2.2. Ещё раз будем рассматривать уравнение в п.д. (см. [295]):

$$\rho^n du = p(x,y,z)dx + q(x,y,z)dy + r(x,y,z)dz, \quad (9)$$

где переход к сферической системе координат аналогично предыдущим, позволяет преобразовать эту п.д. в виде (2.1.3), где a, b, c не зависят от u, т.е.:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}, \ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}, \ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}, \quad (10)$$

при этом условие (N_4) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right), \ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right), \ \frac{\partial b}{\partial \theta} = \frac{\partial c}{\partial \varphi}. \quad (N_0)$$

Первые два равенства условия (N_0) выполняются почти всюду в $\overline{D}$ (кроме точки $\rho = 0$), когда имеет место:

$$\begin{cases} b(\rho,\varphi,\theta) = \rho^{n-1}\left[\alpha(\varphi,\theta) + A'_{\varphi}(\rho,\varphi,\theta)\right] \\ c(\rho,\varphi,\theta) = \rho^{n-1}\left[\beta(\varphi,\theta) + A'_{\theta}(\rho,\varphi,\theta)\right], \end{cases} \quad A(\rho,\varphi,\theta) = \int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\, dt.$$

При этом система (2.2.10) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \alpha(\varphi,\theta) + A'_{\varphi}(\rho,\varphi,\theta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \beta(\varphi,\theta) + A'_{\theta}(\rho,\varphi,\theta) \end{cases}$$

.(2.2.8)

Легко проверить, что выполнение равенства $\dfrac{\partial b}{\partial \theta} = \dfrac{\partial c}{\partial \varphi}$ в (N_0), влечет за собой $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \beta}{\partial \varphi}$. Учитывая это равенство, интегрируем первое уравнение (2.2.8):

$$u(\rho,\varphi,\theta) = \int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\, dt + V(\varphi,\theta). \qquad (2.2.9)$$

Подставляя $u(\rho,\varphi,\theta)$ из (2.2.9) в (2.2.8), получим:

$\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = \alpha(\varphi,\theta)$, $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \beta(\varphi,\theta)$.

Интегрируя эту п.д.- систему по переменным φ,θ, имеем:

$$V(\varphi,\theta) = C + \int_0^{\varphi} \alpha(\varsigma,\theta)d\varsigma + \int_0^{\theta} \beta(0,\tau)d\tau \equiv c + \omega(\varphi,\theta) \in C^1(\overline{D}).$$

Тогда многообразие решений системы (2.2.7) принимает вид:

$u(\rho,\varphi,\theta) = C + A(\rho,\varphi,\theta) + \omega(\varphi,\theta)$ (2.2.10)

Полученная функция вида (2.2.10), являющаяся решением системы (2.2.8), причём оно при $0 \le n < 1$ принадлежит классу $C^2(\overline{D})$, при $n = 1$ в точке $\rho = 0$ имеет логарифмическую особенность:

$$u(\rho,\varphi,\theta) = \int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi,\theta) - a(0,\varphi,\theta)}{t}\, dt + a(0,\varphi,\theta)\ln\rho + \omega(\varphi,\theta) + C, \quad (2.2.11)$$

а при $n \ge 2$ почти всюду в $\overline{D}$ является однозначным и непрерывным (кроме точки $\rho = O$). Для того, чтобы решение системы (2.2.7) всюду в

$\overline{D}$ было непрерывным, необходимо, чтобы $a(\rho,\varphi,\theta)=o(\rho^{n-\lambda}),(0\le\lambda<1)$.

При $n>1$ формула (2.2.11) в точке $\rho=0$ неограниченна и имеет особенность не более, чем (n-1)-го порядка.

Если $a\in C^{n+1}(\overline{D})$ тогда после разложение функции $a(\rho,\varphi,\theta)$ по степеням ρ, по формуле Тейлора имеем:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=C+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_k(\varphi,\theta)}{k-n+1}\left(1-\rho^{k-n+1}\right)-a_{n-1}(\varphi,\theta)\ln\rho+$$

$$+A_n(1,\varphi,\theta)-A_n(\rho,\varphi,\theta)+\omega(\varphi,\theta),\qquad A_n(\rho,\varphi,\theta)=\int_0^{\rho}a_n(t,\varphi,\theta)dt.$$

(2.2.12)

Теорема 2.7. *Пусть в п.д.- системе (2.2.7)* $a,b,c\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(\overline{D}_0)$. *Если условие* ($N_o$) *выполняется* $\forall(\rho,\varphi,\theta)\in\overline{D}$, *то п.д.- система (2.2.7) разрешима и многообразие ее решений выражается формулой (2.2.11). Если же* $a\in C^{n+1}(\overline{D})$, *то многообразие решений системы (2.2.7) выражается формулой (2.2.12). При этом, если в (2.2.7)* n < *1, то решение системы во всей области* $\overline{D}$ *является непрерывным и однозначным. Причем решение системы в точке* $\rho=0$ *при* n = *1 имеет логарифмическую особенность, а при* n > *1 имеет особенность не более чем (n-1)-го порядка, а в остальных точках области* $\overline{D}$ *является непрерывным . Если в п.д.- системе (2.2.7)* $\forall n\ge1$ *выполняются условия (M) и леммы 2, то системы вида (2.2.7)* $\overline{D}$ *будут иметь непрерывное решение.*

2.2.3. Рассмотрим п.д. вида:

$$\rho^n du=a(\rho,\varphi,\theta)s(u)d\rho+\rho\cdot b(\rho,\varphi,\theta)g(u)d\varphi+\rho\cdot c(\rho,\varphi,\theta)h(u)d\theta,$$

равносильной п.д.- системе:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}s(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}g(u),\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}h(u),$$

(2.2.13)

где $a,b,c,s,g,h\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(\overline{D}_0)$.

Условие совместности системы (2.2.13) имеет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)s-\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)g+\dfrac{ab}{\rho^{2n-1}}(s'g-g's)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)s-\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)h+\dfrac{ac}{\rho^{2n-1}}(s'h-h's)=0, \qquad (\mathrm{N}_5)\qquad (\mathrm{N}_2)\\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)h-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)g+\dfrac{bc}{\rho^{2n-1}}(h'g-g'h)=0.\end{cases}$$

Тождественное выполнение условия (N_5) можно рассматривать в следующих случаях:

а) $s'g-g's=0,\quad h's-s'h=0,\quad h'g-g'h=0.$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)=0\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)=0\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)=0\end{cases}.$$

Откуда получаем:

$a=\rho^n\alpha(\rho),\ b=\rho^{n-1}\beta(\varphi),\ c=\rho^{n-1}\gamma(\theta),\ g=h=\lambda S(u),\ \lambda=const.$

При этом в области $\overline{D}$ существует непрерывное решение системы (2.2.13) и выражается формулой:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=S^{-1}\{C+A(\rho)+\lambda B(\varphi)+\lambda C(\theta)\},\qquad (2.2.14)$$

где S^{-1} – обратная к функции $S(u)$ по переменной u.

б) Допустим в (N_5) выполнены равенства:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a}{\rho^n}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right),\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{a}{\rho^n}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right),\ \frac{\partial b}{\partial\theta}=\frac{\partial c}{\partial\varphi}.\qquad (\tilde{\mathrm{N}}_5)$$

В этом случае условия (N_5) выполняются тождественно, если:

$$\begin{cases} b(\rho,\varphi,\theta) = \alpha(\varphi,\theta)\exp(\lambda A(\rho,\varphi,\theta)) \cdot \rho^{n-1} \\ c(\rho,\varphi,\theta) = \beta(\varphi,\theta)\exp(\lambda A(\rho,\varphi,\theta)) \cdot \rho^{n-1} \\ g(u) = h(u) = \left[1+\exp(-S(u))\right]\cdot S(u) \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi}, \quad A(\rho,\varphi,\theta) = \int\limits_{\rho}^{1} \dfrac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\,dt. \end{cases} \qquad (2.2.15)$$

(17)

При этом система (2.2.13) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\rho} = \dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} s(u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi} = \alpha(\varphi,\theta)\exp(\lambda A(\rho,\varphi,\theta))\left[1+\exp(-S(u))\right]s(u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial\theta} = \beta(\varphi,\theta)\exp(\lambda A(\rho,\varphi,\theta))\left[1+\exp(-S(u))\right]s(u).. \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

Интегрируя первое уравнение из (18), получим: Интегрируем первого уравнения системы (2.2.16)

$$S(u) = A(\rho,\varphi,\theta) + V(\varphi,\theta), \qquad (2.2.17)$$

(19)

где V – новая неизвестная функция.

Дифференцируя (2.2.17) по φ,θ, подставим полученный результат в оставшиеся уравнения системы (2.2.16). Тогда получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = \alpha(\varphi,\theta)e^{-\lambda V} \\ \dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \beta(\varphi,\theta)e^{-\lambda V} \end{cases} \qquad (2.2.18)$$

Учитывая, что четвертое равенство (2.2.15) выполняется, то результат интегрирования системы (2.2.18) дает формулу:

$$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left[C+\lambda\omega(\varphi,\theta)\right], \quad \left(\omega'_{\varphi} = \alpha,\ \omega'_{\theta} = \beta\right).$$

При этом многообразие решений исходной п.д.- системы принимает вид:

$$S(u) = A(\rho,\varphi,\theta) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[C + \lambda\omega(\varphi,\theta)\right]. \qquad (2.2.19)$$

Если функция $S(u)$ обратима, то явным решением системы будет:

$$u(\rho,\varphi,\theta) = S^{-1}\left\{A(\rho,\varphi,\theta) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[C + \lambda\omega(\varphi,\theta)\right]\right\}. \qquad (2.2.20)$$

(21)

Аналогично п. 1 имеем, что решение п.д. (2.2.12) при $n<1$ во всей области $\overline{D}$ будет непрерывным. Решение системы вида (2.2.19), либо (2.2.20) в точке $\rho = 0$ при $n = 1$ имеет логарифмическую особенность, а при $n > 1$ имеет особенности не более чем (n-1)-го порядка.

Теорема 2.8. *Пусть в п.д.- системе (2.2.13)* $a, b, c, s, g, h \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(\overline{D}_0)$ *и условия* (N_5) *выполняются тождественно относительно переменных* ρ, φ, θ, u. *Тогда многообразие решений системы (2.2.13) выражается формулами (2.2.14), либо (2.2.20). Причем решение п.д. (2.2.12) в виде (2.2.14) во всей области* $\overline{D}$ *является непрерывным. Что касается функции вида (2.2.20), как решение п.д. (2.2.12), во всей области* $\overline{D}$ *является непрерывной, при* $n \geq 1$ *в* $\overline{D}_0$ *- непрерывной, а в самой точке* $\rho = O$ *она соответственно имеет логарифмическую особенность (при n=1), и особенности порядка (n-1)-го (при n>1).*

Замечание. Если в условии поставленной задачи необходимо потребовать $a(\rho,\varphi,\theta) \in C^{n+1}(\overline{D})$, тогда аналогично п. 1 получим, что многообразие решений системы (2.2.12) представимо следующей формулой:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=S^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n-2}\frac{a_k(\varphi,\theta)}{n-k-1}\left(1-\frac{1}{\rho^{n-k-1}}\right)-a_{n-1}(\varphi,\theta)\ln\rho+\right.$$
$$\left.+A_n(1,\varphi,\theta)-A_n(\rho,\varphi,\theta)+\frac{1}{\lambda}\ln\left[c+\lambda\omega(\varphi,\theta)\right]\right\}. \qquad (2.2.21)$$

При этом легко заметим, что решение системы в точке вырождения $\rho=0$ при $n<1$ в $\overline{D}$, и при $n\geq 1$ в области D_0 является непрерывным, а при $n\geq 1$ в точке $\rho=0$ соответственно имеет логарифмического и $(n-1)$-го порядка
особенностей.

Аналогично формуле (2.2.11) (см. п.1) в (2.2.21) явно выделяется наибольший порядок особенности решения п.д. системы в точке $\rho=0$.

2.2.4. Рассмотрим уравнение в п. д. с сингулярной точке
$\rho^n du=a(\rho,\varphi,\theta)h(\theta,u)du+\rho b(\rho,\varphi,\theta)h(\theta,u)d\varphi+\rho^n c(\rho,\varphi,\theta,u)d\theta$.

равносильной следующей п.д.- системе:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}h(\theta,u),\qquad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}h(\theta,u),\qquad \frac{\partial u}{\partial\theta}=c(\rho,\varphi,\theta,u),$$

(2.2.22)

где $a,b,c,h\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(\overline{D}_0)$.

Условиями совместности системы (2.2.22) будут:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right),\\ \dfrac{\partial c}{\partial\rho}+\dfrac{ah}{\rho^n}\dfrac{\partial c}{\partial u}-\dfrac{ac}{\rho^n}\dfrac{\partial h}{\partial u}-\dfrac{1}{\rho^k}\left(h\dfrac{\partial a}{\partial\theta}+a\dfrac{\partial h}{\partial\rho}\right)=0, & (N_6)(N_3)\\ \dfrac{\partial c}{\partial\varphi}+\dfrac{bh}{\rho^{n-1}}\dfrac{\partial c}{\partial u}-\dfrac{bc}{\rho^{n-1}}\dfrac{\partial h}{\partial u}-\dfrac{1}{\rho^n}\left(h\dfrac{\partial b}{\partial\theta}+b\dfrac{\partial h}{\partial\varphi}\right)=0.\end{cases}$$

Аналогично предыдущим случаям, заметим, что систему (2.2.22) в точке $\rho = 0$ интегрировать нельзя. Поэтому учитывая результаты работы Л.Г.Михайлова- [109], требуем, чтобы выполнялись следующие равенства, как в лемме 2:

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^n \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0, \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0, \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1} \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0. \qquad (M_0)$$

При этом из системы (2.2.22) будем иметь $h(\theta,u) = 0, \quad c(0,\varphi,\theta,u) = 0$. В силу теоремы о системе неявных функций [251], получим: $u = h_1(\theta), u = h_2(\varphi,\theta)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (2.2.22), то она будет некоторым частным решением системы (2.2.22).В противном случае, система (2.2.22) несовместна. Теперь допустим, что условия (N_6) выполняются тождественно.

Заметим, что тождественное выполнение условий (N_6) можно рассматривать частично, либо в общем случае:

а) $a(\rho,\varphi,\theta) \equiv \rho^n \alpha(\varphi), \quad b(\rho,\varphi,\theta) \equiv \rho^{n-1}\beta(\varphi), \ m = const, \ c = const.$

В этом случае полученное решение системы (23) во всей области $\overline{D}$ является непрерывным.

б) Пусть первое равенство (N_6) выполняется. Тогда, интегрируя первую пару уравнений системы (2.2.22), аналогично (2.2.18), получим:

$$H(\theta,u) = V(\theta) + \int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n} + \omega(\varphi,\theta). \quad (24)$$

$$H(\theta,u) = V(\theta) + \omega_0(\rho,\varphi,\theta) \text{ или } H(\theta,u) - \omega_0(\rho,\varphi,\theta) = V(\theta). \qquad (2.2.23)$$

При этом последние два равенства условий (N_6) выполняются тождественно, если функция c($\rho,\varphi,\theta;u$) принимает вид:

$$c(\rho,\varphi,\theta;u) = \left\{\frac{\partial \omega_0}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta} + f\left[\theta; H(\theta,u) - \omega_0(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\} h(\theta,u), \qquad (2.2.24)$$

где $H(\theta,u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\varsigma}{h(\theta,\varsigma)}$, $\frac{\partial\omega_0}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}$, $\frac{\partial\omega_0}{\partial\varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}$.

Результат интегрирования системы (2.2.22) с учетом функции $c(\rho,\varphi,\theta,u)$ вида (2.2.24) сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (о.д.у) вида:

$$\frac{dV}{d\theta}=f(\theta,V) \quad \text{или} \quad dV=f(\theta,V)d\theta, \tag{2.2.25}$$

(26)

где функция $f(\theta,V)$ определяется из формулы (2.2.24) и выражается через функции a,b,c,h. Если о.д.у. (2.2.23) разрешимо в какой-либо форме (явно, либо неявно), и его решение представимо в виде $V=V(C,\theta)$, то многообразие решений исходной системы в случае обратимости функции $H(\theta,u)$ по переменной u, принимает вид:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=H^{-1}\left\{\theta;V(\theta,C)-\int\limits_{\rho}^{1}\frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}dt+\omega(\varphi,\theta)\right\},$$

(27)

либо

$$u(\rho,\varphi,\theta)=H^{-1}\left\{\theta;V(\theta,c)+\omega(\varphi,\theta)+\int\limits_{\rho}^{1}\frac{a^{(n)}(t,\varphi,\theta)-a^{(n)}(0,\varphi,\theta)}{t}dt+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a^{(i)}(0,\varphi,\theta)}{n-i-1}\left(\frac{1}{\rho^{n-i-1}}-1\right)-a^{(n)}(0,\varphi,\theta)\ln\rho\right\},$$

(2.2.26)

где $V(\theta,C)$ - решение о.д.у (2.2.23).

Если в постановке задачи считать $a(\rho,\varphi,\theta)\in C^{n+1}(\overline{D})$, тогда, аналогично предыдущему, многообразие решений системы (2.2.22) представимо в виде:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=H^{-1}\left\{\theta;V(\theta,c)+\omega(\varphi,\theta)+\sum_{i=0}^{n-2}\frac{a_i(\varphi,\theta)}{n-i-1}\left(\frac{1}{\rho^{n-i-1}}-1\right)-\right.$$
$$\left.-a_{n-1}(\varphi,\theta)\ln\rho-A_n(\rho,\varphi,\theta)+A_n(1,\varphi,\theta)\right\}. \qquad (2.2.27)$$

(29)

Теорема 2.9. *Пусть в п.д.- системе (2.2.22)* $a,b,c,h\in C^1(\overline{D})$, $u\in C^2(D_0)$. *Для того чтобы условия* (N_6) $\forall(\rho,\varphi,\theta)\in\overline{D}$ *выполнялись тождественно необходимо и достаточно, чтобы функция* $c(\rho,\varphi,\theta;u)$ *имела вид (2.2.24). Если о.д.у. (2.2.23) для вполне определенной функции* $f(\theta,v)$, *определяемой из (2.2.24) имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие её решений выражается формулами вида (2.2.25), (2.2.26) или (2.2.27). Если условие* (N_3) *выполняется, но не тождественно, тогда возможна система (2.2.22) имеет некоторое частное решение, либо не совместна. Если функции* a,b,c,h *в области* $\overline{D}$ *удовлетворяют условию* (M_1), *тогда система (2.2.22) имеет во всей области непрерывное и однозначное решение.*

2.2.5. Рассмотрим п.д. вида:

$$\rho^n du=a(\rho,\varphi,\theta)h(\varphi,\theta,u)d\rho+\rho b(\rho,\varphi,\theta,u)d\varphi+\rho c(\rho,\varphi,\theta,u)d\theta,$$

где $a,m,b,c\in C^1(D)$, $u\in C^2(\overline{D}_0)$, равносильная п.д.- системе :

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}h(\varphi,\theta,u),\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^{n-1}},\ \frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{c(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^{n-1}} \qquad (2.2.28)$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\rho^n}h\dfrac{\partial c}{\partial u}+\dfrac{\partial c}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho^n}\left(\dfrac{a}{\rho^{n-1}}-n+1\right)\cdot c+\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial a}{\partial \theta}+\dfrac{a}{\rho}\dfrac{\partial h}{\partial \theta}, \\ \dfrac{a}{\rho^n}h\dfrac{\partial b}{\partial u}+\dfrac{\partial b}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho^n}\left(\dfrac{a}{\rho^{n-1}}-n+1\right)\cdot b+\dfrac{h}{\rho}\dfrac{\partial a}{\partial \varphi}+\dfrac{a}{\rho}\dfrac{\partial h}{\partial \varphi}, \qquad (N_7) \qquad (N_4) \\ \rho^{n-1}\dfrac{\partial b}{\partial \theta}+c\dfrac{\partial b}{\partial u}=\rho^{n-1}\dfrac{\partial c}{\partial \varphi}+b\dfrac{\partial c}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Допустим, что условий (N_7) выполняются, но не тождественно. Тогда в силу системы о неявных функциях [251], имеем:

$$u=h_i(\rho,\varphi,\theta), \quad (i=\overline{1,3}) \tag{2.2.29}$$

Если хотя бы одна из функций $u=h_i(\rho,\varphi,\theta)$ удовлетворяет каждому уравнению системы (2.2.28), то она будет некоторым частным решением системы. Иначе говоря, система (2.2.28) несовместна.

Первые два равенства условий (N_7) выполняются тождественно, если функции *b* и *c* имеют вид:

$$\begin{cases} b(\rho,\varphi,\theta,u)=\rho^{n-1}\left\{\dfrac{\partial A}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}+f\left[\varphi;\theta;M(\varphi,\theta,u)-A(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}h(\varphi,\theta,u), \\ .c(\rho,\varphi,\theta,u)=\rho^{n-1}\left\{\dfrac{\partial A}{\partial \theta}-\dfrac{\partial H}{\partial \theta}+g\left[\varphi;\theta;M(\varphi,\theta,u)-A(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}h(\varphi,\theta,u). \end{cases} \tag{2.2.30}$$

В формулах (2.2.30) функции *h*, *g* произвольные, но с другой стороны они выражаются через *a*, *h*, *b*, *c* следующим образом:

$$\begin{cases} f\left[\varphi;\theta;M(\varphi,\theta,u)-A(\rho,\varphi,\theta)\right]=\dfrac{b(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^{n-1}m(\varphi,\theta,u)}-\dfrac{\partial A}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial H}{\partial \varphi}, \\ g\left[\varphi;\theta;M(\varphi,\theta,u)-A(\rho,\varphi,\theta)\right]=\dfrac{c(\rho,\varphi,\theta,u)}{\rho^{n-1}m(\varphi,\theta,u)}-\dfrac{\partial A}{\partial \theta}+\dfrac{\partial H}{\partial \theta}. \end{cases}, \tag{2.2.31}$$

(33)

$$H(\varphi,\theta,u)=\int_{u_0}^{u}\frac{d\xi}{h(\varphi,\theta,u)}, \quad A(\rho,\varphi,\theta)=\int_{\rho}^{1}\frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}dt.$$

(34)

Далее в процессе интегрирования первого уравнения системы (2.2.28) требуется, чтобы $a(\rho,\varphi,\theta)$ удовлетворяла условию (M) и вводя замену

$$M(\varphi,\theta,u)-A(\rho,\varphi,\theta)=V(\varphi,\theta), \qquad (2.2.29)$$

(35)

преобразуем систему уравнений (2.2.28) в нелинейную п.д.- систему с регулярными правыми частями:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=f(\varphi,\theta,v),\ \frac{\partial V}{\partial \theta}=g(\varphi,\theta,v). \quad (2.2.30)$$

(36)

Тогда третье равенство условия (N_3) для системы в п.д. (2.2.30) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}+g\frac{\partial f}{\partial V}-\frac{\partial g}{\partial \varphi}-f\frac{\partial g}{\partial V}=0. \qquad (N_5 \qquad (N_5)$$

Если условие совместности (N_7) выполняется, но не тождественно, тогда можем найти функцию $V=V(\varphi,\theta)$. Если эта функция удовлетворяет п.д.- систему (2.2.30), то она будет единственным, либо некоторым частным решением системы. В противном случае системы уравнений (2.2.28) и (2.2.30) считаются несовместными.

Пусть условие (N_7) относительно (φ,θ,V) выполняется тождественно. Тогда процесс интегрирования системы (2.2.30) приводит к интегрированию о.д.у. вида (2.2.23):

$$\frac{d\psi}{d\theta}=h(\theta,\psi) \text{ или } d\psi=h(\theta,\psi)d\theta. \qquad (2.2.31)$$

(37)

Если о.д.у. (2.2.31) имеет решение, например, в виде $\psi = \psi(C;\theta)$ (см. [102-109],[295]), тогда многообразия всех решений п.д.- системы (2.2.28) и (2.2.30) выражаются следующей формулой :

$$V = F(\varphi,\theta) + \psi(C,\theta) \quad \text{и} \quad u(\rho,\varphi,\theta) = H^{-1}\{\varphi;\theta;A(\rho,\varphi,\theta) + F(\varphi,\theta) + \psi(C,\theta)\} \tag{2.2.32}$$

Очевидно, что в формуле (2.2.32) функция $A(\rho,\varphi,\theta)$ и решение исходной системы, при $n < 1$ в $\overline{D}$ а также при $n \geq 1$ в области D_0 является непрерывным. А в точке $\rho = 0$, при $n \geq 1$ соответственно имеет логарифмическую особенность и особенности $(n\text{-}1)$-го порядка. Поэтому в зависимости от типа функции $H(\cdot)$ и $H^{-1}(\cdot)$, порядок особенности решения системы в точке $\rho = 0$ либо может ухудшаться, либо, наоборот, улучшаться. При этом имеет место

Теорема 2.10. *Пусть в п.д.системе (2.2.28)* $a,b,c,h \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(\overline{D}_0)$. *Если условие* ($N_6$) *почти всюду в* $\overline{D}$ (*кроме точки* $\rho = 0$) *выполняется, но не тождественно, тогда данная система может иметь некоторые частные решения, либо несовместна. Для того, чтобы первые два равенства условий из* (N_6) *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(\rho,...)$ *и* $c(\rho,...)$ *имели вид (2.2.30). Если п.д.-система вида (2.2.30) имеет решение тогда исходная система (2.2.28) также разрешима и многообразие ее решений выражается формулой (2.2.32). При этом замена вида (2.2.29) приводит сингулярную систему уравнений (2.2.28) в регулярную нелинейную п.д.- систему (2.2.30), изученного в п.2.*

Замечание. Аналогично предыдущим случаям, можно оценивать функцию $A(\rho,\varphi,\theta)$ в классе Гёльдера, например, если $a \in H_\gamma$, $(a^i \in H_{\gamma_i})$,

$$|a(\rho,\varphi,\theta)-a(0,\varphi,\theta)| \le K|\rho|^\gamma$$
$$\left|a^{(i)}(\rho,\varphi,\theta)-a^{(i)}(0,\varphi,\theta)\right| \le K_i|\rho|^{\gamma_i} \quad (i=1,n),\ K,K_i=const,\ 0\le\gamma,\gamma_i\le 1,$$

тогда имеем:

$$A(\rho,\varphi,\theta)=\int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}dt=\int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)-a(0,\varphi,\theta)}{t^n}dt-\frac{a(0,\varphi,\theta)}{n-1}\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}-1\right)=$$
$$=\int_\rho^1 \frac{a^{(n)}(t,\varphi,\theta)-a^{(n)}(0,\varphi,\theta)}{t}dt+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a^{(i)}(0,\varphi,\theta)}{n-i-1}\left(\frac{1}{\rho^{n-i-1}}-1\right)-a^{(n)}(0,\varphi,\theta)\ln\rho \le$$
$$\le\int_\rho^1 \frac{\left|a^{(n)}(t,\varphi,\theta)-a^{(n)}(0,\varphi,\theta)\right|}{t}dt+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a^{(i)}(0,\varphi,\theta)}{n-i-1}\left|\frac{1}{\rho^{n-i-1}}-1\right|+\left|a^{(n)}(0,\varphi,\theta)\ln\rho\right|<\infty$$

с точностью до $o\left(|\rho|^\gamma\right)$. В этом случае, в поведение функции *A(…)* явно выявляется и решение исходной задачи.

2.2.6. Рассмотрим уравнение в п.д.

$$\rho^n du=\left[a(\rho,\varphi,\theta)u+f(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\rho+$$
$$+\rho\left[b(\rho,\varphi,\theta)u+g(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\varphi+\rho\left[c(\rho,\varphi,\theta)u+h(\rho,\varphi,h)u^m\right]d\theta,$$

(2.2.33)

где $a,b,c,f,g,h\in C^1(\overline{D})$, $u\in C^2(\overline{D})$, $n\ge 0$, m – произвольное рациональное число.

Данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u+\dfrac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u^m,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u+\dfrac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u^m,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\theta}=\dfrac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u+\dfrac{h(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u^m,\end{cases} \qquad (2.2.34)$$

(40)

для которой условием совместности будет: $P_i u + Q_{ij} u^m = 0, (i = \overline{1,3})$ или

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right)\right]u + \left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{f}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{g}{\rho^{n-1}}\right) + (m-1)\frac{bf-ag}{\rho^{2n-1}}\right]u^m = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right)\right]u + \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{f}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{h}{\rho^{n-1}}\right) + (m-1)\frac{cf-ah}{\rho^{2n-1}}\right]u^m = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right)\right]u + \left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{g}{\rho^{n-1}}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right) + (m-1)\frac{cg-bh}{\rho^{2n-1}}\right]u^m = 0. \end{cases} \quad (N_6)$$

Условие совместности (N_7) можно рассматривать в следующих случаях:

а) Пусть условия (N_7) выполняются, но не тождественно. Тогда, решая их как три алгебраических уравнения, получим $u = 0$ и $u = H_j(\rho,\varphi,\theta)$ $(j = 1,2,3)$. Причем функции $u = H_j(\rho,\varphi,\theta)$ во всей $\overline{D}$ являются регулярными. Легко заметить, что $u = 0$ для системы (2.2.34) является тривиальным решением. Если хотя бы одна из $u = H_j(\rho,\varphi,\theta)$ удовлетворяет системе (2.2.34), то она будет некоторым частным решением данной системы, в противном случае система (2.2.34) несовместна.

б) В этом случае в (N_7) приравняем к нулю каждое слагаемое. Тогда получим, что в системе уравнений (2.2.34) особенность по переменной ρ устраняется и получим регулярное решение данной п.д.системы формулой:

$$u(\rho,\varphi,\theta) = \exp\{\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\}\left[c + (1-m)\Omega_0(\rho,\varphi,\theta)\right]^{\frac{1}{1-m}}, \quad (2.2.35)$$

где $\omega_\rho^{'} = a(\rho),\ \omega_\varphi^{'} = b(\varphi),\ \omega_\theta^{'} = c(\theta)$,

$\frac{\partial \Omega_0}{\partial \rho} = f(\rho)\exp((1-m)\omega_0),\ \frac{\partial \Omega_0}{\partial \varphi} = g(\varphi)\exp((1-m)\omega_0),\ \frac{\partial \Omega_0}{\partial \theta} = c(\theta)\exp((1-m)\omega_0)$.

в) Допустим, что условия (N_7) выполняются тождественно в общей форме:

$P_i(\rho,\varphi,\theta) \equiv 0,\ Q_i(\rho,\varphi,\theta) \equiv 0 \quad (i = 1,2,3)$,

где $P_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right),\quad P_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right),$

$P_3 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right);\ Q_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{f}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{g}{\rho^{n-1}}\right) + (m-1)\frac{bf - ag}{\rho^{2n-1}},$

$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{f}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right) + (m-1)\frac{cf - ag}{\rho^{2n-1}},$

$Q_3 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{g}{\rho^{n-1}}\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{c}{\rho^{n-1}}\right) + (m-1)\frac{cg - bh}{\rho^{2n-1}}.$

Производя замену $u^{1-m} = V$, где V– новая неизвестная функция, преобразуем систему (2.2.34) в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} = (1-m)\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}V + (1-m)\frac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}, \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = (1-m)\frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}V + (1-m)\frac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}, \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = (1-m)\frac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}V + (1-m)\frac{h(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}. \end{cases} \qquad (2.2.36)$$

(42)

Умножая обе части уравнений системы (2.2.36) в $\exp\big((m-1)\omega_1(\rho,\varphi,\theta)\big)$, где

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} = \frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n},\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} = \frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}},\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = \frac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}, \qquad (2.2.37)$$

преобразуем ее в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(e^{(m-1)\omega_1}V\right)=(1-m)\dfrac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}\exp\left((m-1)\omega_1(\rho,\varphi,\theta)\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{(m-1)\omega_1}V\right)=(1-m)\dfrac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}\exp\left((m-1)\omega_1(\rho,\varphi,\theta)\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{(m-1)\omega_1}V\right)=(1-m)\dfrac{h(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}\exp\left((m-1)\omega_1(\rho,\varphi,\theta)\right). \end{cases} \quad . \qquad (2.2.38)$$

(43)

Так как для системы уравнений (2.2.38) условие (N_7), т.е. $Q_i(\rho,\varphi,\theta)\equiv 0$ *(i=1,2,3)*, выполняются, поэтому, в результате интегрирования п.д. системы (2.2.38) и переходя к исходной переменной, имеем:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=e^{\omega_1(\rho,\varphi,\theta)}\left[C+(1-m)\Omega_1(\rho,\varphi,\theta)\right]^{\frac{1}{1-m}}. \qquad (2.2.39)$$

(44)

Учитывая п.1 имеем, что:

$$A(\rho,\varphi,\theta)=\int_\rho^1\frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}dt,$$

$$\Omega_1(\rho,\varphi,\theta)=\int_\rho^1\frac{f(\rho,\varphi,\theta)}{t^n}\exp\left((m-1)\omega_1(t,\varphi,\theta)\right)dt+s(\varphi,\theta),$$

где $\dfrac{\partial s}{\partial\varphi}=\alpha_1(\varphi,\theta)$, $\dfrac{\partial s}{\partial\theta}=\beta_1(\varphi,\theta)$, α_1,β_1- некоторые вполне определенные функции. При этом полученное решение системы при $n < 1$ и $a^{(n)}(0,\varphi,\theta)<0$ во всей области $\overline{D}$ являются непрерывными. Если в этой формуле $a^{(n)}(0,\varphi,\theta)>0$ и $n > 1$, то решение системы в точке $\rho=0$ имеет сильную особенность порядка (n-1), при $n = 1$ оно имеет логарифмическую особенность.

Итак, справедлива

Теорема 2.11. *Пусть в п.д.- системе (2.2.34)* $a,b,c,f,g,h \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(\overline{D}_0)$, m *– произвольное рациональное число. Если условия* (N_7) *выполняются, но не тождественно, тогда п.д.- система (2.2.34), кроме тривиального решения* $u = 0$, *может иметь некоторое частное решение, либо других решений не имеет. Если условие совместности* (N_6) *выполняется тождественно, тогда п.д.- система (2.2.34) разрешима и многообразие ее решений выражается формулами вида (2.2.35), либо (2.2.39). Причем функция вида (2.2.35) при* $n < 1$, $a_0 \le 0$ *во всей области* $\overline{D}$ *является непрерывной, при других значениях* n, $a_0 = a(0,\varphi,\theta)$ *в точке* $\rho = 0$ *решение (2.2.39) неограниченно и имеет особенности степенного порядка.*

2.2.7. Рассмотрим полный дифференциал функции вида

$$\begin{aligned} \rho^n du = a(\rho,\varphi,\theta)u d\rho + \rho\left[b(\rho,\varphi,\theta)u + f(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\varphi + \\ + \rho\left[c(\rho,\varphi,\theta)u + g(\rho,\varphi,h)u^m\right]d\varphi, \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

где $a,b,c,f,g \in C^1(\overline{D}), u \in C^2(\overline{D}_0)$, $n \ge 0$, m – рациональное число.

П.д. (2.2.40) равносильно следующей п.д.- системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u, \quad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u + \dfrac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u^m, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u + \dfrac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u^m \quad . \end{cases} \tag{2.2.41}$$

Условия совместности системы (46) имеют вид:

$$P_i(\rho,\varphi,\theta)u + Q_i(\rho,\varphi,\theta)u^m = 0 \quad (i = 1,2,3).$$

(N_7)

(N_7)

$$\begin{cases} P_1(\rho,\varphi,\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^{n}}\right); \quad P_2=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{a}{\rho^{n}}\right), \\ P_3(\rho,\varphi,\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right); \quad Q_1=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{f}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{af}{\rho^{2n-1}}, \\ Q_2(\rho,\varphi,\theta)=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{g}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{ag}{\rho^{2n-1}}; \quad Q_3=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{g}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{f}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{bg-cf}{\rho^{2n-1}}. \end{cases}$$

(2.2.42)

Допустим, что в п.д.- системе (2.2.41) в случаи ограниченности частные производные функции по всем переменным , выполняются условия [295]-[304]

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{n}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0, \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=0, \quad \lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0. \qquad (M_0)$$

Тогда, учитывая обобщение условии леммы 2, получаем, что при ограниченности частных производных $\frac{\partial u}{\partial\rho},\frac{\partial u}{\partial\varphi},\frac{\partial u}{\partial\theta}$ в системе (2.2.41), может иметь тривиального решения исходной системы.

Допустим, что условия (N_7) выполняются, но не тождественно. Тогда, решая ее алгебраическим способом [251], получим $u(\rho,\varphi,\theta)=0$ и $u(\rho,\varphi,\theta)=H_j(\rho,\varphi,\theta)$ ($j=1,2,3$). Очевидно, что $u(\rho,\varphi,\theta)=0$ является тривиальным решением системы (2.2.41). Если хотя бы одна из функций $u=H_j(\rho,\varphi,\theta)$ удовлетворяет п.д.- систему (2.2.41), то она будет одним из частных решений системы, в противном случае утверждаем, что система (2.2.41), кроме тривиального, других решений не имеет.

Пусть условия (N_7) выполняются тождественно, а также $a(\rho,\varphi,\theta)$ удовлетворяет условию (M_1) . Это требование возможно, если имеет место:

$$\text{а)}\begin{cases} a(\rho,\varphi,\theta)\equiv\alpha(\rho)\rho^{n}, \quad b(\rho,\varphi,\theta)\equiv\beta(\varphi)\rho^{n-1}, \quad c(\rho,\varphi,\theta)\equiv\gamma(\theta)\rho^{n-1} \\ f(\rho,\varphi,\theta)\equiv p(\varphi,\theta)\exp((1-m)A(\rho))\rho^{n-1}, \quad g(\rho,\varphi,\theta)\equiv q(\varphi,\theta)\exp((1-m)A(\rho))\rho^{n-1} \\ \beta(\varphi)q(\varphi,\theta)-\gamma(\theta)p(\varphi,\theta)\equiv 0 \end{cases}$$

(2.2.42)

При этом, в результате интегрирования п.д. системы (2.2.41), получим:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\exp\{A(\rho)+\omega(\varphi,\theta)\}\left[c+(1-m)\Omega(\varphi,\theta)\right]^{\frac{1}{1-m}}\in C^{2}(\overline{D}), \qquad (2.2.43)$$

где $$\omega(\varphi,\theta)=\int_{0}^{\varphi}\beta(t)dt+\int_{0}^{\theta}\gamma(\theta)d\tau,$$

$$\Omega(\varphi,\theta)=\int_{0}^{\varphi}p(t,\theta)dt+\int_{0}^{\theta}q(0,\tau)d\tau.$$

Полученное решение системы (2.2.41) в виде (2.2.43) всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным.

б) Пусть условия (N_7) выполняются при выполнении

$P_i(\rho,\varphi,\theta)\equiv 0$, $Q_i(\rho,\varphi,\theta)\equiv 0$. $(i=1,2,3)$. Тогда

$$\begin{cases} b(\rho,\varphi,\theta)=\left[\alpha(\varphi,\theta)+\dfrac{\partial A}{\partial\varphi}\right]\rho^{n-1}, \\ c(\rho,\varphi,\theta)=\left[\beta(\varphi,\theta)+\dfrac{\partial A}{\partial\theta}\right]\rho^{n-1}, \quad \dfrac{\partial\alpha}{\partial\theta}=\dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi}, \\ f(\rho,\varphi,\theta)=\gamma(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\}\rho^{n-1}, \quad \dfrac{\partial\gamma}{\partial\theta}=\dfrac{\partial s}{\partial\varphi}, \\ g(\rho,\varphi,\theta)=s(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\}\rho^{n-1}, \quad \alpha s-\beta\gamma=0, \end{cases} \qquad (2.2.44)$$

(50)

где $A(\rho,\varphi,\theta)=-\int\limits_{\rho}^{1}\frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^{n}}dt$, α,β,γ,s - вполне определенные и непрерывно-

дифференцируемые в $\overline{D}$ функции.

В этом случае система уравнений в п.д.- система (2.2.41) примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n}}u,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\left[\alpha(\varphi,\theta)+\dfrac{\partial A}{\partial\varphi}\right]u+\gamma(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\}u^{m},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\theta}=\left[\beta(\varphi,\theta)+\dfrac{\partial A}{\partial\theta}\right]u+s(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\}u^{m}.\end{cases}\qquad(2.2.45)$$

Интегрируем первое уравнение этой системы:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=V(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\},\qquad(2.2.46)$$

где V – новая неизвестная функция.

Дифференцируя решение первого уравнения системы по φ,θ, подставим ее результаты в предыдущей системы и получим п.д.- систему с регулярными коэффициентами:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}=\alpha(\varphi,\theta)V+\gamma(\varphi,\theta)V^{m},\\ \dfrac{\partial V}{\partial\theta}=\beta(\varphi,\theta)V+\vartheta(\varphi,\theta)V^{m}.\end{cases}\qquad(2.2.47)$$

(52)

Для регулярной системы уравнений (2.2.47) условие совместности выпол-няется тождественно, и многообразие ее решений принимает вид (2.2.43).

В этом случае многообразие всех решений системы (2.2.41) принимает вид:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\exp\{A(\rho,\varphi,\theta)+\omega_{1}(\varphi,\theta)\}\left[C+(1-m)\Omega_{1}(\varphi,\theta)\right]^{\frac{1}{1-m}},\qquad(2.2.48)$$

где $\frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} = \alpha(\varphi,\theta)$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} = \beta(\varphi,\theta)$, $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta} = \vartheta(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)\omega_1(\varphi,\theta)\}$,

$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \varphi} = \gamma(\varphi,\theta)\exp\{(1-m)\omega_1(\varphi,\theta)\}$, $A(\rho,\varphi,\theta) = -\int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\,dt$.

Теорема 2.12. *Пусть в п.д.- системе (2.2.41)* $a,b,c,f,g \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(\overline{D}_0)$, $n \geq 0$. *Если выполняются условия леммы 2, а также условия* (N_7) *выполняются, но не тождественно, тогда система уравнений (2.2.41), кроме тривиального решения, может иметь некоторое частное, либо особое решение. Для того, чтобы условия* (N_7) *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты системы уравнений имели соответствующие виды (2.2.42) и (2.2.44). Тогда данная система уравнений разрешима и многообразие ее решений выражаются соответственно формулами вида (2.2.46) и (2.2.48). Причем, решение системы вида (2.2.46) во всей* $\overline{D}$ *непрерывно, а решение вида (2.2.48), при* $0 \leq n < 1$ *во всей области* $\overline{D}$, *и в случаи* $n \geq 1$ *в области* D_0 *непрерывно, а в точке* $\rho = 0$ *при* $n \geq 1$ *имеет особенности степенного порядка.*

2.2.8. Рассмотрим уравнение в полный дифференциал (п.д.)

$$\rho^n du = a(\rho,\varphi,\theta)u\,d\rho + \rho b(\rho,\varphi,\theta)u\,d\varphi + \rho\left[c(\rho,\varphi,\theta)u + f(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\theta,$$

где $a,b,c,f \in C^1(\overline{D}), u \in C^2(\overline{D})$, равносильной в п.д.- системе

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{c(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u + \frac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}u^m \tag{2.2.49}$$

Условия совместности системы (2.2.49) имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right), \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)\right]u+\left[\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{f}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{af}{\rho^{2n-1}}\right]u^m=0, \\ \left[\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)\right]u+\left[\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{f}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{bf}{\rho^{2n-2}}\right]u^m=0. \end{cases} \qquad (N_8)$$

Допустим, что в условии (N_8) первое равенство выполняется, а второе и третье - тождественно не выполняются. Тогда, решая $(N_8)_2$, $(N_8)_3$ алгебраи-

ческим способом [251], получим $u=0$ и $u(\rho,\varphi,\theta)=R_j(\rho,\varphi,\theta)$ $(j=1,2)$. Если хотя бы одна из функций $u=R_j(\ldots)$ удовлетворяет системе (2.2.49), то она будет ее частным решением. В противном случае система (2.2.49), кроме тривиального, другие решения не имеет.

Пусть условия (N_8) выполняются тождественно. Этот вопрос рассматри-вается в следующих случаях:

а) $\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)$, т.е. $b(\rho,\varphi,\theta)=\rho^{n-1}\int\limits_{\rho}^{1}\dfrac{a'_{\varphi}(t,\varphi)}{t^n}dt=\rho^{n-1}\dfrac{\partial\tilde{A}}{\partial\varphi}$.

$$\begin{cases} c=\gamma(\theta)\rho^{n-1}, \quad a\equiv\dfrac{a(\rho,\varphi)}{\rho^n} \\ f\equiv f(\rho,\varphi)=\rho^{n-1}\delta(\theta)\exp\left\{(1-m)\tilde{A}(\rho,\varphi)\right\} \end{cases}. \qquad (2.2.50)$$

(55)

При этом система уравнений (2.2.50) принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{a(\rho,\varphi)}{\rho^n}u, \quad \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\tilde{A}_{\varphi}(\rho,\varphi)u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\theta}=\gamma(\theta)u+\delta(\theta)\exp\left\{(1-m)\tilde{A}(\rho,\varphi)\right\}u^m, \end{cases} \qquad (2.2.51)$$

многообразие ее решений непрерывно в $\overline{D}$, и принимает следующий вид:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\exp\left\{\tilde{A}(\rho,\varphi)+\tilde{A}(\theta)\right\}\left[c+(1-m)S(\theta)\right]^{\frac{1}{1-m}},\quad (0\le\varphi,\,\theta\le 2\pi),\ (2.2.52)$$

где $\tilde{A}(\rho,\varphi)=\int\limits_{\rho}^{1}\frac{a(t,\varphi)}{t^n}dt$, $\Gamma(\theta)=\int\limits_{0}^{\theta}\gamma(\varsigma)d\varsigma$, $S(\theta)=\int\limits_{0}^{\theta}\delta(\varsigma)e^{(m-1)\Gamma(\varsigma)}d\varsigma$.

б) Пусть условия (N_7) тождественно выполняются, только в случае:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)=0;\quad \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{c}{\rho^{n-1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)=0,\\ \dfrac{\partial c}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial b}{\partial\theta}=0;\quad \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{f}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{af}{\rho^{2n-1}}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{f}{\rho^{n-1}}\right)+(m-1)\dfrac{bf}{\rho^{2n-2}}=0.\end{cases}$$

Эти равенства выполняются, если:

$$\begin{cases}b(\rho,\varphi,\theta)=\left(\alpha(\varphi,\theta)+A_{\varphi}^{'}(\rho,\varphi,\theta)\right)\rho^{n-1},\quad A(\rho,\varphi,\theta)=-\int\limits_{\rho}^{1}\dfrac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}dt,\\ c(\rho,\varphi,\theta)=\left(\beta(\varphi,\theta)+A_{\theta}^{'}(\rho,\varphi,\theta)\right)\rho^{n-1},\quad \alpha_{\theta}^{'}=\beta_{\varphi}^{'},\\ f(\rho,\varphi,\theta)=\gamma(\theta)\exp\left\{(1-m)(A(\rho,\varphi,\theta)+B(\varphi,\theta))\right\}\rho^{n-1},\quad B(\varphi,\theta)=\int\limits_{0}^{\varphi}a(\tau,\theta)d\tau.\end{cases}$$

(2.2.53)

При этом предыдущая система (2.2.51) принимает вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u,\quad \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\left(\alpha(\varphi,\theta)+A_{\varphi}^{'}(\rho,\varphi,\theta)\right)u\\ \dfrac{\partial u}{\partial\theta}=\left(\beta(\varphi,\theta)+A_{\theta}^{'}(\rho,\varphi,\theta)\right)u+\gamma(\theta)\exp\left\{(1-m)(A(\rho,\varphi,\theta)+B(\varphi,\theta))\right\}u^m\end{cases}.$$

(2.2.54)

Интегрируя систему уравнений (2.2.54), получим:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\exp\left\{A(\rho,\varphi,\theta)+B(\varphi,\theta)\right\}\left[C+(1-m)\Gamma(\theta)\right]^{\frac{1}{1-m}}.\quad (2.2.55)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.13. *Пусть в п.д.- системе (2.2.49)* $a,b,c,f \in C^1(\overline{D})$, $u \in C^2(\overline{D}_0)$. *Если условия леммы 2 и условии совместности системы (N8) выполняются, но не тождественно, то система (2.2.49), кроме тривиального решения, может иметь лишь некоторое частное решение, либо не нулевые решения не имеет. Для тождественного выполнения условия совместности п.д- системы (2.2.49) необходимо и достаточно, чтобы функции* b,c,f *имели соответственно вид (2.2.50), либо (2.2.53). При этом система (2.2.49) разрешима и многообразие ее решений выражается явными формулами (2.2.52) либо (2.2.55).*

Замечание 1. Если учитывать $a(t,\varphi,\theta) \in C^{n+1}(\overline{D})$,

$$A(\rho,\varphi,\theta) = \int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\,dt = \int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)-a(0,\varphi,\theta)}{t^n}\,dt + \frac{a(0,\varphi,\theta)}{n-1}\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}-1\right) =$$

$$= \int_\rho^1 \frac{a^{(n)}(\rho,\varphi,\theta)-a^{(n)}(0,\varphi,\theta)}{t}\,dt + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a^{(k)}(0,\varphi,\theta)}{n-k-1}\left(\frac{1}{\rho^{n-k-1}}-1\right) - a^{(n)}(0,\varphi,\theta)\ln\rho,$$

в случаи $n \geq 2$, то $A(\rho,\varphi,\theta)$ и решение задачи в точке $\rho = 0$ имеет особенность не выше, чем (n-1)-го порядка.

2.2.9. Теперь будем рассматривать случаи, когда изучаемая п.д. имеет вида:

$$\rho^n du = \left[a(\rho,\varphi,\theta)u + f(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\rho + \rho\left[b(\rho,\varphi,\theta)u + g(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\varphi + \rho^n p(\rho,\varphi,\theta,u)d\theta$$

,

где $a,b,f,g,P \in C^1(\overline{D}),\ u \in C^2(D_0),\ n \geq 0$. равносильной следующей п.д.-системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} u + \dfrac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} u^m, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}} u + \dfrac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}} u^m, , \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = p(\rho,\varphi,\theta,u). \end{cases} \qquad (2.2.56)$$

для которой условиями совместности исходной п.д.- системы будут:

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)\right] u + \left[\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{g}{\rho^{n-1}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{f}{\rho^n}\right) + (m-1)\dfrac{ag-bf}{\rho^{2m-1}}\right] u^m = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \rho} + \dfrac{au+bu^m}{\rho^n}\dfrac{\partial p}{\partial u} = \left(\dfrac{a}{\rho^n} + m\dfrac{f}{\rho^n}u^{m-1}\right)p + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{a}{\rho^n}\right)u + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{f}{\rho^n}\right)u^m, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} + \dfrac{bu+gu^m}{\rho^{n-1}}\dfrac{\partial p}{\partial u} = \left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}} + m\dfrac{g}{\rho^{n-1}}u^{m-1}\right)p + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{b}{\rho^{n-1}}\right)u + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{g}{\rho^{n-1}}\right)u^m. \end{cases}$$

(N_9)

Если считать, что данные функции из системы (2.2.56) удовлетворяют условия (M_0), то получим, система (2.2.56) может иметь только лишь тривиальное решение. Если условия (N_9) выполняются, но не тождественно, то может иметь решения $u = 0,\ u = H(\rho,\varphi,\theta)$, либо исходная система никаких других решений не имеет. Поэтому будем требовать тождественного выполнения условий (N_9) [294,295]. А это требование возможно тогда и только тогда, когда

$$b(\rho,\varphi,\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} A(\rho,\varphi,\theta) + \alpha(\varphi,\theta)\right]\rho^{n-1}, \qquad A(\rho,\varphi,\theta) = \int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\,dt$$

(2.2.57)

Производя замену $u^{1-m} = V$, перепишем систему уравнений в п.д. (2.2.56) в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = \alpha(\rho,\varphi,\theta),\ \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \beta(\rho,\varphi,\theta),\ \frac{\partial W}{\partial \theta} = \gamma(\rho,\varphi,\theta,W),\qquad (2.2.58$$

(61)

$$\alpha(\rho,\varphi,\theta) = (1-m)\frac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\},$$

$$\beta(\rho,\varphi,\theta) = (1-m)\frac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}}\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a}{\rho^n}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right)\right),\quad \omega_0(\rho,\varphi,\theta) = \int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}dt + A(\varphi,\theta).$$

А также, делаем замену:

$$s_0(\rho,\varphi,\theta) = (1-m)\int_\rho^1 \frac{f(t,\varphi,\theta)}{t^n}\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\}\ dt + A_1(\varphi,\theta),$$ или

$$s_0(\rho,\varphi,\theta) = \int_\rho^1 \alpha(t,\varphi,\theta)dt + \int_0^\varphi \beta(1,\tau,\theta)d\tau,\qquad \text{где}\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = \frac{\partial\beta}{\partial\rho}$$ преобразуем

систему (2.2.58) к более простому виду.

Условия (N_9) для системы в п.д. (2.2.58) выполняются тождественно, если функция $\gamma(...)$ принимает вид:

$$\gamma(\rho,\varphi,\theta,W) = (m-1)\frac{\partial s_0}{\partial z}W + (1-m)\exp\{-s_0(\rho,\varphi,\theta)\}\ W^{\frac{m}{m-1}}\times$$
$$\times b\left(\rho,\varphi,\exp\{s_0(\rho,\varphi,\theta)\}\ W^{\frac{1}{1-m}}\right)\qquad .\qquad (2.2.59)$$

В этой формуле переходя к исходной неизвестной функции, имеем:

$$p(\rho,\varphi,\theta,u) = \frac{\partial\omega_0}{\partial\theta}u + \frac{1}{1-n}\left\{\frac{\partial s_0}{\partial\theta} + f\left[\theta;\ \exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\}\ u^{1-m} - s_0(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\{(1-m)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\}\ u^m$$

(2.2.60)

Итак, данная п.д.- система для которой условия (N_9) выполняются тождественно почти во всех точках области $\overline{D}$, кроме точки $\rho = 0$, примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} u + \dfrac{f(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} u^m, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}} u + \dfrac{g(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} u^m, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \theta} u + \dfrac{1}{1-n}\left\{ \dfrac{\partial s_0}{\partial \theta} + f\left[\theta;\ \exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\}\ u^{1-m} - s_0(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\} \times \\ \qquad \times \exp\{(1-m)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\} u^m. \end{cases} \tag{2.2.61}$$

Интегрируя первую пару уравнений системы в п.д. – системы (2.2.61), делаем замену

$$\exp\{(m-1)\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\}\, u^{1-m} - \vartheta_0(\rho,\varphi,\theta) = \psi, \tag{2.2.62}$$

где $\psi = \psi(\theta)$ - новая неизвестная функция. Далее подставим результат в третье уравнение системы (2.2.61) и получим о.д.у. вида (2.2.31), где функция $f(\psi,\theta)$ определяется через данные функции из (2.2.60). Если о.д.у. (2.2.31) имеет какое-нибудь решение вида $\psi = \psi(c,\theta)$, тогда п.д.-система (2.2.58) также разрешима, и многообразие её решений определяется следующей формулой:

$$u(\rho,\varphi,\theta) = \left[s_0(\rho,\varphi,\theta) + \psi(c,\theta)\right]^{\frac{1}{1-n}} \cdot \exp\{\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\},$$

(2.2.63)

где $\psi(c,\theta)$ - решение о.д.у. вида (2.2.31).

Аналогично предыдущим пунктам, функция $A(\rho,\varphi,\theta)$ в точке $\rho = 0$ имеет особенность *(n-1)*-го порядка, поэтому ω_0 и s_0 в точке $\rho = 0$ имеют особенности степенного порядка, а в остальных точках $\overline{D}$ являются однозначными и непрерывными.

Теорема 2.14. *Пусть в п.д.- системе (2.2.58)* $a,b,f,g,P\in C^1(\overline{D})$, $u\in C^2(\overline{D}_0)$. *Если условия* (N_9) *выполняются, но не тождественно, то система (2.2.58) имеет некоторое частное решение, либо не совместна. Для того, чтобы условия* (N_9) *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(\rho,\varphi,\theta)$ *и* $p(\rho,\varphi,\theta)$ *соответственно имели вид (2.2.57) и (2.2.60). Если о.д.у. вида (2.2.31) имеет решение, тогда система (2.2.58) также разрешима и многообразие всех её решений выражается явной формулой (2.2.63). При этом полученное решение системы (2.2.58) при* $n\geq 1$ *в точке* $\rho=0\in\overline{D}$ *не ограниченно, имеет логарифмическую особенность и особенность не более, чем (n-1)-го порядка, а в других точках области* $\overline{D}$ *- является непрерывным.*

2.2.10. Теперь рассмотрим п.д. вида

$$\rho^n du=\left[a(\rho,\varphi,\theta)u+b(\rho,\varphi,\theta)u^m\right]d\rho+\rho^n q(\rho,\varphi,\theta,u)d\varphi+\rho^n p(\rho,\varphi,\theta,u)d\theta,$$

равносильной п.д.- системе (см. [295])

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u+\dfrac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u^m,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=q(\rho,\varphi,\theta,u),\quad \dfrac{\partial u}{\partial\theta}=p(\rho,\varphi,\theta,u).\end{cases}, \tag{2.2.63}$$

где $a,b,q,p\in C^1(\overline{D}),\ u\in C^2(\overline{D}_0),\ n\geq 0$, m – произвольное рациональное число.

Условия совместности системы (2.2.63) имеют вид:

$$\begin{cases} q'_\rho + \left(\dfrac{a}{\rho^n}u + \dfrac{b}{\rho^n}u^m\right)q'_u = \left(\dfrac{a}{\rho^n} + \dfrac{mb}{\rho^n}u^{m-1}\right)q + \left(\dfrac{a'_\varphi}{\rho^n}u + \dfrac{b'_\varphi}{\rho^n}u^m\right), \\ p'_\rho + \left(\dfrac{a}{\rho^n}u + \dfrac{b}{\rho^n}u^m\right)p'_u = \left(\dfrac{a}{\rho^n} + \dfrac{mb}{\rho^n}u^{m-1}\right)p + \left(\dfrac{a'_\theta}{\rho^n}u + \dfrac{b'_\theta}{\rho^n}u^m\right), \\ q'_\theta + p\cdot q'_u = p'_\varphi + q\cdot p'_u. \end{cases} \qquad (N_{10})$$

Если для коэффициентов системы (2.2.63) выполняются пределы

$\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^n \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0,\ \lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1} \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 0,\ \lim\limits_{\rho\to 0}\left(\rho^{n-1} \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) = 0$, то, возможно, существует некоторое частное решение системы, либо такого вида решения нет.

Если функциональные равенства (N_{10}) выполняются, но не тождественно, и эти соотношения разрешимы относительно неизвестной функции u, причем функций $u = h_i(\rho,\varphi,\theta), (i = 1,2,3)$ удовлетворяют систему (2.2.63), то они будут ее частными решениями. В противном случае система (2.2.63)- несовместна.

Допустим, что в п.д.- системе (2.2.63) функций $a(\rho,\varphi,\theta)$ и $b(\rho,\varphi,\theta)$ - считаются из класса $C^1(\overline{D})$. Тогда, интегрируя первое и второе равенство (N_{10}), как нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, относительно функций $P(\rho,\varphi,\theta,u)$, $Q(\rho,\varphi,\theta,u)$ будем иметь:

$$\begin{cases} q(\rho,\varphi,\theta,u) = \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}u + \\ + \dfrac{1}{1-m}\left\{\dfrac{\partial B}{\partial \varphi} + f\left[\varphi;\ \theta;\ \exp\{(m-1)A(\ldots)\}u^{1-m} - B(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\}u^m, \\ p(\rho,\varphi,\theta,u) = \dfrac{\partial A}{\partial \theta}u + \\ + \dfrac{1}{1-m}\left\{\dfrac{\partial B}{\partial \theta} + g\left[\varphi;\ \theta;\ \exp\{(m-1)A(\ldots)\}u^{1-m} - B(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}\exp\{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)\}u^m, \end{cases}$$

(2.2.64)

$$A(\rho,\varphi,\theta) = \int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\,dt,$$

$$B(\rho,\varphi,\theta) = (1-m)\int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\theta)}{t^n}\exp\{(m-1)A(t,\varphi,\theta)\}^{(m-1)A(t,\varphi,\theta)}\,dt.$$

В этом случае п.д.- система (2.2.63) принимает вид :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u + \dfrac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n}u^m, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \dfrac{\partial A}{\partial \varphi}u + \dfrac{1}{1-m}\left\{\dfrac{\partial B}{\partial \varphi} + f\left[\varphi;\ \theta;\ e^{(m-1)A(\rho,\varphi,\theta)}u^{1-m} - B(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}e^{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)}u^m, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \dfrac{\partial A}{\partial \theta}u + \dfrac{1}{1-m}\left\{\dfrac{\partial B}{\partial \theta} + g\left[\varphi;\ \theta;\ e^{(m-1)A(\rho,\varphi,\theta)}u^{1-m} - B(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}e^{(1-m)A(\rho,\varphi,\theta)}u^m. \end{cases} \quad (2.2.65)$$

В процессе интегрирования первого уравнения (2.2.65), производим замену:

$$\exp\{(m-1)A(\rho,\varphi,\theta)\}u^{1-m} - B(\rho,\varphi,\theta) = V, \quad (2.2.66)$$

(68)

где $V = V(\varphi,\theta)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя (2.2.66) по φ и θ, подставим ее результаты в систему (2.2.65) и получим регулярную п.д. систему:

$$\frac{\partial V}{\partial \rho}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi}=f(\varphi;\theta;V),\quad \frac{\partial V}{\partial \theta}=g(\varphi;\theta;V). \qquad (2.2.67)$$

(69)

В п.д.- системе (2.2.67) функции $f(...)$ и $g(...)$ относительно своих аргументов являются регулярными. Условия совместности системы (2.2.67) по виду сходны с третьим равенством условии (N_{10}). Так, что, аналогично [308]- [312], в случае тождественного выполнения условия $(N_{10})_3$, и интегрируя систему (2.2.67), имеем: $V=V(\varphi,\theta,C)$

.

Подставляя значения функций V в (2.2.66), находим многообразие всех решений системы (2.2.65) в следующей явной формуле:

$$u(\rho,\varphi,\theta)=\left[B(\rho,\varphi,\theta)+V(\varphi,\theta,\tilde{n})\right]^{\frac{1}{1-m}}\exp(A(\rho,\varphi,\theta)) \ . \qquad (2.2.68)$$

Формула (2.2.68), представляющиеся решением системы (2.2.65) относительно своих аргументов, является регулярным вне особой точке, а функция $A(\rho,\varphi,\theta)$ в точке $\rho=0$ при $n\geq 1$, имеет особенности *(n-1)*-го порядка и $e^{A(\rho,\varphi,\theta)}$ в точке $\rho=0$ имеет особенность экспоненциального порядка (аналогично предыдущим п.п. 1-8).

Теорема 2.14. Пу*сть в п.д.- системе (2.2.65)* $a,b,p,q\in C^1(\overline{D})$, $u\in C^2(D_0)$, *m – произвольное рациональное число. Если условия* (N_{10}), *относительно* ρ,φ,θ,u, *выполняются, но не тождественно, тогда возможно имеется некоторое частное решение системы как функции* $u=u(\rho,\varphi,\theta)$, *либо система (2.2.65) несовместна. Для тождественного выполнения условия* (N_{10}) *необходимо и достаточно, чтобы функции* $p(\rho,\varphi,\theta,u)$ *и* $q(\rho,\varphi,\theta,u)$ *имели вид (2.2.64). Если п.д.- система (2.2.67) интегрируема, то исходная система (2.2.65) также разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (2.2.68). При этом, решение системы (2.2.65) в случаи* $n<1$ *всюду в области* $\overline{D}$, *и при* $n\geq 1$ *в*

области D_0 *является непрерывными. А в самой точке* $\rho = 0$ *при* $n \geq 1$ *имеет особенности показательного порядка*.

Пример. В частности для сингулярной п.д.- системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \left(\dfrac{2}{\rho} - \dfrac{\varphi\,\theta}{\rho^2} \right) \cos^2 u, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = \left(3\varphi^2\theta^2 + \theta\left(\dfrac{1}{\rho} - 1 \right) \right) \cos^2 u \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = \left(2\varphi^3\theta + 3\theta^2 + \varphi\left(\dfrac{1}{\rho} - 1 \right) \right) \cos^2 u \end{cases}$$

условия совместности выполняются тождественно, и многообразия её решений определяется формулой вида

$$u(\rho,\varphi,\theta) = arctg\left(\frac{1}{\rho}\left[\varphi \cdot \theta \cdot (\rho - 1) + \rho \cdot (C - 2\ln\rho + \varphi^3 \cdot \theta^2 + \theta^3) \right] \right).$$

Заметим, что решение данной системы во всей области $\overline{D}$, включая особую точку $\rho = 0$, является непрерывным и однозначным.

§ 2.3. Формулы представления решений системы с произвольным числом независимых переменных с сингулярной точкой

2.31. Пусть задан полный дифференциал в многомерном пространстве

$$\rho^m du = \sum_{k=1}^{n} p_k(x,u)dx_k, \ (k = \overline{1,n}),$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ p_k(x,u) \in C^1(\overline{D}),\ u \in C^2(D_0),\ \rho^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

равносильной п.д.- системе [293,295]

$$\rho^m \frac{\partial u}{\partial x_k} = p_k(x,u), (k = \overline{1,n}), \quad \text{либо} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{p_k(x,u)}{\rho^m}, \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ (k = \overline{1,n}),$$

(2.4.1)

причём условиями ее совместности будут:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p_k}{\rho^m}\right)+\frac{p_i}{\rho^{2m}}\frac{\partial p_k}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{p_i}{\rho^m}\right)-\frac{p_k}{\rho^{2m}}\frac{\partial p_i}{\partial u}=0,\ \ (i,k=\overline{1,n};\ i\neq k)\,.$$

(N_{11})

Переходя к сферическим координатам

$$\begin{cases} x_1=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1}, \quad x_2=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_3=\rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2},..., \quad x_n=\rho\cos\varphi_1, \end{cases}$$

преобразуем исходную систему (2.4.1) к виду (2.1.4) вида:

$$\rho^m\frac{\partial u}{\partial\rho}=a_1(\rho,\varphi,u),\quad \rho^{m-1}\frac{\partial u}{\partial\varphi_k}=a_{k+1}(\rho,\varphi,u),\ \varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})\ \ (k=\overline{1,n-1}),$$

(2.4.2)

где

$$\begin{aligned} a_1(\rho,\varphi,u)&=p_1\sin\varphi_1...\sin\varphi_{n-1}+p_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1}+...+p_{n-1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2+a_n\cos\varphi_1,\\ a_2(\rho,\varphi,u)&=p_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1}+p_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}+...+\\ &\quad+p_{n-1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2-p_n\sin\varphi_1,\\ a_3(\rho,\varphi,u)&=a_1\sin\varphi_1\cos\varphi_2...\sin\varphi_{n-1}+...+a_{n-2}\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3-a_{n-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2,\\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ a_n(\rho,\varphi,u)&=p_1\sin\varphi_1...\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}-p_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2...\sin\varphi_{n-1}\quad, \end{aligned}$$

Тогда условия совместности (N_{11})примут вид :

$$\begin{cases} \rho^{m-1}\dfrac{\partial a_1}{\partial\varphi_k}+a_{k+1}\dfrac{\partial a_1}{\partial u}-a_1\dfrac{\partial a_{k+1}}{\partial u}-\rho^{m-1}\left(\rho\dfrac{\partial a_{k+1}}{\partial\rho}-(m-1)a_{k+1}-\dfrac{\partial a_1}{\partial\varphi_k}\right)=0, \\ \rho^{m-1}\dfrac{\partial a_{k+1}}{\partial\varphi_j}+a_j\dfrac{\partial a_{k+1}}{\partial u}-\rho^{m-1}\dfrac{\partial a_j}{\partial\varphi_{k+1}}-a_{k+1}\dfrac{\partial a_j}{\partial u}=0,\ (j,k=\overline{1,n-1}). \end{cases}$$

(N_{12}

Легко заметить, что для системы (2.4.2) в сингулярной точке $\rho=0$ нельзя задавать условия задачи Коши, ибо при $\rho=0$ из системы (2.4.2) автоматически получаются соотношения: $a_1(0,\varphi,u)=0,...,a_{k+1}(0,\varphi,u)=0$; из них, кстати, могут быть найдены одно либо несколько искомых функции $u=H_i(\varphi)\in C^1(D),\ (i=1,2,...,n)$. При этом, в постановке задачи

было принято: $a_1(\rho,\varphi,u),...,a_n(\rho,\varphi,u) \in C^1(\overline{D})$ заданные, а $u(\rho,\varphi) \in C^1(D_0)$ и её производные, по всем переменным считаются ограниченным. С другой стороны, при $\rho = 0$ из уравнений (N_{12}) имеем, что $a_{k+1}(0,\varphi,u) = c(0,\varphi)\, a_1(0,\varphi,u)$, $(k = \overline{1,n-1})$, причём $c(0,\varphi) \neq 0$. Из предыдущей можно найти функций $u = H_k(\varphi)$, которые могут быть частными решениями исходной системы. Если далее считать, что $\rho \neq 0$, то получаем, что задача Коши с заданием при $\rho \neq 0$ для системы (2.4.2) может быть поставлена в виде:

$$u = u_0 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0,\ \varphi_k = \varphi_k^{(0)}\ (0 \le \varphi_k^{(0)} \le 2\pi, \quad 0 < \rho = \rho_0 \le 1). \tag{2.4.3}$$

Пусть условия (N_{12}) выполняются, но нетождественно. Тогда решая систему (N_{12}), как отдельные системы C_n^2- алгебраических уравнений и применяя к ним теорему существования о неявных функций, найдём C_n^2 решений: $u = F_j(\rho,\varphi)$, $j = 1,2,...,C_n^2$ (см.[293-296]). После этого рассмотрим следующие возможные случаи;

а) Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет п.д.- системе (2.4.2), то она будет некоторым частным её решением. В противном случае система (2.4.2)- несовместна.

б) Если некоторая часть из (N_{12}) выполняется тождественно, а другая часть -нетождественно, то для второй части системы сможем требовать выполнение условий из а). При этом, получаем некоторые другие частные решения системы.

Теперь допустим, что условия (N_{12}) выполняются тождественно, и кроме того потребуем, чтобы функции $a_k(\rho,\varphi,u)$ $(k = \overline{1,n})$ удовлетворяли условиям (М):

1) $a_k(\rho,\varphi,u)\in C^1(\overline{D})$, $|a_k(\rho,\varphi,u)|\le K$, $\frac{\partial a_k}{\partial u}\neq 0, (k=1,2,...)$; (*K=const.)*

2) Как следует из условий; 1), функции $a_k(\rho,\varphi,u)$ по переменной ρ будут удовлетворять условию Гёльдера, т.е. $|a_k(\rho,\varphi,u)-a_k(o,\varphi,u)|\le L_k|\rho|^{\lambda}(0\le\lambda<1)$; **3)**существуют числа $a,b,$ такие, что при $|x-x_0|\le a,$ $|u-u_0|\le b,$ и достаточно малом числе $h=\min\left(a,\frac{b}{K}\right)$ обеспечивается единственное решение задачи Коши для исходной системы (2.4.2) [295]. Тогда имеет место

Теорема 2.15. *Пусть в п.д.- системе (2.4.2)* $a_k\in C^1(\overline{D})$ $(k=\overline{1,n})$, $u\in C^2(D_0)$, *и кроме того выполняются все три условия (М). Если условия совместности* (N_{12}) *выполняются, но нетождественно, тогда, могут, существовать только некоторые частные решения п.д.- системы (2.4.2)* $u=u_j(\rho,\varphi_1,...,\varphi_{n-1})$ $(j=\overline{1,n-1})$. *Пусть условия* (N_{12}) *выполняются тождественно; тогда существует единственное решение задачи Коши с заданием вне точки* $\rho=0$ *для системы (2.4.2), причём тождественное выполнения этой совокупности условий* (N_{12}) *являются необходимым и достаточным .*

Доказательство. Аналогично [293]-[296], легко получить необходимое условие существование решений системы (2.4.2).Поэтому надо доказать только достаточность условий существования решений системы. Интегрируя *(n-1)* уравнений системы (2.4.2) (кроме первого уравнения) по переменным $(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})$, имеем:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho^{m-1}}H(\rho,\varphi,Z(\rho)), \qquad (2.4.4)$$

где $Z(\rho)$ - новая неизвестная функция. Потребуем, чтобы функция вида (2.4.4) удовлетворяла первому уравнению системы (2.4.3). Тогда это условие даст нам возможность определить функцию $Z(\rho)$. Дифференцируя (2.4.4) по переменной ρ и подставляя результат в систему (2.4.2), получим (о.д.у.) вида:

$$\frac{dZ}{d\rho}=\frac{a_1+(m-1)H-\rho H'_\rho}{\rho H'_Z} \quad \text{или} \quad \frac{dZ}{d\rho}=\frac{f(\rho;Z)}{\rho},\left(f(\rho;Z)=\frac{a_1+(m-1)H-\rho H'_\rho}{H'_Z}\right) \quad . \tag{2.4.5}$$

Легко проверить, что правая часть о.д.у. (2.4.5) не зависит от переменных $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\frac{a_1+(m-1)H-\rho H'_\rho}{\rho H'_Z}\right)\equiv 0 \quad ,(k=\overline{1,n-1}).$$

Интегрируя о.д.у. (2.4.5) по переменной ρ, имеем $Z=Q(\rho,C)$, то есть $Z=Q(\rho,u_0)$. Тогда единственное решение задачи Коши для системы (2.4.2) имеет вид

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho^{m-1}}H\big(\rho,\varphi,Q(\rho,u_0)\big). \tag{2.4.6}$$

При этом легко заметить, что решение системы (2.4.2) почти всюду в области $\overline{D}$ является непрерывным, а в точке $\rho=0$ имеет особенности (*m-1*)- го порядка. Для того чтобы всюду в области $\overline{D}$ получить непрерывное решение п.д.- системы (2.4.2), необходимо, чтобы функции $a_1(\rho,\varphi,u)$ и $H(\rho,\varphi,Q(\rho,u_0))$

в точке $\rho=0$ удовлетворяли условию:

$$\lim_{\rho\to 0}a_1(\rho,\varphi,u)=0, \qquad \text{либо} \qquad a_1(\rho,\varphi,u)=\alpha(\varphi,u).0(\rho^{m-\lambda}),(0\le\lambda<1). \tag{M$_1$}$$

Далее в работе будут рассмотрены случаи, когда п.д.- система (2.4.2) решается явно либо в квадратурах.

2.4.2. Рассмотрим линейный однородный полный дифференциал функции произвольного числа переменных $\rho^m du = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,dx_i,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, задание которого равносильно п.д.-системе

$$\rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i(x), \quad (i = 1,2,\ldots,n), \qquad \text{либо} \qquad \rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i(x) \quad , \tag{2.4.7}$$

где $p_i(x) \in C^1(\overline{D})$, $u(x) \in C^2(D_0)$, D_0 -n-мерный шар, не содержащий точку $x = 0$. Условия совместности п.д.– системы (2.4.7) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p_j(x)}{\rho^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{p_i(x)}{\rho^m}\right), (i, j = \overline{1,n}), i \neq j\,. \qquad (\mathrm{N}_{13})$$

Для непрерывности п.д.- системы (2.4.7) всюду в $\overline{D}$ достаточно, чтобы в точке $\rho = 0$ выполнялись условия:

$$p_i(x) = o(\rho^{m-\lambda}).\ (0 \le \lambda < 1)\ , (i = 1,2,\ldots,n)\,. \qquad (\mathrm{M}_2)$$

Аналогично [293-300] в п.д.- системе (2.4.7), если перейти к n-мерной сферической системе координат, то получим:

$$\rho^m \frac{\partial u}{\partial \rho} = a_1(\rho, \varphi)\,, \quad \rho^{m-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi_k} = a_{k+1}(\rho, \varphi),\ (\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_{n-1})\,, (k = \overline{1, n-1})\,. \tag{2.4.8}$$

При этом, условия совместности (N_{13}) для системы (2.4.8) преобразуются к виду

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_{k+1}} = \rho \frac{\partial a_{k+1}}{\partial \rho} - (m-1)a_{k+1},\ \frac{\partial a_i}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \varphi_i}, (i, j = \overline{1, n-1}), i \neq j, k = \overline{1, n-1}$$

(N_{14})

При этом в силу (N_{14}), взаимосвязь между $a_{k+1}(\rho, \varphi)$ и $a_1(\rho, \varphi)$ может быть записана следующими формулами :

$$a_{k+1}(\rho, \varphi) = \rho^{m-1}\left[\beta_{k+1}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi_{k+1}}\left(-\int_{\rho}^{1} \frac{a_1(t, \varphi)}{t^m} dt\right)\right],\ (k = \overline{1, n-1}),$$

(2.4.9) где $\beta_{k+1}(\varphi)$ - некоторые вполне определённые функции. После этого система

(2.4.8) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a_1(\rho, \varphi)}{\rho^m},\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_{k+1}} = \beta_{k+1}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi_{k+1}}\left(-\int_{\rho}^{1} \frac{a_1(t, \varphi)}{\rho^m} dt\right), (k = \overline{1, n-1}).$$

(2.4.10)

Заметим, что при выполнении условий $\frac{\partial a_i}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial a_j}{\partial \varphi_i}$, получаются соотношения

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \varphi_j} = \frac{\partial \beta_j}{\partial \varphi_i}, (i, j = \overline{1, n-1}), (i \neq j)\ . \qquad (2.4.11)$$

Аналогично [308], [309], процесс интегрирования системы (2.4.10) можно начинать с любого её уравнения, и при этом многообразия решений можно отличать с точностью до произвольного постоянного. Поэтому интегрирование систему (2.4.10) можно начинать с первого её уравнения. Теперь интегрируя первое уравнение п.д.- системы (2.4.10) по переменной ρ, (переменные $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})$ -считаются параметрами) получим:

$$u(\rho, \varphi) - A(\rho, \varphi) = V,\quad (A(\rho, \varphi) = -\int_{\rho}^{1} \frac{a_1(t, \varphi)}{\rho^m} dt), \qquad (2.4.12)$$

где $V = V(\varphi),\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})$ -новая неизвестная функция. Дифференцируя обе части равенства (2.4.12) по переменным φ_k ($k=1,2,...,n-1$) и подставляя результаты в (2.4.7), получаем регулярную п.д.- систему:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \beta_k(\varphi), (k = \overline{1, n-1}) \ . \qquad (2.4.13)$$

Учитывая выполнение условий совместности п.д.- системы (2.4.13), интегрируем систему, и получим:

$$u(\rho, \varphi) = C + \Phi(\varphi) + A(\rho, \varphi), \quad (\Phi(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\varphi_k} \beta_k(0,0,...0, \zeta_k, \varphi_{k+1}, ..., \varphi_{n-1}) d\zeta_k) \ ,$$

(2.4.14)

Поскольку в п.д.- системе (2.4.13), при $m<1$, либо $a_1(\rho, \varphi) = o(\rho^{m-\lambda})$, где λ – сколь угодно малая величина, поэтому решение системы всюду в области $\overline{D}$ будет непрерывным и однозначным. Тогда многообразие решений п.д.- системы (2.4.7) всюду в $\overline{D}$ (кроме точки $\rho = 0$) будет непрерывным , а в точке $\rho = 0$, при $m=1$ имеет логарифмическую особенность, а при $m>1$ особенности $(m-1)$-го порядка. Допустим, что в внешней части n- мерного шара $\overline{D}$, то есть $D^- = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > \rho^2, (1 \le \rho < \infty), 0 \le \varphi \le 2\pi$ функции $a_k(\rho, \varphi)$ $(k = \overline{1, n})$ удовлетворяют условиям разрешимости регулярной п.д.- системы (2.4.13). Потребуем, чтобы при $\rho \to \infty$ (см.[296]);

1) функции $a_k(\rho, \varphi)$ всюду в области $\overline{D}$ были ограничены и однозначны;

2) φ_k -удовлетворяли неравенствам $0 \le \varphi_k \le 2\pi$;

3) существуют конечные пределы $\lim_{\rho \to \infty} a_k(\rho, \varphi)$ $(k = \overline{1, n})$;

4) функция $\frac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^n}$ интегрируема на промежутке $(1,\infty)$ (где $m>1$).

Тогда вне области $\overline{D}=D^-$ все решения п.д.- системы (2.4.8) являются однозначными, непрерывными и определяются формулой :

$$u(\rho,\varphi)=C+\Phi(\varphi)-\int_{\rho}^{\infty}\frac{a_1(t,\varphi)}{t^m}dt,\quad(\rho>1), \qquad (2.4.15)$$

где $\Phi(\varphi)$-определяется из формулы (2.4.14). Таким образом, имеет место:

Теорема 2.16. *Пусть в п.д.- системе (2.4.8)* $a_k(\rho,\varphi)\in C^1(\overline{D})$, *считаются данными функциями, а* $u(\rho,\varphi)\in C^2(\overline{D})$ *неизвестная функция. Для того, чтобы условия совместности п.д.- системы (2.4.7) выполнялись, необходимо и достаточно, чтобы функции* $a_{k+1}(\rho,\varphi)$ *и* $a_1(\rho,\varphi)$ *были взаимосвязаны формулой вида (2.4.9). Тогда п.д. – система (2.4.8) разрешима и многообразия всех ее решений в области* $(\overline{D})$ *выражаются формулой (2.4.14). При этом, если* $0\le m<1$ *,тогда решение системы формулы (2.4.14) в* $(\overline{D})$ *будет однозначным , ограниченным и непрерывным , при m=1 и* $m>1$, $u(\rho,\varphi)$ *из (2.4.13) во всех точках области будет непрерывным , а в точке* $\rho=0$ *соответственно имеет логарифмическую, и (m-1) –го порядка особенности. Если же* $a_1(\rho,\varphi)$ *удовлетворяет условию (M1), тогда функция* $u(\rho,\varphi)$ *как решение системы (2.4.7), всюду в* $(\overline{D})$ *будет непрерывным.*

Теорема 2. 17. *Пусть в п.д.- системе (2.4.7)* $a_k(\rho,\varphi)\in C^1(D^-), u\in C^2(D^-)$ *, условия (2.4.8) и (2.4.10) выполняются при всех значениях точки* $(\rho,\varphi)\in D^-,\ D^-=\left\{(\rho,\varphi),1<\rho^2=\sum x_i^2<\infty\right\}$ *. Тогда вне области* $\overline{D}$ *решение п.д.-*

системы (2.4.7), представленное формулой (2.4.15) будет ограниченным, однозначным и непрерывным .

2.4.3. Рассмотрим линейную п.д. -систему с сингулярной точкой $\rho = 0$

$$\rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i(x)u + q_i(x), (i = \overline{1,n}), x = (x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (2.4.16)$$

(15)

В системе (2.4.16), переходя к n- мерным сферическим координатам, имеем:

$$\begin{cases} \rho^m \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = a_1(\rho,\varphi)u + b_1(\rho,\varphi), \\ \rho^{m-1} \dfrac{\partial u}{\partial \varphi_k} = a_{k+1}(\rho,\varphi)u + b_{k+1}(\rho,\varphi), \quad (k = \overline{1,n-1}) \end{cases}, \qquad (2.4.17)$$

(16)

где функции a_i, b_i-выражаются через p_i, q_i $(i = \overline{1,n})$- из системы (2.4.17) определёнными формулами, $\rho^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$, $m \geq 0$ - n мерный замкнутый шар

$\overline{D} = \left\{ (\rho,\varphi) \middle| 0 \leq \rho^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$, $D_0 = \overline{D} - \{0\}$. Условия совместности п.д.-системы (2.4.17) имеют вид:

$$P_{ij}(\rho,\varphi)\, u + Q_{ij}(\rho,\varphi) = 0, (i, j = \overline{1,n}), i \neq j, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}), \qquad (N_{15})$$

$$P_{1j}(\rho,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\left(\frac{a_1}{\rho^m}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{a_j}{\rho^{m-1}}\right), \quad Q_{1j}(\rho,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi_j}\left(\frac{b_1}{\rho^m}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{b_j}{\rho^{m-1}}\right) + \frac{a_1 b_j - a_j b_1}{\rho^{2m-1}},$$

$$P_{(i+1)j} = \frac{\partial a_{j+1}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \varphi_j}, \quad Q_{(i+1)j} = \frac{\partial b_{j+1}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial b_{i+1}}{\partial \varphi_j} + \frac{1}{\rho^{n-1}}(a_{i+1}b_{j+1} - a_{j+1}b_{i+1}), (i, j = 1,2,...,n-1).$$

Пусть условия совместности (N_{15}) выполняются, но не тождественно, то есть $P_{ij} \neq 0, Q_{ij} \neq 0$. Тогда, решая каждого уравнения из (N_{15}), алгебраическим образом [251], имеем: $u = H_j(\rho,\varphi), (j = 1,2,..., \frac{1}{2}n(n-1))$.

Если хотя бы одна (либо все) эти функций $u = H_j(\rho,\varphi)$ ($j = 1,2,...$) удовлетворяют п.д.- системе (2.4.17), то получим некоторые частные решения системы. В противном случае система (2.4.17) несовместна. Если в (N_{15}) $Q_{ij}(\rho,\varphi) = 0$, $P_{ij}(\rho,\varphi) \neq 0$, либо $P_{ij}(\rho,\varphi) = 0$, $Q_{ij}(\rho,\varphi) \neq 0$, тогда данная система несовместна.

Аналогично работ Л.Г.Михайлова [112-114], для непрерывности решение системы (2.4.17) в области $\overline{D}$ необходимо (при переходе к пределу $\rho \to 0$ в системе (16)), чтобы выполнялись следующие пределы обобщение леммы 2:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0(\rho^{\lambda}), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi_i}\right) = 0(\rho^{\lambda}), \quad (0 \le \lambda < 1),$$

$$\lim_{\rho \to 0}\left(\rho^m \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = 0, \quad \lim_{\rho \to 0}\left(\rho^m \frac{\partial u}{\partial \varphi_k}\right) = 0 . \ (M_0)$$

При этом, достаточно, чтобы на данной области $\overline{D}$ $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \varphi_k}$ - были ограничены. Тем самым, не решая систему (2.4.17), определим поведение системы в точке вырождения. Для тождественного выполнения условия совместности п.д.- системы (2.4.17) необходимо и достаточно, чтобы в условия (N_{15}) выполнялись следующие равенства $P_{ij}(\rho,\varphi) = 0, Q_{ij}(\rho,\varphi) = 0, (i, j = \overline{1,n}), i \neq j$. Эти равенства дают по частям следующие соотношения:

а) $\begin{cases}$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\frac{a_1}{\rho^m}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{a_k}{\rho^{m-1}}\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(\frac{b_1}{\rho^m}\right)-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{b_k}{\rho^{m-1}}\right)=0;a_1b_k-a_kb_1=0,(k=\overline{2,n})$$

$$\frac{\partial a_{j+1}}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial a_{i+1}}{\partial\varphi_j}=0,\quad \frac{\partial b_{j+1}}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial b_{i+1}}{\partial\varphi_j}+\frac{1}{\rho^{m-1}}(a_{i+1}b_{j+1}-a_{j+1}b_{i+1})=0,\ (i,j=\overline{1,n-1}),i\neq j. \qquad (N_{16})$$

б) $P_{ij}(\rho,\varphi)=0,\quad Q_{ij}(\rho,\varphi)=0$ - в целом.

Пусть все равенства из (N_{16}) выполняются, тогда во первых, условия совместности выполняются тождественно, а во вторых, учитывая первые (n-1)

равенств, получим, существования функции $\omega(\rho,\varphi)$- для которой, выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^m},\quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_{k+1}}=\frac{a_{k+1}(\rho,\varphi)}{\rho^{m-1}},\ (k=\overline{1,n-1}),$$

$$\omega_0(\rho,\varphi)=\hat{O}(\varphi)+A(\rho,\varphi),\ A(\rho,\varphi)=-\int_\rho^1\frac{a_1(t,\varphi)}{t^m}dt,\ \hat{O}(\varphi)=\sum_{j=1}^{n-1}\int_0^{\varphi_j}\alpha_j(0,\ldots,t_j,\varphi_{j+1},\ldots,\varphi_{n-1})dt_j$$

Умножив обе части уравнений системы (2.4.17) на $\exp\{-\omega_0(\rho,\varphi)\}$, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\exp\{-\omega_0\}u)=\frac{b_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}\exp\{-\omega_0\},\quad \frac{\partial}{\partial\varphi_k}(\exp\{-\omega_0\}u)=\frac{b_{k+1}}{\rho^{m-1}}\exp\{-\omega_0\}\qquad .$$

(17)

Отдельные равенства из (N_6) будут выполняться, если

$$\begin{cases}a_{k+1}(\rho,\varphi)=\rho^{m-1}\left[\beta_{k+1}(\varphi)+\dfrac{\partial}{\partial\varphi_{k+1}}\left(-\displaystyle\int_\rho^1\frac{a_1(t,\varphi)}{t^m}dt\right)\right], & (2.4.18)\\ b_{k+1}(\rho,\varphi)=\rho^{m-1}\left[\delta_{k+1}(\varphi)+\dfrac{\partial}{\partial\varphi_k}\left(-\displaystyle\int_\rho^1\frac{b_1(t,\varphi)}{t^m}\exp\{-\omega_0(t,\varphi)dt\}\right)\right]\exp(\omega_0(\rho,\varphi)),\ (k=\overline{1,n-1}),\end{cases}$$

где $\delta_{k+1}(\varphi)$ и $\beta_{k+1}(\varphi)$ как a_{k+1} и b_{k+1} определяются из (2.4.18), и считаются вполне определёнными функциями. Тогда многообразие решений системы (2.4.17) определяется формулой:

$$u(\rho,\varphi)=\left[C+\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\varphi_k}\delta_k(0,...,0,t_k,\varphi_{k+1},...,\varphi_{n-1})dt_k-\int_\rho^1\frac{b_1(t,\varphi)}{t^m}\exp\{-\omega_0(t,\varphi)\}dt\right]\exp\{\omega(\rho,\varphi)\}$$

(2.4.20)

Для того, чтобы решение п.д.- системы (2.4.17) в виде формулы (2.4.20) всюду в области $(\overline{D})$ было непрерывно достаточно, чтобы $a_1(\rho,\varphi)$ и $b_1(\rho,\varphi)$

удовлетворяли условиям:

$$a_1(\rho,\varphi)=0\left(\rho^{m-\varepsilon}\right),\quad b_1(\rho,\varphi)=0\left(\rho^{m-\varepsilon}\right),(0\le\varepsilon<1) \qquad (M_1)$$

Если же условия (M_1) считать невыполненными, то $u(\rho,\varphi)$ представленное как решение системы (2.4.17) формулой (2.4.20); при $0\le n<1$ во всех точках области $(\overline{D})$, а также при n=1 и n>1 в D_0 будет непрерывным ,а в точке $\rho=0$ соответственно будет иметь логарифмическую при $n=1$, или *(n-1)*-го порядка особенности при $n>1$. Если же в системе (2.4.17) считать, что $\lim\limits_{\rho\to0}a_1(\rho,\varphi)=0$, $\lim\limits_{\rho\to0}b_1(\rho,\varphi)=0$, то в точке $\rho=0$ логарифмическая особенность отсутствует .Если же за область интегрирования п.д.- системы (2.4.16) взять открытую внешнюю часть области $\overline{D}$, то есть $D^-=\{1<\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\rho^2<\infty\}$, то в D^-, при $\rho=\infty$, получим непрерывное и ограниченное решение п.д.- системы (2.4.16) [296].

Теорема 2.18. ***П****усть в п.д.- системе (2.4.16)* $p_i(x), q_i(x)\in C^1(\overline{D})$, $u(x)\in C^2(D_0)$. *Если условия совместности (N_{15}) для системы (2.4.16) выполняются, но не тождественно, тогда данная п.д.- система может*

иметь, лишь некоторые частные решения. Для того чтобы условия (N_{15}) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы $a_{k+1}(\rho,\varphi)$ *и* $b_{k+1}(\rho,\varphi)$ *соответственно имели вид (2.4.18). При этом п.д.- система (2.4.17) разрешима и многообразие ее решений выражается формулой (2.4.20). Если функции* $a_1(\rho,\varphi)$, $b_1(\rho,\varphi)$ *удовлетворяют условию (M_1), то при тождественном выполнении условия (N_5) решения системы всюду в области* $(\overline{D})$ *будут непрерывными. А также решение п.д.- системы (2.4.17) на данной области будет непрерывным (если* $0 \le n < 1$*) . В точке* $\rho = 0$ *при n=1 и n>1, решение системы соответственно имеет логарифмическую и (n-1) –го порядка особенности. Причём, вне шара радиуса* ρ $(\rho > 1)$ *решение п.д.- системы всюду в* D^- *будет непрерывным и ограниченным.*

2.4.4. Рассмотрим п.д.- систему вида

$$\rho^m \frac{\partial u}{\partial x_i} = p_i(x)u + q_i(x)u^k, (i = \overline{1,n}),,$$

где $p_i(x), q_i(x) \in C^1(\overline{D}), u(x) \in C^2(D_0)$. Переходя к n мерной сферической системе координат, получим равносильную ей п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}u + \frac{b_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}u^k, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_i} = \frac{a_i(\rho,\varphi)}{\rho^{m-1}}u + \frac{b_i(\rho,\varphi)}{\rho^{m-1}}u^k, (i=1,2,\ldots,n-1)$$

.(2.4.21)

Для этой п.д.- системы условия совместности примут вид:

$$P_{ij}(\rho,\varphi)u + Q_{ij}(\rho,\varphi)u^m = 0, (i, j = \overline{1,n}), i \neq j, \qquad (N_{17})$$

$$P_{1j}(\rho,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(\frac{a_1}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{a_k}{\rho^{n-1}}\right), Q_{1j}(\rho,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi_k}\left(\frac{b_1}{\rho^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{b_k}{\rho^{n-1}}\right) + \frac{m+1}{\rho^{2n-1}}(b_1 a_k - a_1 b_k)$$

,

$$P_{(i+1)j}(\rho,\varphi)=\left(\frac{\partial a_j}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial a_i}{\partial\varphi_j}\right)\rho^{n-1},\ Q_{(i+1)j}(\rho,\varphi)=\left(\frac{\partial b_j}{\partial\varphi_i}-\frac{\partial b_i}{\partial\varphi_j}\right)\rho^{n-1}+(m-1)(b_j a_i-b_i a_j).$$

Допустим, что условия (N_{17}) выполняются, но не тождественно. Тогда решая каждое из них как отдельное алгебраическое уравнение, получим:

$$u(\rho,\varphi)=0,\quad u(\rho,\varphi)=\acute{I}_{\ j}(\rho,\varphi),\ (i=1,2,3,....,C_n^2).$$

Легко заметить, что $u(\rho,\varphi)=0$ для п.д.- системы (2.4.21) считается триви-альным решением . Если хотя одна из функций $u(\rho,\varphi)=\acute{I}_{\ j}(\rho,\varphi)$ удовлетворяет п.д.- системе (2.4.21), то она будет ее частным решением. В противном случае утверждаем, что п.д.- система (2.4.21), кроме тривиального, другие решения не имеет.

Пусть теперь условия (N_{17}) выполняются тождественно, то есть $P_{ij}(\rho,\varphi)=0$, $Q_{ij}(\rho,\varphi)\equiv 0,(i,j=1,2,3,...,n),i\neq j$. Откуда, получим функции $a_{k+1}(\rho,\varphi)$, $b_{k+1}(\rho,\varphi)$, ($k=\overline{1,n-1}$) определяющиеся формулами вида (2.4.18), которые могут обеспечить тождественное выполнение условия (N_{17}). Умножая обе части п.д.- системы (2.4.21) на u^{-n} и делая замену $u^{1-n}=v$, преобразуем ее к линейному виду:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=(1-k)\dfrac{a_1(\rho,\varphi)}{\rho^m}v+(1-k)\dfrac{b_1(\rho,\varphi)}{\rho^m},\\ \dfrac{\partial v}{\partial\varphi_i}=(1-k)\left[\alpha_i(\varphi)+\dfrac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(-\int_\rho^1\dfrac{a_1(t,\varphi)}{t^m}dt\right)\right]v+(1-k)\left[\beta_i(\varphi)+\dfrac{\partial}{\partial\varphi_i}\left(-\int_\rho^1\dfrac{b_1(t,\varphi)}{t^m}dt\right)\right],\end{cases}\quad (2.4.22)$$

($i=\overline{1,n-1}$)

где $\alpha_i(\varphi),\beta_i(\varphi)$ ($i=\overline{1,n}$) считаются вполне определёнными функциями. Так как для линейной п.д.- системы (2.4.22) условия (N_{17}) выполняются тождественно, поэтому интегрируя ее, и переходя к прежним переменным, получим:

$$u(\rho,\varphi)=\exp\{\omega_0(\rho,\varphi)\}\left[C+(1-k)F(\rho,\varphi)\right]^{\frac{1}{1-k}}. \qquad (2.4.23)$$

В этой формуле $\omega_0(\rho,\varphi)$ и $F(\rho,\varphi)$ выражаются через интегральные представления функций $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ из системы (2.4.22) .

Теорема 2.19. *Пусть в п.д.- системе (2.4.21)* $a_k(\rho,\varphi), b_k(\rho,\varphi)\in C^1(\overline{D})$, $u(\rho,\varphi)\in C^2(D_0)$. *Если условия совместности (N_{17}) выполняются, но не тождественно, тогда п.д. – система (2.4.21) кроме тривиального, возможно имеет некоторые частные решения, либо других решений не имеет. Для того чтобы условия (N_{17}) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между коэффициентами* $a_k(\rho,\varphi), b_k(\rho,\varphi)$ *определялась формулами вида (2.4.18). Тогда п.д.-система (2.4.21) разрешима и многообразия ее решений выражается явной формулой (2.4.23) . Причём, в случае выполнения условии (M_2), решения исходной системы всюду в* $(\overline{D})$ *непрерывно, а в особой точке* $\rho=0$, *при* $n\geq 1$ *имеет особенности степенного порядка. Если в системе (2.4.21) выполняются (M_o), то возможно существуют некоторые частные решения системы (2.4.21), непрерывные в области* $\overline{D}$.

2.4.5. Рассмотрим нелинейную п.д.- систему

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi)}{\rho^m}p(\varphi,u),\ \frac{\partial u}{\partial\varphi_k}=\frac{b_k(\rho,\varphi,u)}{\rho^{m-1}},(k=\overline{1,n-1}),\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}) \qquad (2.4.24)$$

где $a,p,b\in C^1(\overline{D}), u\in C^2(D_0)$. При этом, условия совместности системы (2.4.24)

принимают вид :

$$\begin{cases} \rho^m \dfrac{\partial b_k}{\partial \rho} + a.p \dfrac{\partial b_k}{\partial u} = \left(a.\dfrac{\partial p}{\partial u} + (m-1)\rho^{m-1} \right) b_k + \rho^{m-1} \left(p \dfrac{\partial a}{\partial \varphi} + a \dfrac{\partial p}{\partial \varphi} \right), \\ \rho^{m-1} \dfrac{\partial b_k}{\partial \varphi_i} + b_i \dfrac{\partial b_k}{\partial u} - \rho^{m-1} \dfrac{\partial b_i}{\partial \varphi_k} - b_k \dfrac{\partial b_i}{\partial u} = 0, (i,k = \overline{1,n-1}), i \neq k. \end{cases} \quad (N_{18})$$

Если C_n^2 соотношений из (N_{18}) выполняются, но не тождественно, то решая их, получим функции $u_j = H_j(\rho,\varphi), (j = 1,2,...)$. Если хотя бы одна из этих функции удовлетворяет системе (2.4.24), то получим некоторые частные решения системы. В противном случае система (2.4.24) несовместна.

Для того, чтобы п.д.- система (2.4.24) всюду в $\overline{D}$ имела непрерывное решение достаточно, чтобы имели места следующие равенства:

$a(\rho,\varphi) = o(\rho^{m-\lambda})$, $b(\rho,\varphi,u) = o(\rho^{m-1-\lambda}), (0 \le \lambda < 1)$, а также

$$\lim_{\rho \to 0} \left(\rho^m \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0, \quad \lim_{\rho \to 0} \left(\rho^{m-1} \frac{\partial u}{\partial \varphi_k} \right) = 0, (k = \overline{1,k-1}). \quad (M_2)$$

При этом из системы (2.4.24) имеем: $p(\varphi,u) = 0$, $b(o,\varphi,u) = 0$. Из последних двух равенств, соответственно имеем $u = h_0(\varphi)$, $u = h_i(o,\varphi), (i = 1,2,...)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет систему (2.4.24), то эти функции будут частными решениями системы. В противном случае, система (2.4.24) не совместна.

Тождественное выполнение условий (N_8) можно рассматривать в различных случаях; то есть, пусть первые (n-1) равенств из (N_{18}) выполняются тождественно. Эти требования исполнимы, если функции $b_k(\rho,\varphi,u)$ относительно функций $a(\rho,\varphi)$, $m(\varphi,u)$ выражаются следующим образом:

$$b_k(\rho,\varphi,u)=\rho^{m-1}\left\{\frac{\partial P}{\partial\varphi_k}-\frac{\partial A}{\partial\varphi_k}+f_k\left[\varphi,P(\varphi,u)-A(\rho,\varphi)\right]\right\}p(\varphi,u),(k=\overline{1,n-1})$$

,(2.4.25)

где $P(\varphi,u)=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\varsigma}{p(\varphi,\varsigma)}$, $A(\rho,\varphi)=-\int\limits_{\rho}^{1}\frac{a(t,\varphi)}{t^m}dt$, f_k - произвольные либо как $b_k(\rho,\varphi,u)$, $a(\rho,\varphi)$ вполне определённые функции (см.[291]-[296]). Далее проинтегрируем первое уравнение п.д.- системы (2.4.24) по переменной ρ :

$$P(\varphi,u)-A(\rho,\varphi)=V\,, \qquad (2.4.26)$$

где $V=V(\varphi,u)$- новая неизвестная функция. Дифференцируя (2.4.26) по переменным φ_k ($k=1,2,\ldots,n-1$), подставим ее результат в остальные уравнения (2.4.24). Учитывая значений функции $b_k(\rho,\varphi,u)$, формулами (2.4.25) преобразуем п.д.- систему (2.4.24) в регулярную переопределённую п.д.- систему

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_k}=f_k(\varphi,V),(k=\overline{1,n-1})\,, \qquad (2.4.27)$$

где функции $f_k(\varphi,V)$ определяются из соотношений (2.4.25). Условия совместности этой системы инвариантны ко второй части условия совместности из (N_{18}). Аналогично предыдущим работам (см. [299]-[305]), допуская правые части п.д.- систему (2.4.27) в различных видах, сможем определить такие классы п.д.- системы для которых условия совместности, будут выполняться тождественно и многообразие их решений находится явно, либо в квадратурах.

Что касается изучения гладкости решений п.д.- системы (2.4.24) вблизи особой точке $\rho = 0$, то оно определяется из функции $A(\rho,\varphi) = -\int_{\rho}^{1} \frac{a(t,\varphi)}{t^m}\, dt.$

Легко определить, что как $A(\rho,\varphi)$, так и решение п.д.- системы (2.4.24) в области $(\overline{D})$ будут непрерывными, когда $0 \le m < 1$. Если m=1, либо m>1, тогда многообразие решений исходной системы в области (D_0) будет непрерывным, а в самой точке $\rho = 0$ имеет логарифмическую особенность, либо (m-1) –го порядка особенности. При этом, исходная система разрешима и многообразие ее решений определяется следующей формулой

$$u(\rho,\varphi) = P^{-1}\left[\varphi, A(\rho,\varphi) + V(C,\varphi)\right],\ \ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}),$$

(2.4.28)

где $V(C,\varphi)$- решение п.д.- системы (2.4.27).

Теорема 2.20. *Пусть в п.д.- системе (2.4.24)* $a, b_k \in C^1(\overline{D}), u \in C^2(D_0)$. *Если условия ($N_{18}$) выполняются, но не тождественно, тогда система (2.4.24) может иметь некоторые частные решения. Для того чтобы условия (N_{18}) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b_k(\rho,\varphi,u)$ *имели вид (2.4.25). Если регулярная п.д.- система (2.4.27) имеет какого-либо вида решение, тогда исходная п.д.- система (2.4.24) также разрешима и многообразия её решений выражается явной формулой (2.4.28). Причём это решение при* $0 \le m < 1$ *всюду в* $\overline{D}$ *(включая точку* $\rho = 0$*) будет непрерывным, а при* $m=1$ *и* $m>1$ *решение системы в точке* $\rho = 0$ *соответственно имеет логарифмическую, либо (*m*-1) –го порядка особенностей.*

2.4.6. Рассмотрим п.д.- систему вида:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho^{k}}a(\rho^{k-1},\varphi,u),\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_i}=\frac{1}{\rho^{k-1}}b_i(\rho,\varphi,\rho^{k-1}u),$$
$$i=\overline{(1,n-1)},k\geq 0,\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}), \qquad (2.4.29)$$

где $a,b_i\in C^1(\overline{D}),u\in C^2(D_0),D_0=\overline{D}-\{0\}$, причём $a(\rho^{k-1},\varphi,u)$-однородная по первому и последнему аргументам функция. Делая замену вида $\rho^{k-1}u=z,\ \frac{\partial z}{\partial \rho}=\frac{(1-k)z}{\rho^{k}}+\frac{1}{\rho^{k-1}}\frac{\partial z}{\partial \rho},\ \frac{\partial z}{\partial \varphi_i}=\frac{1}{\rho^{k-1}}\frac{\partial z}{\partial \varphi_i}$, преобразуем систему (2.4.29) к виду

$$\frac{\partial z}{\partial \rho}=\frac{a(1,\varphi,z)-(k-1)z}{\rho},\quad \frac{\partial u}{\partial \varphi_i}=b_i(\rho,\varphi,z),\quad (i=\overline{1,n-1}).$$

(2.4.30)

Условия совместности системы (2.4.30) выполняются тождественно, если

$$b_i(\rho,\varphi,z)=\left\{-\frac{\partial A(\varphi,z)}{\partial \varphi_i}+f_i[\varphi,A(\varphi,z)-\ln\rho]\right\}[a(1,\varphi,z)-(k-1)z],$$

(2.4.31)

где $A(\varphi,z)=\int_0^z\frac{d\varsigma}{a(1,\varphi,\varsigma)-(k-1)\varsigma},(a\neq(k-1)\varsigma)$, $f_i(\varphi,V)-$ вполне определённая, как и $b_i(\rho,\varphi,z)$ функция. При этих значениях функции $b_i(\rho,\varphi,z)$ из (2.4.31), условия совместности системы (2.4.30) выполняются тождественно. Поэтому интегрируя первое уравнение системы (2.4.30) по переменной ρ, считая $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})$ параметрами, получим $A(\varphi,z)-\ln\rho=V(\varphi)$, где $V(\varphi)=V(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})$ - новая неизвестная функция. Продифференцировав предыдущее равенство по переменным φ_i $(i=1,2,...,n-1)$, подставим их результаты в остальные *(n-1)* уравнения системы (2.4.30), с учётом (2.4.31), получим регулярную п.д.- систему вида (2.4.27), в которой функции

$f_i(\varphi, z)$ определяются из формулы (2.4.31). При тождественном выполнении условии совместности п.д.- системы вида (2.4.27), она разрешима и её решение определяется формулой $V = H(C, \varphi)$, и тогда многообразие решении системы (2.4.28) принимает вид:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^{k-1}} A^{-1}\left[\varphi, \ln \rho + H(C, \varphi)\right]. \qquad (2.4.32)$$

При этом, решение системы (2.4.29) в случае $0 \le k < 1$ в области $\overline{D}$, а также в области D_0 при $k \ge 1$является непрерывным, и при $k \ge 1$ в точке $\rho = 0$ соответственно имеет логарифмическую (при $k=1$) и $(k-1)$-го порядка (при $k>1$)особенности.

Теорема 2.21. *Пусть в п.д.- системе (2.4.29)* $a, b_i \in C^1(\overline{D}), u \in C^2(D_0)$, $a(\rho^{k-1}, \varphi, u)$ *-является однородной по первым и последним аргументам функцией. Для того, чтобы условия совместности системы (2.4.30) равносильные к системе (2.4.29) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b_i(\rho, \varphi, z)$ *имели вид (2.4.31). Если регулярная п.д.- система (2.4.27) имеет определённого вида решения, тогда система (2.4.29) также разрешима и многообразие её решений находится формулой (2.4.32). Причём это решение при* $0 \le k < 1$ *всюду в области* $\overline{D}$, *и при* $k \ge 1$*в области* D_0 *является непрерыв-ным, а в точке* $\rho = 0$ *при* $k \ge 1$ *соответственно имеет логарифмическую (при k=1) и особенность* $(k-1)$*-го порядка (при к>1).*

Приложения системы уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными точками

Во второй главе работы, рассматриваются задачи о применении системы дифференциальных уравнений в полных дифференциалах (п. д.-

систем), в которых если условия совместности систем выполняются тождественно, то многообразия решений изучаемых систем находятся определяемыми формулами. Во второй главе работы, как и в первом, выделяются классы линейных, нелинейных, либо квазилинейных систем в полных дифференциалах, с сингулярными точками. Причём исследуя решения систем вне шаров, тем самым находятся решение граничных задач внутри, вне данной области а также в центре шара многомерной действительной плоскости. Необходимо заметить, что решения изучаемых п.д.- систем на плоскости могут быть многозначным, либо однозначным. Эти две грани в решении задач зависят от выбора функций в п.д.- системах. В трёхмерном и многомерном пространствах, найденные многообразия решений задач будут однозначными [22,28,44,68,125-134,189,215-219,255,266,294] и другие работы.

Глава 3.

§ 3.1. Обобщенные аналитические функции одной комплексной переменной (линейные и нелинейные уравнения)

В теории функций комплексного переменного, называемой также комплексным анализом, развит аппарат дифференцирования и интегрирования по комплексной переменной $z = x + iy$- в том случае когда функция, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической, т.е. $u'_x = v'_y$, $u'_y = -v'_x$ Если ввести оператор комплексного дифференцирования $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x + i\partial_y\right)$, то эти условия примут форму $\partial_{\bar{z}} f = 0$. Обобщенными аналитическими функциями называют функцию являющуюся решением обобщенной системы Коши-Римана [12], [17-20], [71-77], [235] вида:

$$\partial_{\bar{z}} W = a(z)\overline{W} + b(z)W + c(z) \qquad (3.1.1)$$

Если в (3.1.1) $a(z) \equiv 0, \quad b(z) \equiv 0$, то её называют неоднородной системой Коши-Римана. Частное решение уравнении (3.1.1) даётся формулой $W_0(z) = Tc = -\iint\limits_D \frac{c(\varsigma)dS_\varsigma}{\varsigma - z}$, , а общее решение- формулой $W(z) = \Phi(z) + Tc$ - где Ф(z)- произвольная аналитическая функция, Тс- интегральный оператор Коши-Векуа.

В другом частном случае, когда $a(z) \equiv 0, \quad c(z) \equiv 0$, многообразие всех решений даётся формулой $W(z) = \varphi(z) \cdot e^{\omega(z)}$, где $\omega(z) \equiv Tb$, где $\varphi(z) -$ произвольная аналитическая функция (а.ф.) $\varphi(z) = e^{\Phi(z)}$. В общем случае однородной системы (3.1.1) когда $c(z) \equiv 0$ (но $a(z) \neq 0, \quad b(z) \neq 0$, тем же способом получаем первую основную формулу теории обобщенных аналитических функций

$$W(z) = \varphi(z) \cdot e^{\Omega(z)}, \quad \Omega(z) = T\left\{\left(a \cdot \frac{\overline{W}}{W} + b\right)\right\}. \qquad (3.1.2)$$

Хотя формула вида (3.1.2) не является явной, но она весьма полезна для качественного изучения свойств функции $W(z)$. С другой стороны в общем случае при *c(z)=0*, интегрируя (3.1.1), получим интегральное уравнение

$$W(z) = \phi(z) + T(a \cdot \overline{W} + b \cdot W). \qquad (3.1.3)$$

Как доказываются в [12],[17], оно всегда имеет единственное решение, которое имеет вид

$$W(z) = \phi(z) + \Gamma_1\phi + \Gamma_2\bar{\phi}, \qquad (3.1.4)$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2 -$ резольвенты интегрального уравнения (3.1.4). Формулу (3.1.2) называют формулой представления 1-го рода, а (3.1.4)- формулой представления 2-го рода.

В [20] И.Н. Векуа впервые была рассмотрена также квазилинейная обобщенная система Коши-Римана

$$\partial_{\bar{z}} W = f(z, W). \qquad (3.1.5)$$

При некоторых условиях на функции $f(z, W)$ между решением $W(z)$ и произвольной аналитической функцией $\phi(z)$ установлено взаимно - однозначное соответствие. Мы не ставим себе задачу дать полный обзор всех работ, которые имелись в этом направлении, отсылая к [20]. А также [17], установлено взаимно- однозначное соответствие между решениями (3.1.4), уравнение (3.1.1) эквивалентно интегральному уравнению

$$W(z) = \phi(z) + T[f(z, W)], \qquad (3.1.6)$$

где $\phi(z) -$ произвольная аналитическая функция. При некоторых дополнительных условиях на функции $f(z, W)$ И.Н.Векуа устанавливает существование и единственность решения уравнения (3.1.6). Изучение (3.1.5) продолжено в работах [12], к которым мы отсылаем также по вопросу обзора других работ. Но наиболее близкой нам является вторая часть работы [71-77],

где рассмотрена система двух уравнений типа (3.1.5), о чем подробнее будет сказано в дальнейших пунктах работы.

§ 3.1.1. Обобщенные аналитические функции многих комплексных независимых переменных

Л.Г. Михайлову принадлежит развитие теории обобщенных аналитических функций на несколько независимых комплексных переменных [17],[71-77]. Он рассматривал обобщённую систему Коши-Римана (о.с.К.-Р.)

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = a_k(z)\overline{W} + b_k(z)W + c_k(z), \quad (k = \overline{1,n}) \qquad (3.1.7)$$

где $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_k = x_k + i \cdot y_k$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)$, a_k, b_k, c_k - заданные и $W = \mathcal{U} + i\vartheta$ искомая функция класса C^2. Система (3.1.7) является переопределенной, если выполняются условия совместности, получаемые после равенстве смешанных производных второго порядка по соответствующим комплексным переменным $\bar{z}_k, \bar{z}_j$.. Анализ этих условий и нахождение многообразие решений очень сложны, и потому их изложение в общем случае мы не приводим.

Рассмотрим сначала неоднородную систему Коши-Римана, т.е. систему (3.1.7) при $a_k \equiv 0$, $b_k = 0, c_k \neq 0, (k = \overline{1,n})$.

Выполняя перекрестными дифференцированиями в системе уравнений вида (3.1.7), получаем необходимые условия совместности $\partial_{\bar{z}_j} c_p = \partial_{\bar{z}_p} c_j, (j, p = \overline{1,n}), j \neq p$, при выполнении которых частное решение системы определяется следующей формулой:

$W_1 = \tilde{A}[c_1, ..., c_n] = T_1 c_1 + S_1(T_2 c_2) + ... + S_1(S_2 ... S_{n-1}(T_n c_n)...)$, где

$$S_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{dt_k}{t_k - z_k}, \; T_k = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{ds_{\delta_k}}{\delta_k - z_k}, \; (k = 1,2,...n),$$

а общее решение системы (3.1.7) (при $a_k \equiv 0$, $b_k \equiv 0$, $C_k \neq 0$) имеет вид

$W = W_1[c_1,\ldots,c_n] + \Phi(z_1,\ldots,z_n)$,где $\hat{O}(z_1, z_2,\ldots,z_n)$ произвольная аналитическая функция по всем комплексным переменным. Если в системе (3.1.7) $a_k \equiv 0,\ \ b_k \neq 0,\ C_k \neq 0,$ то необходимые условия совместности линейной обобщенной системы Коши-Римана

$$\partial_{\bar{z}_k} W = b_k(z)\cdot W + c_k,\ (k = 1,2,\ldots,n) \qquad (3.1.8)$$

записывается в виде

$$P_{kj}W + q_{kj} = 0,\quad (k,j = 1,2,\ldots.,n;\ \ k \neq j), \qquad (\mathrm{N}_1)$$

где $P_{kj} = \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_k},\ q_{kj} = \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_k} + b_k c_j - b_j c_k,\ (k, j = \overline{1,n}), k \neq j.$ Если хотя бы одно из P_{kj}, либо q_{kj} отлично от нуля, то система (3.1.8) несовместна. Для совместности системы (3.1.8) необходимо и достаточно, чтобы при всех номерах $k,j,\ P_{kj} \equiv 0, q_{kj} \equiv 0.$

Тогда явная формула представления всей решений системы (3.1.8) имеет вид

$$W(z) = e^{\omega(z)}\left[\Phi(z_1,\ldots,z_n) + W_1\left[e^{-\omega(z)}c_1,\ldots,e^{-\omega(z)}c_n\right]\right], \qquad (3.1.9)$$

где $\omega = \omega_1[b_1,\ldots,b_n],\ \ \Phi -$ произвольная аналитическая функция (а.ф.).

Перейдем к случаям, когда в (3.1.7) $a_k \neq 0.$ Тогда перекрестное дифференцирование в системе (3.1.7) необходимо приводит к большому количеству весьма громоздких соотношений, но как показано в [29,30], среди них содержатся условия $P_{kj} = 0,$ откуда следует существование такой функции ω, что заменой $\mathrm{e}^{-\omega}\cdot W = U$ система (3.1.8) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = a_k(z)\overline{W} + c_k(z),\quad (k = \overline{1,n}). \qquad (3.1.10)$$

и ее решение находится формулой

$$W = f(z_1, z_2,\ldots,z_n)\cdot\left\{\varphi[\chi(z_1, z_2,\ldots,z_n) + T_1\phi + T_2\bar{\phi}]\right\},$$

где $\chi(z_1,...)$– некоторая вполне определенная аналитическая функция [77].

В дальнейшем, вводим следующие обозначения, которыми в дальнейшем будем пользоваться: **A** - класс аналитических функций, для которых выполняются равенства $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}=0$, **RA**- класс вещественно-аналитических функций, то есть функции, представленные абсолютно сходящимся степенным рядом в окрестности некоторой внутренней точки области, C^k - класс непрерывно-дифференцируемых функций. В этой области процесс интегрирования функций выполняется интегральными операторами Коши-Векуа.

В работах [12], [17]-И.Н.Векуа, [71]-[77],[82],[88],[98] и других работ, Л.Г. Михайловым, [3]-[4]. С.Байзоевым,[121-122] Э.М.Мухаммадиевым, [157]-[161], [200] А.Расуловым и другими таджикскими учёными, изучены линейные, нелинейные и квазилинейные обобщённые системы Коши-Римана (о. с. К.-Р.), как с двумя, так и с произвольным числом независимых комплексных переменных, в классе вещественно-аналитических фунций RA(D).

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}= f_1(\bar{z}_1,z_1,\bar{z}_2,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}= f_2(\bar{z}_1,z_1,\bar{z}_2,z_2;W), \qquad (3.1.11)$$

где $f_k \in RA(\bar{I}_2)$ по z_1, z_2, $f_k \in A(\bar{I}_3)$, $(k=1,2)$ по переменной W, то есть

$$\frac{\partial f_k}{\partial \bar{W}}=0,\ \bar{I}_3=\left\{(\bar{z}_1,\bar{z}_2)\middle|\,|\bar{z}_1-z_1|\le a,|\bar{z}_2-z_2|\le a;|W|\le b\right\}.$$

А также учитывая $z_k=x_k+iy_k$, $\bar{z}_k=x_k-iy_k$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}+i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right),(k=\overline{1,n})$ были рассмотрены переопределённые обобщённые системы Коши- Римана (п.о.с.К.-Р.) общего вида [100]:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = f_k(\bar{z}_1, z_1, \bar{z}_2, z_2, ..., \bar{z}_n, z_n; W), (k = \overline{k=1,n}), \qquad (3.1.12)$$

где $f_k \in RA(\bar{I}_{n+1})$ по всем переменным и аналитическая по W, причём $\bar{I}_{n+1} = \{(\bar{z}_1,...,\bar{z}_n) \| \bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)} | \le a, (k = \overline{1,n}), \ |W| \le b\}$. Иначе говоря, в системах (3.1.11) и (3.1.12) функции $f_k(z,\bar{z})$ $(k = \overline{1,2}), \ (k = \overline{1,n})$ будем считать вещественно-аналитическими соответственно по всем комплексным переменным $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, ..., \bar{z}_n)$, а также аналитическими по неизвестной функции W. В предлагаемой работе рассматривается п.о.с.К. – Р. вида (3.1.12) в классе вещественно-аналитической функций RA(D). Это означает, функций в этом классе разлагаются в двукратными многократными сходящимся степенными рядами.

Рассмотрим нелинейные системы типа (3.1.11) и (3.1.12) в классе *RA(D)*. Тогда после такого аналитического продолжения, функциям систем (3.1.11) и (3.1.12) в случаи *n=2* и произвольных значениях *n*, принимают вид [100]:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f_1(\varsigma_1, z_1, \varsigma_2, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = f_2(\varsigma_1, z_1, \varsigma_2, z_2; W) \ , \qquad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = f_k(\varsigma_1, z_1, \varsigma_2, z_2, ..., \varsigma_n, z_n; W) \ , \ (k = \overline{1,n}) \ . \qquad (3.1.14)$$

В качестве начальных данных для систем (3.1.13) и (3.1.14) будем принимать:

$W_0 = \hat{O}(z_1, z_2)$ при $\varsigma_k = \varsigma_k^{(0)}$ $(k = \overline{1,2})$, либо

$$W_0 = \hat{O}(z_1, z_2, ..., z_n), \text{ при } \varsigma_k = \varsigma_k^{(0)} \ (k = \overline{1,n}), (k = \overline{1,n}) \ . \qquad (3.1.15)$$

Учитывая тождественного выполнения условия совместности п.о.с.К.-Р. (3.1.13) и (3.1.14) в определённых формах, находится единственное решение задачи (3.1.15) для данных систем. Затем находится многообразие решений п.о.с.К.-Р. (3.1.13) и (3.1.14) выражающееся через произвольные

аналитические функции многих независимых переменных $\hat{O}(z_1, z_2)$ и $\hat{O}(z_1,...,z_n)$.

В предыдущей обзорном материале, были рассмотрены п.о.с. К.- Р. с регулярными правыми частями. В случаи тождественного выполнения условия совместности систем, находятся непрерывные решения систем, выражающиеся через одной произвольной аналитической функцией $\hat{O}(z_1,...,z_n)$.

Далее в предлагаемой работе, рассматриваются некоторые п.о.с.К.-Р., с нелинейными правыми частями с сингулярными коэффициентами. Учитывая тождественное выполнение условия совместности систем, находятся многообразия их решений. Анализируется гладкости решений систем в окрестности особых точках, принадлежащим полицилиндрам либо бицилиндрам (общая часть от топологического пересечения цилиндров) $\bar{I}_3(a,b)$ либо $\bar{I}_2(a,b)$, и $\bar{I}_n(a,b)$ для всяких порядках особенностей.

При этом, учитываются $\max\{|f_k|\} = M$ при $k = \overline{1,2}$ или $k = \overline{1,n}$, причём $Ma < b$ для системы (1.13) и $nMa < b$, $|\hat{O}(z_1, z_2,...,z_n)| \le b - nMa$ при $n \ge 2$ для системы (3.1.14). В работах [78, 88, 98, 100] Л.Г. Михайловым впервые была рассмотрена переопределенная нелинейная обобщённая система Коши-Римана

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = f(z, \bar{z}, \varsigma, \bar{\varsigma}; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{\varsigma}} = g(z, \bar{z}, \varsigma, \bar{\varsigma}; W) \ , \qquad (3.1.16)$$

где $z, \zeta \in \bar{\Pi}_2(a): |z - z_0| \le a, \ |\zeta - \zeta_0| \le a$ и $W \in S_b: |W| \le b$.

$W \in S_b$ $(S_b -$ круг $|W| \le b)$, будем считать аналитическим по переменной W (класс А), и вещественно – аналитическим (класс RA) по переменным z, ς. Последнее означает, что в окрестности каждой внутренней точки указанной области, функции могут быть представлены сходящимися

степенными рядами по вещественным координатам точки;

$x, y, \xi, \eta,$ если $x + iy = z,\ \xi + i\eta = \zeta.$

Операция перекрестного дифференцирования в системе (3.1.16), приводит к необходимому условию совместности

$$D_{\bar{\zeta}} f = D_{\bar{z}} g : \partial_{\xi} f + g \cdot \partial_W f = D_{\bar{z}} g + f \cdot \partial_W g, \qquad (\text{N}_2)$$

а решение систем к интегральному уравнению

$$W(z, \bar{z}, \varsigma, \bar{\varsigma}) = \Phi(\text{z}, \varsigma) +$$

$$+ \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} f[t, z; W(t, z, \varsigma, \bar{\varsigma})]dt + \int_{\bar{\varsigma}_0}^{\bar{\varsigma}} g\left[\bar{z}_0, z, \tau, \varsigma; W(\bar{z}, z, \tau, \varsigma) - \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} f[t, z; W(t, z, \tau, \varsigma)]dt \right] d\tau. \quad (3.1.17)$$

Теорема 3.1. *Пусть в системе (3.1.16) правые части аналитичны по* W, *вещественно- аналитические в области* $\Pi_3(a, b)$ *и* $W \in RA$. *Если условие (*N_2*) выполняется тождественно по всем переменным и ее функции удовлетворяют неравенствам* $2Ma < b,\ \left|\Phi(\text{z}, \varsigma)\right| \le b - 2Ma,\ M = \max(|f|, |g|)$, *тогда существует многообразие решений системы (3.1.16) и определяется формулой (3.1.17), причём оно содержит произвольную аналитическую функцию* $\hat{\text{O}}(\text{z}, \varsigma)$.

§ 3.2. Некоторые классы двух переопределённых обобщённых систем Коши-Римана с разделяющимися переменными с сингулярными коэффициентами

3.2.1. По аналогии с [272]-[279] рассмотрим систем

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)}}m(z_1,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)}}m(z_1,z_2;W),\qquad (3.2.1)$$

где $a,b\in RA(\bar{I}_2), m\in A(\bar{I}_2), W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$ по всем переменным, $\bar{I}_2, \ddot{I}_3^{(0)}$- называем соответственно бицилиндром и полицилиндром $|\bar{z}_k-\bar{z}_k^0|\le\alpha,(k=1,2),$ и $\{|\bar{z}_k-\bar{z}_k^0|\le\alpha,|W-W_0|\le\beta\}$. Условием совместности системы (3.2.1) будет

$$(\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)})\frac{\partial a}{\partial \bar{z}_2}-(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})\frac{\partial b}{\partial \bar{z}_1}=0. \qquad (N_3)$$

Легко заметить, что если в *(N3)*, $\bar{z}_k\to\bar{z}_k^{(0)}$ $(k=1,2)$, тогда, получим $\frac{\partial a}{\partial\bar{z}_2}=0,\ \frac{\partial b}{\partial\bar{z}_1}=0$; то есть $a=a(z_1,\bar{z}_1,z_2), b=b(z_1,z_2,\bar{z}_2)$. С другой стороны, для непрерывности решений системы (3.2.1) необходимо, чтобы при ограниченности $\partial_{\bar{z}_k}W,(k=1,2)$:

1) $$\lim_{\bar{z}_1\to\bar{z}_1^{(0)}}\left((\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_1}\right)=0,\quad \lim_{\bar{z}_2\to\bar{z}_2^{(0)}}\left((\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)})\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_2}\right)=0\quad ,\qquad (M_0)$$

откуда, получим тривиальное решение системы (3.2.1), из равенства $m(z_1,z_2;W)=0$, в виде аналитических функций $W=h_i(z_1,z_2)$ $(i=1,2)$ [272]-[279];

2) $a(z_1,\bar{z}_1,z_2)=0\left(|\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)}|^{\lambda}\right),\quad b(z_1,z_2,\bar{z}_2)=0\left(|\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)}|^{\lambda}\right),\quad (0\le\lambda<1).\qquad (M_1)$

При этом, во втором случае, получим аналитическое (тривиальное) решение системы. Если в п.о.с.К.-Р. (3.2.1) условий *(M0),(N3), (M1)* не выполняются, тогда систему (3.2.1) считаем несовместной. Допустим, что условие (N_3) выполняется во всей области $\bar{I}_3$. Аналитически продолжив в п.о.с.К.-Р. (3.2.1) к ее функциям систем, заменив $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=1,2)$, получим:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}m(z_1,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=\frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}m(z_1,z_2;W)\,. \qquad (3.2.2)$$

Легко убедится, что при этом требовании, условие (N_3) по всем переменным будет выполнено. Поэтому, интегрируя систему (3.2.2), с учётом начальных условий (3.1.15) будем иметь:

$$M(z_1,z_2;W)=\Phi(z_1,z_2)+\int_0^{\varsigma_1}\frac{a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}dt_1+\int_0^{\varsigma_2}\frac{b(0,0,z_2,t_2)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}dt_2.$$

В этой формуле, учитывая условия (M_0), имеем:

$$M(z_1,z_2;W)=\Phi(z_1,z_2)+\omega_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)+a(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2)\ln\left|\frac{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}{-\varsigma_1^{(0)}}\right|+$$

$$+\omega_2(z_1,0,z_2,\varsigma_2)+b(z_1,0,z_2,\varsigma_2^{(0)})\ln\left|\frac{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}{-\varsigma_2^{(0)}}\right|.$$

Обращая функцию $M(z_1,z_2;W)$ по переменной W, и переходя к прежним независимым переменным, получим: (3.2.3)

$$W=M^{-1}[z_1,z_2;\omega(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)+a(z_1,z_1^{(0)},z_2,\bar z_2)\ln\left|\frac{\bar z_1-\bar z_1^{(0)}}{-z_1^{(0)}}\right|+$$

$$+b(z_1,0,z_2,z_2^{(0)})\ln\left|\frac{\bar z_2-\bar z_2^{(0)}}{-z_2^{(0)}}\right|+\hat O(z_1,z_2)],\quad \omega=\omega_1(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)+\omega(z_1,\bar z_1^{(0)},z_2,z_2^{(0)})$$

.(3.2.4)

Итак, полученное решение системы (3.2.2) формулой (3.2.4) в полицилиндре $\bar I_3^{(0)}$ является непрерывным, а в точке $\bar z_k=\bar z_k^{(0)},(k=1,2)$ имеет логарифмическую особенность. Если в системе (3.2.2) $a(z_1,z_1^{(0)}(,...)=a_0=0, b(z_1,z_1^{(0)}(,...)=b_0=0,$ то решение системы всюду в $\overline{D}$ будет непрерывным, а также, если условия (M_0), (M_1), (N_1) не выполняются, то система (3.2.2) несовместна. А также, отметим, что решение системы (3.2.2) формулой (3.2.4), при обращении функции M по переменной W, вблизи особых точек может быть многозначным [].

Лемма 1. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.1)* $a,b \in RA(\bar{I}_2), m \in A(\bar{I}_3), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$ *. Если выполняется условие* (N_3) *в точках бицилиндра* $\bar{\Pi}_2$*, а также выполняются условия* (M_0)*,* (M_1) *(в случае ограниченности частных производных функции W), тогда существует непрерывное, ограниченное и частное решение системы (3.2.2). Если функции* a,b *удовлетворяют условию* (M_1) *, тогда при* $a_0 = 0, b_0 = 0$ *всюду в* $\bar{\Pi}_3$*, существует непрерывное решение системы (3.2.2). Если для системы (3.2.2) условия* $(M_0),(M_1),(N_3)$ *не выполняются, то решение п.о.с.К.-Р. в области* $\ddot{I}_3^{(0)}$ *непрерывно, а в точке* $\bar{z}_1 = \bar{z}_1^{(0)}$ *имеет логарифмическую особенность.*

3.2.2. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}\right)^n} p(z_1, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}\right)^n} p(z_1, z_2; W), \quad (3.2.5)$$

где $a,b \in RA(\bar{\Pi}_2), m, p \in A(\bar{\Pi}_3), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$ по всем переменным в полицилиндре $\bar{I}_3$. Выполняя аналитические продолжения в полицилиндре $\bar{I}_2$, заменой переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2)$, перепишем систему (3.2.5):

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} p(z_1, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n} p(z_1, z_2, ; W) \quad . (3.2.6)$$

Допустим, что в системе (3.2.6) при ограниченности производных будут выполняться следующие соотношения, и существуют пределы

$$\lim_{\varsigma_1 \to \varsigma_1^{(0)}} \left((\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n \frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} \right) = 0, \quad \lim_{\varsigma_2 \to \varsigma_2^{(0)}} \left((\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} \right) = 0 . \qquad (M_0)$$

тогда аналогично предыдущим случаям, необходимо получаем, что $W = h_i(z_1, z_2)$ *(i=1,2)* могут быть некоторыми частными решениями системы (3.2.6) [272], [279]. При этом, нам достаточно требовать ограниченности, либо

в особых точках имеющиеся нуль менее чем *(n-1)*-го порядка $\partial_{\varsigma_k} W$ (k=1,2). Условие совместности системы (3.2.6) имеет вид

$$(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \frac{\partial a}{\partial \varsigma_2} - (\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n \frac{\partial b}{\partial \varsigma_1} = 0 . \qquad (N_4)$$

Допустим, что условие *(N4)* выполняется во всех точках бицилиндра $\bar{\Gamma}_2$. Тогда интегрируя систему (3.2.6), будем иметь

$$P(z_1, z_2; W) = \hat{O}(z_1, z_2) + \int_L \frac{a(z_1, t_1, z_2, \varsigma_2)}{(t_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} dt_1 + \int_L \frac{b(z_1, \varsigma_1^{(0)}, z_2, t_2)}{(t_2 - \varsigma_2^{(0)})^n} dt_2 . \qquad (3.2.7)$$

Если в постановке задачи считать, что подинтегральные функции a, b внутри области являются аналитическими (кроме особых точках $\varsigma_k = \varsigma_k^{(0)}$ *(k=1,2))*, то в интегралах из (3.2.7) можно применять теоремы о вычетах. Затем в (3.2.7) переходя к прежним переменным и обращая функцию $M(z_1, z_2; W)$ по W, будем иметь непрерывное решение системы (3.2.6)

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \qquad (3.2.8)$$

$$= P^{-1}\left\{ z_1, z_2; \Phi(z_1, z_2) + \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{\bar{z}_1 \to \bar{z}_1^{(0)}} \left[\frac{\partial^{n-1} a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\partial \bar{z}_1^{n-1}} \right] + \frac{2\pi i}{(n-1)!} \lim_{\bar{z}_2 \to \bar{z}_0} \left[\frac{\partial^{n-1} b(z_1, \bar{z}_1^{(0)}, z_2, \bar{z}_2)}{\partial \bar{z}_2^{n-1}} \right] \right\}$$

Теорема 3.1 *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.5)* $a, b, p \in RA(\bar{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)})$. *Если для системы (3.2.6) выполняется условии (M2), но не тождественно, тогда система (3.2.5) имеет некоторое частное решение. Если условия (M2), и (N2) не выполняются, тогда система (3.2.5) несовместна. Допустим, что для системы (3.2.5) все указанные условии выполняются, а также условие совместности системы (3.2.5) выполняется тождественно, тогда система (3.2.5) разрешима и многообразие её решений определяются формулой (3.2.8), непрерывной во всей области* $\bar{\Gamma}_3^{(0)}$. *Если для п.о.с.К.-Р. (3.2.5) условии совместности выполняется тождественно, а для функции в правых её частях, условии (M2) не выполняется, то решение исходной системы в*

области ($Ï_3^{(0)}$) непрерывно, а в точке $\bar{z} = \bar{z}_1^{(0)}$ имеет особенности (n-1)-го порядка (при n>1), и при n=1 *логарифмическую особенность.*

3.**2.3.** Рассмотрим п.о.с.К.- Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}} m(z_1, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}} p(z_1, z_2; W), \qquad (3.2.9)$$

где $a, b \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), m, p \in A(\overline{\Pi}_3)$-по всем переменным. Аналогично [272]-[279], [297] для системы (3.2.9) требуем выполнение условий *(M_0).* Тогда из системы (3.2.9) имеем $m(z, z; W) = 0,\ p(z, z; W) = 0$, либо $W = h_i(z_1, z_2), (i = 1,2)$, которые могут быть некоторыми особыми, либо частными решениями системы.

После аналитического продолжения в п.о.с.К.-Р. (3.2.9), заменой переменных $\bar{z}_k$ на ς_k преобразуем систему в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}} m(z_1, z_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}} p(z_1, z_2; W).$$

(3.2.10)

Условие совместности системы (3.2.10) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}}\right) m - \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}}\right) p + \frac{a\, b(p\, \partial_W m - m \partial_W p)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})} = 0. \qquad (N_5)$$

Допустим, что условие *(N_5)* выполняется, но не тождественно. Тогда из *(N_5)* имеем функцию $W = h(z_1, z_2)$, которая будет некоторым частным решением системы (3.2.10). Тождественное выполнение условие совместности *(N_5)* справедливо в следующих случаях:

а) $\frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}}\right) = 0, \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}}\right) = 0,\ p\frac{\partial m}{\partial W} - m\frac{\partial p}{\partial W} = 0$. Откуда легко получим

$$\begin{aligned} &a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma - \varsigma_1^{(0)})\, \alpha(z_1, \varsigma_1, z_2), \\ &b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})\, \beta(z_1, z_2, \varsigma_2),\ p = \lambda m, (\lambda = const.) \end{aligned}. \qquad (3.2.11)$$

Тогда, в результате интегрирования системы (3.2.10) и перехода к прежним переменным, получим:

$$\mathrm{W} = \mathrm{M}^{-1}\left[\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2; \Phi(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2) + \mathrm{A}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2) + \mathrm{B}(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2)\right]. \qquad (3.2.12)$$

При этом решение системы (3.2.9) во всём полицилиндре $\bar{I}_2$ будет непрерывным, аналитическим и в зависимости функции $M(z_1,z_2)$ возможно будет многозначным либо однозначным.

б) $\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{a}{\varsigma_1-\varsigma_2^{(0)}}\right)=\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{b}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)$, $p\frac{\partial m}{\partial W}-m\frac{\partial p}{\partial W}\neq 0$. В этом случае условие (N_5) выполняется тождественно тогда и только тогда, когда имеет место:

$$\begin{aligned} &b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\beta(z_1,z_2,\varsigma_2)\exp\{-\lambda A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\},\\ &p(z_1,z_2;W)=[1+\exp\{\lambda M(z_1,z_2;W)\}]m(z_1,z_2;W), \end{aligned} \qquad (3.2.13)$$

где $M(z_1,z_2;W)=\int\limits_{W_0}^{W}\frac{d\tau}{m(z_1,z_2;\tau)}$, $A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\int\limits_{L}\frac{a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{t_1-\varsigma_1^{(0)}}dt_1$. При этом, система (3.2.10) разрешима и многообразие её решений, после перехода к прежним переменным, определяется формулой

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=M^{-1}\left\{z_1,z_2;A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)+\frac{1}{\lambda}\ln\left[\hat{O}(z_1,z_2)+\lambda B(z_1,z_2,\bar{z}_2^{(0)})\right]\right\}, \qquad (3.2.14)$$

где $B(z_1,z_2,\bar{z}_2)=\int\limits_0^{\bar{z}_2}\beta(z_1,z_2,\sigma)d\sigma$, $\lambda=const$, либо $\lambda=\lambda(z_1,z_2)$.

3.2.4. Теперь рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^n}\ m(z_1,z_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial\bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(z_2-\bar{z}_2^{(0)})^n}\ p(z_1,z_2;W),$$

где $a,b,p,m\in RA(\overline{\Pi}_2)$, $W\in RA(\Pi_3^{(0)})$. После аналитического продолжения к функциям, по $\bar{z}_k$ на ς_k преобразуем данную систему следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\left(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right)^n}m(z_1,z_2;W),\ \frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=\frac{b(z,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n}p(z_1,z_2;W). \qquad (3.2.15)$$

Для системы (3.2.15) условием совместности будет

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{a}{\left(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right)^n}\right)m-\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{b}{\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n}\right)p+\frac{ab(p\,\partial_W m-m\,\partial_W p)}{\left(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right)^n\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n}=0\,.\quad (N_6)$$

Легко заметить, что интегралы от правых частей системы (3.2.15) в точках $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)}$ $(k=1,2)$ не существуют. Поэтому, по аналогии с [73-77], в случае ограниченности $\partial_{\varsigma_k}W$, требуем выполнения пределов, которое следует из предельного перехода в системе (3.2.15)

$$\lim_{\zeta_k\to\zeta_k^{(0)}}\left((\zeta_k-\zeta_k^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial\zeta_k}\right)=0,\ (k=1,2)\ \text{и}\ \lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)m(z_1,z_2;W)=0,$$

$\lim\limits_{\varsigma_2\to\varsigma_2^{(0)}}b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\,p(z_1,z_2;W)=0$. Тем самым, имеем возможность определить поведение функции в точках вырождений системы (3.2.15). При этом из (3.2.15) легко получим, что в точках $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)}$, $W=h_k(z_1,z_2)$ (κ=*1,2*), являющиеся тривиальным (некоторым частным) решением системы (3.2.15). Если условие *(N_6)* в точках полицилиндра, кроме $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)}$ $(k=1,2)$ выполняется, но не тождественно, тогда из *(N_6)* можно определить некоторую функцию $W=H(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$. Если эта функция также удовлетворяет систему (3.2.15), то она будет некоторым частным решением системы. В противном случае, система (3.2.15) –несовместна. Тождественное выполнение условие *(N_6)* можем рассматривать в следующих случаях:

а) $\dfrac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\dfrac{a}{\left(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right)^n}\right)=0,\quad \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\dfrac{b}{\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n}\right)=0,\quad p\partial_W m-m\partial_W p=0\,.$

Откуда легко получим

$$\begin{aligned}&a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\left(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right)^n\alpha(z_1,z_2,\varsigma_2),\\&b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n\beta(z_1,\varsigma_1,z_2),\\&p(z_1,z_2;W)=\lambda\,m(z_1,z_2;W).\end{aligned}\qquad (3.2.16_1)$$

При этих значениях функции a, b, p условие (N_5) выполняется тождественно и многообразия её решений определяется формулой

$$W = M^{-1}\left[z_1, z_2; \hat{O}(z_1, z_2) + A(z_1, \bar{z}_1, z_2) + B(z_1, z_2, \bar{z}_2)\right], \qquad (3.2.16)$$

являющиеся непрерывным во всей области $\overline{\Pi}_3$ по всем переменным.

б) Допустим, что условие (N_6) выполняется тождественно в случае, когда;

$$m\frac{\partial p}{\partial W} - p\frac{\partial m}{\partial W} \neq 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a}{\left(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}\right)^n}\right) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b}{\left(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}\right)^n}\right).$$

Тогда из (N_6) сможем определить взаимосвязь между функции $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$ с $a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$ а также $p(z_1, z_2; W)$ с $m(z_1, z_2; W)$ следующими формулами:

$$b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = \left(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}\right)^n \beta(z_1, z_2, \varsigma_2) \exp\left\{-\lambda A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)\right\},$$

$$p = \left[1 + \exp\left\{\lambda M(z_1, z_2; W)\right\}\right] m(z_1, z_2; W), \qquad (3.2.17)$$

где $M(z_1, z_2; W) = \int_{W_0}^{W} \frac{d\vartheta}{m(z_1, z_2; \vartheta)}$, $A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = \int_L \frac{a(z_1, t_1, z_2, \varsigma_2)}{(t_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} dt_1$.

Действительно, при этих значениях b, p из (3.2.15) условие (N_5) выполняется тождественно и многообразие ее решений, после перехода к прежним переменным, находится формулой

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) = \mathrm{M}^{-1}\left\{\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2; \mathrm{A}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\Phi(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2) + \lambda \mathrm{B}(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2)\right]\right\}, \quad (3.2.18)$$

где $B(z_1, z_2, \bar{z}_2) = \int_0^{\bar{z}_2} \beta(z_1, z_2, t_2) dt_2$, $\lambda = const.$ либо $\lambda = \lambda(z_1, z_2)$. При этом, решение системы в точке $\bar{z}_1 = \bar{z}_1^{(0)}$ имеет особенности (n-1)-го порядка (при n>1), и логарифмического порядка, если n=1.

Замечание. В силу поставленной задачи, функции a, b по всем своим новым аргументам считаются аналитическими [279], [297], а $\varsigma_1 = \varsigma_1^{(0)}$ их особой точкой. Следовательно, применяя теорию вычетов к полученному интегралу, получим

некоторую непрерывную функцию на данной области. А эта функция и решение данной системы, в полицилиндре $\overline{\ddot{I}}_3$ являются непрерывним.

Теорема 3. 2. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.15)* $a,b \in RA\left(\overline{\ddot{I}}_2\right), m, p \in A\left(\overline{\ddot{I}}_3\right), W \in RA\left(\ddot{I}_3^{(0)}\right)$. *Если условие* ($N_6$) *выполняется, но не тождественно, а также выполняется условие леммы 1, тогда определяется некоторое частное, либо особое решение системы (3.2.15). Для того, чтобы условие* (N_6) *во всей области* $\overline{\Pi}_3$ *(кроме особой точки* $\varsigma_k = \varsigma_k^{(0)}, (k = 1,2)$*) выполнялась тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(...)$ *с* $a(...)$, *а также* $p(...)$ *с* $m(...)$ *были функционально зависимыми соответствующими формулами (3.2.16*$_1$*) и (3.2.17). Тогда система уравнений (3.2.15) разрешима и многообразие её решений определяется соответствующими формулами (3.2.16) либо (3.2.18). Причём функции вида (3.2.16) являющаяся решением системы (3.2.15) во всём полицилиндре* $\overline{\ddot{I}}_3$ *считается непрерывной.*

3.2.5. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{p(z_1, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_2)}{\left(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}\right)^n} m(z_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{q(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{\left(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}\right)^n}, \qquad (3.2.19)$$

где $p, m, q \in RA\left(\overline{\Pi}_2\right)$, $m, q \in A\left(\overline{\Pi}_3\right)$ по переменной W, т.е. $W \in RA\left(\ddot{I}_3^{(0)}\right)$,

$\overline{\ddot{I}}_3 = \left\{(z_k, \bar{z}_k) \middle| \left|\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)}\right| \le a, |W| \le b\right\}, (k = 1, 2)$.

В бицилиндре $\overline{\ddot{I}}_2$ аналитически продолжим к функциям, по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k и перепишем систему (3.2.19) в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{p(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\left(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}\right)^n} m(z_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{q(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{\left(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}\right)^n}. \qquad (3.2.20)$$

Условие совместности системы (3.2.20) в точках бицилиндра $\overline{\ddot{I}}_2$, кроме точки $\varsigma_k = \varsigma_k^{(0)}$ выполняется тождественно, тогда и только тогда, когда функция $q(..)$ имеет вид:

$$q=\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n\left\{\frac{\partial A}{\partial\varsigma_2}-\frac{\partial M}{\partial\varsigma_2}+f\left[z_1,z_2,\varsigma_2;M(z_1,z_2,\varsigma_2;W)-A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right]\right\}m(z_1,z_2,\varsigma_2;W)$$

,(3.2.21)

где функции $M(...),A(...)$ определяются через соответствующие данные функции p,m, а функция $f(...)$- найдётся из формулы (3.2.21). Поскольку интегралы от правых частей системы (3.2.20) в точках $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)}$ $(k=1,2)$ не существуют, по этой причине, по аналогии с [279],[297], требуем выполнения условий $p=o((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^{n-\lambda}),\ q=\hat{i}\,((\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^{n-\lambda}),(0\le\lambda<1)$, либо $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^n\dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_k}\right)=0,\ (k=1,2)$. При этом из (3.2.20) можем иметь функции $W=H_1(z_1,z_2,\varsigma_2),\ W=H_2(z_1,\varsigma_1,z_2)$. Если хотя одна из этих функций удовлетворяет системе (3.2.20), то она будет некоторым частным, либо особым решением системы. Иначе говоря, исходная система несовместна. Интегрируем первое уравнение системы (3.2.20);

$$M(z_1,z_2,\varsigma_2;W)-A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=V,\qquad(3.2.22)$$

где $V=V(z_1,z_2,\varsigma_2)$-новая неизвестная функция. Продифференцировав обе части равенства (3.2.22) по переменной ς_2, подставив её значение во второе уравнение системы (3.2.20) с учётом значении функция $q(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ из (3.2.21), будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial\varsigma_2}=f(z_1,z_2,\varsigma_2;V).\qquad(3.2.23)$$

Интегрируя регулярное комплексное дифференциальное уравнение (к.д.у.) (3.2.23) с начальными данными (3.1.16), получим:

$$\mathrm{V}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\varsigma_2)=\Phi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)+\mathrm{H}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\varsigma_2),\ \text{либо}\ V(z_1,z_2,\varsigma_2)=W_0+H(z_1,z_2,\varsigma_2),$$

где $\hat{O}(z_1, z_2)$-произвольная аналитическая функция. Далее, подставляя значение V из последней формуле в (3.2.22), и переходя к прежним переменным, получим:

$$W = M^{-1}\left[z_1, z_2, \bar{z}_2; A(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \Phi(z_1, z_2) + H(z_1, z_2, \bar{z}_2)\right]. \qquad (3.2.24)$$

Теорема 3. 2. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.19)* $p, m, q \in RA(\bar{I}_2)$, $m, q \in A(\bar{I}_2)$, $W \in RA(\Pi_3^{(0)})$. *Если условие совместности системы (3.2.19) выполняется, но не тождественно, а также выполняется условии леммы 1, то существует некоторое частное, либо особое решение системы. В противном случае, система (3.2.19) несовместна. Для тождественного выполнения условия совместности системы (3.2.20) необходимо и достаточно, чтобы функция* $q(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ *имела вид (3.2.21). Если комплексное дифференциальное уравнение (3.2.23) имеет решение определённого вида, то п.о.с.К.-Р. (3.2.19) также имеет решение, и многообразия её решений определяется явной формулой (3.2.24). Причём такого вида решения системы (3.2.19), при* $0 \le n < 1$ *во всём полицилиндре* $\bar{I}_3$ *и при* $n \ge 1$ *в* $\bar{I}_3^{(0)}$ *является непрерывным. Если* $n \ge 1$, *то решение исходной системы в точке* $\bar{z}_1 = \bar{z}_1^{(0)}$ *соответственно имеет логарифмическую особенность при* $n=1$, *и* $(n-1)$*-го порядка при* $n > 1$. *Если же в системе (3.2.20) применять торию вычетов, то решение системы (3.2.19) всюду в* $\bar{I}_3$ *является непрерывной.*

3.2.6. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}} p(z_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \qquad (3.2.25)$$

где $a, b, p \in RA(\bar{\Pi}_2)$, $p \in A(\bar{\Pi}_3)$ по переменным z_1, W, $W \in RA(\Pi_3^{(0)})$. Прежде всего заметим, что для существования непрерывного решения системы (3.2.25) необходимо, чтобы для данной системы выполнялись условия *(M_0)*. Тогда из

системы (3.2.25) получаем: $p(z_1, z_2, \bar{z}_2, W) = 0,$, либо $W = h_1(z_1, z_2, \varsigma_2)$.. Если эта функция удовлетворяет системе (3.2.25), то она будет частным решением системы. Тем самым определяем, что в точке вырождения система (3.2.25) может иметь некоторое частное решение. Аналитически продолжив в полицилиндре $\bar{I}_2$ее функциям, заменяя $\bar{z}_k$ на ς_k, преобразуем п.о.с.К.-Р. (3.2.25) к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}} p(z_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W). \qquad (3.2.26)$$

Условие совместности системы (3.2.26) имеет вид

$$(\varsigma - \varsigma_1^{(0)}) \frac{\partial b}{\partial \varsigma_1} + ap \frac{\partial b}{\partial W} = a \frac{\partial p}{\partial W} b + (p \frac{\partial a}{\partial \varsigma_2} + a \frac{\partial p}{\partial \varsigma_2}). \qquad (N_7)$$

Если условие *(N7)* выполняется, но не тождественно, то из этого соотношения можно определить функцию $W = h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$. Если эта функция удовлетворяет систему (3.2.26), то она будет частным решением системы. В противном случае, система (3.2.26) несовместна. Для того, чтобы соотношение *(N7)* выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ имела вид

$$b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W) = \left\{ \frac{\partial A}{\partial \varsigma_2} - \frac{\partial P}{\partial \varsigma_2} + f[z_1, z_2, \varsigma_2; P(z_1, z_2, \varsigma_2; W) - A(z_1, ...)] \right\} p(z_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad (3.2.27)$$

где $P(z_1, z_2, \varsigma_2; W) = \int_{W_0}^{W} \frac{d\sigma}{p(z_1, z_2, \varsigma_2; \sigma)}$, $A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = \int_L \frac{a(z_1, t_1, z_2, \varsigma_2)}{t_1 - \varsigma_1^{(0)}} dt_1$. Если функция $a(z_1, \ldots)$ удовлетворяет условию *(M0)*, то функции $A(z_1, \ldots)$ и $b(z_1, \ldots)$ всюду в бицилиндре $\overline{\Pi}_2$будут непрерывными, а в особой точке $\varsigma_1 = \varsigma_1^{(0)}$ имеют логарифмическую особенность. Если же в системе (3.2.26) применять теорему о вычетах к функции $A(z_1, ...)$, то получим некоторую функцию

$A(z_1,\varsigma_1,..)=2\pi i\cdot a(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2)$, непрерывную во всей области. Интегрируем первое уравнение системы (3.1.45), как к.д.у., по переменной ς_1

$$P(z_1,z_2,\varsigma_2;W)-A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=V\,, \qquad (3.2.28)$$

где $V=V(z_1,z_2,\varsigma_2)$- новая неизвестная функция. Дифференцируя (3.2.28) по переменной ς_2, подставим её значение во второе уравнение системы (3.2.26) и в результате, получим к.д.у. с параметрами

$$\frac{\partial V}{\partial\varsigma_2}=f(z_1,z_2,\varsigma_2;V)\,, \qquad (3.2.29)$$

где функция $f(z_1,\dots)$ определяется из соотношения (3.2.27). Далее интегрируя регулярное комплексное дифференциальное уравнение (3.2.27) по переменной ς_2, будем иметь $V=V[z_1,z_2,\varsigma_2;\hat{O}(z_1,z_2)]$. Подставляя значение функции V в (3.2.28), и переходя к прежним переменным, получим многообразие всех решений системы (3.2.25) следующей формулой

$$W=P^{-1}\{z_1,z_2;\hat{O}(z_1,z_2)+A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)+V[z_1,z_2,\bar{z}_2;\hat{O}(z_1,z_2)]\}. \quad (3.2.30)$$

Теорема 3.3. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.25) $a,p,b\in RA(\bar{I}_2),W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, причём функция $p(z_1,\dots)$ аналитическая по переменным z_1,W. Если для системы (3.2.26) выполняется условие (M_0), либо условие (N_7) выполняется, но не тождественно, тогда можно найти некоторые частные, либо особые решения системы (3.2.26). В противном случае, данная система несовместна. Для того, чтобы условие (N_7) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция $b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)$ имела вид (3.2.27). Если к.д.у. (3.2.29) имеет решение, тогда система (3.2.25) также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (3.2.30).*

3.2.7. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)\, m(z_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}}, \tag{3.2.31}$$

где $a, m, b \in RA(\ddot{I}_2), \partial_{\bar{Z}_1} m = 0, \partial_{\bar{W}} m = 0, \partial_{\bar{W}} b = 0,\ W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$. Для того, чтобы решение системы (3.2.31) на данной области было непрерывно, необходимо, чтобы в особой точке $\bar{z}_2 = \bar{z}_2^{(0)}$ существовал предел вида

$$\lim_{\bar{z}_2 \to \bar{z}_2^{(0)}} \left(\bar{z}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} \right) = 0 . \qquad (M_0)$$

При этом из системы (3.2.31) необходимо получаем $b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2^{(0)}; W) = 0.$

Откуда имеем: $W = h(z_1, \bar{z}_1, z_2)$.. Если эта функция удовлетворяет систему (3.2.31), то она будет лишь особым, либо частным решением системы. В противном случае, система (3.2.31) несовместна. После аналитического продолжения в области, заменой $\bar{z}_k$ на ς_k, *(k=1,2)* преобразуем систему (3.2.31) к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)\, m(z_1, z_2, \varsigma_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}} . \tag{3.2.32}$$

Условием совместности системы (3.2.32) будет

$$\frac{\partial b}{\partial \varsigma_1} + a\, m \frac{\partial b}{\partial W} = a\, m\, b + (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})\left(m \frac{\partial a}{\partial \varsigma_2} + a \frac{\partial m}{\partial \varsigma_2}\right) . \qquad (N_8)$$

Если условие (N_8) выполняется, но нетождественно, то система (3.2.32) может иметь некоторое частное решение. В противном случае, система (3.2.32) несовместна. Условие *(N_8)* выполняется тождественно тогда и только тогда, когда функция $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ имеет вид:

$$b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}) \left\{ \frac{\partial (A - M)}{\partial \varsigma_2} + f\left[z_1, z_2; M(z_1, z_2, \varsigma_2; W) - A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)\right] \right\} m(z_1, z_2, \varsigma_2; W) .$$

(3.2.33)

Учитывая значения функции $b(z_1,...)$ из (3.2.33) в системе (3.2.32), интегрируем систему, и получим к.д.у. вида (3.2.29), в ней функция $f(z,z,\varsigma_2;V)$ определяется из формулы (3.2.33). Если регулярное к.д.у. (3.2.29) имеет решение вида $V = V[z_1, z_2, \varsigma_2, \hat{O}(z_1, z_2)]$, то исходная система также будет иметь решение и после перехода к прежней переменной, получим :

$$\mathrm{W}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) = \mathrm{M}^{-1}\{z_1,z_2;\ \mathrm{A}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2) + \mathrm{V}[z_1,z_2,\bar{z}_2;\Phi(z_1,z_2)]\}. \qquad (3.2.34)$$

Причём, этого вида решение системы (3.2.31) во всей области будет непрерывным. А также для п.о.с.К.-Р. вида (3.2.32) справедлива предыдущая теорема 3.4.

3. 2.8. Рассмотрим п.о.с.К.-Р., являющиеся обобщением предыдущей системы (3.2.32) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2^{(0)})\, m(z_1,z_2,\bar{z}_2;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{(\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)})^n}\ , \qquad (3.2.35)$$

где функции $a,m,b \in RA(\bar{\bar{I}}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$. Аналитически продолжим в системе (3.2.35), заменой $\bar{z}_2$ на ς_2, и преобразуем её в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\, m(z_1,z_2,\varsigma_2;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}. \qquad (3.2.36)$$

Условием совместности системы (3.2.36) будет

$$\frac{\partial b}{\partial \varsigma_1} + a\,m\frac{\partial b}{\partial W} = a\frac{\partial m}{\partial W}\ b + (\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\left(m\frac{\partial a}{\partial \varsigma_2} + a\frac{\partial m}{\partial \varsigma_2}\right). \qquad (N_9)$$

Если условие совместности (N_9) выполняется, но не тождественно, то из этого соотношения сможем определить некоторую функцию $W = h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma\ )$. Если эта функция удовлетворяет систему (3.2.36), тогда она будет только частным решением системы. В противном случае, система (3.2.36) несовместна. А также, если для системы (3.2.36) выполняются условий (M_0) (при ограниченности производных от неизвестной функции), то также сможем

получить некоторые частные, либо особые решения системы. Для того, чтобы найти многообразие всех решений системы, требуем тождественное выполнение условия совместности (N_9). Это требование выполняется тогда и только тогда, когда функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ принимает вид:

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)= \qquad (3.2.37)$$
$$=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\left\{\frac{\partial A}{\partial\varsigma_2}-\frac{\partial M}{\partial\varsigma_2}+f[z_1,z_2,\varsigma_2;M(z_1,z_2,\varsigma_2;W)-A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)]\right\}m(z_1,...;W)\text{,}$$

где $A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\int_0^{\varsigma_1}a(z_1,t_2,z_2,\varsigma_2)dt_1, M(z,...,W)=\int_0^W\frac{d\sigma}{m(z,z,\varsigma_2;\sigma)}$, $f(...)-$вполне

определённая функция. Подставляя значение функции $b(z_1,...)$ в системе (3.2.36), получаем регулярное к.д.у. вида (3.2.29). Интегрируя первое уравнение последней системы, по переменной ς_1, получим $M(z_1,z_2,\varsigma_2;W)-A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=V$, где $V=V(z_1,z_2,\varsigma_2)$ - новая неизвестная функция. Дифференцируя последнее равенство по переменной ς_2, подставим её значения в системе (3.2.36), в результате, получим к.д.у. вида (3.2.29), где функция $f(z_1,...,M-A)$ определяется из формулы (3.2.37). Если считать, что функция $V=V[z_1,z_2,\varsigma_2;\hat{O}(z_1,z_2)]$ будет решением к.д.у. вида (3.2.29), то переходя к прежним переменным, получаем многообразие решений исходной системы следующей формулой

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2)=\mathrm{M}^{-1}\{\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2;\mathrm{A}(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2)+\mathrm{V}[\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2;\Phi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)]\}. \qquad (3.2.38)$$

Теорема 3.5 *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.35)* $a,m,b\in RA(\bar{I}_2), W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, $m,b-$ *являются аналитическими по переменной* W. *Если условие совместности (*N_9*) выполняется, но не тождественно, а также, при ограниченности частных производных функции в системе (3.2.36), выполняются условия леммы 1, тогда можно определить некоторое частное, либо особое решение системы. Для того, чтобы условие (*N_9*) выполнялось тождественно, необходимо и*

достаточно, чтобы функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ *имела вид (3.2.37). Если к.д.у. вида (3.2.29) имеет определённого вида решения, то система (3.2.35) также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (3.2.38), непрерывной во всей данной области.*

3.2.8. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)}}\,m(z_1,z_2,\bar{z}_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)}}\,, \qquad (3.2.39)$$

где $a,m,b\in RA(\overline{\Pi}_2), W\in RA(\Pi_3^{(0)}), m,b-$ аналитические по W . Прежде всего, требуем, чтобы в случаи ограниченности частные производные искомой функций, для системы (3.2.39) выполнялись следующие условия леммы 1.

Тогда по аналогии [275]-[279], из системы (3.2.39), получим некоторые функций $W=p_1(z_1,z_2,\varsigma_2),\ W=p_2(z_1,\varsigma_1,z_2)$, которые могут быть только лишь частными, либо особыми решениями системы. Заменяя $\bar{z}_k$ на ς_k, аналитически продолжим в системе (3.2.39), и получим в $\ddot{I}_3$ систему с аналитическими правыми частями

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\,m(z_1,z_2,\varsigma_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=\frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\,. \qquad (3.2.40)$$

Условие совместности системы (3.2.40) выполняется тождественно тогда и только тогда, когда функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2W)$ в зависимости к функциям a, m определяется следующим образом:

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)=$$
$$=(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})\left\{\frac{\partial A}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\partial\varsigma_2}-\frac{\partial M}{\partial\varsigma_2}+f[z_1,z_2,\varsigma_2;M[z_1,...;W]-\frac{A(z_1,...,\varsigma_2)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right\}m(z_1,...,W)\,. \qquad (3.2.41)$$

где $A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\int_0^{\varsigma_1}a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)dt_1,\quad M(z_1,...;W)=\int_0^{W}\frac{d\tau}{m(z_1,z_2,\varsigma_2;\tau)},\quad f(z_1,...,V)$ -

вполне определенная функция. Если с учётом значения этой функции $f(z_1,...)$ к.д.у. (3.2.29) имеет решение, то система (3.2.40) также разрешима и

многообразия её решений, после перехода к прежним переменным выражается явной формулой

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=M^{-1}\left\{z_1,z_2,\bar{z}_2;\frac{A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)}}+V[z_1,z_2,\bar{z}_2;\Phi(z_1,z_2)]\right\}. \quad (3.2.42)$$

При этом решение системы (3.2.39) в точке $\varsigma_2=\varsigma_2^{(0)}$ имеет особенности первого порядка, а по другой переменной является непрерывным.

Замечание. Если в процессе интегрирования системы (3.2.39) начинать с первого её уравнения, то решение системы в точке $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$ из $\ddot{I}_3^{(0)}$ имеет особенности первого порядка, а по другой переменной, во всей данной области является непрерывным, и ей применима предыдущая теорема.

3.2.9. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^n}m(z_1,z_2,\bar{z}_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial\bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^n}, \qquad (3.2.43)$$

где $a,b,m\in RA(\bar{I}_2), W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, причём m,b - аналитические по W функций. В системе (3.2.43) аналитически продолжая функциям по переменной $\bar{z}_1$ к ς_1, будем иметь

$$\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}m(z_1,z_2,\varsigma_2;W),\quad \frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=\frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}. \qquad (3.2.44)$$

Для непрерывности решения системы (3.2.44) необходимо, чтобы при ограниченности частных производных искомой функции, выполнялись следующие равенства, как в лемме 1:

$$\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=0,\quad \lim_{\varsigma\to\varsigma_1^{(0)}}(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=0. \quad (M_0)$$

Тогда из (3.2.44) сможем определить некоторые функции $W=h_1(z_1,z_2,\varsigma_2),\ W=h_2(z_1,\varsigma_1,z_2)$, которые могут быть частными, либо особыми

решениями системы. Условие совместности системы (3.2.44) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial b}{\partial \varsigma_1}+\frac{a\,m}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\frac{\partial b}{\partial W}=\left(\frac{a}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}+\frac{n}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)b+m\frac{\partial a}{\partial \varsigma_2}+a\frac{\partial m}{\partial \varsigma_2}. \qquad (N_{10})$$

Если условие *(N_{10})* выполняется, но не тождественно, тогда из него сможем определить функцию $W=h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$. Если эта функция удовлетворяет систему (3.2.44), то она будет одна из частных решений системы. В противном случае, система (3.2.44) не совместна. Для того, чтобы существовало многообразие решений системы (3.2.44), необходимо и достаточно, чтобы условие *(N_{10})* по всем переменным выполнялось тождественно. Это требование выполняется тогда и только тогда, когда функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ принимает вид

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)=$$
$$=(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\left\{\frac{\partial A}{\partial \varsigma_2}-\frac{\partial M}{\partial \varsigma_2}+f\left[z_1,z_2,\varsigma_2;M(z_1,...,;W)-A(z_1,...)\right]\right\}m(z_1,...;W)'$$

(3.2.45)

где $A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\int\limits_L\frac{a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^n}$, $M(z_1,z_2,\varsigma_2;W)=\int\limits_{W_0}^{W}\frac{d\sigma}{m(z_1,z_2,\varsigma_2;\sigma)}$. Для того, чтобы первый интеграл существовал, необходимо, чтобы функция $a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$ удовлетворяла условию малости

$a(z_1,\varsigma_1,...)=o(\left|\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}\right|^{n-\lambda})$, $(0\le\lambda<1)$. А также, если в этот интеграл можно было применять теоремы о вычетах функции, то функция [58]

$A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim\limits_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}a}{\partial\varsigma_1^{(n-1)}}\right)$ будет непрерывной в полицилиндре $\bar{\Gamma}_2$.

Теперь учитывая значение функции $b(z_1,...;W)$ из формулы (3.2.45), будем интегрировать систему (3.2.44). По аналогии предыдущим пунктам,

интегрируем первое уравнение системы (3.2.44) по переменной ς_1, как к.д.у. с параметром ς_2, и затем подставим её результат во второе уравнение системы. Если полученное к.д.у. имеет решение вида $V = V[z_1, z_2, \varsigma_2, \hat{O}(z_1, z_2)]$, то исходная система (3.2.43) также разрешима, и после перехода к прежним переменным, получим многообразия её решений формулой

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) = \mathrm{M}^{-1}\{\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2; \mathrm{A}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2) + \mathrm{V}[\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2; \Phi(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2)]\}. \quad (3.2.46)$$

Теорема 3.6. *Допустим, что в п.о.с.К.Р. (3.2.43)* $a, m, b \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, $m, b \in A(\bar{I}_3)$. *Если условие совместности (N_{10}) выполняется, но не тождественно, а также, каждые функции* a, b, m *в системе (3.2.43) удовлетворяют условию леммы 1, то можно определить два частных, либо особых решений системы. Для того, чтобы условие совместности (N_{10}) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ *принимала вид (3.2.45). Если к.д.у. вида (3.2.29) при исходной значении функции* $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ *из (3.2.45) имеет решение, то исходная система также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (3.2.46), непрерывной по переменной* $\bar{z}_2$, *а по* $\bar{z}_1$ *имеет особенность(n--1)- го порядка, если n>1. В случаи n=1 имеет логарифмическую особенность, в случаи n<1, решение задачи во всей области непрерывно.*

3.2.10. Будем рассматривать квазилинейного п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{\bar{z}_1}, \qquad (3.2.47)$$

где $f, g \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)}), \quad f, g -$ аналитические по переменной W.

Наша цель состоит в обеспечении тождественного выполнения условии совместности п.о.с.К.-Р вида (3.2.47), а также нахождения непрерывного, либо сингулярного многообразия решений системы. По этой причине для

существования непрерывного решения системы (3.2.47), по аналогии с [298], достаточно потребовать ограниченности производной от неизвестной функции по переменной $\bar{z}_1$ и выполнения следующих условий**:**

$$\lim_{\bar{z}_1 \to 0}\left(\bar{z}_1 \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} \right) = 0.. \qquad (3.2.48)$$

Тогда из системы (3.2.47) имеем: $g(z_1,0,z_2,\bar{z}_2;W)=0$. Из этой соотношении, имеем $W = h(z_1,z_2,\bar{z}_2)$.. Возможно, что эта функция будет частным, либо особым решением данной системы. Выполняя аналитического продолжения к функциям системы по переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=1,2)$, преобразуем систему (3.2.47) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{\varsigma_1}. \qquad (3.2.49)$$

Условием совместности этой системы будет

$$\varsigma_1^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \varsigma_2} - \frac{\partial g}{\partial \varsigma_1} \right) + \varsigma_1 \cdot \left(g \cdot \frac{\partial f}{\partial W} - f \, \frac{\partial g}{\partial W} \right) + g = 0. \qquad (N_{11})$$

Пусть условие (N_{11}) выполняется, но не тождественно. Тогда из этого соотношения, по теореме о неявной функции [251]-[252], имеем $W = h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$. Если эта функция удовлетворяет системе (3.2.49), то она будет ее частным решением . В противном случае, системы (3.2.49) и (3.2.47) не будут совместными. Допустим, что условие (N_{11}) выполняется тождественно. Проинтегрировав первое уравнение системы (3.2.49) по переменной ς_1, как регулярной п.о.с.К.-Р., считая остальные переменные параметрами, имеем:

$$W = F[z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;V(z_1,z_2,\varsigma_2)]. \qquad (3.2.50)$$

Дифференцируя последнюю функцию из (3.2.50) по переменной ς_2, подставим её значения во второе уравнение системы (3.2.49), и получим регулярное комплексное дифференциальное уравнение (к.д.у.) вида

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = H(z_1, z_2, \varsigma_2; V), \quad \left(H(z_1,...) = \frac{g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 F'_V} \right). \qquad (3.2.51)$$

Далее доказываем, что правая часть к.д.у. (3.2.51) не зависит от переменного ς_1. Для этого продифференцируем правую часть к.д.у. (3.2.51) по переменной ς_1;

$$D_{\varsigma_1}\left(\frac{g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 F'_V} \right) = 0: \quad \frac{(g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2})'_{\varsigma_1} \varsigma_1 F'_V - (g - \varsigma_1 F'_{\varsigma_2})(\varsigma_1 F'_V)'_{\varsigma_1}}{(\varsigma_1 \cdot F'_V)^2} = 0. \quad (3.2.52)$$

Преобразуя это соотношение в числителе последней дроби, получим;

$$[\varsigma_1^2 \cdot (f'_{\varsigma_2} - g'_{\varsigma_1}) + \varsigma_1 (g \cdot f'_W - f \cdot g'_W) + g] \cdot \varsigma_1 \cdot F'_V - (g - \varsigma_1 \cdot F'_{\varsigma_2}) \cdot (\varsigma_1 \cdot F'_V)'_{\varsigma_1} = 0.$$

Поскольку по первому предположению условие (N_{11}) выполняется тождественно, тем самым каждые слагаемые в скобках равны нулю. Это означает, что правая часть к.д.у. (3.2.52) не зависит от переменного ς_1. Тогда интегрируя регулярное нелинейное к.д.у. (3.2.52), имеем: $V = V[z_1, z_2, \varsigma_2; \hat{O}(z_1, z_2)]$

.

Далее подставляя значение V из последнего соотношения в (3.2.48), и переходя к прежним переменным, получим решение исходной задачи формулой

$$\mathrm{W}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \mathrm{F}\left[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \mathrm{V}[z_1, z_2, \bar{z}_2; \Phi(z_1, z_2)]\right]. \qquad (3.2.53)$$

Теорема 3.7 *Пусть в п.о.с. К.-Р. (3.2.47)* $f, g \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, f, g – *аналитические по переменной* W. *Пусть для системы (3.2.47) имеет место условие (3.2.48), а также условие* (N_{11}) *выполняется, но не тождественно, тогда из этого соотношения находим некоторую функцию* $W = h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$. *Если эта функция удовлетворяет каждое уравнение системы (3.2.47), то она будет некоторым частным, либо особым решением системы (3.2.47). Если условие* (N_{11}) *выполняется тождественно, тогда исходная система разрешима*

и многообразие её решений определяется формулой (3.2.53), непрерывной всюду в области (бицилиндре) $\overline{\overline{I}}_2$.

Замечание. 1. Если рассматривать квазилинейного п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_1)^n}, (n \geq 2) \qquad (3.2.54)$$

либо

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2)^n}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), (n \geq 1), \qquad (3.2.55)$$

А также, если для указанных п.о.с.К.- Р. условия совместности вида (N_{11}) выполняется тождественно, то для этих выше указанных п.о.с. К.- Р. вида (3.2.54), (3.2.55), будут справедливыми утверждения, равносильные предыдущей в теореме 3.7.

Замечание. 2. Если в п.о.с.К.- Р. (3.2.47), либо (3.2.49) функция $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ определяется как некоторые функций класса RA, например, вида:

1) $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W) = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \cdot \partial(z_1, z_2, \bar{z}_2; W)$, либо

2) $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W) = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \cdot W + b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \cdot W^n$, либо

3) $f(z_1, t \cdot \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{z}_1 \cdot W) = \tilde{f}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ (случаи однородности), либо,

4) $f(z_1, t \cdot \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{z}_1^{\,k} \cdot W) = t^{1-k} \cdot \tilde{f}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W), \quad (k \geq 1)$ (обобщённо - однородности функции), и другие нелинейные и линейные случаи для функции $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$, то в п.о.с.К.-Р. вида (3.2.47) и (3.2.54) функция $g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)$ определяется конкретными формулами, так, что для них условии совместности вида (3.2.50), во первых выполняются тождественно, и во вторых их особен-ность (независимо от их порядка) в новых преобразованных системах устран-яются, и многообразия их решений

найдутся определёнными регулярными формулами. Например, в одном из случаев, взаимосвязь функции $g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)$ с данными функции $a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$, $\delta(z_1,z_2,\bar{z}_2;W)$ иметь вид:

$$g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)=z_2^n\left\{\frac{\partial(A-P)}{\partial\bar{z}_1}+F\left[z_1,\bar{z}_1,z_2;P(z_1,z_2,\bar{z}_2;W)-A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)\right]\right\}p(z_1,z_2,\bar{z}_2;W),$$

где функции $A(z_1,\ldots)$, $P(z_1,\ldots)$ –выражаются через функции интегралов от $a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$, и $p(z_1,z_2,\bar{z}_2;W)$, и решение системы определяется формулой:

$$W=P^{-1}\{z_1,z_2,\bar{z}_2;A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)+H[z_1,\bar{z}_1,z_2;\Phi(z_1,z_2)]\},$$

причём найденное решение изучаемой системы, во всей данной области будет непрерывным (но возможно многозначным).

3.2.11. Теперь будем рассматривать п.о.с.К.- Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_1}=\frac{f(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^m},\quad \frac{\partial W}{\partial\bar{z}_2}=\frac{g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{(\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)})^m},\qquad (3.2.56)$$

где $f,g\in RA(\bar{I}_2),W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)}),m\geq 0,$ $f,g-$аналитические по переменной W. Аналогично предыдущим случаям, в системе (3.2.56) аналитически продолжив к фунциям по переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=1,2)$, преобразуем её в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=\frac{f(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m},\quad \frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=\frac{g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m}.\qquad (3.2.57)$$

Если в системе (3..57), при ограниченности $\frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}$ $(k=1,2)$, существуют пределы

$$\lim_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m\cdot\frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}\right)=0,\ (k=1,2),\qquad (3.2.58)$$

то из равенства $f(z_1,\ldots;W)=0,\ g(z_1,\ldots;W)=0$ легко определим функций $W=h_1(z_1,z_2,\varsigma_2),\ W=h_2(z_1,z_2,\varsigma_1)$, непрерывные во всем полицилиндре, являющиеся частными решениями данной системы (3.2.57). Условием совместности п.о.с. К.-Р. (3.2.57) будет

$$(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m\frac{\partial f}{\partial \varsigma_2}+g\frac{\partial f}{\partial W}-(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m\frac{\partial g}{\partial \varsigma_1}-f\frac{\partial g}{\partial W}=0. \qquad (N_{12})$$

Если условие (N_{12}) выполняется, но не тождественно, то из него находим некоторую функцию $u=h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$, где она возможно будет некоторым частным, либо особым решением исходной системы.

Теперь приступим к интегрированию системы (3.2.56) (вне особой точке). Допустим, что решением первого уравнения системы (3.2.57) будет некоторая функция $W=F\left[z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;V(z_1,z_2,\varsigma_2,)\right]$ (имеющая особенности (m-1)-го порядка, по переменной ς_1 в точке $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$), т.е.

$$W=F\left[z_1,\varsigma_1,(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^{1-m},z_2,\varsigma_2;V(z_1,z_2,\varsigma_2,)\right]. \qquad (3.2.59)$$

Дифференцируя, функцию (3.2.59) по переменной ς_2, подставим её результат в системе (3.2.56). Тогда получим к.д.у. с сингулярной точкой вида

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2}=\frac{p(z_1,z_2,\varsigma_2;V)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m},\quad \left(p(z_1,z_2,\varsigma_2;V)=\frac{g-(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m F'_{\varsigma_2}}{F'_V},(F'_V\neq 0)\right). \qquad (3.2.60)$$

Если для последнего уравнения из (3.2.60) выполняется условие (3.2.58) , то есть $\lim\limits_{\varsigma_2\to\varsigma_2^{(0)}}\left((\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2}\right)=0$ (при ограниченности $\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2}$), то из (3.2.60) также имеем, что $p(z_1,z_2,\varsigma_2^{(0)};V)=0$, где решением этого уравнения будет некоторая аналитическая функция $V=V(z_1,z_2)$. А эта функция считается частным решением к.д.у. (3.2.60) и самой системы (3.2.57) вне особой точки вырождения.

Если в к.д.у. (3.2.60) $p(z_1,z_2,\varsigma_2;V)=o((\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^{m-\lambda}),(0\le\lambda<1)$, то в данной области имеется непрерывное решение данного уравнения. Если же это условие малости для функции $p(z_1,z_2,\varsigma_2;V)$ не выполняется, то решение к.д.у. (3.2.60) и системы (3.2.57) в $\ddot{I}_3^{(0)}$ непрерывно, а в точках $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)},(k=1,2)$ имеет

особенности (m-1) –го порядка, по обеим переменным, и решение системы (3.2.57) будет представлено следующей формулой :

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=F\left[z_1,\bar{z}_1,(\bar{z}_1-\bar{z}_0)^{1-m},z_2,\bar{z}_2;V\left[z_1,z_2,\bar{z}_2,(\bar{z}_2-\bar{z}_0)^{1-m};\hat{O}(z_1,z_2)\right]\right]. \quad (3.2.61)$$

Теорема 3.8. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.2.57)* $f,g\in RA(\bar{I}_2), W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, $f,g-$ *аналитические по переменной W. Если в системе (3.2.57) будут выполнены условия (3.2.58) и условие совместности данной системы выполняется, но не тождественно, тогда система (3.2.57) имеет некоторые частные решения. А также, если для к.д.у. (3.2.60.) выполняется условие (3.2.58), то и к.д.у. (3.2.60), и система (3.2.57) будут иметь только лишь некоторые частные решения. Допустим, что условие совместности данной системы по всем переменным, кроме точки вырождения выполняется тождественно. Тогда п.о.с.К.-Р. (3.2.56) разрешима, и многообразие её решений, определяемое формулой (3.2.61), по обеим переменным, имеет особенности (m-1)- го порядка (при m>1), и логарифмическую при m=1, а при* $0\le m<1$ *во всей области непрерывно.*

3.2.12. Теперь рассмотрим п.о.с.К.- Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_1}=\frac{f(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{\bar{z}_2},\quad \frac{\partial W}{\partial\bar{z}_2}=\frac{g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{\bar{z}_1}, \qquad (3.2.61)$$

где $f,g\in RA(\bar{I}_2), W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, $f,g-$ аналитические по переменной *W*.

Аналогично предыдущим случаям, на данной системе аналитически продолжив к функциям по переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=1,2)$, преобразуем её в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=\frac{f(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{\varsigma_2},\quad \frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=\frac{g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{\varsigma_1}\quad . \qquad (3.2.62)$$

Условие совместности системы (3.2.62) имеет вид:

$$\varsigma_1 \cdot \varsigma_2 \cdot \left(\varsigma_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial \varsigma_2} - \varsigma_2 \cdot \frac{\partial g}{\partial \varsigma_1} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial W} - f \cdot \frac{\partial g}{\partial W} \right) + \varsigma_2^2 \cdot g - \varsigma_1^2 \cdot f = 0 . \qquad (N_{13})$$

Если условие совместности (N_{13}) выполняется, но не тождественно, тогда из этого соотношения, по аналогии предыдущим случаям, получим некоторое частное решение системы (3.2.62). Пусть условие (N_{13}) выполняется тождественно. Интегрируя первое уравнение системы (3.2.62) по переменной ς_1, считая ς_2 параметром, будем иметь:

$$W = \frac{1}{\varsigma_2} \cdot F\left[z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; V(z_1, z_2, \varsigma_2) \right]. \qquad (3.2.64)$$

Далее дифференцируя обе части (3.2.64) по переменной ς_2, с учётом второго уравнения системы (3.2.62), получим:

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = \frac{\varsigma_2^2 \cdot g + \varsigma_1 \cdot F - \varsigma_1 \cdot \varsigma_2 \cdot F'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 \cdot \varsigma_2 \cdot F'_V} \quad \text{или} \quad \frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = f(z_1, z_2, \varsigma_2, V) . \qquad (3.2.65)$$

По аналогии с п.п. 1-3, проверяя, что правая часть к.д.у. (3.2.65) не зависеть от переменного ς_1, получаем соотношения (3.2.63), для которого было требовано тождественного её выполнения. А это означает, что правая часть к.д.у.(3.2.65) не зависит от переменного ς_1. Интегрируя последнее к.д.у. (3.2.65), имеем

$$V = V[z_1, z_2, \varsigma_2; \Phi(z_1, z_2)] .$$

Подставляя значение функции $V=V(z_1, z_2, \ldots)$ в (3.2.64), переходя к предыдущим переменным, получим:

$$W = \frac{1}{\bar{z}_2} \cdot F\left[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; V(z_1, z_2, \bar{z}_2; \hat{O}(z_1, z_2)) \right]. \qquad (3.2.66)$$

Таким образом, нами получено, что многообразие решений исходной системы, является непрерывной по переменной $\bar{z}_1$, а по переменной $\bar{z}_2$ имеет особенности первого порядка.

Теорема 3.9. *Пусть в п.о.с.К.- Р. (3.2.62)* $f, g \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, f, g *– аналитические функции по переменной W. Если для системы (3.2.62) имеет место условие (3.2.60), а также условие (3.2.63) выполняется, но не тождественно, тогда находятся некоторые особые, либо частные решения системы (3.2.62). Если условие (3.2.63) выполняется тождественно, тогда исходная система разрешима и многообразие её решений определяемое формулой (3.2.66), которая в области* $\ddot{I}_2$ *по переменной* $\bar{z}_1$ *непрерывна, а по переменной* $\bar{z}_2$ *имеет особенности первого порядка.*

Замечание 3. Если процесс интегрирования системы (3.2.63) будем начинать со второго её уравнения при тех же условиях, как и выше, то решение системы по переменной $\bar{z}_2$ будет непрерывным, а по переменной $\bar{z}_1$ имеет особенности первого порядка .

Замечание 4. Если рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2)^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_1)^m},$$

и требовать тождественного выполнения условий ее совместности, то применяя теорему 3.9 к ним, получим решение последней системы, непрерывной, при порядка особенности, т.е. малого порядка $0 \le m < 1$, а при $m = 1$ и $m > 1$ в бицилиндре $\ddot{I}_2$, соответственно имеет логарифмическую особенность и особенности порядка $(m-1)$, а в данной области $\ddot{I}_2^{(0)}$ (та же область, но без особых точек)- непрерывно.

§ 3.3. О некоторых п.о.с.К.-Р. с линейными правыми частями и приводящиеся к линейным

3.3. 1. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}} W, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}} W + \frac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}} W^k, \quad (3.3.1)$$

где $a,b,h \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$. По аналогию с предыдущим случаям,, при выполнении условии $\lim_{\bar{z}_k \to \bar{z}_k^{(0)}}((\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k}) = 0$ (в случае ограниченности частных производных функции W по каждым переменных), получим тривиальные решения системы $W = 0, W = h(z_1, z_2)$, а также дополнительные условия на функции $a(z_1, \varsigma_1^{(0)}, z_2, \varsigma_2^{(0)}) = a_0 = 0, b(...) = b_0 = 0, h(...) = h_0 = 0$. Прежде всего, в системе (3.3.1) аналитически продолжим к функциям по переменным $\bar{z}_k$ на новых переменных ς_k (*k=1,2).* Тогда п.о.с.К.-Р. (3.3.1) преобразуется в системе с аналитическими правыми частями в области $\ddot{I}_5^{(0)}$ (с особыми точками $\varsigma_k = \varsigma_k^{(0)}, (k = 1,2)$):

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}} W, \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}} W + \frac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}} W^k. \qquad (3.3.2)$$

Условие совместности системы (3.3.2) выполняется тождественно тогда и только тогда, когда данные функций системы имеют вид;

$$\text{а)} \begin{matrix} b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})\beta(z_1, z_2, \varsigma_2), \quad h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma - \varsigma_2^{(0)})\gamma(z_1, z_2, \varsigma_2), \\ a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})\ \alpha(z_1, \varsigma_1, z_2). \end{matrix} \qquad (3.3.3)$$

При этом система (3.3.2) разрешима явно, и многообразие её решений после перехода к предыдущим переменным определяется следующей формулой:

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \exp\{B(z_1, z_2, \bar{z}_2) + A(z_1, \bar{z}_1, z_2)\}[\hat{O}(z_1, z_2) + \tilde{A}(z_1, z_2, \bar{z}_2)]^{1/(1-k)},$$

(3.3.4)

$$A(z_1, \bar{z}_1, z_2) = \int_L \alpha(z_1, t_1, z_2)dt_1,\ B(z_1, z_2, \bar{z}_2) = \int_L \beta(z_1, z_2, t_2)dt_2,\ \tilde{A}(z_1, z_2, t_2) = \int_L \gamma(\mathrm{z}, \mathrm{z}, \mathrm{t}_2)dt_2.$$

б) функции $b(z_1,...), h(z_1,...),$ *c* $a(z_1,...)$ взаимосвязаны следующими формулами:

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})\left[\beta(z_1,z_2,\varsigma_2)+\frac{\partial A}{\partial\varsigma_2}\right],$$
$$h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\,\gamma(z_1,z_2,\varsigma_2)\exp\{(1-k)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\}. \qquad (3.3.5)$$

При этих значениях функций $b(z_1,...),h(z_1,...)$ из (3.3.5), система (3.3.1) разрешима, и многообразие её решений после перехода к прежним переменным имеет вид

$$\mathrm{W}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=\exp\{\mathrm{A}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)+\mathrm{B}(z_1,z_2,\bar{z}_2)\}[\Phi(z_1,z_2)+\Gamma(z_1,z_2,\bar{z}_2)]^{1/(1-k)}$$
.(3.3.6)

Если считать, что в системе (3.3.2) $a(z_1,z_1^{(0)},z_2,z_2^{(0)})=a_0=0$, то её решение формулой (3.3.4), всюду в $\bar{\Gamma}_3$ будет непрерывна. А также, если применять теорему о вычетах к вычислению интеграла $A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)$, то получим $A(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=2\pi i\,a(z_1,\bar{z}_1^{(0)},z_2,\bar{z}_2)$ - непрерывное решение системы (3.3.1).

Теорема 3**.10.** *Пусть в п.о.с.К.-Р. (3.3.1)* $a,b,h\in RA(\bar{\Pi}_2),W\in RA(\Pi_3^{(0)})$. *Если для системы (3.3.1) выполнены условия леммы 1, то она будет иметь лишь тривиальное решение W=0 . Если же условие совместности системы (3.3.2) выполняется, но не тождественно, тогда данная система, кроме тривиального решения, может иметь некоторое одно частное решение. Для того, чтобы условие совместности системы (3.3.2) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(z_1,...),h(z_1,...)$ *с* $a(z_1,...)$ *были взаимосвязаны формулами вида (3.3.3), либо (3.3.5). Тогда система (3.3.1) разрешима и многообразие её решений определяемые соответствующими формулами (3.3.4) либо (3.3.6),) во всей области* $\bar{\Gamma}_3$ *является непрерывным, а формулой (3.3.6), только при выполнении условия (M₀).*

3.3.2. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^n} W, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^n} W + \frac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^n} W^k, \quad (3.4.1)$$

где $a, b, h \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)}), k$ - произвольное рациональное число. Производя аналитическое продолжение переменных $\bar{z}_k$ $(k = 1,2)$ на ς_k, преобразуем систему (3.4.1) в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} W, \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n} W + \frac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n} W^k . (3.4.2)$$

Условие совместности системы (3.4.2) имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n}\right)\right] W + \left[\frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{h}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})}\right) + \frac{(k-1)ah}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n}\right] W^k = 0$$

.(N_{14})

Для существования непрерывного решения системы (3.3.8), предполагаем, чтобы необходимо выполнялись условий из соотношений (M_0). Тогда, получаем тривиальное решение системы (3.4.2) $W=0$, а также необходимые условия $a(z_1,...) = a_0 = 0, b = b_0 = 0, h = h_0 = 0$. Тем самым, определяем поведение системы в точках вырождения. Если условие совместности системы (3.4.2) выполняется, но не тождественно, то из него можно определить функции $W = 0,$ и $W = [H(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)]^{1/(1-k)}$. Первое из этих решений, считаем тривиальным решением, а второе – частным решением системы. Допустим, что условие совместности системы (3.4.2) как соотношение $P(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)\, W + Q(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) W^k = 0$, выполняется тождественно.

Это требование выполняется тогда и только тогда, когда;

а) $$\begin{aligned} &a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n \alpha(z_1, \varsigma_1, z_2), \quad b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \beta(z_1, z_2, \varsigma_2), \\ &h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n \gamma(z_1, z_2, \varsigma_2) \exp\{(1-k) A(z_1, z_2, \varsigma_2)\} \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

При этих значениях функции a, b, h , -исходная система всюду в $\bar{I}_3$ имеет непрерывное решение вида системы (3.4.2).

б) Пусть в исходной системе имеет место

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\left[\beta(z_1,z_2,\varsigma_2)+\frac{\partial A}{\partial\varsigma_2}\right],\quad A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\int_L\frac{a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^n}dt_1,$$

$$h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\gamma(z_1,z_2,\varsigma_2)\cdot\exp\{(1-k)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\}. \qquad (3.4.4)$$

Тогда в процессе интегрирования системы (3.4.2), получаем не существующего интеграла в особой точке $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$. Применяя ей теорему о вычетах в этой особой точке, будем иметь: $A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim\limits_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}a}{\partial\varsigma_1^{n-1}}\right)$, где она будет непрерывным всюду в полицилиндре $\bar{I}_2$. С другой стороны, если функция $a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=o(\varsigma^{n-\lambda}),(0\le\lambda<1)$, то также и функция $A(z_1,...,\varsigma_2)$, и решение системы во всём полицилиндре будут непрерывными. Так, что интегрируя первое уравнение системы (3.4.2) по переменной ς_1, как к.д.у., подставим её результат во второе уравнение системы (3.4.2) и переходя к прежним переменным, получим

$$\mathrm{W}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=\exp\{\mathrm{B}(z_1,z_2,\bar{z}_2)+\mathrm{A}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)\}\left[\Phi(z_1,z_2)+\omega(z_1,z_2,\bar{z}_2)\right]^{1/(1-k)}. \quad (3.4.5)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 3.11. *Допустим, что в п.о.с.К.-Р. (3.4.1)* $a,b,h\in RA(\bar{I}_2),W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$ *. Если для системы (3.4.1) выполняются условия леммы 1, а также условие* (N_{14}) *выполняется, но не тождественно, то система кроме тривиального решения, может иметь некоторое частное решение. Для того, чтобы условие совместности* (N_{14}) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функции* $a(z_1...),b(z_1,...),h(z_1,...)$ *соответственно определялись формулами (3.4.3) либо (3.4.4). При этом система (3.4.1) разрешима и многообразие её решений определяемое формулой (3.4.5) в точке* $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$ *при* $n=1$ *имеет логарифмическую особенность, при* $n>1$ *имеет*

особенности (n-1)-го порядка, а в первом случае непрерывное во всей данной области.

3.3.3. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{a_k(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)}} W + \frac{b_k(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)}} W^m, \ (k = 1, 2) \qquad (3.5.1)$$

где $a_k, b_k \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\bar{I}_3^{(0)})$. Если для системы (3.5.1) выполняются условия (M_0); $a_k(z_1, \bar{z}_1^{(0)}, z_2, \bar{z}_2^{(0)}) = a_{k0} = 0$, $b_k(z_1, \bar{z}_1^{(0)}, z_2, \bar{z}_2^{(0)}) = b_{k0} = 0, (k = 1,2)$, то система (3.5.1) может иметь тривиальное решение. Произведя аналитическое продолжение в системе (3.5.1), заменой $\bar{z}_k$ на новых переменных ς_k $(k = 1,2)$, преобразуем исходную систему к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = \frac{a_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}} W + \frac{b_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}} W^m \quad (k = 1, 2). \quad (3.5.2)$$

Условие совместности системы (3.5.2) имеет следующий вид

$$P(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) W + Q(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) W^m = 0, \quad (N_{15})$$

где $P(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{a_2}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a_1}{\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)}}\right)$,

$$Q(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b_2}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{b_1}{\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)}}\right) + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})}.$$

Условие (N_{15}) можно рассматривать в нескольких случаях. Допустим, что условие (N_{15}) выполняется, но не тождественно. Тогда из этого соотношения легко определить, что $W = 0, W = F(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2)$ будут её частными, либо особыми решениями. Но, если вторая из этих функций удовлетворяет исходную систему (3.5.2), то она будет частным решением системы. В противном случае, система (3.5.2) кроме тривиального решения $W = 0$, другие решения не имеет. Допустим, что условие (N_{15}) по всем переменным

выполняется тождественно. Этот вопрос сможем рассматривать, также в следущих двух случаях:

а) Допустим что $P(z_1,...)=0, Q(z_1,..)=0$, когда в них каждые её слагаемые равны нулю, то есть.

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{a_2}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)=0,\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{a_1}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)=0,\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{b_2}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)=0,\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{b_1}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)=0, a_1b_2-a_2b_1=0$$

Откуда будем иметь:

$$\begin{aligned}&a_1(z_1,...)=(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})\,p_1(z_1,\varsigma_1,z_2),\ \ a_2(z_1,...)=(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})\,p_2(z_1,z_2,\varsigma_2),\\&b_1(z_1,...)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\,q_1(z_1,\varsigma_1,z_2),\ \ b_2(z_1,...)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\,q_2(z_1,z_2,\varsigma_2),\ a_1b_2-a_2b_1=0.\end{aligned}\qquad (3.5.3)$$

При этом система (3.5.2) принимает регулярный вид

$$\frac{\partial W}{\partial\varsigma_1}=p_1(z_1,\varsigma_{1,}z_2)W+q_1(z_1,\varsigma_1,z_2)W^m,\quad \frac{\partial W}{\partial\varsigma_2}=p_2(z_1,z_2,\varsigma_2)W+q_2(z_1,z_2,\varsigma_2)W^m.$$

Условие совместности этой системы выполняется тождественно и многообразие её решений, после перехода к прежним переменным принимает следующий вид:

$$W(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)=\exp\{\omega_1(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)\}\cdot\left[\omega_2(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2)+\hat O(z_1,z_2)\right]^{1/(1-m)}.\quad (3.5.4)$$

При этом решение системы (3.5.1) представленное формулой (3.5.4), во всей области $\bar I_2$ является непрерывным.

б) Теперь допустим, что условие *(N_{12})* выполняется тождественно, в полном смысле (не частично как в пункте а)), то есть $P(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=0, Q(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=0$, или

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{a_2}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)-\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{a_1}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)=0,\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{b_2}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)-\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{b_1}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)+\frac{a_1b_2-a_2b_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})}=0$$

.

В силу выполнения первого равенства, из последних соотношений, сможем, найти функцию $\breve\omega_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$ такую, что

$$\frac{\partial\breve{\omega}}{\partial\varsigma_1}=\frac{a_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}},\quad \frac{\partial\breve{\omega}}{\partial\varsigma_2}=\frac{a_2(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}.$$

Так же для этой системы сможем утвердить, что для непрерывности её решения, необходимо выполнение условий $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})\frac{\partial\breve{\omega}}{\partial\varsigma_k}\right)=0$, (k=1,2) откуда получим [297], [306] $a_k(z_1,\ldots)=0,\ (k=1,2)$. Причём такая функция $\breve{\omega}(z_1,\ldots)$ является непрерывной во всей области полицилиндра.

Умножая обе части уравнений системы (3.5.2) на $\exp\{\breve{\omega}(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\}$ преобразуем её в линейном виде. А затем, интегрируя новую систему, переходим к прежним переменным, и в результате, получим

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=\exp\{\breve{\omega}(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)\}\cdot\left[\Phi(z_1,z_2)+\breve{\omega}_1(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)\right]^{1/(1-m)},\qquad (3.5.5)$$

где $\breve{\omega}_1(z_1,\ldots)$ определяется как решение системы уравнений

$$\frac{\partial\breve{\omega}_1}{\partial\varsigma_1}=\frac{b_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\exp\left(\breve{\omega}(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right),\ \frac{\partial\breve{\omega}_1}{\partial\varsigma_2}=\frac{b_2(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\exp\left(\breve{\omega}(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right).$$

По аналогию с предыдущим случаям, также здесь требуем выполнение условие леммы 1, или (M_0): $\lim\limits_{\varsigma_2\to\varsigma_2^{(0)}}\left((\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\frac{\partial\breve{\omega}_1}{\partial\varsigma_k}\right)=0$, где они обеспечивают непрерывность решений последней системы. Тогда решение исходной системы представленной формулой вида (3.5.5), всюду в области $\bar{I}_2$ будет непрерывным. Также заметим, что решение исходной системы является многозначным. Если же для системы (3.5.2) все указанные требования не выполняются, то решение системы в $\ddot{I}_2^{(0)}$ непрерывно, а в точке $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$ имеет логарифмическую особенность. Если же в системе (3.5.2) считать, что функции a_k, b_k в области $\bar{I}_4$ аналитическими, то применяя ей теоремы о вычетов, получим непрерывное решение исходной системы.

3.3.4. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. более общего вида, чем системы (3.5.1)

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{a_k(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^n} W + \frac{b_k(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{(\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)})^n} W^m, (k=1,2) \qquad (3.6.1)$$

где $a_k, b_k \in RA(\bar{I}_2)$, $W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, $n \geq 1, m > 0$. Аналитически продолжая в области $\bar{I}_2$ к функциям системы, при этом заменой переменных $\bar{z}_k$ на ς_k, преобразуем п.о.с.К.-Р. (3.6.1) к системе с аналитическими функциями в правых частях

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = \frac{a_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n} W + \frac{b_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n} W^m \ \textit{(k=1,2).} \quad (3.6.2)$$

Условие совместности системы (3.6.2) имеет вид (N_{15}) предыдущем случаем, в которой функции $P(z_1,...), Q(z_1,...)$ относительно коэффициентов системы, определяются следуюшим образом:

$$P(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{a_2}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right),$$

$$Q(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b_2}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{b_1}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right) + \frac{(n-1)(a_1b_2-a_2b_1)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}.$$

Допустим, что в условие совместности вида (N_{15}) $P(z_1...), Q(z_1,...) \neq 0$, тогда из неё получим W=0, $W = H(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$. Если вторая из этих двух функции удовлетворяет системе (3.6.2), то она считается некоторым частным решением системы. В противном случае, убедимся, что система (3.6.2) кроме тривиального решения другие ненулевые решения не имеет. Если же в условии (N_{15}) одна из функций P,Q равна нулю, а другая отлична от нуля, тогда, получим лишь тривиальное решение системы. Если для системы (3.6.2) выполняются условия (M_0), то есть $\lim\limits_{\substack{\varsigma_1\to\varsigma_{1(0)} \\ \varsigma_2\to\varsigma_2^{(0)}}} \left((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n (\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0$, то получаем, что система (3.6.2) возможно может иметь не более чем

тривиального решения. Для нахождения многообразия решений системы (3.6.2), требуется тождественное выполнение условия совместности (N_{15}). Допустим, что $P(z_1,...)=0,\ \ Q(z_1,...)=0$. Тогда по аналогии п.3.3., указанные в предыдущих параграфах, можем найти функции $\omega_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2),\ \ \omega_2(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$ такие, что удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\varsigma_1}=\frac{a_1(z_1,\varsigma_1,..)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\varsigma_2}=\frac{a_2(z_1,...)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n};$$

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial\varsigma_1}=\frac{b_1(z_1,...)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\cdot\exp\{\omega_1(z_1,...)\},\quad \frac{\partial\omega_2}{\partial\varsigma_2}=\frac{b_2(z_1,...)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\cdot\exp\{\omega_1(z_1,...)\}.$$

Для того, чтобы в последней системе уравнений, функции $\omega_1(z_1,...),\omega_2(z_1,...)$ были непрерывны, необходимо, чтобы выполнялись условия типа (M_0), то есть

$$\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\frac{\partial\omega_1}{\partial\varsigma_k}\right)=0,\quad \lim_{\varsigma_2\to\varsigma_2^{(0)}}\left((\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\frac{\partial\omega_2}{\partial\varsigma_k}\right)=0. \qquad (M_0)$$

При выполнении этих условий, необходимо получим, что $a_k=a_{k0}=0, b_k=b_{k0}=0$ при $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)}$. Тогда система (3.6.2) разрешима, и после перехода к прежним переменным имеем

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)=\exp\{\omega_1(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)\}\cdot\left[\Phi(z_1,z_2)+(1-n)\omega_2(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)\right]^{1/(1-m)}, \quad (3.6.3)$$

где $\omega_1(z_1,...),\omega_2(z_1,...)$ при выполнении условии *(M_0)* всюду в полицилиндре $\ddot{I}_2$ будут непрерывными. Если же условия *(M_0)* не выполняются, то в силу теоремы о вычетах получим, что $\omega_k(z_1,...)$ и решения системы (3.6.2) во всём полицилиндре являются непрерывными и многозначными.

Теорема 3.12. *Допустим, что в п.о.с.К.-Р. (3.6.1) и (3.6.2)* $a_k,b_k\in RA(\ddot{I}_2)$, $W\in RA(\ddot{I}_3^{(0)}), m,n\geq 0$. *Если для системы (3.6.1) и (3.6.2) выполняются условия (M_0) т.е. леммы 1, то эти системы во всей замкнутой области могут*

иметь только лишь тривиальное решение. Если условие совместности (N_{15}) выполняется, но не тождественно, то данные системы имеют тривиальное а также некоторые частные решения. Для того, чтобы условие совместности (N_{15}) выполнялась тождественно, необходимо и достаточно, чтобы всюду в $\bar{I}_3$ функции $P(z_1,...),Q(z_1,...)$ обратились к нулю. Тогда системы (3.6.1) и (3.6.2) разрешимы явно и многообразия ее решении определяется формулой (3.6.3).. Причём это решение системы на данной области является многозначной, в $I_2^{(0)}$-непрерывной, а в точке $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$ в зависимости порядка ***n*** *имеет особенности различного порядка.Если в получение решение системы, применять теоремы о вычетах, то получаем непрерывное решение задачи.*

§ 3.4. О некоторых квазилинейных п.о.с.К.-Р. С правой частью специального вида

3.4.1.В этом параграфе работе будем рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{a(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)}}W+\frac{h(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2)}{\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)}}W^m,\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{b(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2;W)}{\bar{z}_2-\bar{z}_2^{(0)}},\quad (4.1.1)$$

где $a,b,h\in RA(\bar{I}_2),W\in RA(I_3^{(0)}),b\in A(\bar{I}_3)$-по переменной W. Выполняя аналитическое продолжение к функциям данной системе по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k, преобразуем систему (3.4.1.1) к системе

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=\frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}W+\frac{h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}W^k,\quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=\frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}.\quad (4.1.2)$$

Аналогично [297-298], легко убедимся, что правые части системы (4.1.2) являются аналитическими по всем новым переменным. Для того, чтобы эта система имела непрерывное решение, необходимо, чтобы для этой системы выполнялись условия (M_0), то есть $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}\right)=0$, (к=1, 2). При этом из системы (4.1.2) имеем $W=0, W=h(z_1,z_2,\varsigma_1)$ (вторая получена из равенства

$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2^{(0)};W)=0$). Если вышеуказанные функции удовлетворяют второго уравнения системы (4.1.2), то их считаем частными либо особыми решениями исходной системы. В противном случае, исходная система несовместна. Условием совместности системы (4.1.2) будет

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{b}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)+\left(\frac{aW}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}+\frac{hW^k}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)\frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{b}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}\right)=$$
$$=\left(\frac{a}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}+\frac{khW^{k-1}}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)\frac{b}{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}+\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{a}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)W+\frac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\frac{h}{\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)}}\right)W^k\ . \qquad (N_{16})$$

Если это условие выполняется, но не тождественно, то из (N_{16}) сможем найти некоторую функцию $W=p(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$. Если эта функция удовлетворяет систему (4.1.2), тогда она будет частным решением системы. В противном случае система (4.1.2) несовместна. С учётом условий (M_0), интегралы от каждых слагаемых правой части первого уравнения системы (4.1.2) существуют. Поэтому будем требовать тождественное выполнение условие совместности *(N_{16})*. Это требование будет выполнено тогда и только тогда, когда функция $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ принимает вид

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})\frac{\partial A}{\partial\varsigma_2}W+ \qquad (4.1.3)$$
$$+\frac{\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}}{1-k}\left\{\frac{\partial B}{\partial\varsigma_2}+f\left[z_1,z_2,\varsigma_2;\exp\left((k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right)W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right]\right\}\exp\left\{(1-k)A(z_1,\ldots)\right\}W^k,$$

где

$$A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\int_L\frac{a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{t_1-\varsigma_1^{(0)}}dt_1,\ B(z_1,\varsigma_1,\ldots)=(1-k)\int_L\frac{h(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{t_1-\varsigma_1^{(0)}}\exp\left\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,\ldots)\right\}dt_1$$

.

Теперь учитывая формулы (4.1.3) будем интегрировать первое уравнение системы (4.1.2), и сделаем замену

$$\exp\left\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\right\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\psi\,, \qquad (4.1.4)$$

где $\psi = \psi(z_1, z_2, \varsigma_2)$- новая неизвестная функция. Продифференцировав обе части (4.1.4) по переменной ς_2, подставим её результат во второе уравнение системы (4.1.3), и в результате, получаем к.д.у. вида (3.2.29), в нём функция $f(z_1, z_2, \varsigma_2, \psi)$ определяется из формулы (4.1.3). Если к.д.у. вида (3.2.29) имеет решение вида $\psi = \psi[z_1, z_2, \varsigma_2; \hat{O}(z_1, z_2)]$, то исходная система также разрешима, и после перехода к прежним переменным, многообразие её решений определяется следующей формулой

$$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = \exp\{A(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)\} \cdot [B(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) + \psi[z_1, z_2, \varsigma_2; \hat{O}(z_1, z_2)]]^{1/(1-k)}. \quad (4.1.5)$$

Теорема 3.13. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (4.1.1)* $a, b, h \in RA(\bar{I}_2), W \in RA(\ddot{I}_3^{(0)})$, *причём* $b(z_1, ...)$*-аналитическая по переменной* W*. Если для системы (4.1.1) выполняются условия* (M_0)*, а также условие совместности* (N_{16}) *выполняется, но не тождественно, то система имеет некоторые частные решения. Для того, чтобы условие совместности* (N_{16}) *выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функция* $b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2; W)$ *принимала вид (4.1.3). Если к.д.у. вида (3.2.29) имеет определённого вида решение, тогда система (4.1.1) также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (4.1.5). Причём такого вида решения системы во всей области является многозначным, и непрерывным в* $\Pi_2^{(0)}$*, а в точке* $\varsigma_2 = \varsigma_2^{(0)}$ *имеет логарифмическую особенность. В случае применение теоремы о вычетах к данной системе, получаем непрерывное во всей данной области решение системы.*

3.4.2. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. следующего вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^n} W + \frac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2^{(0)})}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^n} W^k, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; W)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^n}, \quad (4.2.1)$$

где $a,h,b \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), n \geq 1$. По аналогию с предыдущим случаям, в системе (4.2.1) к ее функциям, аналитически продолжим независимых переменных $\bar{z}_k$ на ς_k *(k=1,2)*. Тогда система (4.2.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n} W + \frac{h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n} W^k, \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}. \qquad (4.2.2)$$

Условием совместности системы (4.2.2) будет

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{b}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right)+\left(\frac{a\,W}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})}+\frac{h\,W^k}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right)\frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{b}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right)=$$
$$=\left(\frac{a}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}+\frac{k\,hW^{k-1}}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right)\frac{b}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}+\frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{a}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})}\right)W+\frac{\partial}{\partial \varsigma_2}\left(\frac{h}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right)W^k \quad . (N_{17})$$

Допустим, что условие (N_{17}) выполняется, но не тождественно, тогда из этого соотношения можно находить $W = p(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$ регулярную, либо сингулярную функцию. Если эта функция удовлетворяет систему (4.2.2), то она будет её частным решением. В противном случае система (4.2.2) несовместна. А также заметим, что если для системы (4.2.2) выполняются условии (M_0), то опять получим $W=0$ и $W = H(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)$. Если эти функций удовлетворяют систему (4.2.2), то они будут, только лишь частными решениями системы. Для нахождения многообразие решений системы необходимо, чтобы условие (N_{17}) выполнялось тождественно.

Интегрируя первое уравнение системы (4.2.2), как к.д.у. по переменной ς_1, считая остальные переменные как параметрами, будем иметь:

$$\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\}W^{1-k} - B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2) = \psi, (\psi = \psi(z_1,z_2,\varsigma_2)), \qquad (4.2.3)$$

где

$$A(z_1,\varsigma_1,\ldots)=\int_L \frac{a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^n}dt_1,\ B(z_1,\varsigma_1\ldots)=(1-k)\int_l \frac{h(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\exp\{(k-1)A(z_1,t_1,\ldots)\}dt_1 .$$

С первого взгляда нам кажется, что предыдущие интегралы в особой точке $\varsigma_1=\varsigma_1^{(0)}$ не существуют. Учитывая условия (M_0) и теоремы о вычетах, имеем,

что

$$A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}a}{\partial\varsigma_1^{n-1}}\right)=A_0,\ B(z_1,\varsigma_1,...)=(1-k)\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}h\,A_0}{\partial\varsigma_1^{n-1}}\right)=B_0.$$

То есть, в этом случае всюду в области $\breve{I}_2^-$ получаем непрерывные функции, которые очень хорошо влияют на непрерывность решений исходной системы (4.2.2). Дифференцируя обе части (4.2.3) по переменной ς_2, относительно новой неизвестной функции ψ получим к.д.у. вида (3.2.29), а также вид функции $b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)$ следующей формулой

$$b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2;W)=(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n[\frac{\partial A}{\partial\varsigma_2}W+\frac{1}{1-k}\frac{\partial B}{\partial\varsigma_2}]\exp[(1-k)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)]W^k+ \qquad (4.2.4)$$

$$+\frac{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}{1-k}f\Big[z_1,z_2,\varsigma_2;\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2)\Big]\exp[(1-k)A(z_1,...)]W^k.$$

Прежде всего, заметим, что при этом значении функции $b(z_1,\varsigma_1...)$ условие совместности (N_{17}) выполняется тождественно. Поэтому интегрируя к.д.у. вида (3.2.29), получим некоторую функцию $\psi=\psi[z_1,z_2,\varsigma_2;\hat{O}(z_1,z_2)]$. Подставляя значение функции $\psi=\psi(z_1,...)$ в соотношение (4.2.2), и переходя к прежним переменным, будем иметь многообразие решений системы (4.2.1) формулой вида (4.2.4) и для него будет справедлива предыдущая теорема 3.13.

§ 3.5. Представление некоторые классы системы дифференциальных уравнений Коши-Римана с тремья комплексными переменными

3. 5.1 В настоящей пункте работы будем рассматривать трёх п.о.с. К.- Р. вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial\bar z_1}=f(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3)\cdot p(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W),\quad \dfrac{\partial W}{\partial\bar z_2}=\dfrac{g(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3;W)}{\bar z_1},\\ \dfrac{\partial W}{\partial\bar z_3}=\dfrac{h(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3;W)}{\bar z_2},\end{cases} \qquad (5.1.1)$$

где $f, g, h \in RA(\overline{\Pi}_3)$, $W \in RA(\Pi_4^{(0)})$, $f, g, h -$ аналитические функции по переменной W. Заметим, что в случаи тождественного выполнения условии совместности п.о.с .К.- Р вида (5.1.1), находим непрерывного либо сингулярного многообразия решений данной системы. По этой причине для существования непрерывного решения системы (5.1.1), по аналогии с [112], потребуем ограниченности производной от неизвестной функции по переменным $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ и выполнения следующие условия, считавшиеся обобщением леммы Л.Г.Михайлова**:**

Лемма2. *Пусть в системе дифференциальных уравнений (5.1.1) ее данные функций удовлетворяют условиям* $f, g, h \in RA(\overline{\Pi}_3)$, $W \in RA(\Pi_4^{(0)})$, *неизвестной функции и ее частные производные по каждым переменным на данной области ограничены, существуют пределы и равны к нулю* $\lim\limits_{\bar{z}_1 \to 0}\left(\bar{z}_1 \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}\right) = 0, \lim\limits_{\bar{z}_2 \to 0}\left(\bar{z}_2 \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3}\right) = 0.$ *Тогда из системы (5.1.1) находятся две функций,* $W = h_1(z, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$, $W = h_2(z, \bar{z}_1, \bar{z}_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$. *Возможно, что эти найденные функций будут частными, либо особыми решениями данной системы (5.1.1).*

Выполняя аналитическое продолжение к данным функциям системы (5.1.1), данной области (бицилиндре Π_4) по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2,3)$, преобразуем систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot p(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_2}. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Условиями совместности этой системы будут следующие соотношений:

$$\begin{cases} \varsigma_2^2 \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_3} \cdot p + \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_3} \cdot f \right) + \varsigma_2 \cdot \left(f \cdot h \cdot \dfrac{\partial p}{\partial W} - p \cdot f \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} - \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_1} \right) - h = 0, \\ \varsigma_1^2 \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_2} \cdot p + \dfrac{\partial p}{\partial \varsigma_2} \cdot f \right) + \varsigma_1 \cdot \left(f \cdot g \cdot \dfrac{\partial p}{\partial W} - p \cdot f \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_1} \right) - g = 0. \\ \varsigma_2 \cdot \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3} - \varsigma_1 \cdot \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2} + h \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - g \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{N}_{18})$$

Для нахождении многообразие решений, либо единственного решения исходной системы (5.1.2), допускаем, что; пусть условие (5.1.3) выполняется, но не тождественно. Тогда из этих соотношений, согласно теореме о системе неявных функций, находим непрерывные функций вида $W = h_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)$, $k = (1, 2, 3)$. Если эти функций удовлетворяют систему дифференциальных уравнений (5.1.2), то они будут частными, либо особыми решениями системы. В противном случае, системы (5.1.2) и (5.1.1) не будут совместными. Допустим, что условие (5.1.3) выполняется тождественно. Тогда проинтегрировав первое уравнение системы (5.1.2), как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, по переменной ς_1, как регулярной п.о.с. К.- Р., считая остальные переменные уравнений системы, параметрами, имеем:

$$W = Q[z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3;\ V(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)],$$

либо $$P(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W) - F(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) = V(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3), \qquad (5.1.4)$$

где $$P(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W) = \int_0^W \frac{d\tau}{p(z, \tilde{\varsigma}; \tau)},\ F(z, \varsigma) = \int_0^{\varsigma_1} f(z, t, \tilde{\varsigma}) dt,\ z = (z_1, z_2, z_3),\ \tilde{\varsigma} = (\varsigma_1, \varsigma_2).$$

Дифференцируем последнюю функцию из (5.1.4) по переменным ς_2, ς_3, являющимися решением первого уравнения системы (5.1.2), а затем подставим их значения в оставшиеся ее уравнений системы, получим регулярную комплексную систему двух регулярных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = H(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; V), & \left(H(z_1,\ldots) = \dfrac{g - \varsigma_1 Q'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 \cdot Q'_V} \right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial \varsigma_3} = M(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; V), & \left(Q(z_1,\ldots) = \dfrac{h - \varsigma_2 \dot{Q}'_{\varsigma_2}}{\varsigma_2 \cdot Q'_V} \right). \end{cases} \qquad (5.1.5)$$

Далее доказываем, что правые части уравнений в системе уравнений (5.1.5) не зависят от переменной ς_1, ς_2. Для этого продифференцируем правые части уравнений последней системы по каждым переменным ς_1, ς_2

$$\begin{cases} D_{\varsigma_1}\left(\dfrac{g - \varsigma_1 Q'_{\varsigma_2}}{\varsigma_1 Q'_V} \right) = 0: & \dfrac{(g - \varsigma_1 Q'_{\varsigma_2})'_{\varsigma_1}\, \varsigma_1 \cdot Q'_V - (g - \varsigma_1 Q'_{\varsigma_2})(\varsigma_1 Q'_V)'_{\varsigma_1}}{(\varsigma_1 \cdot Q'_V)^2} = 0, \\ D_{\varsigma_2}\left(\dfrac{h - \varsigma_2 Q'_{\varsigma_2}}{\varsigma_2 \cdot Q'_V} \right) = 0; & \dfrac{(h - \varsigma_2 Q'_{\varsigma_2})'_{\varsigma_1}\, \varsigma_2 Q'_V - (g - \varsigma_2 \dot{Q}'_{\varsigma_2})(\varsigma_2 Q'_V)'_{\varsigma_2}}{(\varsigma_2 \cdot Q'_V)^2} = 0. \end{cases}$$

Преобразуя эти соотношения, в числителях последних дробей, получаем следующие соотношения;

$$\begin{cases} [\varsigma_1^2 \cdot (f'_{\varsigma_2} - g'_{\varsigma_1}) + \varsigma_1 (g \cdot f'_W - f \cdot g'_W) + g] \cdot \varsigma_1 \cdot Q'_V - (g - \varsigma_1 \cdot Q'_{\varsigma_2}) \cdot (\varsigma_1 \cdot Q'_V)'_{\varsigma_1} = 0, \\ [\varsigma_2^2 \cdot (f'_{\varsigma_3} - h'_{\varsigma_1}) + \varsigma_2 (h \cdot f'_W - f \cdot h'_W) + h] \cdot \varsigma_2 \cdot Q'_V - (h - \varsigma_2 \cdot Q'_{\varsigma_3}) \cdot (\varsigma_2 \cdot Q'_V)'_{\varsigma_2} = 0. \end{cases}$$

Поскольку по первому предположению, что условие совместности (5.1.3) выполняются тождественно, тем самым получаем, что каждые слагаемые в последних скобках равны нулю. То это означает, что правые части уравнений из (5.1.5) не зависят от переменной ς_1, ς_2. Тогда интегрируя регулярные системы квазилинейных уравнений (5.1.5), имеем:

$$V = V[z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; \Phi(z_1, z_2, z_3)] \quad \text{или} \quad V = V[z, \tilde{\varsigma}; \Phi(z)].$$

Далее подставляя значение функции V(…) из последнего соотношения в (5.1.4), и переходя к прежним переменным, будем иметь многообразие решений исходной квазилинейной системы, следующей формулой:

$$W(z, \bar{z}) = Q\left[z, \bar{z};\ V[z, \tilde{\bar{z}}; \Phi(z)]\right], z = (z_1, z_2, z_3). \qquad (5.1.6)$$

Теорема 3.14. *Пусть в п.о.с. К.-Р. (5.1.1)* $f, g \in RA(\ddot{I}^{-}_{2}), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{3}),$ *$f, g -$ являются функциями аналитические по*

переменной W . Если для системы (5.1.1) имеет место условие леммы 1-2, а также условие (5.1.3) выполняется, но не тождественно, тогда находятся некоторые частные, либо особые решения системы (5.1.1). Если условие совместности данной системы (5.1.1) в виде (5.1.3) выполняются тождественно, то исходная система разрешима и многообразие ее решений, непрерывное всюду на данной области (бицилиндре) $\overline{\Pi}_3$ и оно определяется формулой (5.1.6).

3.5.2. Если нами рассматривать квазилиней ного п.о.с. К.- Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot p(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_3; W), \quad \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \dfrac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1)^n}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \dfrac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1)^n}. \ (n \geq 2). \end{cases} \tag{5.2.1}$$

где ее функций $f, g, h \in RA(\overline{\Pi}_3)$, $W \in RA(\Pi_4^{(0)})$, $p, g, h -$ аналитические по переменной W функции. Выполняя аналитического продолжения, к каждым функциям данной системе (5.2.1), на данной области или бицилиндре, в топологические пересечения цилиндров, по переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2,3)$, преобразуем исходную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot p(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Условиями совместности системы (5.2.2) записываются в виде соотношений:

$$\begin{cases} \varsigma_1^{n+1} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_3} \cdot p + \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_3} \cdot f \right) + \varsigma_1 \cdot \left(f \cdot h \cdot \dfrac{\partial p}{\partial W} - p \cdot f \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} - \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_1} \right) - h = 0, \\ \varsigma_1^{n+1} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_2} \cdot p + \dfrac{\partial p}{\partial \varsigma_2} \cdot f \right) + \varsigma_1 \cdot \left(f \cdot g \cdot \dfrac{\partial p}{\partial W} - p \cdot f \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_1} \right) - g = 0, \\ \varsigma_1^n \cdot \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3} - \varsigma_1^n \cdot \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2} + h \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - g \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} = 0. \end{cases} \tag{N$_{19}$}$$

Допустим, что данная неизвестная функция, и ее частные производные в особой точке области являются ограниченными. Если уравнений системы (5.2.2) в особой точке удовлетворяют условии предыдущей леммы, то находим некото-рые частные, либо особые решения исходной системы. Пусть условия совместности (5.2.3) по всем переменным выполняется, но не тождественно. Тогда из этих трёх соотношений, согласно теореме о системе неявных функций [31], имеем функций вида $W = h_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3),\ k = (1,2,3).$ Если эти функций удовлетворяют систему уравнений (5.2.2), то они будут частными, либо особыми решениями системы. В противном случае, данная система не будет совместным. Допустим, что условия (5.2.3) выполняются тождественно. Эти необходимые требования исполнима, если , для функции: $g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)$, $h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)$ и остальные данные функций *f(...), p(...)* существуют взаимосвязь с другими функциями следующим образом:

$$\begin{cases} g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W) = \varsigma_1^n \left\{ \dfrac{\partial (F - H)}{\partial \bar{z}_3} + f_1\left[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; H(z_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W) - F(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)\right] \right\} \times \\ \qquad \times p(z_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W), \\ h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W) = \varsigma_1^n \left\{ \dfrac{\partial (F - H)}{\partial \bar{z}_3} + f_2\left[z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; H(z_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W) - F(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)\right] \right\} \times \\ \qquad \times p(z_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W). \end{cases} \tag{5.2.4}$$

где функции $F(z_1,\ldots)$, $H(z_1,\ldots)$ –выражаются через интегралов, в классе RA(D). от функции $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)$, и $p(z_1,\ldots W), f_k$ – вполне определённые функций.

Далее подставляя значения функций $g(z_1,\ldots)$, $h(z_1,\ldots)$ из системы (5.2.4) в исходной системе (5.2.2), и интегрируя первого ее уравнения, получим

$$\begin{aligned} &P(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W) - F(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) = V, \\ &W = P^{-1}[F(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) + V(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)],\ (Q = P^{-1}) \end{aligned}, \tag{5.2.5}$$

где $V = V(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)$- новая неизвестная функция, а функция Q(z_1,…)-известной. Далее дифференцируя функцию W из (5.2.5) по переменным $(\varsigma_2, \varsigma_3)$ подставим, в остальных уравнениях системы (5.2.3) и получаем регулярную систему дифференциальных уравнений в частных производных . Причём последняя система регулярная по всем переменным (в предыдущем п.1). Поскольку последующие п.о.с. К.- Р. (5.2.3) и указанная регулярная система инвариантные, поэтому условие совместности этих систем выполняются тождественно, и многообразие ее решений находится в виде (5.2.5), справедливым будет предыдущей утверждении, равносильной к теореме 3.14.

Замечание 2. Если в п.о.с. К.- Р. (5.2.3) функция $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)$ определяется как некоторые определённые функций из класса RA, например вида:

1) $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W) = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot W + b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot W^n$, либо

2) $f(z_1, t \cdot \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; \bar{z}_1 \cdot W) = \tilde{f}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)$ либо,

3) $f(z_1, t \cdot \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; \bar{z}_1^{\,k} \cdot W) = t^{1-k} \cdot \tilde{f}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W), \quad (k \geq 1)$ (случаи однородности, либо обобщённо - однородности функции), и другие нелинейные и квазилинейных случаев для функции $f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)$, то в п.о.с. К.- Р. вида (5.2.2) и (5.2.3) другие функции того же класса $g(z_1, \bar{z}_1, ...; W)$, $h(z_1, \bar{z}_1, ...; W)$ находятся [306] в виде (5.2.4), вполне определёнными функциями. При этом с учёта этих видов функций, условия совместности вида (5.2.2), для этих новых систем, во первых выполняются тождественно, и во вторых особенность (независимо от их порядка) в новых преобразованных системах устраняются и многообразия их решений находятся определёнными непрерывными функциями, причём имеет места утверждения равносильной теореме 3.14.

3.5.3. Будем рассматривать квазилинейного п.о.с. К.- Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot p(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_3; W), \quad \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \dfrac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1)^{\mathrm{n}}}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \dfrac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1)^{\mathrm{n}}}. \ (n \geq 2). \end{cases}$$

(5.3.1)

где ее функций $f, g, h \in RA(\overline{\Pi}_3)$, $W \in RA(\Pi_4^{(0)})$, $p, g, h -$ аналитические по переменной W функции. Выполняя аналитического продолжения, к каждым функциям данной системе (5.3.1), на данной области или бицилиндре, в топологические пересечения цилиндров, по переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2,3)$, преобразуем исходную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot p(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Условиями совместности системы (5.3.2) записываются в виде соотношений:

$$\begin{cases} \varsigma_1^{n+1} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_3} \cdot p + \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_3} \cdot f \right) + \varsigma_1 \cdot \left(f \cdot h \cdot \dfrac{\partial p}{\partial W} - p \cdot f \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} - \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_1} \right) - h = 0, \\ \varsigma_1^{n+1} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_2} \cdot p + \dfrac{\partial p}{\partial \varsigma_2} \cdot f \right) + \varsigma_1 \cdot \left(f \cdot g \cdot \dfrac{\partial p}{\partial W} - p \cdot f \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_1} \right) - g = 0, \\ \varsigma_1^n \cdot \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3} - \varsigma_1^n \cdot \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2} + h \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - g \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} = 0. \end{cases} \tag{N_{20}}$$

Допустим, что данная неизвестная функция, и ее частные производные в особой точке области являются ограниченными. Если уравнений системы (5.3.2) в особой точке удовлетворяют условии предыдущей леммы 1-2, то находим некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Пусть условия совместности (N_{20}) по всем переменным выполняется, но не тождественно. Тогда из этих трёх соотношений, согласно теореме о системе неявных функций [63], имеем функций вида $W = h_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)$, $k = (1,2,3)$.

Если эти функций удовлетворяют систему уравнений (5.3.2), то они будут частными, либо особыми решениями системы. В противном случае, система (5.3.2) не будет совместным. Допустим, что условие (N_{20}) выполняется тождественно. Это необходимое требование исполнима, если , для функции: $g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)$, $h(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)$ и остальные данные функций *f(...), p(...)*существуют взаимосвязь следующим образом [316]:

$$\begin{cases} g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)=\varsigma_1^n\left\{\dfrac{\partial(F-H)}{\partial\,\bar{z}_3}+f_1\left[z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;H(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)-F(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3)\right]\right\}\times \\ \qquad\qquad \times p(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W), \\ h(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)=\varsigma_1^n\left\{\dfrac{\partial(F-H)}{\partial\,\bar{z}_3}+f_2\left[z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;H(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)-F(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3)\right]\right\}\times \\ \qquad\qquad \times p(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W). \end{cases} \tag{5.3.4}$$

где функции $F(z_1,\ldots)$, $H(z_1,\ldots)$ –выражаются через интегралов, в классе RA(D). от функции $f(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3)$, и $p(z_1,\ldots W)$, f_k- вполне определённые функциями.

Далее подставляя значения функций $g(z_1,\ldots)$. $h(z_1,\ldots)$ из системы (5.3.4) в исходной системе, и интегрируя первого ее уравнения системы, получим

$$\begin{aligned} &P(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)-F(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=V, \\ &W=P^{-1}[F(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)+V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)],\ (Q=P^{-1})' \end{aligned}$$

(5.3.5)

где $V=V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)$- новая неизвестная функция, а функция $Q(z_1,\ldots)$- известной. Далее дифференцируя функцию W из (5.3.5) по переменным $(\varsigma_2,\varsigma_3)$ подставим, в остальных уравнениях системы (5.3.2), и получаем регулярную систему дифференциальных уравнений в частных производных вида (3.2.29). Причём последняя система регулярная по всем переменным (в предположении предыдущему п.1). Поскольку указанные п.о.с. К.- Р. (5.3.2) и последующая за ней система (5.1.5) инвариантные, поэтому условие совместности этих систем будут выполнены тождественно, многообразие ее решений находится в виде (5.3.5), справедливым будет предыдущей утверждении, равносильной к теореме 3.14.

3.5.4. Далее, рассмотрим п.о.с. К.-Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2, \mathrm{z}_3, \bar{\mathrm{z}}_3) \cdot W + \mathrm{b}(\mathrm{z}_1, \bar{\mathrm{z}}_1, \mathrm{z}_2, \bar{\mathrm{z}}_2, \mathrm{z}_3, \bar{\mathrm{z}}_3) \cdot \mathrm{W}^{\mathrm{k}}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(\mathrm{z}_1, \varsigma_1, \mathrm{z}_2, \varsigma_2, \mathrm{z}_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}. \end{cases} . \qquad (5.4.1)$$

где ее функций $a, b, g, h \in RA(\overline{\Pi}_3),\ W \in RA(\Pi_4^{(0)}),\ k -$ произвольное действительное число. Если в этой системе k=1, либо при этой значении k, $a=b$, то для этой системе с учётом вышеуказанных случаях, справедлива предыдущая теорема 3.14. Условиями совместности системы (5.4.1) записываются в виде соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{g}{\varsigma_1^{\,n}}\right) + \left(aW + bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{g}{\varsigma_1^{\,n}}\right) = \left(a + kbW^{k-1}\right)\dfrac{g}{\varsigma_1^{\,n}} + \dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2} W + \dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_2} W^k, \\ \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{h}{\varsigma_1^{\,n}}\right) + \left(aW + bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{h}{\varsigma_1^{\,n}}\right) = \left(a + khW^{k-1}\right)\dfrac{h}{\varsigma_1^{\,n}} + \dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2} W + \dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_2} W^k, \\ \varsigma_1^n \cdot \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3} - \varsigma_1^n \cdot \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2} + h \cdot \dfrac{\partial g}{\partial W} - g \cdot \dfrac{\partial h}{\partial W} = 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{N}_{21})$$

Если условия совместности (N_{21}) выполняются, но не тождественно, то решая эту систему уравнений, в силу теореме о системе неявных функций, поаналогию [251], алгебраическим способом, получаем множества функций вида $W = h_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3),\ k = (1, 2, 3).$ По аналогию с предыдушим случаем, имеем, что найденные функций могут быть некоторыми частными, либо особыми решениями последней системы (5.4.1). В противном случае, данная система несовместна. А также, в случаи ограниченности неизвестной функции, ее частные производные по переменным ς_2, ς_3 и при $\varsigma_k \to 0$ существуют пределы, и равны к нулю $\lim\limits_{\varsigma_1 \to 0}\left(\varsigma_1 \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_k}\right) = 0, k = (2, 3),$ то необходимо выполняется условии леммы 2, притом

существует некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Пусть условий совместности (N_{21}) выполняются тождественно. Интегрируя первого уравнения системы (5.4.1), получим

$$\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\}W^{1-k} - B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3) = \psi, \quad (\psi = \psi(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)). \tag{5.4.2}$$

$$A(z_1,\varsigma_1,\ldots) = \int_L a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,\ldots)dt_1,\ B(z_1,\varsigma_1\ldots) = (1-k)\int_l a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,\ldots)\cdot e.xp\{(k-1)A(z_1,t_1,\ldots)\}dt_1.$$

Тогда всюду в области $\overline{\Pi}_3$ получим непрерывную функцию по всем переменным, такими , что они хорошо влияют на непрерывность решений системы (5.4.1). Далее дифференцируя обе части (5.4.2) по переменным ς_2, ς_3, относительно новой неизвестной функции ψ , тогда получим систему вида (5.3.4), а также вид функций $g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)$, $h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)$ следующими формулами:

$$\begin{cases} g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W) = \varsigma_1^{\,n}\dfrac{\partial A}{\partial \varsigma_2}W + \dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varsigma_2}\cdot\exp[(1-k)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)]W^k + \\ + \dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}f\left[z_1,z_2,\ldots,\varsigma_3;\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,\ldots,)\}W^{1-k} - B(z_1,\varsigma_1,\ldots)\right]\exp[(1-k)A(z_1,\ldots)]W^k. \\ h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W) = \varsigma_1^{\,n}\dfrac{\partial A}{\partial \varsigma_3}W + \dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial \varsigma_3}\cdot\exp[(1-k)A(z_1,\varsigma_1,\ldots,\varsigma_3)]W^k + \\ + \dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}f\left[z_1,z_2,\varsigma_2,\ldots;\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,\ldots)\}W^{1-k} - B(z_1,\varsigma_1,\ldots)\right]\exp[(1-k)A(z_1,\ldots)]W^k. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

Прежде всего, заметим, что в таком виде функций $g(z_1,\varsigma_1\ldots)$, $h(z_1,\varsigma,\ldots)$, условие совместности (N_{21})выполняется тождественно. Поэтому подставляя значений функций g, h из (5.4.3) на данной системе (5.4.2), получаем регулярную систему вида (5.1.5). По аналогию с предыдущим случаем, интегрируя систему дифференциальных уравнений вида (5.1.5), получаем некоторую функцию $\psi = \psi[z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\Phi(z_1,z_2,z_3)]$. Подставляя значение

функции $\psi = \psi(z_1,...)$ в соотношение (5.4.2) и переходя к прежним переменным, будем иметь многообразие решений системы (5.4.1) явной формулой вида (5.3.5), и для него будет справедливой условии предыдущей теореме 3.14**.**

3.5.5. Теперь будем рассматривать п.о.с. К.- Р.с особенностей $\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)} = 0$ вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)W + b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)W^k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \dfrac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^m}, \ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \dfrac{f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^m}. \end{cases} \quad (5.5.1)$$

где $a,\ b,\ f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), m \geq 0,\ f, g -$ аналитические функции по переменной *W*. Аналогично предыдущим случаям в п.1.п.2., в системе (5.5.1) аналитически продолжив ее функциям по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2)$, преобразуем её в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot W + b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot W^k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m}, \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W)}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^m} \end{cases} . \quad (5.5.2)$$

Если в системе (5.5.2), при ограниченности $\dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_k}$ $(k = 2,3)$, существуют пределы и они равны нулю

$$\lim_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} \left((\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0, (k = 1,2) \quad (5.5.3)$$

то из равенства $g(z_1,...;W) = 0, h(z_1,...;W) = 0$ найдём следующие функций вида $W = h_1(z, \varsigma_1, \varsigma_3),\ W = h_2(z, \varsigma_1, \varsigma_3), z = (z_1, z_2, z_3)$ аналитические во всем переменным в полицилиндре, являющиеся частными, либо особыми решениями данной системы (5.5.2). Условием совместности системы (5.5.2) записываются в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\dfrac{g}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right)+\left(aW+bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{g}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right)=\left(a+kbW^{k-1}\right)\dfrac{g}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}+\dfrac{\partial a}{\partial\varsigma_2}W+\dfrac{\partial b}{\partial\varsigma_2}W^k, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\dfrac{h}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right)+\left(aW+bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{h}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right)=\left(a+khW^{k-1}\right)\dfrac{h}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}+\dfrac{\partial a}{\partial\varsigma_2}W+\dfrac{\partial b}{\partial\varsigma_2}W^k, \\ (\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m\cdot\dfrac{\partial g}{\partial\varsigma_3}-(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m\cdot\dfrac{\partial h}{\partial\varsigma_2}+h\cdot\dfrac{\partial g}{\partial W}-g\cdot\dfrac{\partial h}{\partial W}=0. \qquad (N_{22}) \end{cases}$$

Если условие совместности (N_{22}) выполняется, но не тождественно, то из них находим некоторые функций $u=h_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3),\ k=(1,2,3)$, где они возможно будут частными, либо особыми решениями исходной данной системы.

Теперь приступим к интегрированию первой регулярной дифференциальной уравнении системы (5.5,2), по переменной ς_1, т.е. ς_1.

$$\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=\psi,\quad(\psi=\psi(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)),\ (5.5.4)$$

где функций A(z,…), B(z,…) определяются интегральными представлениями, по формуле (5.4.2). Очевидно, она разрешима относительно неизвестной функции, по известным функциям, причём явно. Дифференцируем последнее соотношение, по каждым переменным ς_2,ς_3, подставим их результаты в последующих уравнениях системы (5.5.2), (хоть она многозначная), и получаем регулярную систему уравнений вида (5.1.5). Также, можем проверить, что правые части уравнений системы (5.1.5) не зависят от переменного ς_1.Затем, интегрируем систему регулярных дифференциальных уравнений (5.1.5), получаем функцию вида

$$\psi=\psi\left[z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\ \Phi(z_1,z_2,z_3)\right].$$

Подставляя значения функции ψ в соотношение (5.5.2), получаем многообразие решения исходной системы следующей формулой:

$$\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=\psi\left[z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\ \Phi(z_1,z_2,z_3)\right],$$ либо

$$W=\left\{B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)+\psi\left[z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\ \Phi(z_1,z_2,z_3)\right]\right\}^{1/(1-k)}\cdot\exp\left\{A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\right\}. \qquad (5.5.5)$$

Тогда имеет места следующая теорема:

Теорема3.15. *Пусть в п.о.с. К.- Р. (5.5.1) ее функций удовлетворяют условиям* $a,\ b,\ f,g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), m \geq 0,$ *причём данные функций удовлетворяют условие леммы 1, а также условия совместности системы (5.5.2) выполняются, но не тождественно, тогда находятся некоторые частные, либо особые решения данной системы. Условия совместности системы (5.5.2) выполняются тождественно, если взаимосвязь данных функций* $a,\ b$ *-исходной системы с другими функциями* $g,\ h$ *–определяются формулами вида (5.4.3). Тогда система дифференциальных уравнений (5.5.1) разрешима, и многообразие ее решений определяется формулой вида (5.5.5), причём непрерывной на всей данной области.*

3.5.6. Если нами рассматривать квазилинейный п.о.с. К.- Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot p(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_3; W), \quad \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \dfrac{g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1)^n}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \dfrac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_1)^n}. \ (n \geq 2). \end{cases}$$

(5.6.1)

где ее функций $f, g, h \in RA(\overline{\Pi}_3),\ W \in RA(\Pi_4^{(0)}),\ p, g, h -$ аналитическое по переменной W. В данной системе (5.6.1), выполняя аналитическое продолжение к каждым ее функциям на данной области или бицилиндре, по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = 1,2,3)$, преобразуем исходную систему в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot p(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}, \quad \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_{3,}, \varsigma_3; W)}{\varsigma_1^n}. \end{cases} \tag{5.6.2}$$

Условиями совместности системы (5.6.2) записываются в виде соотношений:

$$\begin{cases} \varsigma_1^{n+1}\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_3}\cdot p+\dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_3}\cdot f\right)+\varsigma_1\cdot\left(f\cdot h\cdot\dfrac{\partial p}{\partial W}-p\cdot f\cdot\dfrac{\partial h}{\partial W}-\dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_1}\right)-h=0,\\ \varsigma_1^{n+1}\cdot\left(\dfrac{\partial f}{\partial \varsigma_2}\cdot p+\dfrac{\partial p}{\partial \varsigma_2}\cdot f\right)+\varsigma_1\cdot\left(f\cdot g\cdot\dfrac{\partial p}{\partial W}-p\cdot f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial W}-\dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_1}\right)-g=0, \qquad (N_{23})\\ \varsigma_1^{n}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3}-\varsigma_1^{n}\cdot\dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2}+h\cdot\dfrac{\partial g}{\partial W}-g\cdot\dfrac{\partial h}{\partial W}=0. \end{cases}$$

Допустим, что данная неизвестная функция, и ее частные производные в особой точке области являются ограниченными. Если уравнений системы (5.6.2) в особой точке удовлетворяют условии предыдущей леммы 1, то находим некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Пусть условия совместности (N_{23}) по всем переменным выполняется, но не тождественно. Тогда из этих трёх соотношений, согласно теореме о системе неявных функций [251], находим функций вида $W=h_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3),\ k=(1,2,3).$ Если эти функций удовлетворяют систему уравнений (5.5.2), то они будут частными, либо особыми решениями системы. В противном случае, система (5.5.2) не будет совместным. Допустим, что условие (N_{23}) выполняется тождественно. Это необходимое требование исполнима, если , для функции: $g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W),\ h(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)$ и остальные данные функций *f(...),p(...)c*уществуют взаимосвязь функций следующим образом:

$$\begin{cases} g(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)=\varsigma_1^{n}\left\{\dfrac{\partial(F-H)}{\partial\,\bar{z}_3}+f_1\left[z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;H(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)-F(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3)\right]\right\}\times\\ \qquad\qquad\times p(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W),\\ h(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)=\varsigma_1^{n}\left\{\dfrac{\partial(F-H)}{\partial\,\bar{z}_3}+f_2\left[z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;H(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W)-F(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3)\right]\right\}\times\\ \qquad\qquad\times p(z_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3;W). \end{cases} \qquad (5.6.3)$$

где функции $F(z_1,\ldots)$, $H(z_1,\ldots)$ –выражаются через интегралов, в классе RA(D). от функции $f(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,z_3,\bar{z}_3),$ и $p(z_1,\ldots W),$ f_k- вполне определённые функций.

Далее подставляя значения функций $g(z_1,\dots)$. $h(z_1,\dots)$ из системы (5.6.3) в исходной системе, и интегрируя первого ее уравнения системы, получим

$$P(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)-F(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=V,$$
$$W=P^{-1}[F(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)+V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)],\ (Q=P^{-1})' \tag{5.6.4}$$

где $V=V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)$-новая неизвестная функция, а функция $Q(z_1,\dots)$-известной. Далее дифференцируя функцию W из (5.6.4) по переменным $(\varsigma_2,\varsigma_3)$ подставим, в остальных уравнениях системы (5.6.3), и получаем регулярную систему дифференциальных уравнений в частных производных вида (5.1.5). Причём последняя система вида (5.1.5) регулярная по всем переменным (в предположении предыдущему п.1). Поскольку указанные п.о.с. К.- Р. (5.5.2) и регулярная система вида (5.1.5) инвариантные, поэтому условие совместности этих систем будут выполнены тождественно, многообразие ее решений находится в виде (5.6.4), справедливым будет предыдущей утверждении, равносильной к теореме 3.14.

3.5.7. Далее, рассмотрим п.о.с. К.-Р. вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial \bar z_1}=a(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3)\cdot W+b(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3)\cdot W^k,\\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar z_2}=\dfrac{g(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3;W)}{\bar z_1^n},\quad \dfrac{\partial W}{\partial \bar z_3}=\dfrac{h(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3;W)}{\bar z_1^n}.\end{cases} \tag{5.7.1}$$

где ее функций $a,b,g,h\in RA(\overline{\Pi}_3)$, $W\in RA(\Pi_4^{(0)})$, $k-$ произвольное действительное число. Если в этой системе k=1, либо при этой значении k, функции *a(.)=b(.)*, то для этой системе с учётом вышеуказанных случаях, справедлива предыдущая теорема3.14. Выполняя аналитическое продолжение к функциям данной системы, причём заменяя в системе (5.7.1) $\bar z_k$ на ς_k, имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=a(z_1,,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_{3,},\varsigma_3)\cdot W+b(z_1,,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_{3,},\varsigma_3)\cdot W^k,\\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=\dfrac{g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_{3,},\varsigma_3;W)}{\varsigma_1^n},\quad \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3}=\dfrac{h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_{3,},\varsigma_3;W)}{\varsigma_1^n}.\end{cases} \tag{5.7.2}$$

Условиями совместности системы (5.7.2) записываются в виде соотношений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{g}{\varsigma_1^{\,n}}\right)+\left(aW+bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{g}{\varsigma_1^{\,n}}\right)=\left(a+kbW^{k-1}\right)\dfrac{g}{\varsigma_1^{\,n}}+\dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2}W+\dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_2}W^k, \\ \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{h}{\varsigma_1^{\,n}}\right)+\left(aW+bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{h}{\varsigma_1^{\,n}}\right)=\left(a+khW^{k-1}\right)\dfrac{h}{\varsigma_1^{\,n}}+\dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2}W+\dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_2}W^k, \\ \varsigma_1^n\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3}-\varsigma_1^n\cdot\dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2}+h\cdot\dfrac{\partial g}{\partial W}-g\cdot\dfrac{\partial h}{\partial W}=0. \end{cases} \qquad (\mathrm{N}_{24})$$

Если условия совместности (N_{24}) выполняются, но не тождественно, то решая эту систему уравнений, в силу теореме о системе неявных функций [41], алгебраическим способом, получаем систему функций вида $W=h_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3),\ k=(1,2,3)$. По аналогию с п.1, имеем, что найденные функций могут быть некоторыми частными, либо особыми решениями последней системы (5.7.2). В противном случае, система (5.7.1) и (5.7.2)-несовместные. А также, в случаи ограниченности неизвестной функции, ее частные производные по переменным ς_2,ς_3 и при $\varsigma_1\to 0$ существуют пределы, и равны к нулю $\lim\limits_{\varsigma_1\to 0}\left(\varsigma_1\dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_k}\right)=0, k=(2,3)$, то необходимо выполняется условии леммы 1, притом существует некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Пусть условий совместности (N_{24})выполняются тождественно. Интегрируя первого уравнения системы (5.7.2), получим

$$\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=\psi,\quad (\psi=\psi(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)).$$

(5.7.3)

$$A(z_1,\varsigma_1,\ldots)=\int_L a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,\ldots)dt_1,\ B(z_1,\varsigma_1\ldots)=(1-k)\int_l a(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,\ldots)\cdot e.xp\{(k-1)A(z_1,t_1,\ldots)\}dt_1.$$

Тогда всюду в области $\overline{\Pi}_3$ получим непрерывную функцию по всем переменным, такими , что они хорошо влияют на непрерывность решений системы (5.7.2). Далее дифференцируя обе части (5.7.3) по переменным ς_2,ς_3, относительно новой неизвестной функции ψ , тогда получим систему

вида (5.6.2), а также вид функций $g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W), h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)$ следующими формулами:

$$\begin{cases} g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)=\varsigma_1^{\,n}\dfrac{\partial A}{\partial\varsigma_2}W+\dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial\varsigma_2}\cdot\exp[(1-k)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)]W^k+ \\ +\dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}f\left[z_1,z_2,...,\varsigma_3;\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,...,)\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,...)\right]\exp[(1-k)A(z_1,...)]W^k, \\ h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)=\varsigma_1^{\,n}\dfrac{\partial A}{\partial\varsigma_3}W+\dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}\cdot\dfrac{\partial B}{\partial\varsigma_3}\cdot\exp[(1-k)A(z_1,\varsigma_1,...,\varsigma_3)]W^k+ \\ +\dfrac{\varsigma_1^{\,n}}{1-k}f\left[z_1,z_2,\varsigma_2,...;\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,...)\}W^{1-k}-B(z_1,\varsigma_1,...)\right]\exp[(1-k)A(z_1,...)]W^k. \end{cases} \quad (5.7.4)$$

Прежде всего, заметим, что в таком виде функций $g(z_1,\varsigma_1...), h(z_1,\varsigma,...)$, условие совместности (5.7.4) выполняется тождественно. Поэтому подставляя значений функций g, h из (5.7.4) на данной системе (5.7.2), получаем регулярную систему вида (5.1.5). По аналогию с предыдущим случаем, интегрируя систему дифференциальных уравнений вида (5.1.5), получаем некоторую функцию $\psi=\psi[z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\Phi(z_1,z_2,z_3)]$. Далее подставляя значение функции $\psi=\psi(z_1,...)$ в соотношение (5.7.3) и переходя к прежним переменным, будем иметь многообразие решений системы (5.7.1) явной формулой (5.6.4), и для него будет справедливой условии предыдущая теорема 3.14**.**

3.5.8. Теперь будем рассматривать п.о.с. К.- Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial\bar z_1}=a(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3)W+b(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3)W^k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial\bar z_2}=\dfrac{g(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3;W)}{(\bar z_1-\bar z_1^{(0)})^m},\ \dfrac{\partial W}{\partial\bar z_3}=\dfrac{f(z_1,\bar z_1,z_2,\bar z_2,z_3,\bar z_3;W)}{(\bar z_2-\bar z_2^{(0)})^m}. \end{cases} \quad (5.8.1)$$

где $a,\ b,\ f,g\in RA(\overline{\Pi}_2), W\in RA(\Pi_3^{(0)}),\ m\ge 0,\ f,g-$аналитические функции по переменной *W*. Аналогично предыдущим случаям в п.1.п.2., в системе (5.8.1)

аналитически продолжив ее функциям по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=1,2)$, преобразуем её в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\cdot W + b(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\cdot W^k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{g(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}, \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;W)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m} \end{cases} . \quad (5.8.2)$$

Если в системе (5.8.2), при ограниченности $\dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_k}$ $(k=2,3)$, существуют пределы в их особых точках, и они в этих точках равны к нулю

$$\lim_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} \left((\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0, \ (k=1,2) \qquad (5.8.3)$$

то из равенства $g(z_1,...;W)=0,\ h(z_1,...;W)=0$ найдём следующие функций вида $W=h_1(z,\varsigma_1,\varsigma_3),\ W=h_2(z,\varsigma_1,\varsigma_3),\ z=(z_1,z_2,z_3)$ аналитические во всем переменным в полицилиндре, являющиеся частными, либо особыми решениями данной системы (5.8.2). Условием совместности системы (5.8.2) записываются в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{g}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right) + \left(aW+bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{g}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right) = \left(a+kbW^{k-1}\right)\dfrac{g}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m} + \dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2}W + \dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_2}W^k, \\ \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{h}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right) + \left(aW+bW^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{h}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right) = \left(a+khW^{k-1}\right)\dfrac{h}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n} + \dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2}W + \dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_2}W^k, (N_{25}) \\ (\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m \cdot \dfrac{\partial g}{\partial \varsigma_3} - (\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m \cdot \dfrac{\partial h}{\partial \varsigma_2} + h\cdot\dfrac{\partial g}{\partial W} - g\cdot\dfrac{\partial h}{\partial W} = 0. \end{cases}$$

Если условие совместности (N_{25}) выполняется, но не тождественно, то из них находим некоторые функций $u=h_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3),\ k=(1,2,3)$, где они возможно будут частными, либо особыми решениями исходной данной системы.

Теперь приступим к интегрированию первой регулярной дифференциальной уравнении системы (5.8.2), по переменной ς_1.

$$\exp\{(k-1)A(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\}W^{1-k} - B(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3) = \psi, \quad (\psi=\psi(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)), \qquad (5.8.3)$$

где функций A(z,…), B(z,…) определяются интегральными представлениями, по формуле (5.7.3). Очевидно, она разрешима относительно неизвестной функции, по известным функциям, причём явно. Дифференцируем последнее соотношение, по каждым переменным $\varsigma_2, \varsigma_3,$ подставим их результаты в последующих уравнениях системы (5.8.2), (хоть она многозначная), и получаем регулярную систему уравнений вида (5.1.5). Также, можем проверить, правые части уравнений системы (5.1.5) не зависят от переменного ς_1.Затем, интегрируем систему регулярных дифференциальных уравнений (5.1.5), получаем функцию вида

$$\psi = \psi\left[z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; \Phi(z_1, z_2, z_3)\right].$$

Подставляя значения функции ψ в соотношение (5.7.3), получаем многообразие решения исходной системы следующей формулой:

$$\exp\{(k-1)A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)\} W^{1-k} - B(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) = \psi\left[z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; \Phi(z_1, z_2, z_3)\right], \text{ либо}$$

$$W = \left\{B(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) + \psi\left[z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; \Phi(z_1, z_2, z_3)\right]\right\}^{1/(1-k)} \cdot \exp\left\{A(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)\right\}. \quad (5.8.4)$$

Тогда имеет места следующая теорема:

Теорема 3. 15. *Пусть в п.о.с. К.- Р. (5.8.1) ее функций удовлетворяют условиям* $a, b, f, g \in RA(\overline{\Pi}_2), W \in RA(\Pi_3^{(0)}), m \geq 0,$ *причём данные функций удовлетворяют условие леммы 1, а также условия совместности системы (N_{25}) выполняются, но не тождественно, тогда находятся некоторые частные, либо особые решения данной системы. Условия совместности системы (N_{25}) выполняются тождественно, если взаимосвязь данных функций* a, b *-исходной системы с другими функциями* g, h *–определяются формулами вида (5.8.3). Тогда система дифференциальных уравнений (5.8.1) разрешима, и многообразие ее решений определяется формулой вида (5.8.4), причём непрерывной на всей данной области.*

3.5.9. Рассматривается система трёх дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W), \quad \bar{z}_1^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \bar{z}_3; W), \\ \bar{z}_2^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = c(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W). \end{cases} \qquad (5.9.1)$$

где $a, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in RA(\overline{D}) \cap C^1, W \in C^2(D_0), \quad D_0 = \overline{D} - L, \quad L = \{\varsigma_1 = 0, \varsigma_2 = 0\}.$ После аналитического продолжения функций системы (5.9.1) на данной области, она преобразуется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W), \qquad \varsigma_1^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = b(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W), \\ \varsigma_2^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = c(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W). \end{cases} \qquad (5.9.2)$$

Условия совместности системы (5.9.2) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \varsigma_1^{\,\mathrm{n}+1} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_2} + \varsigma_1 \cdot \left(b \cdot \dfrac{\partial a}{\partial W} - \dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_1} - a \cdot \dfrac{\partial b}{\partial W} \right) + n \cdot b = 0, \\ \varsigma_2^{\,\mathrm{n}+1} \cdot \dfrac{\partial a}{\partial \varsigma_3} + \varsigma_2 \cdot \left(c \cdot \dfrac{\partial a}{\partial W} - \dfrac{\partial c}{\partial \varsigma_1} - a \cdot \dfrac{\partial c}{\partial W} \right) + n \cdot c = 0, \varsigma_2^{\,n} \cdot \dfrac{\partial b}{\partial \varsigma_3} - \varsigma_1^{n} \cdot \dfrac{\partial c}{\partial \varsigma_2} + c \cdot \dfrac{\partial b}{\partial W} - b \cdot \dfrac{\partial c}{\partial W} = 0. \end{cases} \qquad (N_{26})$$

Пусть каждые соотношения в условиях совместности (N_{26}) по всем переменным выполняются, но не тождественно. Тогда в силу теореме о системе неявных функций [251], из этих соотношений найдём функций: $W = \mathrm{h}_i(\mathrm{z}_1, \varsigma_1, \mathrm{z}_2, \varsigma_2, \mathrm{z}_3, \varsigma_3), \ (i = 1,2,3)$ что, возможно, они будут некоторыми частными, либо особыми решениями системы дифференциальных уравнений (5.9.2). Допустим, что в уравнениях системы (5.9.2) выполняются необходимые условия леммы 1. Если в системе уравнений (5.9.2), в случаях ограниченности $\mathrm{W}'_{\varsigma_2}, \mathrm{W}'_{\varsigma_3}$ существуют, и равны нулю пределы: $\lim\limits_{\varsigma_1 \to 0}\left(\varsigma_1^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} \right) = 0, \ \lim\limits_{\varsigma_2 \to 0}\left(\varsigma_2^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} \right) = 0$, то необходимо находим, функции $\mathrm{W} = \mathrm{q}_1(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \varsigma_2, \mathrm{z}_3, \varsigma_3), \mathrm{W} = \mathrm{q}_2(\mathrm{z}_1, \varsigma_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3, \varsigma_3),$ и они будут частными, либо особыми решениями исходной системы. Также заметим, что по аналогию с предыдущим случаем, для существования многообразие

решений системы (5.9.1), тождественного выполнения ее условия совместности (N_{26}) являются необходимым и достаточным. Интегрируем первого уравнения системы (5.9.2), как регулярное дифференциальное уравнение, по переменной ς_1, считая оставшиеся переменные $(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)$, параметрами, методом последовательных приближений, получим:

$$W(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=h(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;V),\quad \big(V=V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)\big). \quad (5.9.3)$$

Затем, дифференцируем функцию вида (5.9.3) по переменным $(\varsigma_2, \varsigma_3)$, подставим их результаты в уравнениях исходной системы и получим

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_2}=f_2(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;V),\ \frac{\partial V}{\partial \varsigma_3}=f_3(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;V). \quad (5.9.4)$$

По аналогию с предыдущим случаем, получаем регулярное соотношение, полученное в условие совместности системы (N_{26}). Интегрируя эту систему дифференциальных уравнений, получаем

$$W(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=H\big[z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\ f(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3;\Phi(z_1,z_2,z_3))\big]. \quad (5.9.5)$$

Теорема 3.16. *Пусть в системе дифференциальных уравнений (5.9.1) ее данные функций* $a, b, c \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4^{(0)}),\quad \overline{\Pi}_4^{(0)}=\overline{\Pi}_4-L,\quad L=\{\varsigma_1=0,\varsigma_2=0\},$ $\overline{\Pi}_4=\{|\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)}|\le a_0,\ |W-W_0|\le b_0\}$, *и для него выполняются обобщение условия леммы 1, а также условий совместности системы выполняются, но не тождественно, тогда данная система дифференциальных уравнений имеет некоторые частные, либо особые решения. Если же условия совместности системы (5.9.2) выполняется тождественно, тогда исходная система дифференциальных уравнений также разрешима, и многообразие ее решений найдётся формулой вида (5.9.5) непрерывной по всем переменным. Причём все ее особые точки в данной системе устраняются.*

3.5.10. Аналогично предыдущим случаям, интегрируются системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = a(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot m(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_3; W), \\ \bar{z}_1^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = b(z_1, \bar{z}_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot m(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_3; W), \\ \bar{z}_2^{\,n} \cdot \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = c(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W). \end{cases} \qquad (5.10.1)$$

где $a, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{m} \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4^{(0)}), \quad \overline{\Pi}_4^{(0)} = \overline{\Pi}_4 - L, \quad L = \{\varsigma_1 = 0, \varsigma_2 = 0\}.$

В случаи тождественного выполнения условия совместности данной системы многообразие ее решений определяется в виде

$$\mathrm{W}(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) =$$
$$M^{-1}[z_1, z_2, z_3, \varsigma_3; \omega(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) + F(\Phi(z_1, z_2, z_3); z_3, \varsigma_3)]. \quad (5.10.2)$$

Теорема 3.17. *Пусть в системе дифференциальных уравнений (5.10.1) функции* $a, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{m} \in RA(\overline{\Pi}_3), \ W \in RA(\overline{\Pi}_4^{(0)}), \quad \overline{\Pi}_4^{(0)} = \overline{\Pi}_4 - L, \quad L = \{\varsigma_1 = 0, \varsigma_2 = 0\},$ *а также выполняются условия леммы 1. Если условия совместности системы (5.10.1) выполняются, но не тождественно, то находятся некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Для тождественного вылнения условия совместности (5.10.1) необходимо достаточно, чтобы взаимосвязь между данными функциями системы определялись определённой формулой. Тогда исходная система разрешима, и многообразие ее решений определяется формулой вида (5.10.2) (явно, либо неявно но многозначно).*

3.5.11.Рассматривается п.о.с. К.-Р. с сингулярными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{f_k(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)}{(\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^n} \cdot q(z_1, z_2, z_3; W), \qquad (k = \overline{1, 3}), \qquad (5.11.1)$$

где $f_3(\mathrm{z}_1,...), q(z_1,...) \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4),$ причём здесь функция $q(z_1, z_2, z_3; W)$ является аналитической по всем своим аргументам. Цель настоящей работы заключается в том, чтобы определит случаи, когда существуют и какого вида регулярного, либо сингулярного решения системы вида (5.11.1). Для выяснения эти случаи, рассмотрим выполнение следующей леммы:

Лемма3. *Пусть дана система дифференциальных уравнений (5.65). Если в случаи ограниченности функцииW и ее частные производные по каждым ее переменным, существуют пределы* $\lim_{\bar{z}_k \to \bar{z}_k^{(0)}} (\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^n \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = 0,\ (k = 1,2,3)$ *тогда существуют некоторые частные, либо особые решения системы следующими формулами вида* $W = h_k(z_1, z_2, z_3),\ (k = 1,2,3),$ *являющиеся некоторыми частными, либо особыми решениями исходной системы.*

Благодаря этой лемме, являющиеся обобщением леммы Михайлова Л.Г. [110], который было указано в системах дифференциальных уравнений в полных дифференциалах действительной плоскости, получаем некоторые частные, либо особые решения системы (5.11.1). Выполняя аналитического продолжения функциям системы дифференциальных уравнений (5.11.1), тем самым заменой $\bar{z}_k$ на ς_k, перепишем исходную систему в виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = \frac{f_k(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)}{(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^n} \cdot q(z_1, z_2, z_3; W), \qquad (k = \overline{1,3}), \qquad (5.11.2)$$

Условие совместности системы (5.11.2) записывается в виде

$$(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^n \frac{\partial f_j}{\partial \varsigma_k} = (\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^n \frac{\partial f_k}{\partial \varsigma_j}. \qquad (j,\ k = \overline{1,3}),\ j \neq k. \qquad (N_{27})$$

Заметим, что если для системы (5.11.2) условия (N_{27}) не выполняются, то она не имеет решение. Если же условия (N_{27}) выполняются по всем независи-мым переменным, то в процессе интегрирование системы (5.11.2),

имеем

$$Q(z_1,z_2,z_3;W)=\Phi(z_1,z_2,z_3)+\int_0^{\varsigma_1}\frac{f_1(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)}{(t_1-t_1^{(0)})^n}dt_1+\int_0^{\varsigma_2}\frac{f_1(z_1,0,z_2,t_2,z_3,\varsigma_3)}{(t_2-t_2^{(0)})^n}dt_2+ \quad (5.11.3)$$

$$+\int_0^{\varsigma_3}\frac{f_1(z_1,0,z_2,0,z_3,\varsigma_3)}{(t_3-t_3^{(0)})^n}dt_3=\Phi(z_1,z_2,z_3)+F_1(z_1,\ldots)+F_2(z_1,z_2,\ldots)+F(z_1,z_2,z_3,\varsigma_3).$$

Если обратить функцию $Q(z_1,\ldots)$ относительно W, то решение системы

представленной формулой вида (5.68) и после перехода к прежним

переменным, можем записать ее в виде

$$W(z,\bar{z})=Q^{-1}[\Phi(z_1,z_2,z_3)+F_1(z,\bar{z})+F_2(z,\bar{z}_2,\bar{z}_3)+F(z_1,z_2,z_3,\bar{z}_3)]. \quad (5.11.3)'$$

После того, как получаем многообразие решение исходной системы, в последнем виде формулы, оно имеет особенности *(n-1)*-го порядка по каждым независимым переменным. Если в этой интегральной формуле применять теорему о вычетах, то с учётом формулы

$$F_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}f_1}{\partial\varsigma_1^{(n-1)}}\right),\ F_2(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}f_2}{\partial\varsigma_2^{(n-1)}}\right), \quad (5.11.4)$$

$$F_3(z_1,z_2,z_3,\varsigma_3)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{n-1}f_3}{\partial\varsigma_1^{(n-1)}}\right),$$

то полученное решение исходной системы вида (5.11.2), с учётом формулами (5.11.4), во всей данной области (бицилиндре Π_3) является непрерывной. Если в исходной системе дифференциальных уравнений правая часть первой, либо другое ее уравнении является регулярной по какой либо переменной, то из условия совместности (N_{27}) можем определить взаимосвязь функции $f_k(z_1,\ldots)$ определёнными формулами, такими, что в них особенностей по соответствующим переменным устраняются, и решение исходной системы во всей данной области непрерывно. Допустим, что в исходной системе $\frac{f_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}$, $q(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)$ считаются известными функциями, тогда из соотношений условия (N_{27}) можем определить взаимосвязь между функций данной системы следующими формулами:

$\frac{\partial f_2}{\partial \varsigma_1} = \frac{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varsigma_2}$, $\frac{\partial f_3}{\partial \varsigma_1} = \frac{(\varsigma_3 - \varsigma_3^{(0)})^n}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varsigma_3}$. Откуда легко получаем:

$$f_2(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3) = (\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n[\beta(z_1,z_2,...) + F_1(z_1,\varsigma_1,z_2,...)], F_1(z_1,...) = \int_0^{\varsigma_1} \frac{\partial_{\varsigma_2} f_1(z_1,t_1,...)}{(t_1 - t_1^{(0)})^n} dt_1,$$

$$f_3(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3) = (\varsigma_3 - \varsigma_3^{(0)})^n[\gamma(z_1,z_2,...) + F_2(z_1,\varsigma_1,z_2,...)], F_2(z_1,,...) = \int_0^{\varsigma_1} \frac{\partial_{\varsigma_3} f_1(z_1,t_1,...)}{(t_1 - t_1^{(0)})^n} dt_1.$$

(5.11.5)

Подставляя значения функций f_2, f_3 из соотношений (5.11.5) в системе (5.11.2), получаем новую систему, с двумя регулярными и одним сингулярными коэффициентами системы уравнения вида

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{f_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} \cdot q(z_1,z_2,z_3;W), \\ \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = [\beta(z_1,z_2,...) + F_1(z_1,\varsigma_1,z_2,...)] \cdot q(z_1,z_2,z_3;W), \\ \frac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = [\gamma(z_1,z_2,...) + F_2(z_1,\varsigma_1,z_2,...)] \cdot q(z_1,z_2,z_3;W). \end{cases} \quad (5.11.6)$$

Поскольку в случаи выполнение равенство соотношении $\partial_{\varsigma_3}\beta = \partial_{\varsigma_2}\gamma$ условия совместности системы (5.11.6) выполняются по всем переменным, поэтому в результате интегрирования первой уравнении последней системы, получаем:

$$Q(z_1,z_2,z_3;W) - F(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3) = V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3), \quad (5.11.7)$$

$Q(z,...) = \int_0^W \frac{d\sigma}{q(z;\sigma)}, z = (z_1,z_2,z_3), F(z_1,...) = \int_0^{\varsigma_1} \frac{f_1(z_1,t_1,...)}{(t_1 - t_1^{(0)})^n} dt_1$, $V = V(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)$ – новая неизвестная функция. Дифференцируем соотношение (5.11.7) по остальным комплексным независимым переменным, и подставим ее результаты в остальных уравнениях системы (5.11.6). В результате, получаем систему двух регулярных комплексных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varsigma_2} = \beta(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3), \\ \frac{\partial V}{\partial \varsigma_3} = \gamma(z_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3). \end{cases} \quad (5.11.8)$$

Интегрируя эту систему уравнений, как системы двух дифференциальных уравнений с параметрами, получаем:

$$V(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) = \Phi(z) + \omega(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3), \qquad (5.11.9)$$
$$(\ \partial_{\varsigma_2}\omega = \beta(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3),\ \partial_{\varsigma_3}\omega = \gamma(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)\ ).$$

Подставляя значение функции $V(z_1,\dots)$ из (5.11.9) в (5.11.7), получим
$Q(z_1, z_2, z_3; W) - F(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) = \Phi(z) + \omega(z_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3).$

Обращая последнюю функцию по переменной W, и переходя к прежним переменным, получаем многообразие решений исходной системы следующей формулой:
$W(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) = Q^{-1}[z;\ \Phi(z) + F(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) + \omega(z_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)]. \quad (5.11.10)$

Или в другом упрощённом виде

$$W(z, \bar{z}) = Q^{-1}[z;\ \Phi(z) + F(z, \bar{z}) + \omega(z, \tilde{\tilde{z}})],\ (z = (z_1, z_2, z_3),\ \tilde{\tilde{z}} = (\bar{z}_2, \bar{z}_3). \qquad (5.11.10)'$$

При этом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.15. *Пусть в п.о.с. К.-Р. (5.11.1)*
$f_k(z_1,\dots),\ q(z_1,\dots) \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4).$

Если условия совместности системы (5.11.2) в виде (N_{27}) выполняются, но не тождественно, а также выполняется условия леммы, то возможно система дифференциальных уравнений (5.11.1) и (5.11.2) могут иметь некоторые частные, либо особые решения. Если условия совместности (N_{27}) выполняются по всем переменным, то система (5.11.1) разрешима и многообразие ее решений в виде (5.11.3)′*, либо* (5.11.10)′ *в различных случаях. Если в исходной системе правая часть первой ее уравнение регулярно, и в интегральной формуле* (5.11.10)′*, функциям $F_k(z_1,\dots)$ применима теорема о вычетах, то многообразие решение исходной системы во всей данной области непрерывно.*

3.5.12. Рассматривается п.о.с. К.-Р. с сингулярными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{f_k(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)}{(\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^n} \cdot q_k(z_1, z_2, z_3; W), \qquad (k = \overline{1, 3}), \qquad (5.12.1)$$

$f_3(z_1,\dots),\ q_k(z_1,\dots) \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4),$ функция $q_k(z_1, z_2,, z_3; W)$ являются аналитическими по всем своим аргументам, но они различные функций. При этом, в предыдущей лемме необходимые условий на функции W, и существование предел, ее равенство к нулю $\lim_{\bar{z}_k \to \bar{z}_k^{(0)}} (\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^n \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = 0,$ $W = h_k(z_1, z_2, z_3),\ (k = 1, 2, 3) -$ сохраняются, причём найденное частное, либо особое решение системы сохраняются. Выполняя аналитического

продолжения к функциям системы дифференциальных уравнений (5.12.1), тем самым заменой переменных $\bar{z}_k$ на ς_k, перепишем ее в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = \frac{f_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)}{(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^n}\cdot q_k(z_1,z_2,z_3;W), \qquad (k=\overline{1,3}). \tag{5.12.2}$$

Условия совместности системы (5.12.2) записывается в виде

$$\left\{\begin{array}{l} f_1\cdot f_2\cdot[\partial_{\bar{z}_2}q_1(z,W)\cdot q_2(z,W)-q_2(z.W)\cdot\partial_{\bar{z}_1}q_1(z,W)]+ \\ \quad +(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\cdot\partial_{\bar{z}_2}f_1\cdot q_1(z,W)-(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\cdot\partial_{\bar{z}_1}f_2\cdot q_2(z,W)=0, \\ f_1\cdot f_3\cdot[\partial_{\bar{z}_2}q_1(z,W)\cdot q_3(z,W)-q_3(z.W)\cdot\partial_{\bar{z}_1}q_1(z,W)]+ \\ \quad +(\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n\cdot\partial_{\bar{z}_3}f_1\cdot q_1(z,W)-(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n\cdot\partial_{\bar{z}_1}f_3\cdot q_3(z,W)=0, \\ f_2\cdot f_3\cdot[\partial_{\bar{z}_3}q_2(z,W)\cdot q_3(z,W)-q_2(z.W)\cdot\partial_{\bar{z}_2}q_3(z,W)]+ \\ \quad +(\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n\cdot\partial_{\bar{z}_3}f_2\cdot q_2(z,W)-(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n\cdot\partial_{\bar{z}_2}f_2\cdot q_3(z,W)=0. \end{array}\right. \tag{N_{28}}$$

Пусть условие совместности (N_{28}) выполняются, но не тождественно, тогда в силу теоремы о системе неявных функций, из этих соотношений , можем определить функций $W=\varphi_k(z,\bar{z}), z=(z_1,z_2,z_3),\ (k=1,2,3)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (5.12.2), то ее считаем некоторым частным, либо особым решением исходной системы. В противном случае, система (5.12.2)- несовместна. Теперь потребуем, чтобы условие совместности (N_{28}) выполняются тождественно всюду в области, и по всем переменным. А это необходимое условие возможно в следующих случаях:

$$1.\left\{\begin{array}{l} \partial_{\bar{z}_2}q_1(z,W)\cdot q_2(z,W)-q_2(z.W)\cdot\partial_{\bar{z}_1}q_1(z,W)=0,\ \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_2}\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right)=0,\ \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\left(\dfrac{f_2}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right)=0, \\ \partial_{\bar{z}_3}q_1(z,W)\cdot q_3(z,W)-q_1(z.W)\cdot\partial_{\bar{z}_1}q_3(z,W)=0,\ \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_3}\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right)=0,\ \dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\left(\dfrac{f_3}{(\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n}\right)=0. \end{array}\right.$$

Из этих соотношений получаем взаимосвязь между данными функциями следующим образом:

$$f_1(z,\bar{z})=\alpha(z,\bar{z}_2)\cdot(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n,\ f_2(z,\bar{z})=\beta(z,\bar{z}_2)\cdot(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n,\ f_3(z,\bar{z})=\gamma(z,\bar{z}_2)\cdot(\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n$$
$$q_2(z,W)=q_3(z,W)=\lambda q_1(z,W)\equiv\lambda\cdot q(z,W),\ z=(z_1,z_2,z_3)\ \ (\lambda=const). \tag{5.12.3}$$

Подставляя значения функций f_k, q_k из последних равенствп в системе (5.12.3) получим:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \lambda\alpha(z,\bar{z}_2,\bar{z}_3)q(z,W), \qquad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \beta(z,\bar{z}_2,\bar{z}_3)q(z,W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \gamma(z,\bar{z}_2,\bar{z}_3)q(z,W).$$

Условие совместности последней системы выполняется тождественно, и многообразие ее решений в процессе ее интегрирования находится как непрерывной во всей данной области $\overline{D}$, функцией вида:

$$W(z,\bar{z}) = Q^{-1}[z;\Phi(z) + \lambda\int_0^{\bar{z}_1}\alpha(z,t_1,\bar{z}_2,\bar{z}_3)dt_1 + \int_0^{\bar{z}_2}\beta(z,0,t_2,\bar{z}_3)dt_2 + \int_0^{\bar{z}_3}\beta(z,0,0,t_3)dt_3]. \quad (5.12.4)$$

2. Допустим, что в условии совместности (N_{28}) выполняются условия:

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}_2}q_1\cdot q_3 - q_3\cdot\partial_{\bar{z}_1}q_1 \neq 0, \ \partial_{\bar{z}_2}q_1\cdot q_3 - q_3\cdot\partial_{\bar{z}_1}q_1 \neq 0, \quad \partial_{\bar{z}_3}q_2\cdot q_3 - q_2\cdot\partial_{\bar{z}_2}q_3 \neq 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\dfrac{f_2}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right), \ \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_3}\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\dfrac{f_3}{(\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n}\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_3}\left(\dfrac{f_2}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_2}\left(\dfrac{f_3}{(\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n}\right). \end{cases}$$

Поскольку в этих соотношениях (N_{28}) левая часть равенства зависят лишь от переменного *W*, а правая часть от пары переменных *(z, ς_2)*, тогда приравнивая их некоторому постоянному параметру λ, будем иметь:

$$\begin{cases} q_2(z,W) = q_3(z,W) = \left[1 + e^{-\lambda\cdot F_1(z,W)}\right]q_1(z,W), \\ f_2(z,\varsigma) = (\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^n e^{\lambda F_1(z,\varsigma)}\beta(z,\varsigma), \ f_3(z,\varsigma) = (\varsigma_3-\varsigma_3^{(0)})^n e^{\lambda F_1(z,\varsigma)}\gamma(z,\varsigma). \end{cases} \quad (5.12.5)$$

С такими значениями функциями $q_k(z,W)$, $f_k(z,\varsigma)$, $z=(z_1,z_2,z_3)$, $\varsigma=(\varsigma_1,\varsigma_2,\varsigma_3)$, предыдущая, либо данная система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_1} = \dfrac{f_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,z_3,\varsigma_3)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^n}\cdot q_1(z_1,z_2,z_3;W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_2} = \beta(z,\varsigma_2,\varsigma_3)\cdot\left[e^{\lambda\cdot F_1(z,\varsigma)} + e^{-\lambda\cdot[Q(z.W)-F_1(z,\varsigma)]}\right]\cdot q_1(z_1,z_2,z_3;W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_3} = \gamma(z,\varsigma_2,\varsigma_3)\cdot\left[e^{\lambda\cdot F_1(z,\varsigma)} + e^{-\lambda\cdot[Q(z.W)-F_1(z,\varsigma)]}\right]\cdot q_1(z_1,z_2,z_3;W). \end{cases} \quad (5.12.6)$$

Поскольку в системе дифференциальных уравнений (5.12.6) их условий совместности выполняются тождественно, поэтому интегрируя ее,

с учётом выполнения инвариантной условием $\partial_{\varsigma_3}\beta = \partial_{\varsigma_2}\gamma$, а также замены $Q(z,W) - F_1(z,\varsigma) = V(z,\varsigma_2,\varsigma_3)$, V – новая неизвестная функция, получим:

$$Q(z,W) = F_1(z,\varsigma) + \frac{1}{\lambda}\ln[\Phi(z) + \lambda\cdot\omega(z,\varsigma_2,\varsigma_3)],$$

либо с переходом к прежним переменным, имеем многообразие решение

$$W(z,\bar{z}) = Q^{-1}\left\{F_1(z,\bar{z}) + \frac{1}{\lambda}\ln[\Phi(z) + \lambda\cdot\omega(z,\bar{z}_2,\bar{z}_3)],\right\}.$$

(5.12.7)

Таким образом, справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.16. *Пусть в переопределённой обобщённой системе Коши-Римана (п.о.с. К.-Р.) вида (5.12.1) ее функций удовлетворяют условии* $f_3(z_1,...), q_k(z_1,...) \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4)$, *где функции* $q_k(z_1,z_2,,z_3;W)$ *являются аналитическими по всем своим аргументам. Если условия совместности (*N_{28}*) для исходной системы выполняются, но не тождественно, а также выполняются условии леммы, то п.о.с. К.-Р. (5.12.1) может иметь лишь некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Для того, условия совместности (5.12.2) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы между функциями данной системы имела места взаимосвязь в видах (5.12.3) и (5.12.5). Тогда исходная система разрешима и многообразие ее решений представляются соответствующими формулами (5.12.4) и (5.12.7). Если в системе (5.12.1) функции* f_k *-являются аналитическими по своим аргументам, то с учётом теоремы о вычетах многообразие решений данной системы во всей данной области будет непрерывным.*

3.5.13.Теперь рассмотрим п.о.с. К.- Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3) \cdot q(z_1, z_2, z_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \dfrac{f_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^n} \cdot q(z_1, z_2, z_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \dfrac{f_3(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{(\bar{z}_2 - \bar{z}_2^{(0)})^n}. \end{cases} \tag{5.13.1}$$

По аналогию предыдущим случаям, данные функций системы (5.13.1) удовлетворяют условиям $f_3(z_1,...),\ q_k(z_1,...) \in RA(\overline{\Pi}_3), W \in RA(\overline{\Pi}_4),$

причём все указанные функций аналитические по переменной W. Аналитически продолжая функциям данной системы по переменным $\bar{z}_k$, тем самым заменяя их на ς_k, имеем систему дифференциальные уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f_1(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3) \cdot q(z_1, z_2, z_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{f_2(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^n} \cdot q(z_1, z_2, z_3; W), \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \dfrac{f_3(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W)}{(\varsigma_2 - \varsigma_2^{(0)})^n}. \end{cases} \tag{5.13.2}$$

Приравнивая смешанные производные второго порядка в уравнениях системы (5.13.2), получим условии совместности указанной системе дифференциальных уравнений следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial \varsigma_2} = \dfrac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\dfrac{f_2}{(\varsigma - \varsigma_1^{(0)})^n}\right), \\ (\varsigma - \varsigma_1^{(0)})^{n+1} \dfrac{\partial f_2}{\partial \varsigma_1} + q \cdot f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial W} = f_1 \dfrac{\partial q}{\partial W} f_2 + \left(q \dfrac{\partial f_1}{\partial \varsigma_2} + f_1 \dfrac{\partial q}{\partial \varsigma_2}\right), \\ (\varsigma - \varsigma_1^{(0)})^{n+1} \dfrac{\partial f_3}{\partial \varsigma_1} + q \cdot f_1 \dfrac{\partial f_3}{\partial W} = a \dfrac{\partial f_1}{\partial W} f_3 + \left(q \dfrac{\partial f_1}{\partial \varsigma_3} + f_1 \dfrac{\partial q}{\partial \varsigma_3}\right). \end{cases} \tag{N_{29}}$$

Условия совместности исходной системы выполняются тождественно, причём по всем переменным, если взаимосвязь между данными функциями, также функции $f_3(z_1, \varsigma_1, z_2, \varsigma_2, z_3, \varsigma_3; W) = f_3(z, \varsigma; W)$, где $(z, \varsigma) = (z_1, z_2, z_3, \varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3)$ определяется следующей формулой:

$$f_3(z,\varsigma;W.)=\left(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)}\right)^n\cdot\left\{\frac{\partial\omega}{\partial\varsigma_2}-\frac{\partial Q}{\partial\varsigma_2}+f\left[z,\varsigma_2,\varsigma_3;Q(z;W)-\omega(z,\varsigma)\right]\right\}\cdot q(z;W),\qquad(5.13.3)$$

Учитывая значения функции $f_3(z,\ldots)$ по формуле (5.13.3), проинтегрируем данную систему, в результате, получим многообразие решений исходной системы следующей формулой:

$$F\left[z_1,z_2,\varsigma_2 z_3,\varsigma_3;Q(z_1,z_2,z_3;W)-\omega(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2 z_3,\varsigma_3)\right]=\Phi(z)+P(z,\varsigma_3),\qquad(5.13.4)$$

где функции F(…), Q(z,ς_3) определяются через интегральные представления, относительно функций исходной системы. Имеет место утверждение

Теорема 3.17. *Пусть в системе дифференциальных уравнений (5.13.1) ее функций удовлетворяют условий* $f_3(z_1,\ldots),\ q_k(z_1,\ldots)\in RA(\overline{\Pi}_3), W\in RA(\overline{\Pi}_4)$. *Если условия совместности системы (N_{29}) выполняются, но не тождественно, а также выполняется условии леммы 1-2, то находятся некоторые частные, либо особые решения исходной системы. Для того, условия совместности системы (N_{29}) по всем переменным выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между данными функциями исходной системы определялась формулой вида (5.13.3). Тогда исходная система разрешима и многообразие ее решений определяется формулой вида (5.13.4), непрерывной во всей данной области.*

§ 3.6. О некоторых п.о.с.К.-Р. с произвольным числом независимых переменных с сингулярными коэффициентами

3.6.1.В настоящей части работы рассматриваются п.о.с.К.-Р., не содержащие искомую функцию вида:

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{z}_k}=\frac{f_k(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,\ldots,z_n,\bar{z}_n)}{\bar{z}_k-\bar{z}_k^{(0)}},\ (k=\overline{1,n}),\qquad(6.1.1)$$

где $f_k\in RA(\ddot{I}_n), W\in RA(\ddot{I}_{n+1}^{(0)})$. Выполняя аналитическое продолжение в системе (6.1.1) зменой $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=\overline{1,n})$, преобразуем систему (6.1.1) к системе вида [333],[337]:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = \frac{f_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,\ldots,z_n,\varsigma_n)}{\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)}}, (k=\overline{1,n}). \qquad (6.1.2)$$

С одной стороны видно, что в правой части системы (6.1.2) функции f_k аналитические по всем $2n$ переменным z_k, ς_k. А с другой стороны, аналогично [45], для непрерывности решение системы (6.1.2) необходимо, чтобы в точках вырождений выполнялись условия (M_0), то есть; $\lim\limits_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} \left((\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)}) \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0$. Откуда, имеем $\left(f_k\right)_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} = f_{0k} = 0$. А также, если $f_k(z_1,\ldots,\varsigma_n) = o(\left|\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)}\right)^{\lambda}\right|, (0 \le \lambda < 1)$ то решение системы на данном полицилиндре будет непрерывным и ограниченным.

Условиями совместности системы (6.1.2) будут

$$(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)}) \frac{\partial f_k}{\partial \varsigma_k} = (\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)}) \frac{\partial f_i}{\partial \varsigma_i}, (i,k=\overline{1,n}), i \ne k. \qquad (N_{30})$$

Пусть условия (N_{30}) выполняются, тогда система (6.1.2) разрешима явно и многообразия её решений определяется следующей формулой

$$W(z_1,\varsigma_1,\ldots z_n,\varsigma_n) = \hat{O}(z_1,z_2,\ldots,z_n) + \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1,\varsigma_1^{(0)},\ldots,z_k,\varsigma_k^{(0)},\ldots,z_n,\varsigma_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} f_k(z_1,\varsigma_1^{(0)},\ldots,z_k,\varsigma_k^{(0)},\ldots,z_n,\varsigma_n) \ln\left|\frac{\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)}}{-\varsigma_k^{(0)}}\right|.$$

Переходя к прежним переменным, получим многообразие всех решений исходной системы следующей формулой

$$W(z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2,\ldots,z_n,\bar{z}_n) = \Phi(z_1,z_2,\ldots,z_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1,\bar{z}_1^{(0)},\ldots,z_k,\bar{z}_k^{(0)},\ldots,z_n,\bar{z}_n) + \sum_{k=1}^{n} f_k(z_1,\bar{z}_1^{(0)},\ldots,z_k,\bar{z}_k^{(0)},\ldots,z_n,\bar{z}_n^{(0)}) \ln\left|\frac{\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)}}{-\bar{z}_k^{(0)}}\right|. \qquad (6.1.3)$$

При этом, формула (6.1.3) представляющая решение системы (6.1.2) является непрерывной во всём полицилиндре $\bar{I}_n$ (если функции f_k в особой

точке удовлетворяют условию (M_0)). Если же в (6.1.3) функции $f_k(z_1,...)=0$, то решение системы (6.1.2) во всей области будет непрерывным, в противном случае, решение исходной системы в точке вырождения имеет логарифмическую особенность.

3.6.2. Будем рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k}=\frac{f_k(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_k-\bar{z}_k^{(0)})^m},\ (k=\overline{1,n}),\ (m\geq 0) \qquad (6.2.1)$$

где $f_k \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in RA(\Pi_{n+1}^{(0)}),(k=\overline{1,n})$, f_k – аналитические функций по переменной W. Аналогично предыдущим пунктам, выполняя аналитическое продолжение по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=\overline{1,n})$, преобразуем систему (6.2.1) к виду:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}=\frac{f_k(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m},\quad (k=\overline{1,n}),\ m\geq 0\ .$$

(6.2.2)

Для существование непрерывного решения системы (6.2.2), необходимо, чтобы в точках вырождений $\varsigma_k=\varsigma_k^{(0)}$ $(k=\overline{1,n})$ выполнялись следующие соотношения $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m\cdot\frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}\right)=0,$ **(**при ограниченности $\frac{\partial W}{\partial\varsigma_k}$ $(k=\overline{1,n})$). Тогда из системы (6.2.2) получим $(f_k)_0=f_{0k}=0$. А также, если функции f_k - удовлетворяют условию малости: $f_k=o((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^{m-\lambda}),(0\leq\lambda<1)$, то система (6.2.2) будет иметь непрерывное решение. Допустим, что ни одно из указанных условий не выполняются. Учитывая такое условие из [45] , что если в системе (6.2.2 функции f_k по всем аргументам являются аналитическими, то в правых частях данной системы имеются особенности m-го порядка. Тогда

имеем возможность применять к тем интегралам теоремы вычетов [58]. Так, что

$$\int_L \frac{f_k(z_1,\varsigma_1^{(0)},...,t_k,...,z_n,\varsigma_n)}{(t_k-\varsigma_k^{(0)})^m}dt_k = \frac{2\pi i}{(m-1)!}\cdot \lim_{t_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left(\frac{\partial^{m-1}f_k}{\partial t^{m-1}}\right), \qquad (6.2.3)$$

$$\mathrm{L}=\partial(\overline{\Pi}_{\mathrm{n}}),\varsigma_{\text{л}}^{(0)},\mathrm{t_k}\in\overline{\Pi}_{\mathrm{n}},(\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{n}}).$$

При этом, правая часть последней формулы является, не только дифференцируемой до *(m-1)*-го порядка, но и непрерывной. В процессе интегрирование системы (6.2.3), и переход к прежним переменным, получим непрерывное решение системы во всей области, и оно принимает вид:

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,...,\mathrm{z}_{\mathrm{n}},\bar{\mathrm{z}}_{\mathrm{n}})=\Phi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,...,\mathrm{z}_{\mathrm{n}})+$$
$$+\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{(\mathrm{m}-1)!}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\frac{\partial^{\mathrm{m}-1}}{\partial\bar{\mathrm{z}}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}-1}}\left(\mathrm{f_k}(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1^{(0)},...,\mathrm{z_k},\bar{\mathrm{z}}_{\mathrm{k}}^{(0)},...,\mathrm{z}_{\mathrm{n}},\bar{\mathrm{z}}_{\mathrm{n}})\right)\cdot \qquad (6.2.4)$$

В противном случае, если при интегрирования системы (6.2.3) не учитывать теорему вычетов, то многообразие решение системы находится аналогично предыдущим случаям, но в ней каждые её слагаемые в соответствующих особых точках будет иметь особенности *(m-1)* – го порядка при *m>1*.

Теорема. 3.18. *Пусть в системе уравнений (6.2.1)* $f_k\in RA(\bar{I}_n)$, $W\in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1})$, f_k – *аналитические по переменной* W. *Если для системы (6.2.1) выполняются условий леммы и условие малости для функции* $f_k(...)$, *а также эти функции данной области считаются аналитическими, по теореме вычетов, при выполнении условий совместности, многообразия решений системы (6.2.1) непрерывно во всей области, и определяется формулой вида (6.2.4). А если указанные условий не будут выполнены, то в решение системы (6.2.1) точках* $\bar{z}_k=\bar{z}_k^{(0)}$ *имеет особенности* $(m-1)-$*го порядка.*

Замечание. Предыдущее утверждение верно и для п.о.с.К.-Р. вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{f_k(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)}{(\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^m}\ p(z_1, z_2, \ldots z_n; W),\ (m \geq 0)$$

когда $f_k \in RA(\ddot{I}_n), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1}),\ f_k -$ по W, а функция $p(z_1, \ldots) -$ по всем переменным являются аналитическими.

3.6.3. В настоящем пункте работы будем рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f_1(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^m}\ p(z_1, \ldots, z_n; W), \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{f_k(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)}{(\bar{z}_n - \bar{z}_n^{(0)})^m}\ q(z_1, \ldots, z_n; W), (k = \overline{2,n}),$$

(6.3.1) где $\mathrm{f} \in \mathrm{RA}(\overline{\Pi}_{\mathrm{n}}), \mathrm{W} \in \mathrm{RA}(\Pi^{(0)}_{\mathrm{n+1}}), \mathrm{p,q} -$ являются аналитическими по всем переменным. Выполняя аналитическое продолжение по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k, преобразуем систему (6.3.1) к виду

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{f_1(z_1, \varsigma_1, \ldots, z_n, \varsigma_n)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m}\ p(z_1, \ldots, z_n; W), \frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = \frac{f_k(z_1, \varsigma_1, \ldots z_n, \varsigma_n)}{(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})} q(z_1, \ldots, z_n; W), (k = \overline{2,n}). \quad (6.3.2)$$

Условие совместности системы (6.3.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \varsigma_k}\left(\frac{f_1}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m}\right) p - \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{f_k}{(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m}\right) q + \frac{f_1 f_k (q\, p'_W - p\, q'_W)}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m (\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m} = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \varsigma_i}\left(\frac{f_k}{(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m}\right) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_k}\left(\frac{f_i}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m}\right), (i, k = \overline{2,n}), i \neq k. \end{aligned} \quad (\mathrm{N}_{31})$$

Для условий (N_{31}) сможем рассматривать в нескольких случаев:

а) Пусть в (N_{31}) будут выполнены

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \varsigma_k}\left(\frac{f_1}{(\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m}\right) = 0, \frac{\partial}{\partial \varsigma_1}\left(\frac{f_k}{(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m}\right) = 0, q\, p'_W - p\, q'_W = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial \varsigma_i}\left(\frac{f_k}{(\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_k}\left(\frac{f_i}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m}\right) = 0, i \neq j, (i, j = \overline{2,n}). \end{aligned}$$

Тогда из этих соотношений будем иметь

$$\begin{cases} f_1 \equiv (\varsigma_1 - \varsigma_1^{(0)})^m a_1(z_1, \varsigma_1, z_2, \ldots, z_n), \quad f_k \equiv (\varsigma - \varsigma_k^{(0)})^m a_k(z_1, z_2, \varsigma_2, \ldots z_n, \varsigma_n), (k = \overline{2,n}) \\ q(z_1, z_2, \ldots z_n; W) = \lambda\, p(z_1, z_2, \ldots z_n; W), \quad \lambda = const. \end{cases}$$

(6.3.3)

При этом система (6.3.3) преобразуется в регулярной системе вида (5.11.8);

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = a_i(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,\ldots,z_n,\varsigma_n)\,p(z_1,z_2,\ldots,z_n;W)\text{ , }i=1,2,\ldots,n. \quad (6.3.4)$$

По первому предположению, вторая часть условии (N_{31}) выполняются, поэтому в результате интегрирования системы (6.3.4), и переходя к предыдущим переменным, будем иметь

$$\mathrm{W}(z_1,\bar{z}_1,\ldots,z_n,\bar{z}_n) =$$
$$= \mathrm{P}^{-1}\left\{z_1,\ldots z_n;\Phi(z_1,\ldots,z_n)+\int_0^{\bar{z}_1}\mathrm{a}_1(z_1,t_1,z_2,\ldots z_n)dt_1+\lambda\sum_{k=2}^{n}\int_0^{\bar{z}_k}\mathrm{a}_k(z_1,z_2,0,\ldots,z_k,t_k,\ldots,z_n,\bar{z}_n)dt_k\right\}.$$

(6.3.5)

б) Допустим, что в условии (N_{31}) функция f_1 - считается конкретно заданной функцией, и выполняются следующие соотношения;

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_k}\left(\frac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right)=\frac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\frac{f_k}{(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m}\right),\ q\,p'_W-p\,q'_W\neq 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial\varsigma_j}\left(\frac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\right)=\frac{\partial}{\partial\varsigma_i}\left(\frac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\right),\ (i,j=\overline{2,n})\,..$$

Тогда первые $(n-1)$ - равенств из C_n^2 -соотношений в (N_{31}) выполняются во всех точках данной области $\bar{I}_n$, кроме точек $\varsigma_i=\varsigma_i^{(0)}$ $(i=\overline{1,n})$, если

$$q(z_1,z_2,\ldots,z_n;W)=\left[1+\exp\left(-\lambda P(z_1,z_2,\ldots,z_n;W)\right)\right]p(z_1,z_2,\ldots,z_n;W)$$
$$f_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,\ldots,z_n,\varsigma_n)=g_k(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,\ldots,z_n,\varsigma_n)\exp\left[-F_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_2,\ldots,z_n,\varsigma_n)\right],$$

(6.3.6)

где $P(z_1,z_2,\ldots,z_n;W)=\int_0^W\frac{d\tau}{p(z_1,\ldots,z_n;\tau)}$, $F_1(z_1,\varsigma_1,\ldots,z_n,\varsigma_n)=\int_0^{\varsigma_1}\frac{f_1(z_1,t_1,\ldots,z_n,\varsigma_n)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m}dt_1$.

Если во втором интеграле применять теорему вычетов, то получим непрерывную функцию $F_1(z_1,\varsigma_1,\ldots,z_n,\varsigma_n)=\frac{2\pi i}{(m-1)!}\lim_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left(\frac{\partial^{m-1}f_1}{\partial\varsigma_1^{m-1}}\right)$.

Подставляя значения функций $f_k(z_1,...,\varsigma_n)$, $q(z,...,z;W)$ из (6.3.6) в системе (6.3.4), получаем такую систему, для которой условия (N_{31}), будут выполнены тождественно, и многообразия её решений, после перехода к прежним переменным определяется формулой

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,...,\mathrm{z}_\mathrm{n},\bar{\mathrm{z}}_\mathrm{n}) = \\ = \mathrm{P}^{-1}\left\{\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,...\mathrm{z}_\mathrm{n};\mathrm{F}_1(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,...,\mathrm{z}_\mathrm{n},\bar{\mathrm{z}}_\mathrm{n})+\frac{1}{\lambda}\ln\left[\Phi(\mathrm{z}_1,...,\mathrm{z}_\mathrm{n})+\varsigma\,\omega(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2,...,\mathrm{z}_\mathrm{n},\varsigma_\mathrm{n})\right]\right\} \quad (6.3.7)$$

Теорема 3.20. *Пусть в п.о.с.К.-Р. вида (6.3.1)* $f_k \in RA(\bar{I}_n), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1})$, $p,q \in A(\ddot{I}_{n+1})$. *Если для системе (6.3.2) выполняются условии леммы), а также условии (N_{31}) выполняются, но не тождественно, то данная система имеет лишь некоторые частные решения, либо не совместна. Для того чтобы условия (N_{31}) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функции* $f_i, p, q,$ *- определялись формулами вида (6.3.3) и (6.3.6). Тогда система (6.3.1) разрешима явно и многообразие её решений определяются явными формулами (6.3.5) и (6.3.7). Причем решение системы вида (6.3.5) во всей области предсталяющиеся непрерывным, а по формуле вида (6.3.7) в* $\ddot{I}^{(0)}_{n+1}$ *- непрерывно, в точке вырождения* $\bar{z}_1 = \bar{z}_1^{(0)}$ *- имеет особенности* $(m-1)-$ *го порядка.*

3.6.4. Будем рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f_1(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^{(0)})^m}\,p(z_1,z_2,\bar{z}_2,...,z_n,\bar{z}_n;W), \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = \frac{f_k(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n;W)}{(\bar{z}_k-\bar{z}_k^{(0)})^m}, (k=\overline{2,n}), \quad (6.4.1)$$

где $f_1, f_k, p \in RA(\bar{I}_n)$, $W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1})$, $m \geq 0$, p, $f_k -$аналитические функции по переменной W. Выполняя аналитическое продолжение по каждым

переменным $\bar{z}_k$ на ς_k, для всех значений $k=\overline{1,n}$, преобразуем систему (6.4.1) следующим образом;

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=\frac{f_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\,p(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;W),\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}=\frac{f_k(z_1,z_{2.},\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;W)}{(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m},(k=\overline{2,n}).$$

(6.4.2)

Если для системы (6.4.2) в случаи ограниченности $\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}$, выполняются условий $\lim\limits_{\varsigma_k\to\varsigma_k^{(0)}}\left((\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k}\right)=0$, (**M₀**) то из исходной системы будем иметь

$$f_1(z_1,\varsigma_1^{(0)},z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)=f_{01}=0,\quad p(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_k,\varsigma_k^{(0)},...,z_n,\varsigma_n;W)=0,$$
$$f_k(z_1,\varsigma_1,...,z_k,\varsigma_k^{(0)},...,z_n,\varsigma_n;W)=0\,,(k=\overline{2,n}).$$

В силу предыдуих соотношений необходимо, получим:

$W=h_1(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n),W=h_k(z_1,\varsigma_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z,\varsigma_n),(k=\overline{2,n})$. Эти найденные нами функции будут лишь частными, либо особыми решениями системы (6.4.2). Допустим, что в системе (6.4.2) функции в правой части первого уравнения системы считаются заданными. При этой требовании, условия совместности данной системы выполняются тождественно, тогда и только, тогда, когда функции $f_k(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W),(k=\overline{2,n})$ принимают следующий вид:

$$f_k(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)=$$
$$=(\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)})^m\left\{\frac{\partial(F_1-P)}{\partial \varsigma_k}+q_k\left[z_1,..z_k,\varsigma_k,...,z_n,\varsigma_n;P(...)-F_1(...)\right]\right\}p(z_1,...;W)\,. \qquad (6.4.3)$$

В процессе интегрирования первого уравнения системы (6.4.2), сделаем замену

$$P(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;W)-F_1(z_1,\varsigma_1,z_2,\varsigma_n,...,z_n,\varsigma_n)=V(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)\,, \qquad (6.4.4)$$

где $V(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)-$ новая неизвестная функция, а

$$P(z_1,z_2,\varsigma_2,...,\varsigma_n;W)=\int_0^W\frac{d\tau}{p(z_1,...,\varsigma_n;\tau)},\ F_1(z_1,\varsigma_1,z_2,...,z_n,\varsigma_n)=\int_0^{\varsigma_1}\frac{f_1(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m}dt_1$$

.

Дифференцируя обе части (6.4.4) по всем переменным ς_k $(k=\overline{2,n})$, подставим их результат в уравнения системы (6.4.2), тогда имеем регулярную систему вида

$$\frac{\partial V}{\partial\varsigma_k}=q_k(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;V),\quad (k=\overline{2,n}). \qquad (6.4.5)$$

По первому взгляду в системе (6.4.5) заметим, что правые части её уравнений аналитические по всем своим переменным, а их условия совместности выполняются тождественно (с учёта соотношений (6.4.3)). Поэтому интегрируя её, получим

$$\mathrm{V}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\varsigma_2,...,\mathrm{z}_n,\varsigma_n)=\Phi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,...,\mathrm{z}_n)+\mathrm{H}[\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\varsigma_2,...,\mathrm{z}_n,\varsigma_n].$$

Подставляя значения $V(z_1,z_2,....,z_n,\varsigma_n)$ из последнего соотношения в (6.4.4), и переходя к прежним переменным, будем иметь;

$$\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,...,\mathrm{z}_n,\bar{\mathrm{z}}_n)=$$
$$=\mathrm{P}^{-1}\{\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2,...,\mathrm{z}_n,\bar{\mathrm{z}}_n;\mathrm{F}_1(\mathrm{z}_1,\bar{\mathrm{z}}_1,...\mathrm{z}_n,\bar{\mathrm{z}}_n)+\Phi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,...\mathrm{z}_n)+\mathrm{H}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\bar{\mathrm{z}}_2,...,\mathrm{z}_n,\bar{\mathrm{z}}_n)\}.$$

(6.4.6)

Теорема 3.21. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (6.4.1)* f_1, f_k, $p\in RA(\bar{I}_n)$, $W\in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1})$, $(k=\overline{2,n}), m\ge 0$. *Если для системы (6.4.2) выполняются условия (M_0) и её условия совместности выполняются, но не тождественно, тогда существуют только лишь некоторые частные решения системы. Для того, чтобы условия совместности системы выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $f_k(z_1,\varsigma_1,z_2,...,z_n,\varsigma_n;W)$ *определялись формулами вида (6.4.3). Если система вида (6.4.5) имеет определённого вида решения, то исходная система также разрешима и многообразия её решений определяемое*

формулой (6.4.6), в точке $\varsigma_1 = \varsigma_1^{(0)}$ *имеет особенности* $(m-1)$*- го порядка, а остальные особые точки в системе устраняются.*

Замечание.1. Если считать, что в системе (6.4.2) функции f_1, f_k, p являются аналитическими по всем переменным в области ($\ddot{I}^{(0)}_{n+1}$), то в этой системе $\varsigma_i = \varsigma_i^{(0)}, (i = \overline{1,n})$ будут считаться особыми точками на данной области . Поэтому к интегралам можно применять теорему вычетов. При этом, функция

$$F_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n) = \int_L \frac{f_1(z_1,t_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m} dt_1 = \frac{2\pi i}{(m-1)!} \lim_{\varsigma_1 \to \varsigma_1^{(0)}} \left(\frac{\partial^{m-1} f_1}{\partial \varsigma_1^{m-1}} \right)$$

на данной области остаётся непрерывной. Этот результат влияет на непрерывность решений системы, всюду в замкнутой области $\bar{I}_{2n+1}$.

Замечание 2. Если в п.о.с.К.-Р. (6.4.2) $m=1$ и выполняются все условии, указанные в теореме 3.14, то решение системы во всей данной области будет непрерывным.

3.6.5. Будем рассматривать п.о.с.К.-Р.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_i} = \dfrac{f_i(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_i - \bar{z}_i^{(0)})^m}\ p(z_1,...,z_k,z_{k+1},\bar{z}_{k+1}...z_n,\bar{z}_n;W), (i=\overline{1,k}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{f_j(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n;W)}{(\bar{z}_j - \bar{z}_j^{(0)})^m}, (j=\overline{k+1,n}) \end{cases} \qquad (6.5.1)$$

где $f_i, f_j, p \in RA(\bar{I}_n), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1}), m \geq 0$. Выполняя аналитические продолжения в системе (6.5.1), заменой переменных $\bar{z}_j$ $(j=\overline{1,n})$ на ς_j, преобразуем систему следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = \dfrac{f_i(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m}\ p(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;W), (i=\overline{1,k}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_j} = \dfrac{f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m}, (j=\overline{k+1,n}). \end{cases} \qquad (6.5.2)$$

Допустим, что для системы (6.5.2) выполняются все условия (M_0), то есть

$\lim\limits_{\varsigma_k \to \varsigma_k^{(0)}} \left((\varsigma_k - \varsigma_k^{(0)})^m \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_k} \right) = 0, (k = \overline{1,n})$, тогда из правых частей уравнений системы (6.5.2) будем иметь:

$$f_i(z_1, \varsigma_1^{(0)}, ..., z_n, \varsigma_n^{(0)}) = f_{0i} = 0, (i = \overline{1,k})$$

$$p(z_1, ..., z_k, z_{k+1}, \varsigma_{k+1}^{(0)}, ..., z_n, \varsigma_n^{(0)}; W) = 0,\ f_j(z_1, \varsigma_1^{(0)}, ..., z_n, \varsigma_n^{(0)}; W) = 0, (j = \overline{k+1, n}).$$

Из этих $(n+1)$ - соотношений, получаем: $f_{0i} = 0, W = h_{j+1}(z_1, z_2, ..., z_n)$. Эти найденные функции возможно будут только лишь частными, либо особыми решениями исходной системы.Условиями совместности системы (6.5.2) будут:

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_i}\left(\frac{f_s}{(\varsigma_s - \varsigma_s^{(0)})^m}\right) = \frac{\partial}{\partial \varsigma_s}\left(\frac{f_i}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m}\right), (i, s = \overline{1,k}), i \neq s,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_i}\left(\frac{f_j(z_1, ..., W)}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m}\right) + \frac{f_i \cdot p}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m} \frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{f_j}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m}\right) = \frac{f_i \cdot p'_W}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m} \frac{f_j}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m} +$$

$$+ \frac{1}{(\varsigma_i - \varsigma_i^{(0)})^m}\left(p \frac{\partial f_i}{\partial \varsigma_j} + f_i \frac{\partial p}{\partial \varsigma_i}\right), (i = \overline{1,k}), (j = \overline{k+1, n}) \qquad (\text{N}_{32})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varsigma_j}\left(\frac{f_r}{(\varsigma_r - \varsigma_r^{(0)})^m}\right) + \frac{f_j}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m} \frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{f_r}{(\varsigma_r - \varsigma_r^{(0)})^m}\right) - \frac{\partial}{\partial \varsigma_r}\left(\frac{f_j}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m}\right) -$$

$$- \frac{f_r}{(\varsigma_r - \varsigma_r^{(0)})^m} \frac{\partial}{\partial W}\left(\frac{f_j}{(\varsigma_j - \varsigma_j^{(0)})^m}\right) = 0, (r, j = \overline{k+1, n}), r \neq j.$$

Допустим, что условия совместности *(N_{32})*- выполняются, но не тождественно, тогда из этих $C_n^2 = 0{,}5n(n-1)$ соотношений сможем найти функций $W = h_k(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n)$, $(k = \overline{1,n})$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (6.5.2), тогда она будет частным решением системы. В противном случае, система (6.5.2) не совместна. Прежде всего, допустим, что в системе (6.5.2) функции $f_i(...), \quad p -$ считаются вполне определёнными функциями. Для того, чтобы условия совместности *(N_{22})* выполнялись тождественно,

необходимо и достаточно, чтобы функции $f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)$ определялись следующими видами:

$$f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)=(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varsigma_j}-\frac{\partial P}{\partial\varsigma_j}\right)p(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;W)+ \quad (6.5.3)$$

$$+(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m g_j[z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,\varsigma_n;P(z_1,...,z_n,\varsigma_n;W)-\omega(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)]\,p(z_1,...;W).$$

Допустим, что первая часть из условий *(N_{22})* выполняются, тогда интегрируя первую группу уравнений системы (6.5.2) по переменным ς_i, считая остальные переменные постоянными параметрами, получим:

$$P(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;W)-\omega(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)=V(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n),$$

(6.5.4)

где $\frac{\partial\omega}{\partial\varsigma_i}=\frac{f_i(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m},\ (i=\overline{1,k})$, $V=V(z_1,z_2,...,z_n,\varsigma_n)$- новая неизвестная функция. Дифференцируя обе части (6.5.4) по переменным ς_j $(j=\overline{k+1,n})$, учитывая формулы (6.5.3), подставим их результаты в системе (6.5.2), тогда она принимает следующий регулярный вид:

$$\frac{\partial V}{\partial\varsigma_j}=g_j(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;V),\quad (j=\overline{k+1,n}). \quad (6.5.5)$$

Если считать, что правые части уравнений системы (6.5.5) являются регулярными и аналитическими в по $(2n-k+1)$ переменным ς_j $(j=\overline{k+1,n})$, то интегрируя последнюю систему, будем иметь

$$V(z_1,...,z_n,\varsigma_n)=\Phi(z_1,...,z_n)+H(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n).$$

Далее, подставляя значение функции *V(...)* из последнего соотношения в равенстве (6.5.4), и переходя к прежним переменным, получим многообразие решений системы (6.5.1) следующей формулой:

$$W(z,z,...,z,z)= \quad (6.5.6)$$

$$=P^{-1}\left[z_1,..z_k,z_{k+1},\bar{z}_{k+1},...,z_n,\bar{z}_n;\Phi(z_1,...,z_n)+\omega(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)+H(z_1,...,z_k,z_{k+1},\bar{z}_{k+1},...,z_n,\bar{z}_n)\right].$$

Теорема 3.22. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (6.5.1)* $f_i, f_j, p \in RA(\bar{I}_n), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1})$, *p,* f_j – *аналитические функции по переменной W. Если в каждых уравнениях системы (6.5.2), их правые части удовлетворяют условию* (M_0), *а также условия совместности* (N_{22}) *выполняются, но не тождественно, то исходная система имеет только частное решение. Для того, чтобы условия* (N_{22}) *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $f_j(z_1, z_2, ..., z_n, \varsigma_n; W)$ *определялись формулами вида (6.5.3). Если регулярная система уравнений (6.5.5) имеет определённого вида решения, тогда исходная система также разрешима и многообразие её решений определяется явной формулой (6.5.6). Если функция* $\omega(z_1, ..., \varsigma_n)$ *удовлетворяет всем указанным условиям, то решение системы вида (6.5.2) во всей области будет непрерывным. Если в (6.5.4) считать функцию* $\omega(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n)$ *аналитической по всем аргументам функции* $f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n)$, *то точки* $\varsigma_i = \varsigma_i^{(0)}$ *под интегралами считаются особыми порядка* m.

Замечание. Если в п.о.с.К.-Р. (6.5.1) считать, что $i = 1$, либо $(i = \overline{1, n-1})$, то условии теоремы 3.15 верна и в этих случаях.

§ 3.7. О представлении решений одного вида нелинейных п.о.с.К.-Р

В этой главе работы рассматривается система нелинейных и квазилинейных дифференциальных уравнений произвольного числа независимых переменных.

7.1. Будем рассматривать п.о.с.К.-Р. следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \dfrac{f_1(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^m} W + \dfrac{q_1(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n)}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_1^{(0)})^m} W^k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{f_j(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n; W)}{(\bar{z}_j - \bar{z}_j^{(0)})^m}, (j = \overline{2, n}) \end{cases} \qquad (7.1.1)$$

где $f_1, q_1, f_j \in RA(\bar{I}_n), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1}),$ $f_j -$ аналитические функции по переменной W. Выполняя аналитические продолжения в системе (7.1.1),имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \dfrac{f_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m} W + \dfrac{q_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m} W^k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_j} = \dfrac{f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}, (j=\overline{2,n}). \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Если в системе (7.1.2), в случаи ограниченности частные производные искомой функции W по каждым переменным выполняются вся условий (M_0), то есть $\lim\limits_{\varsigma_1\to\varsigma_1^{(0)}}\left((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m\cdot\dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_1}\right)=0,$ $\lim\limits_{\varsigma_j\to\varsigma_j^{(0)}}\left((\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m\cdot\dfrac{\partial W}{\partial\varsigma_j}\right)=0, (j=\overline{2,n}),$ то аналогично [43]- [46] , в случаи ограниченности W'_{ς_1} из системы (7.1.2) необходимо имеем: $f_{01}=0, q_{01}=0, W=0, f_j(z_1,\varsigma_1,..z_n,\varsigma_n;W)=0.$ Из этих соотношений получаем частные решения системы $W=0,$ $W=h_j(z_1,z_2,...,z_n),(j=\overline{2,n}).$ Тем самым, не решая систему, определим поведение системы в особых точках системы. Если в системе (7.1.2) данные функции удовлетворяют условию малости: $f_1=o((\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^{m-\lambda}),$ $f_j=o((\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^{m-\lambda}), q_1=o((\varsigma_1-\varsigma_j^{(0)})^{m-\lambda}), (0\le\lambda<1),$ то при выполнении условия совместности системы (7.1.2), найдём непрерывное решение системы во всей области. В области задания функции $\overline{\Pi}_{2n+1}:\{|\varsigma_k-\varsigma_k^{(0)}|\le a, |W|\le b\},$ условием совместности системы будет записываться следующими формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_1}\left(\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\right)+\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}W+\dfrac{q_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}W^k\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})}\right)= \\ =\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}+\dfrac{k\,q_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}W^{k-1}\right)\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}+\dfrac{\partial}{\partial\varsigma_j}\left(\dfrac{f_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right)W+\dfrac{\partial}{\partial\varsigma_j}\left(\dfrac{q_1}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\right)W^k \\ \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_j}\left(\dfrac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\right)+\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\right)=\dfrac{\partial}{\partial\varsigma_i}\left(\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\right)+ \\ +\dfrac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\right),(i,\,j=\overline{2,n}\,,\,i\neq j) \end{cases} \quad (N_{32}\,)$$

Допустим, что условия (N_{32}) выполняются, но не тождественно, тогда из этих соотношений имеем $W=h_i(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n),(i=\overline{1,C_n^2})$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (7.1.2), то оно возможно будет только лишь частным решением системы . Допустим, что в системе (7.1.2) функции f_1,q_1 считаются заданными функциями. Условия (N_{32}) будут выполнятся тождественно тогда и только тогда, когда функции $f_j(...)$ принимают вид:

$$f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)=(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m\frac{\partial F_1}{\partial\varsigma_j}W+ \tag{7.1.3}$$

$$+\frac{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}{1-k}\left\{\frac{\partial Q_1}{\partial\varsigma_j}+g_j\left[z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;\exp\big((k-1)F_1\big)W^{1-k}-Q_1(...)\right]\right\}\exp\big((1-k)F_1\big)W^k,(j=\overline{2,n})$$

$$F_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)=\int_L\frac{f_1(z_1,t_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m}dt_1,$$

$$Q_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)=\int_L\frac{q_1(z_1,t_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(t_1-\varsigma_1^{(0)})^m}\exp\{(k-1)F_1(z_1,t_1,...,z_n,\varsigma_n)\}dt_1.$$

Так как функции $f_j(z_1,...,\varsigma_n)$ вида (7.1.3) обеспечат тождественного выполнения условий (N_{32}), причём в системе устраняются особые точки $\varsigma_i=\varsigma_i^{(0)}$, поэтому, в начале, интегрируем первое уравнение системы (7.1.2) попервой переменной:

$$\exp\{(k-1)F_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)\}W^{1-k}-Q_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)=V(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)\,. \tag{7.1.4}$$

Дифференцируя обе части соотношении (7.1.4) по переменным ς_j $(j=\overline{2,n})$, подставим их значения в системе (7.1.2) и получим систему вида

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_j} = g_j(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; V), (j=\overline{2,n}). \qquad (7.1.5)$$

Тогда вторая часть равенств из *(N_{32})* , как условий совместности системы (7.1.5) принимает следующий вид

$$\frac{\partial g_i}{\partial \varsigma_j} + g_j \frac{\partial g_i}{\partial V} - \frac{\partial g_j}{\partial \varsigma_i} - g_i \frac{\partial g_j}{\partial V} = 0, (i \neq j,\ i, j=\overline{2,n}). \qquad (\mathrm{N}_{33})$$

Если для системы (7.1.5) условий *(N_{33})* выполняются тождественно, тогда , интегрируя систему (7.1.5), будем иметь:

$$\mathrm{V}(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n) = \Phi(z_1, z_2, ..., z_n) + \mathrm{H}(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n).$$

Подставляя значение функции $V(z_1,...,\varsigma_n)$ в равенстве (7.1.4), а затем переходя к прежним переменным, получим

$$W(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n) =$$
$$= \exp\{F_1(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n)\}\left[Q_1(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n) + H(z_1, z_2, \bar{z}_2, ..., z_n, \bar{z}_n) + \hat{O}(z_1, .z.., z_n)\right]^{1/(1-k)}.$$

(7.1.6)

Теорема 3.19. *Допустим, что в п.о.с.К.-Р. (7.1.1)* $f_1, f_j, q_1 \in RA(\ddot{I}_n)$, $W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{n+1})$, $m \geq 0, k \geq 0$. *Если для системы (7.1.2) выполняются условия (M_0), а также условии совместности (N_{32}) выполняются, но не тождественно, то система может иметь некоторые частные решения. Если функции* f_i, q_1, f_1- *удовлетворяют условию малости, то при тождественном выполнении условии (N_{33}) решение системы во всей области будет непрерывным. Если считать, что указанные функции в области* $\overline{\Pi}_{n+1}$ *являются аналитическими, то функции* $F_1(...), Q_1(...)$ *и решение системы во всей области будут непрерывными. Если же указанные условия не выполняются, то решение*

системы (7.1.1) во всех точках $\Pi_{n+1}^{(0)}$ *является непрерывным, а в точке* $\bar{z}_1 = \bar{z}_1^{(0)}$ *имеет особенности* $(m-1)$ *-го порядка. Причём полученное решение системы, формулой (7.1.6) во всей области является многозначным.*

Замечание. *Если в системе (7.1.1)* $m=1$ *и выполняются условия (M₀), а также условия совместности системы выполняются тождественно, то полученное решение системы вида (7.1.1), во всей области будет непрерывным.*

3.7.2. В этой части темы будем рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_i} = \dfrac{f_i(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_i-\bar{z}_i^{(0)})^m}W + \dfrac{q_i(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n)}{(\bar{z}_i-\bar{z}_i^{(0)})^m}W^l,\ (i=\overline{1,k}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial \bar{z}_j} = \dfrac{f_j(z_1,\bar{z}_1,...,z_n,\bar{z}_n;W)}{(\bar{z}_j-\bar{z}_j^{(0)})^m},\ (j=\overline{(k+1),n}) \end{cases} \qquad (7.2.1)$$

где $f_i, f_j, q_i \in RA(\ddot{I}_n), W \in RA(\ddot{I}_{n+1}^{(0)}), m \geq 0, l$ – произвольное рациональное число. Аналогично предыдущим пунктам, выполняя аналитические продолжения переменных $\bar{z}_k$ на новым переменным ς_k $(k=\overline{1,n})$, преобразуем данную систему в следующем виде;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = \dfrac{f_i(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}W + \dfrac{q_i(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}W^l,(i=\overline{1,k}) \\ \dfrac{\partial W}{\partial \varsigma_j} = \dfrac{f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m},(j=\overline{(k+1,n)}). \end{cases} \qquad (7.2.2)$$

Если для системы (7.2.2) требовать выполнении условии (M_0), то из $f_{0i}=0, q_{0i}=0, W=0,\ f_j(z_1,\varsigma_1^{(0)},...,z_n,\varsigma_n^{(0)};W)=0$, получим: $W=0,$ и $W=h_r(z_1,z_2,...,z_n),(r=\overline{1,n})$, которые возможно будут частными решениями системы. Если в системе, функции f_i, f_j, q_i - удовлетворяют условию малости, то при тождественном выполнении условия совместности системы,

многообразия её решений находится и оно непрерывно. Условия совместности системы (7.2.2) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} P_{ij}(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)W + Q_{ij}(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)W^l = 0,(i=\overline{1,k}),(j=\overline{(k+1,n)} \\ \dfrac{\partial}{\partial\varsigma_i}\left(\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\right)+\left(\dfrac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}W+\dfrac{q_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}W^l\right)\dfrac{\partial}{\partial W}\left(\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}\right)= \\ =\left(\dfrac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}+\dfrac{l\,q_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}W^{l-1}\right)\dfrac{f_j}{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}+\dfrac{\partial}{\partial\varsigma_j}\left(\dfrac{f_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\right)W+\dfrac{\partial}{\partial\varsigma_j}\left(\dfrac{q_i}{(\varsigma_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\right)W^l. \end{cases} \quad (N_{34})$$

В этих формулах, из первой группы можно найти $W=0, W=[H(z_1,\varsigma_1,..z_n,\varsigma_n)]^{1/(l-1)}$ а также из второй группы равенств имеем $W=h_s(z_1,\varsigma_1,..z_n,\varsigma_n),(s=1,2,...)$. Если из этих найденных W_i хотя бы одна функция удовлетворяет систему (7.2.2), то она будет только лишь частным решением системы. В противном случае, ни одна из этих найденных функций, не будет решением системы. Допустим, что в первой группе уравнений системы (7.2.2) f_i, q_i - считаются вполне определёнными функциями. Тогда для тождественного выполнения второй группы условий совместности, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)$, $(j=\overline{(k+1),n})$ были представлены следующим образом:

$$f_j(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W)=(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m\frac{\partial\omega_1}{\partial\varsigma_j}W+ \quad (7.2.3)$$

$$+\frac{(\varsigma_j-\varsigma_j^{(0)})^m}{1-l}\left\{\frac{\partial\omega_2}{\partial\varsigma_2}+g_j\left[z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;\exp\big((k-1)\omega_1\big)W^{1-l}-\omega_2\right]\right\}\exp\big((1-k)\omega_1\big)W,^l$$

а также

$$\omega_1(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)=\sum_{i=1}^{k}\int_L\frac{f_i(z_1,\varsigma_1^{(0)},...,z_i t_i,...,z_k,\varsigma_k)}{(t_i-\varsigma_i^{(0)})^m}dt_i$$

$$\omega_2(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n)=(1-l)\sum_{i=1}^{k}\int_L\frac{q_i(z_1,\varsigma_1^{(0)},...,z_i,t_i,...,z_n,\varsigma_n)}{(t_i-\varsigma_i^{(0)})^m}\exp\{(k-1)\omega_1(z_1,...,t_i,..\varsigma_n)\}dt_i. \quad (7.2.4)$$

Если считать, что в области $\bar{I}_{n+1}$ функции f_j, ω_1, ω_2 - относительно своих аргументов являются аналитическими, то последние два интеграла по теореме вычетов можно вычислить, эти интегралы существуют, и непрерывны. Так как при значении функции $f_j(...)$ из (7.2.4) условия *(N_{34})* выполняются тождественно. Интегрируя первые (k) уравнений системы (7.2.2) по переменным $\varsigma_1,...,\varsigma_k$, а остальные считая параметрами, имеем:

$$W(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n) = \exp(\omega_1(z_1,...))\times$$
$$\times\left[V(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n)+(1-k)\omega_2(z_1,...,z_n,\varsigma_n)\right]^{1/(1-l)}. \quad (7.2.5)$$

Дифференцируя обе части формулы (7.2.5) по переменным $\varsigma_{k+1},...,\varsigma_n$ подставим результаты в системе (7.2.2), и получим систему

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_j} = g_j(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n;V). \quad (7.2.6)$$

Интегрируя систему (7.2.6), будем иметь

$$V(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n) = \Phi(z_1,...,z_n) + H(z_1,...,z_k,z_{k+1},\varsigma_{k+1},...,z_n,\varsigma_n). \quad (7.2.7)$$

Далее, подставляя значению *V(...)* из (7.2.7) в (7.2.5), и переходя к прежним переменным, получаем многообразие решений исходной системы следующей формулой

$$W(z_1,..,\bar{z}_n) = \exp\{\omega_1(...)\}\left[\Phi(z_1,...,z_n) + H(z_1,...,z_n,\bar{z}_n) + (1-k)\omega_2(z_1,...,z_n,\bar{z}_n)\right]^{1/(1-l)}$$

.(7.2.8)

Если в п.о.с.К.-Р. (7.2.2) функций f_i, f_j, q_i - удовлетворяют условий (M_0), условии малости, а также когда к интегралам в функции ω_1, ω_2 применять теорему вычетов, тогда полученные решения системы формулой вида (7.2.2) во всей области будут непрерывными и выполняются условия теоремы 3.20.

§ 3.8. Представление решений некоторых п.о.с.К.-Р. с однородными функциями

3.8.1. Рассмотрим п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f_1(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n; W),\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_i} = f_i\left(z, z, ..., z, z; W / \bar{z}_1\right),\quad (i = \overline{2,n}) \qquad (8.1.1)$$

где $f_1, f_i \in RA(\overline{\Pi}_n),\ W \in RA(\Pi^{(0)}_{n+1}), f_1, f_i$ – аналитические функции по переменной W, причём функция f_1 - однородная нулевого порядка по двум переменным $\bar{z}_1, W$ [272]-[278]. Выполняя аналитические продолжения по переменным $\bar{z}_k$ на новые переменные ς_k $(k = \overline{1,n})$, преобразуем её в следующей системе

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = f_1(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; W), \frac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; W / \varsigma_1).$$

В последней системе производя замену вида $W = \varsigma_1 V$, получаем новую систему

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_1} = \frac{1}{\varsigma_1}\left(f_1(z_1, 1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; V) - V\right),\quad \frac{\partial V}{\partial \varsigma_i} = \frac{1}{\varsigma_1} f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; V),\ (i = \overline{2,n}). \qquad (8.1.2)$$

Как известно [278], для непрерывности решения системы (8.1.2), необходимо, чтобы для этой системы выполнялись условия (M_0), то есть $\lim\limits_{\varsigma_1 \to 0}\left(\varsigma_1 \frac{\partial V}{\partial \varsigma_j}\right) = 0,\ (j = \overline{1,n})$. Тогда из правых частей уравнений системы (8.1.2), имеем $V = f_j(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n), (j = 1,2,...)$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет первое уравнение системы, то она будет только частным решением системы. Для того, чтобы существовало многообразия решений системы необходимо и достаточно, чтобы функций $f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; V)$ при всех значениях $(i = \overline{2,n})$ определялись следующими формулами:

$$f_i(z_1,...,\varsigma_n;V) =$$

$$= \varsigma_1\left\{g_i[z_1,...,z_n,\varsigma_n;F_1(z_1,z_2,\varsigma_2,...,\varsigma_n;V)-\ln\varsigma_1]-\frac{\partial F_1}{\partial\varsigma_i}\right\}[f_1(z_1,1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;V)-V], \quad (8.1.3)$$

где $F_1(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;V)=\int_0^V\frac{d\tau}{f_1(z_1,1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;V)-V}$, $(f_1\neq V)$, g_i – вполне определённые функции, либо произвольные функции. Легко заметить, что при значениях функции $f_i(z_1,...,\varsigma_n;V)$ из (8.1.3) условия совместности системы (8.1.2) выполняются тождественно, поэтому интегрируя первого уравнения системы по переменной ς_1, а остальные аргументы считая параметрами, получим:

$$F_1(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n;V)-\ln\varsigma_1=V(z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\varsigma_n)\ .$$

(8.1.4)

Дифференцируя обе части (8.1.4) по всем переменным ς_i $(i=\overline{2,n})$, подставим их значения в системе (8.1.2). В результате, получим систему вида (8.1.2). При этом, получим, что решение системы (8.1.2), а затем после перехода к прежним переменным, решение исходной системы определяется следующей формулой

$$\mathrm{W}(z_1,\bar z_1,...,z_n,\bar z_n)=\bar z_1\mathrm{F}_1^{-1}[z_1,z_2,\varsigma_2,...,z_n,\bar z_n;\ln\bar z_1+\mathrm{H}(z_1,z_2,\bar z_2,...,z_n,\bar z_n)+\Phi(z_1,...,z_n)].$$

При этом, решение системы (8.1.1) во всей области $\ddot{I}^{(0)}_{n+1}$ является непрерывной, а в точки $\bar z_1=0$ имеет логарифмическую особенность. Если же считать, что в системе (8.1.2) все функции в правых частей её уравнений являются аналитическими, то учитывая $\int_L\frac{dt_1}{t_1}=2\pi i$, имеем, что решение исходной системы всюду в $\overline{\Pi}_{n+1}$ является непрерывным.

3.8.2. Будем рассматривать п.о.с.К.-Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial\bar z_1}=(\bar z_1)^{-k-1}f_1(z_1,\bar z_1^k,z_2,...,z_n,\bar z_1^k\cdot W),\quad \frac{\partial W}{\partial\bar z_i}=(\bar z_1)^{-k}f_i(z_1,\bar z_1,...,z_n,\bar z_n;\bar z_1^k\cdot W), \quad (8.2.1)$$

где $f_1, f_i \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in RA(\Pi^{(0)}_{n+1}), k \geq 1, (i = \overline{2,n})$. Для системы (8.2.1) выполняя аналитические продолжения по переменным $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = \overline{1,n})$, преобразуем её в следующем виде

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \varsigma_1^{-k-1} f_1(z_1, \varsigma_1^k, ..., z_n, \varsigma_1^k W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_i} = \varsigma_1^{-k} f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; \varsigma_1^k W). \qquad (8.2.2)$$

В системе (8.2.2) сделав замену вида $\varsigma_1^k W = V$, перепишем её следующим образом :

$$\frac{\partial V}{\partial \varsigma_1} = \frac{1}{\varsigma_1}\left(f_1(z_1, 1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; V) + kV\right), \quad \frac{\partial V}{\partial \varsigma_i} = f_i(z_1, \varsigma_1, ..., z_n, \varsigma_n; V). \qquad (8.2.3)$$

Условия (M_0) для системы (8.2.3) имеет вид $\lim\limits_{\varsigma_1 \to 0}\left(\varsigma_1 \frac{\partial V}{\partial \varsigma_j}\right) = 0, (j = 1,2,...,n)$. При этом система (8.2.3) возможно имеет некоторое частное решение.

Условия совместности системы (8.2.3) выполняются тождественно, тогда и только тогда, когда функции $f_i(z_1, ..., \varsigma_n; V)$ принимают вид:

$$f_i(z_1, ..., \varsigma_n; V) = \qquad (8.2.4)$$
$$= \left\{ g_i\left[z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; F_1(z_1, z_2, ..., \varsigma_n; V) - \ln \varsigma_1\right] - \frac{\partial F_1}{\partial \varsigma_i} \right\} [f_1(z_1, 1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; V) + kV],$$

где $F_1(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; V) = \int\limits_0^V \frac{d\tau}{f_1(z_1, 1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; \tau) + k\tau}$, $(f_1 \neq k\tau)$.

Проинтегрировав первое уравнение системы (8.2.3) по переменной ς_1, считая остальные переменные параметрами, получим:

$$F_1(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n; V) - \ln \varsigma_1 = \psi(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n). \qquad (8.2.5)$$

Дифференцируя обе части равенство (8.2.5) по переменным ς_i $(i = \overline{2,n})$, подставим их значения в системе (8.2.3), и получим систему вида (7.2.6). Условия совместности этой системы будут выполнены тождественно, следовательно, интегрируя эту систему аналогично предыдушим случаям, будем иметь следущую функцию

$$\psi(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n) = \hat{O}(z_1, ..., z_n) + H(z_1, z_2, \varsigma_2, ..., z_n, \varsigma_n).$$

При этом, многообразие решений исходной системы принимает следующий вид

$$W(z_1, \bar{z}_1, ..., z_n, \bar{z}_n) = \frac{1}{\bar{z}_1^k} F_1^{-1}\left[z_1, z_2, \bar{z}_2, ..., z_n, \bar{z}_n; \ln \bar{z}_1 + \Phi(z_1, ..., z_n) + H(z_1, z_2, \bar{z}_2, ..., z_n, \bar{z}_n)\right]$$

.(8.2.6)

Таким образом, нами получено, что решение исходной системы вида (8.2.6), почти всюду в области $\Pi_{n+1}^{(0)}$ является непрерывным, а в одной точке $\bar{z}_1 = 0, (z_1 = 0)$ имеет особенности порядка k.

Теорема 3.21. *Пусть в п.о.с.К.-Р. (8.2.1)* $f_1, f_i \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in RA(\Pi_{n+1}^{(0)}), k \geq 0$ *. Если условия (M_0) выполняются, а также условия совместности системы (8.2.2) выполняются, но не тождественно, тогда находится только лишь некоторые частные решения системы. Для того, чтобы условия совместности преобразованной системы (8.2.2) выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $f_i(z_1, ...; V)$ *имели вид (8.2.4). Если система вида (7.2.6) имеет решение, тогда исходная система также разрешима и многообразие её решений определяется формулой (8.2.6). Причём решение системы всюду в области* $\ddot{I}^{(0)}_{n+1}$ *является непрерывным, а в точке* $\bar{z}_1 = 0$ *имеет неустранимую особенность порядка* k.

3.8.3. Рассмотрим нелинейного п.о.с.К.- Р. вида

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f_1(z, \bar{z}; W), \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{f_2(z, \bar{z}; W)}{\bar{z}_1^m}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n} = \frac{f_n(z, \bar{z}; W)}{\bar{z}_{n-1}^m} \qquad (8.3.1)$$

где $f_k \in RA(\ddot{I}^{-}_{2}), W \in RA(\ddot{I}^{(0)}_{3}), z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ f_k – заданные аналитические по W функции, т.е. $\partial_{\overline{W}} f_k = 0, (k = \overline{1, n})$. Прежде чем решить систему (8.3.1),

выполняя алитические продолжения переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k=\overline{1,n})$, преобразуем систему (8.3.1) к виду:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1}=f_1(z,\varsigma;W),\frac{\partial W}{\partial \varsigma_2}=\frac{f_2(z,\varsigma;W)}{\varsigma_1^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \varsigma_n}=\frac{f_n(z,\varsigma;W)}{\varsigma_{n-1}^m}, \qquad (8.3.2)$$

где $f_k(z,\varsigma;W)=f_k(z_1,\varsigma_1,...,z_n,\varsigma_n;W),(k=\overline{1,n})$.

Условия совместности системы (8.3.2) имеет вид:

$$\begin{cases}
\frac{\partial f_1}{\partial \varsigma_2}+\frac{f_2}{\varsigma_1^m}\frac{\partial f_1}{\partial W}-\frac{\partial f_2}{\partial \varsigma_1}-\frac{f_1}{\varsigma_1^m}\frac{\partial f_2}{\partial W}+\frac{mf_2}{\varsigma_1^{m+1}}=0\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
\frac{\partial f_1}{\partial \varsigma_n}+\frac{f_n}{\varsigma_{n-1}^m}\frac{\partial f_1}{\partial W}-\frac{\partial f_n}{\partial \varsigma_1}-\frac{f_1}{\varsigma_{n-1}^m}\frac{\partial f_n}{\partial W}+\frac{mf_n}{\varsigma_{n-1}^{m+1}}=0\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
\varsigma_{j-1}^m\frac{\partial f_i}{\partial \varsigma_j}+\left(f_j\frac{\partial f_i}{\partial W}-f_i\frac{\partial f_j}{\partial W}\right)-\varsigma_{i-1}^m\frac{\partial f_j}{\partial \varsigma_i}=0,(i\neq j)i=1,2,...\\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\
\varsigma_k^m\frac{\partial f_k}{\partial \varsigma_{k+1}}+\left(f_{k+1}\frac{\partial f_{ki}}{\partial W}-f_k\frac{\partial f_{k+1}}{\partial W}\right)-\varsigma_{k-1}^m\frac{\partial f_{k+1}}{\partial \varsigma_k}+\frac{m\varsigma_{k-1}^m}{\varsigma_k}f_{k+1}=0,(k=1,2,\cdots).
\end{cases} \qquad (N_{35})$$

Допустим, что условие совместности (N_{35}) по всем переменным выполняется, но не тождественно. Тогда решая эту систему функциональных уравнений относительно неизвестной функции, получим $W=h_i(z_1,\bar{z}_1,\cdots,z_n,\bar{z}_n)$, $(i=\overline{1,C_n^2})$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет систему (8.3.2), то она будет её частным решением. В противном случае п.о.с.К.-Р. (8.3.2) – несовместно. Очевидно, что для существования многообразия решений системы (8.3.2). тождественного выполнения условий (N_{35}) являются необходимым, Покажем, что тождественного выполнения условие (N_{35}) для существования многообразия решений системы (8.3.2), как в предыдущим случаям, является, также достаточным Пусть условие совместности (N_{35}) для системы (8.3.2) выполняется тождественно. Тогда интегрируя первое

уравнение методом последовательных приближений, как регулярное к.д.у. , будем иметь:

$$\mathrm{W} = \mathrm{h}(\mathrm{z},\varsigma),\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma_{\mathrm{k}}} = f_k(\mathrm{z}_1,\varsigma_1,\cdots,\mathrm{z}_n,\varsigma_n;\psi(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\varsigma_2\cdots,\mathrm{z}_n,\varsigma_n))\right), \qquad (8.3.3)$$

где $\psi = \psi(\mathrm{z}_1,...,\varsigma_n)$- новая неизвестная функция. Дифференцируя соотношения (8.3.3) по переменной $\varsigma_k,(k=2,...,n)$, подставим её результат в остальных уравнениях системы (8.3.2), и получим регулярную систему к.д.у. вида

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varsigma_k} = p_k(\mathrm{z}_1,\cdots,\mathrm{z}_{\mathrm{n}},\varsigma_{\mathrm{n}},\psi)\quad \left(\mathrm{p}_{\mathrm{k}}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_{2,},...,\varsigma_{\mathrm{n}}) = \frac{1}{\mathrm{h}'_{\psi}}\left(\frac{f_{k+1}}{\varsigma_k} - \frac{\partial h}{\partial\varsigma_k}\right)\right), (h'_{\psi}\neq 0)\,. \quad (8.3.4)$$

Покажем, что правые части системы к.д.у. (8.3.4) не зависят от переменного ς_1 . Действительно, дифференцируя правую часть (8.3.4) по переменной ς_1, получим соотношениями, совпадающими с первыми *(n-1)* - равенствами условий (N_{35}), о которых было требовано тождественного их выполнения. Это означает, что правые части уравнений системы к.д.у. (8.3.4) не зависят от переменного ς_1. Поэтому по аналогии с предыдущим, интегрируя последнего системы уравнений по переменным ς_k, как систему регулярных уравнений [34], получим: $\psi = \mathrm{H}[\mathrm{z},\tilde{\varsigma};\Phi(\mathrm{z})]$ или $\psi = H[z,\tilde{\varsigma};W_0]$, где $\tilde{\varsigma} = (\varsigma_2,\varsigma_3,\cdots,\varsigma_n)$. Тогда многообразия всей решении п.о.с.К.-Р.(8.3.2) будет представлено формулой

$$\mathrm{W} = \mathrm{h}\left[\mathrm{z},\bar{\mathrm{z}};\ \mathrm{H}\left[\mathrm{z},\tilde{\bar{\mathrm{z}}};\Phi(\mathrm{z})\right]\right],\ \text{где}\ \ \tilde{\bar{z}} = (\bar{z}_2,\bar{z}_3,\cdots,\bar{z}_n), \qquad (8.3.5)$$

Ф(z)- произвольная аналитическая функция от *n*- комплексных переменных z.

Теорема.3.22. *Пусть в п.о.с.К.- Р. (8.3.1) ее функций* $f_k,\in RA(\bar{I}_n), W\in RA(\ddot{I}^{(0)}_n)$ *. Если условия совместности (N_{35}) по всем переменным выполняются, но не тождественно, тогда находятся некоторые частные, либо особые решения п.о.с.К.-Р. (8.3.1) в виде* $\mathrm{W} = \mathrm{h}(\mathrm{z},\bar{\mathrm{z}})$. *Если условия совместности (N_{35}) по всем переменным выполняются тождественно, тогда найдётся многообразия*

решений п.о.с.К.- Р. (8.3.1) являющиеся непрерывным, во всем бицилиндре $\overline{\Pi}_{\mathrm{n}}$ *,определяющиеся через одной произвольной аналитической функцией Ф(z) произвольного числа переменных (*$z=z_1,z_2,\ldots,z_n$*)) формулой вида (8.3.5).*

Замечание. Если для п.о.с.К.-Р.

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{f_1(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m},\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=f_2(z,\bar{z};W),\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_3}=\frac{f_3(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_1)^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n}=\frac{f_n(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_{\mathrm{n-1}})^m}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{f_1(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m},\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=f_2(z,\bar{z};W),\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_3}=\frac{f_3(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n}=\frac{f_n(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=\frac{f_1(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_{\mathrm{n}}-\bar{z}_n^0)^m},\quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{f_1(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_{\mathrm{n-1}}-\bar{z}_{n-1}^0)^m},\cdots\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_{n-1}}=\frac{f_{n-1}(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^0)^m},\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n}=f_n(z,\bar{z};W),$$

а также других видах систем выполнятся предыдущие действий, выполняемые в п.8.3, и будем требовать тождественного выполнения условия совместности вида (N_{35}) для указанных систем, то последние системы также разрешимы, и многообразие их решений во всей данной области ($\overline{\Pi}_{\mathrm{n}}$) существуют притом, непрерывны и для них имеет равносильная теорема к теореме 3.22. При этом, необходимо требуется, чтобы в каждых уравнениях последних систем, номерация индексов в записе особых точек вырождений не совадались (иначе в процессе интегрировании п.о.с.К.-Р. возникают большие проблемы). Для нахождения многообразия решений такие класса систем, потребуются дополнительные условия на заданных функций, указанные в предидуших параграфах в работе.

В дальнейшем, будем рассматривать некоторые другие случаи системы (8.3.1) вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1}=a_1(z,\bar{z})\cdot q(z,\tilde{z};W),\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}=\frac{f_2(z,\bar{z};W)}{\bar{z}_1^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n}=\frac{f_n(z,\bar{z};W)}{\bar{z}_{n-1}^m},\qquad (8.3.6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} = a_k(z,\bar{z})\cdot q(z,\tilde{z};W),\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_{k+1}} = \frac{f_{k+1}(z,\bar{z};W)}{\bar{z}_{k+1}^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n} = \frac{f_n(z,\bar{z};W)}{\bar{z}_{n-1}^m},\quad (8.3.7)$$

где

$a_1, a_k, q,\ f_i,\ f_j \in RA(\overline{\Pi}_n), W \in RA(\Pi_m^0), \tilde{\bar{z}} = (\bar{z}_2, \bar{z}_3, \cdots, \bar{z}_n), \bar{z} = (\bar{z}_{k+1}, \bar{z}_{k+2}, \cdots, \bar{z}_n), m \geq 0$

. Выполняя аналитические продолжения переменных $\bar{z}_k$ на ς_k $(k = \overline{1,n})$, преобразуем систему (8.3.6)-(8.3.7) к виду:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = a_1(z,\varsigma)\cdot q(z,\tilde{\varsigma};W),\ \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = \frac{f_2(z,\varsigma;W)}{\varsigma_1^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \varsigma_n} = \frac{f_n(z,\varsigma;W)}{\varsigma_{n-1}^m},\quad (8.3.8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_k} = a_k(z,\varsigma)\cdot q(z,\tilde{\varsigma};W),\ \frac{\partial W}{\partial \varsigma_{k+1}} = \frac{f_{k+1}(z,\varsigma;W)}{\varsigma_{k+2}^m},\cdots,\frac{\partial W}{\partial \varsigma_n} = \frac{f_n(z,\varsigma;W)}{\varsigma_{n-1}^m}.\quad (8.3.9)$$

Для этих систем (8.3.8) и (8.3.9) необходимие и достаточные условия совместности имеют вид:

$$\begin{cases} q\dfrac{\partial a_1}{\partial \varsigma_k} + a_1\dfrac{\partial q}{\partial \varsigma_k} + \dfrac{a_1 f_k}{\varsigma_{k-1}^m}\dfrac{\partial q}{\partial W} - \dfrac{\partial f_k}{\partial \varsigma_1} - \dfrac{a_1 q}{\varsigma_{k-1}^m}\dfrac{\partial f_k}{\partial W} = 0,\ (k = \overline{2,n}) \\ \dfrac{1}{\varsigma_{k-1}^m}\dfrac{\partial f_k}{\partial \varsigma_j} + \dfrac{1}{(\varsigma_{k-1}\varsigma_{j-1})^m}\left(f_j\dfrac{\partial f_k}{\partial W} - f_k\dfrac{\partial f_j}{\partial W}\right) - \dfrac{1}{\varsigma_{j-1}^m}\dfrac{\partial f_j}{\partial \varsigma_k} = 0, (i, j = \overline{1,n,}),\ i \neq j, \\ \dfrac{1}{\varsigma_{k-1}^m}\dfrac{\partial f_i}{\partial \varsigma_{j+1}} + \dfrac{1}{(\varsigma_{i-1}\varsigma_j)^m}\left(f_{j+1}\dfrac{\partial f_i}{\partial W} - f_i\dfrac{\partial f_{j+1}}{\partial W}\right) - \dfrac{1}{\varsigma_j^m}\dfrac{\partial f_{i+1}}{\partial \varsigma_i} + m\dfrac{f_{i+1}}{\varsigma_i^{m+1}} = 0,\ (i, j = \overline{1,n,}), \end{cases} \quad \textbf{(N}_{36}\textbf{)}$$

а также

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_j}{\partial \varsigma_k} = \dfrac{\partial a_k}{\partial \varsigma_j},\ (j,k = \overline{1,r}\ ,\ r < n,\ j \neq k) \\ q\dfrac{\partial a_k}{\partial \varsigma_i} + a_k\dfrac{\partial q}{\partial \varsigma_k} + \dfrac{f_{k+1}}{\varsigma_k^m}\dfrac{\partial q}{\partial W} - \dfrac{a_k q}{\varsigma_k^m}\dfrac{\partial f_{k+}}{\partial W} + \dfrac{m f_{k+1}}{\varsigma_k^{m+1}} = 0 \\ \dfrac{1}{\varsigma_s^m}\dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial \varsigma_s} + \dfrac{1}{(\varsigma_{k+1}\varsigma_s)^m}\left(f_s\dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial W} - f_{k+1}\dfrac{\partial f_s}{\partial W}\right) - \dfrac{1}{\varsigma_{k+1}^m}\dfrac{\partial f_s}{\partial \varsigma_{k+1}} = 0, (i, j = \overline{1,n,}), \end{cases} \quad (N_{37})$$

Пусть эти условий (N_{36}), (N_{37}) выполняются, но нетождественно. Тогда

решая эти систем функциональных уравнений относительно неизвестной функций, имеем $W = h_i(z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_n, \bar{z}_n)$, $(i = \overline{1, C_n^2})$. Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет систему (8.3.8), (8.3.9) то она будет частным решением указанных систем. В противном случае, выще указанные п.о.с.К.-Р. будут несовместными. Очевидно, что тождественного выполнения условий (N_{36}), и (N_{37}) являются необходимым, для существования многообразия решений системы (8.3.8), (8.3.9). Покажем, что тождественного выполнения условие (N_{36}), (N_{36}) для существования многообразия решений систем, являются, также достаточным.

По аналогии с п. 8.1, считая, что функции $a_1(z,\bar{z}), a_k(z,\bar{z}), q(z,\tilde{\bar{z}};W)$ являются данными функциями, из условий (N_{36}), и (N_{37}) будем иметь функций:

$$f_k(z,\varsigma;W) = \varsigma_k^m \cdot \left\{ \frac{\partial A}{\partial \varsigma_k} - \frac{\partial Q}{\partial \varsigma_k} + f[z,\varsigma; Q(z,\tilde{\varsigma};W) - A(z,\varsigma] \right\} \cdot q(z,\tilde{\varsigma};W), \qquad (8.3.10)$$

$$f_r(z,\varsigma;W) = \varsigma_r^m \cdot \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial \varsigma_r} - \frac{\partial Q}{\partial \varsigma_r} + f[z,\varsigma; Q(z,\tilde{\varsigma};W) - \omega(z,\varsigma] \right\} \cdot q(z,\tilde{\tilde{\varsigma}};W), \qquad (8.3.11)$$

где

$$A(z,\varsigma = \int_0^{\varsigma_1} a(z,t)dt,\ Q(z,\tilde{\varsigma},W) = \int_0^W \frac{d\sigma}{q(z,\tilde{\varsigma};\sigma)},\ \omega(z,\tilde{\varsigma}) = \sum_{k=1}^r \int_0^{\varsigma_k} a_k(z,t_k)dt_k,\ f(z,\ldots), g(z,\ldots) -$$

вполне определённые функций. При этих значениях функций $f_k(z,\varsigma;W)$ и $f_r(z,\varsigma;W)$ данные системы приводятся к систем с регулярными правыми частями. В случаи тождественного выполнения условий совместности, полученные системы имеют непрерывное решение во всей данной области. Причём им применяются равносильных предыдущих теорем 3.10 - 3.21.

Список литературы

1.Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Наука, ГРФ,МН,М.: -1976, 888с.

2.Ашуров С. О решении одной системы дифференциальной уравнении в комплексной плоскости. Кн. Республиканская конференции посвящённой 80-летию профессора М. Исмати., Душанбе МУТС, 2021, с.10-12.

3.Бабаеы С. О корректности одной краевой задачи для эллиптческих систем на плоскости. ./ С.Бабаев //- Известия АН Тадж.ССР, 1991,№1(119), с.70-73.

4.Байзаев С. О существовании ограниченных решений нелинейной обобщённой системы Коши-Римана./Байзаев С, // В кн.: Республиканская научно-теоретическая конференция молодых учённых и специалистов. Душанбе,- 1984, ч.1,с. 103-104.

5.Байзоев С. Общее решение многомерной не вполне разрешимой переопределённой системы уравнений с частными производными. Душанбе, 2020,Кн. Совр. проб. Теории диф.ур.. материалы респ.конф. посв.80-летию пр.М. Исмати.-с.34-37.

6.Байзоев С, Джумаев Б.М. Общее и ограниченные решения одного класса переопределённых систем уравнений с частными производными. /С Байзоев, Б.М.Джумаев//-Сб.статей в межд.н.-пр. конф.тему «О применении диф. уравнений при решении прикл. задач»,Дущанбе, 2021 -с.29-33.

7. Байзоев С,О единственности решения краевыхзадач для некоторых классов вырождающиеся эллиптических уравнений с частными производными. /С Байзоев, //-Сб.статей в межд.н.-пр. конф.тему «О применении диф. уравнений при решении прикл. задач»,Дущанбе, 2021 -с.26-29.

8. Байзоев С, Зиёмуддинов Б.М. Оценка решений дифференциальных уравнений в пространстве суммируемых на конечном отрезке функций.

/С Байзоев, //-Сб.статей в межд.н.-пр. конф.тему «О применении диф. уравнений при решении прикл. задач»,Дущанбе, 2021 -с.67-73.

9. Байзоев С., Воситова Д.А. О решениях одной системы уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными. /С Байзоев, Д.А.Воситова//-Сб.статей в межд.н.-пр. конф.тему «О применении диф. уравнений при решении прикл. задач»,Дущанбе, 2021 -с.67-73.

10. Байзоев С., Воситова Д.А. О многообразия решений одного класса систем уравнений с частными производными с двумя независимыми переменными. /С Байзоев, Д.А.Воситова//-Тезисы докладов на межд-й конф. Новосибирск,, 2012, -с.344.

11. Байзоев С., Рахимов м.А. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях. /С Байзоев, М.А.Рахимов//-Уфимский математический журнал, 2018, т.10,№1, -с.3-13.

12.Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными.

/Л.Берс // -. Мир -1966 -351с.

13. Бицадзе А.В.. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, Гл. ред.Ф.-М.Л.- 1981 -448 с.

14.Бохнер С., Мартин У.Т. Функции многих комплексных переменных. Изд. Иностранной литературы, -Москва, 1951, 300 с.

15.Боярский Б.В.О решениях линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений на плоскости. /Б.В.Боярский//,-ДАН СССР, 1955, т.102,№5, с.371-374.

16. Бровко Г.Л.Прикладная математика и механика. 1978,Т.42, №4,с.701-710.

17.Векуа И.Н. Об одном свойстве решений системы уравнений Коши-Римана.

/ И.Н.Векуа//,Сообщ. ГССР,-1953, т. 14,№8-с. 449-453.

18. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М: Наука, 1988, 512 с.

20.Векуа И.Н. Неподвижные особые точки обобщённых аналитических функций. / И.Н. Векуа//- ДАН СССР- 1962- т. 145(№1) -с.24-26.

21.Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Наука, ГЛФМЛ, -М.: 1979,380с.

22.Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, ГРФМЛ,1982, 302 с.

23.Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. –Минск:, Наука и техника, 1983 -271с.

24.Гадоев М.Г., Васильева А.В. Описание областей определения одного класса операторов и факторизация их резольвент./М.Гадоев, А.В.Васильева//- Сб. статей и межд. н.-пр. конференции на тему «О применении диф. уравнений при решении прикл-х задач», Душанбе, 2021, посвящённой 80-летию чл.корр.АН РТ Мухаммадиева Э.М., в кн. С 39-43.

25.Гарифулин Р.М. Применение метода интегрирующего множителя для решения некоторых квазилинейных уравнений.- В сб. :Численные методы механики сплошной среды. / Р.М. Гарифулин// - Новосибирск -1981 -с.30-36.

26.Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. –М.;Л.,ГТТИ- 1950--436 с.

27.Гросман С., Тернер Дж. Математика для биологов. Москва, «Высшая школа», 1983,-393с.

28.Грудо Э.И. К аналитической теории систем уравнений в полных дифференциалах. / Э.И. Грудо //- Докл. АН БССР -1969- т.13 (№7)- с. 781-784.

29.Гурса Э. Курс математического анализа.- М.;Л. ОНТИ- 1933- т.1., 2, -563 с.

30.Гусейнов А.И., Абдурагимов М.А. Об одной квазилинейной системе эллиптического типа. / А.И.Гусейнов, М.А. Абдурагимов //– ДАН СССР- 1977--.232(№1)- с.9-12.

31.Гюнтер Н.М. Интегрирование диффернциальных уравнений первого порядка в частных производных. ГТТИ,1934.

32.Джангибеков Г. Исследование одного двумерного интегрального уравнения. Всесоюзная конференция по теор.прибл. функционально дифференциальных уравнений. Душанбе, 1987,ТГУ, ИМ АН РТ, 148-149.

33.Демидов С.П. Теория упругости. Москва, «Высшая школа», 1979,-432с.

34. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений.- М.: Наука, ГЛФ-МЛ, 1987-416 с.

35.Джураев Х.Ш. Об одном регуляризующем алгоритме неустойчевой задачи оп продолжении потенциального поля./Х.Джураев//- Вестник ТГНУ, 2006, №5, с.40-43.

36. Джураев Х.Ш. Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу../Х.Джураев//- Вестник ТГНУ, 2007, №43,- с.726-733.

37. Джураев Х.Ш. Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения эллиптического типа с постоянными коэффициентами./Х.Джураев//- Вестник ТГНУ, 2010, №3(59),- с.16-27.

38. Джураев Х.Ш. О регуляризации стацирнарного поля температуры в среде../Х.Джураев//- Материалы вторая межд. конф., Самара, 2010, в кн. С. 16-27.

39. Джураев Х.Ш. Регуляризации задачи Коши для уравнении Гельмгольца.

./Х.Джураев//- Междун. Конф. посвящённой 110-летию со дня рождении С.М,Никольского, 2015, Тезисы докл. ИМ РАН, в кн. С.133-135.

40. Джураев Х.Ш.,Нажмиддинов А.М. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. /Х.Джураев//-Научно аналитический журнал «Иновации и инвестиции», 2014, №5(59),- с.181-183.

41 Джураев Х.Ш. О решениях краевых задач для волнового уравнения. . /Х.Джураев//-В мире научных открытий. Математика,Механика, Информатика. 2012, №1.1(25), - С. 129-142.

42.Иноятзода Ф.А.,Бахруллозода У. Многообразия решений одной системы дифференциальной уравнений в комплексной плоскости. . Кн. Республиканская конф-ия посв 80-летию профессора М.Исмати., Душанбе МУТС, 2021, с.39-43.

43.Келдыш В.М. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области. / В.М.Келдыш // -ДАН СССР, 1951,-т.77 (№2),181-183.

44. Колмогоров А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастание вещества, и его применение к одной биологической проблеме. /А.Н.Колмогоров//-Бюлетен МГУ, секции Математика и механика,1937, Т.1, с.1-26.

45.Курбоншоев С.З., Нусайриев М.А.Расширение линейных систем дифференциальных уравнений. Сб. статей и межд.н.- практ. посвящённой 80-летию чл.корр АН РТ профессору Мухаммадиеву Э.М.,Душанбе, 2021, В кн. С.118-122.

46. Курбоншоев С.З., Шакарбеков К.С.Об устойчивости решений систем радностных уравнений./С,З.Курбоншоев, К.С. Шакарбеков//- Сб. статей на Республик. н.-пр. конф. посвящённой 80-летию профессору Имомназарову Бекназару, 2019, в кн. С.128-130.

47.Курбоншоев С.З. О построении интегральных многообразий систем дифференциальных уравнений содержащих малых параметр. -/С,З.Курбоншоев// Материалы межд. научной конф., посвящённой 25-летию Гос. Независымости РТ, Душанбе, 2016, -С. 38-40.

48. Курбоншоев С.З., Шакарбеков К.С.,Рустамбекова У.Р. построение голоморфных возмущонных системы дифференциальных уравнений. ./С,З.Курбоншоев, К.С. Шакарбеков//- Сб. статей на Международный н.-пр. конф. посвящённой 60-летию академику АН РТ,профессору Шабозова М.Ш., 2012, в кн. С.82-84.

49. Курбоншоев С.З., Шакарбеков К.С.О построение нелинейных проекторов систем разностных уравнений../С,З.Курбоншоев, К.С. Шакарбеков//- с Материалы. статей на международный. н.-пр. конф. посвящённой 90-летию академика Михайлова Л.Г., 2018, в кн. С.96-98.

50.Курбоншоев С.З., Шакарбеков К.С. О построение оптимальных интегральных многообразия решений систем нелинейных дифференциальных уравнений. С.36-39.

51. Курант Р. Уравнения математической физики. / Р.Курант// М. : Мир, 1964, -830 с.50. Лоран Шварц. Анализ.Т.2, Изд. «Мир», Москва, 1972,528с.

52.Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.- М.: Наука, 1966 ч.2-260 с.

53.Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа./М.М.Лаврентьев//-ДАН СССР,-1955, т. 102,№2,с. 219-222.

54.Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа./М.М.Лаврентьев//-Известия АН СССР,-1956, сер. Математика, т. 20,№6,с. 819-842..

55.Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнения второго порядка. /М.М.Лаврентьев//-ДАН СССР,-1957, т. 112,№2,с. 195-197.

56. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики./М.М.Лаврентьев//-Новосибирск: СОАН СССР,-1962,-93с.

57.Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного./М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат// -М.; Наука, ГРФ-МЛ- 1965-714 с.

58.Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. / Н.М.Матвеев// М.: Высшая школа, 1967, -584 с.

59.Магамедов Г.А., Паламодов В.П. Обобщённые аналитические функции многих переменных. /Магамедов Г.А., Паламодов В.П. //, Математический сборник, 1978, т.108(148), №4(8), с. 515-543.

60. Миранда Г. Уравнения с частными производными эллиптического типа. Москва, ИЛ, 1957.

61. Мирзоев А.Х.,Шоймқулов Б.М. Переопределенная система дифференқиальных уравнений в частных производных второго порядка с тремя сверхсингулярными линиями. Душанбе 2021 ст 144-149

62. Мирзоев А.Х., Шарипов Б. Представления решений одного класса систем уравнени в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами.(худжандский государствений университет им. Б.Гафуров) Душанбе, 2022, С. 251-254

63. Мирзоев. А.Х.К теории одной системы смещенного типа с сингулярной линией Известия АН. Тадж ССР, 1986, № 4,с. 97-100.

64. Мирзоев А. Х. Представления многообразного решений одного класса систем первого порядка гиперболического типа с сингулярной линией. // Классические и неклассические краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производным, специальные функции, интегральные уравнений и их приложения: Тез. док. Всесоюз. Науч. Конф. 25- 29 апр 1987 – Куйбышев , 1987 – с 103 – 104.

65 Мирзоев А.Х. Интегральные представления решений для одной системы уравнений первого порядка гиперболического типа с сингулярной линией. Докл. АН. Тадж ССР 1989 том XXXII, № 2 с. 81 – 84.

66. Мирзоев А. Х. , Раджабов Н. Интегральные представления решений для одной системы уравнений первого порядка гиперболического типа с сингулярной точкой. Дифференциальные и интегральные уравнении и их приложение (ст. науч. трудов) Душанбе, 1991 с. 75 – 80.

67. Мирзоев А.Х. Интегральные представления и граничные задачи для одной системы первого типа с сингулярной точкой. //Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математика, физики- вторые Боголюбовские чтения: изд. ДГПИ, 1991, 54-57 Тез. докл. конф.14-18 сентября 1992г. –Киев, 1992, 100.

68. Мирзоев А. Х. Интегральные представления и краевые задачи для одной системы гиперболического типа с двумя сверх сингулярными линиями. Дифференциальные и интегральные уравнение и смежные вопросы анализа мат. Межд. Науч. Конф. г. Душанбе 8 - 10 ноября 2005. с. 107.
69. Мирзоев А.Х. Представление многообразие решений для одного класса систем первого порядка с двумя сверх сингулярными линиями. //Материалы республиканской научной конференции « Дифференциальные и интегральные уравнения» повешенной 60-летию образованы ТГНУ и 70 летию академика академии наук Республики Таджикистан Раджабов Нусрат, Душанбе, 2008г. с. 39-41.
70. Михайлов Л.Г. Краевая задача типа задачи Римана для системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения. / Л.Г.Михайлов//- Учен. записки Таджикский госуниверситет им. В.И.Ленина, т.10. Труды физико-математического факультета,- 1957, с.32-79.

71. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами /Л.Г.Михайлов // -,1963-180 с.

72. Михайлов Л.Г., Усманов З.Д. Бесконечно малые изгибание поверхностей вращения положительной кривизны с параболической или конической точкой в полюсе. / Л.Г. Михайлов, З.Д. Усманов //Кн.: Исследования по краевым задачам теории функций и дифференциальных уравнений, Душанбе, Изд. АН РТ, 1965, с. 21-53.

73. Михайлов Л.Г., Абросимов А.В. Об одном интегральном представлении функции двух комплексных переменных./ Л.Г. Михайлов, А.В.Абросимов //- - Докл. АН Тадж. ССР,-1971, т.14 (№5)- с.3-5.

74. Михайлов Л.Г. Об одном интегральном представлении функции двух комплексных переменных./ Л.Г.Михайлов//- Докл. АН Тадж. ССР-1971, т.14, (№5), с.3-5.

75.Михайлов Л.Г., Абросимов А.В. О некоторых переопределённых системах уравнений с частными производными./ Л.Г.Михайлов//- Докл. АН Тадж. ССР-1971, т.14, (№6), с. 9-13.

76.Михайлов Л.Г., Абросимов А.В. Обобщённая система Коши-Римана со многими независимыми переменными. / Л.Г. Михайлов, А.В.Абросимов //- - Докл. АН Тадж. ССР,-1973- т.210 (№1)- с.26-29

77.Михайлов Л.Г. Многообразие решений обобщённой системы Коши-Римана со многими переменными. ./ Л.Г.Михайлов//- Докл. АН Тадж. ССР- 1972, т.21, (№7)- с. 14-17.

78.Михайлов Л.Г. О некоторых переопределённых системах дифференциальных уравнениях с частными производными. ./ Л.Г.Михайлов//- Докл. АН Тадж. ССР- 1977, т.20, (№4)- с. 12-15.

79.Михайлов Л.Г., Рузметов Э., Исследование некоторых систем дифференциальных уравнений на плоскости. / Михайлов Л.Г., РузметовЭ.//- Докл. Тадж ССР, 1977, Т. 20, № 10, С.6-9.

80. Михайлов Л.Г.Многообразие решений обобщённой системы Коши-Римана со многими переменными.- / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР, 1977, т.21,№7, с.14-17.

81.Михайлов Л.Г. Переопределённая система дифференциальных уравнений с двумя функциями от двух переменных.- / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР, 1977, т.20,№5, с.7-10.

82.Михайлов Л.Г., Горелов И.В. Об одном интегральной преставлении функции многих комплексных переменных.- / Л.Г. Михайлов, И.В.Горелов //- -Докл. АН Тадж. ССР,-1978- т.21 (№5)- с.5-7.

83.Michailov L.G. On the computativi of some overdetermined systems of partial differential eqvations with two unknown functions. /L.G.Michailov//- Dokl.Akad/Nauk SSSR, 1978,T.238, c. 215-219.

84.Михайлов Л.Г., Бильман Б.М. О некоторых системах уравнений с частными производными первого порядка.- / Л.Г. Михайлов, Б.М. Бильман //-Докл. АН Тадж. ССР,-1979- т.22 (№5)- с.88-90.

85.Михайлов Л.Г. Об условиях совместности и многообразии решений обобщённой системы Коши-Римана со многими переменными. /Л.Г. Михайлов//- ДАН СССР- 1979-т.249 (№6)- с. 1313-1318.

86.Михайлов Л.Г. О некоторых переопределённых системах уравнений с частными производными./Л.Г.Михайлов//- В кн.: Труды конференции по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике. Новосибирск, -1980-с. 44-47.

87.Михайлов Л.Г. О методе аналитического продолжения для некоторых уравнений в частных производных со многими независимыми переменными.- / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1983- т.26 (№4)- с.199-203.

88.Михайлов Л.Г.Квазилинейная обобщённая система Коши-Римана с трея комплексными переменными.- / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1983- т.31 (№4)- с.222-226.

89.Михайлов Л.Г. Формулы представления решений некоторых систем уравнений в частных производных со многими независимыми переменными.- / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1984- т.27 (№6)- с.1303-1308.

90. Михайлов Л.Г. Формулы представления решений некоторых неканонических комплексных уравнений в частных производных второго порядка.- / Л.Г. Михайлов //- ДАН Тадж. ССР-1984- т.27,№6,- с.361-364.

91. Михайлов Л.Г. О некоторых нелинейных обобщённых системах Коши-Римана. -/ Л.Г. Михайлов //- ДАН Тадж. ССР-1984- т.27,№6,- с.295-299.

92Михайлов Л.Г. О некоторых нелинейных обобщённых системах Коши-Римана. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1984- т.27 (№6)- с.295-299. 93.Михайлов Л.Г. О формуле представления решений переопределённой системы Коши-Римана со многими независимыми переменными. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1985- т.28 (№1)- с.10-12.

94.Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. - Душанбе,: Дониш, -1986-116.

95. Михайлов Л.Г. Об одном способе исследования вполне интегрируемых систем уравнений в частных производных. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1986- т.32 (№4)- с.511-512.

96.Михайлов Л.Г. К сингулярной теории полных диффрециалов. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1986- т.32 (№9)- с.567-569.

97.Михайлов Л.Г. Формулы представления многообразия решений некоторых систем комплексных уравнений в частных производных. Всесоюзная конференция в честь 80-летие со дня рождении академика АН СССР С.М. Никольского в кн. 1987, г. Киев,-С.159-161.

98.Михайлов Л.Г. Обобщённые аналитические функции многих переменных.

/ Л.Г. Михайлов //- Современные проблемы мат. физики. Труды всесоюзного симпозиума. 1987, Тбилиси, 102-109.

99.Михайлов Л.Г. О некоторых нелинейных сингулярных дифференциальных уравнениях. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Тадж. ССР-1989- т.32 (№8)- с.495-499.

100.Михайлов Л.Г. Квазилинейная обобщённая система Коши-Римана со многими независимыми переменными . / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1989- т.307(№5)- с.1054-1059.

101. Михайлов Л.Г. К сингулярной теории полных дифференциалов. . / Л.Г. Михайлов //- Докд. АН Тадж. ССР, 1989, т.38, №4, с. 561-569.

102. Михайлов Л.Г. К сингулярной теории полных дифференциалов. . / Л.Г. Михайлов //- Докд. АН Тадж. ССР, 1989, т.37, №9, с. 567-569.

Михайлов Л.Г.О некоторых сингулярных уравнениях с частными производными. / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1991- т.321(№1)- с.46-52.

103.Михайлов Л.Г.Об одном свойстве сингулярных дифференциальных уравнений. / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1991- т.321(№4)- с.681-686.

104.Михайлов Л.Г. К теории полных дифференциалов с сингулярными точками.- / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1992- т.322(№4)- с.646-650.

105.Михайлов Л.Г. К теории полных дифференциалов с сингулярными точками. . / Л.Г. Михайлов //- ДАН России, 1992, т.322,№ 4, с.646-650.

106.Михайлов Л.Г., Сайдулаева Р.Р. О системах в полных дифференциалах с сингулярными линиями./Л.Г.Михайлов, Р.Р.Сайдуллаева// – Докл. АН РТ, 1992, т.35, №5, с.227-230.

107. Михайлов Л.Г., Сайдулаева Р.Р. Системы в полных дифференциалах с сингулярными линиями второго порядка.- /Л.Г.Михайлов, Р.Р.Сайдуллаева//– Докл. АН РТ, 1992, т.35, №5, с.10-13.

108.Михайлов Л.Г. К сингулярной теории полных дифференциалов. / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1997- т.325(№1)- с.21-24.

109.Михайлов Л.Г. К теории сингулярных дифференциальных уравнений. /Л.Г.Михайлов//- ДАН СССР-1971, т.378, (№3), с.320-323

110.Михайлов Л.Г. О вырождении порядка дифференциальных уравнений до нулевого порядка и о некоторых вопросах сингулярного анализа. / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-2002- т.384(№6)- с.731-734.

111. Михайлов Л.Г., Шарипов Б. Представление решений одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений, интегрируемых явно.- / Л.Г., Михайлов, Б. Шарипов//-Математические заметки, -Якутск 2003- т.10 (вып.1)- с. 73-80.

112.Михайлов Л.Г. О некоторых переопределённых системах уравнений в частных производных с сингулярными точками. / Л.Г. Михайлов //- ДАН России-2004- т.398(№2)- с.1-4.

113.Михайлов Л.Г. О некоторых качественных проблемах теории переопределённых систем дифференциальных уравнений с частными производными. /Л.Г. Михайлов //–Труды международной научно-теоретической

конференции по качественным исследованиям дифференциальных уравнений и их приложения. Душанбе, РТСУ, - 2005- с.6-11.

114.Михайлов Л.Г., Хидиров Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками./Л.Г.Михайлов, Х.Хидиров//- Материалы межд.конф. посвящённой 60-летию академика АН РТ Шабозова М.Ш. ,2012, с.169-173.

115.Михайлов Л.Г. О вырождении порядка дифференциальных уравнений и свойствах их зануления. / Л.Г. Михайлов //–Материалы международной научной конференции посвящённой 60-летию академика Бойматова К.Х., АН Респ.Таджикистан, Душанбе, -2010, с.64-66.

116.Михайлов Л.Г., Шарипов Б. О системах в полных дифференциалах для функций от произвольного числа независимых переменных и с сингулярными точками. / Л.Г. Михайлов //- Докл. АН Респ. Таджикистан -2011- т.54(№8)- с.701-708.

117.Михайлов Л.Г. Об одном классе систем уравнений уравнений в полных дифференциалах с сингулярной линией./ Л.Г.Михайлов, Б.Шарипов//, Дифференциальные уравнения,-2016,т.52, №5, с.696-700.

118.Мустафокулов Р. Об одном линейном уравнении типа Эйлера четвёртого порядка. /Р.Мустафокулов// Материалы межд.кофф. повящённой 60-летию академика Рахмонова З.Х, профессора Исокова С.А. ,2019, в кН. С.157-160.

119.Магомедов Г.А., Паломодов П.Н. Обобщённые аналитические функции многих переменных. /Г.А.Магомедов, П.Н.Паломодов //- Мат. сб. 1978-т.106 (148), №4 (8)- с.515-543.

120. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для

эллиптических систем уравнений. Новосибирск, 1969, 380 с.

121. Мухаммадиев Э.М. Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа. /Э.Мухаммадиев//- ДАН СССР, 1972, т.205, с. 1292- 1295.

122.Мухаммадиев Э.М., Байзаев С. О нётеровости обобщённых уравнений Коши-Римана. /Э.Мухаммадиев, С.Байзаев //- Известия АН Тадж.ССР—1988(№2) (108)-с.3-9.

123.Назаров Ф. Замечание о полной разрешимости многомерных дифференциальных уравнений.- В кн.Сб. трудов аспирантов Воронежского Университета, Математ. Фак.-т, Воронеж, 1969,№12,с.59-68.

124.Назаров Ф. К вопросу о полной разрешимости многомерных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- ДАН Тадж. ССР, 1970,№12, с.8-11.

125.Назаров Ф. Об условиях полной разрешимости многомерных дифференциальных уравнений.-ДАН Тадж.ССР,1975,т.18,№11, с. 6-9.

126.Назарова З.С. Граничная задача для решения одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками.- Материалы Респ. н/пр. конференции, Душанбе,2019,Тези.конф. с.195-199.

127.Назарова З.С.Граничная задача для одного класса система уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными линиями Паёми Донишкадаи молия ва иќтисоди Тољикистон. №4. Душанбе 2016г.(8с.)

128. Назарова З.С Граничная задача для одного класса системы уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными точками. Паёми Донишгоњи миллии Тољикистон. №1/4. Душанбе 2017с. 43-49

129. Назарова З.С., Шарипов Б. Граничная задача для одного класса система уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными точками. Вестник ТНУ (серия ест. наук.) 2018 г.№1 стр. 54-59.

130. Назарова З.С. Граничная задача для системы уравнений в полных дифференциалах произвольного числа независимых переменных с сингулярной точкой. Паёми Донишкадаи молия ва иќтисоди Тољикистон. 2018№4. (16) Душанбе с.108-115

131. Назарова З.С.Граничная задача для одного класса система уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными точками. Материалы международной научной конференции, посвященной 90- летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Л. Г. 2018,с. 114-119.

132. Назарова З.С. ,Шарипов Б. Граничная задача для представления решений в некоторых линейных и нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками. Вестник ТНУ №4. Душанбе 2018с. 46-53

133. Назарова З.С. Представление Многообразия решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярной точкой Паёми Донишгоњи давлатии молия ва иќтисоди Тољикистон. №1. (17) Душанбе 2019с. 77-85

134. Назарова З.С .Граничные задачи для одного класса системы в полных дифференциалах с сингулярными точками Материалы республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию видного Таджикского математика, профессора Б. Имомназарова, Душанбе, 10-11- июня 2019 г, с.169-173

135.Неъмонов С. Представления решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. . Респуликанская научно-практ.конф. посв.30-летию РТ, Душанбе, МУТС, 2021г. с. 51-53.

136. Никольский С.М. О продолжения функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств./С.М.Никольский//- Мат. Сборник-1956, т.40, №2, с.243-258.

137.Никольский С.М. Курс математического анализа.-М.: Наука, ГРФМЛ, 1991, т.1,т.2,-544с.

138.Орипов Т.С. Об одной вырождающейся системе линейных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными линиями. /Т.С.Орипов//-Материалы межд.н.конф. посвящённой 90-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. Ж: 2018, с/122-124

139.Перов А.И., Назаров Ф.. Об условиях полной разрешимости-1971,Изв АН Тадж. ССР,отд.физ-мат. И геол.-хим.№3, с.3-9.

140.Перов А.И. О многомерных дифференциальных уравнениях первого порядка./А.И.Перов//-Сибирск. Мат.журнал,1966, т.7,№2, с.344-352.

141.Петровский И.Г. Некоторые проблемы теории уравнений с частными производными. УМИ-1946, т.1,№3,-с.44-50.

142.Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Издательство МГУ, 1984. — 296 с.

143. Пиров Р.Исследование некоторых нелинейных переопределённых систем уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями./Пиров Р.// -Докл.АН Тадж.ССР, 1983, т.26, №12, с.247-250.

144. Пиров Р.Об одной переопределённой системы с двумя сингулярными линиями на плоскости. / Р.Н.Пиров// -Вестник Пед. Университета (серия естественных наук) №5, часть 1, Душанбе- 1999- стр. 16-18.

145.Пиров Р.Н. Представление решения для некоторых классов действительных систем трёх уравнений в частных производных с сингулярными линиями на плоскости. /Р.Пиров// -Крайові задачі Дифференціальных рівнянь , Чернівці, Відавніцтво, -"Прут"- 2001- стр.195-210.

146.Пиров Р. К теорию регулярных и сингулярных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Труды международной научной конференции по "Дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами",/Р.Пиров// ТГНУ, Душанбе, 2003- с. 122-124.

147.Пиров Р. К теории нелинейных переопределённых систем трёх и четырёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве. /Р.Пиров// - Межд. конф. в МИ РФ им. В.А.Стеклова, «Функцион-е пр-ва и теория пр..ф-й», посвящённой 110-летию академику РАН С.М.Никольского,2015, с.199-201.

148. Пиров Р. Об одном классе нелинейных переопределённых коиплексных систем дифференциальных уравнений в частных производных с двумя

неизвестными функциями./Р. Пиров// Материалы межд. научно- пр. конф.посв 80-летию академика АН РТ, Раджабова Н. 2018, книга с.157—162.

149. Пиров.Р. Исследование одной переопределённой нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями. Душанбе, 2020,Кн. Совр. проб. Теории диф.ур.. материалы респ.конф. посв.80-летию пр.М. Исмати.-с.146-149.

150. Пиров Р., Рахимзода Ф.Ш. К теории переопределенных систем пяти дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости. Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т. 61. № 9-10. С. 730-735.

151.Пиров Р., Рахимзода Ф.Ш. Исследование вопросов совместности и многообразия решения одного класса нелинейных переопределенных систем пяти дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями в пространстве. Докл.АН РТ, 2019,т. 62. № 9-10. С. 528-532.

152. Пиров Р., Джабборов М.А. Об исследовании некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями в пространстве. Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2021. Т. 64. № 3-4. С. 165-170.

153. Пирназаров К., Карроматуллои М. Представление решений одного класса системы дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. Кн. Республ. конф-я «Граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений», 2021, МУТС, с.39-43.

154.Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. ГИТ-ТЛ. , - Москва, Ленинград, 1950, 338 с.

155.Раджабов Н. Об одном методе решения интегрального уравнения типа И.Н.Векуа./Н.Раджабов// Докл.АН Тадж. ССР, т.4,№5, с.3-7.

156.Раджабов Н. Некоторые краевые задачи для уравнения оссесимметрической теории поля. ./Н.Раджабов// Исследования по краевым задачам теории дифф. Уравнений. Изд. АН Тадж ССР,1965, с.79-127.

157.Раджабов Н. Интегральные представления и их обрашения для обобщённой системой Коши-Римана с сингулярной линией. /Н.Радабов// - Программа и тезисы докладов научной конф. ФТИ им. С.У.Умарова АН Тадж.ССР, Душанбе, 1967, с.

158. Раджабов Н. Некоторые граничные задачи типа Римана и Гилберта для обобщённой системы Коши- Римана с сингулярной линией. /Н.Радабов// - Материалы всесоюзной конференции по краевым задачам, Казанский госуниверситет,1970,с. 203-209.

159.Раджабов Н. Общая граничная задача для обобщённой системы Коши-Римана с сингулярной линией. /Н.Радабов// -Докл.АН Тадж.ССР, 1971, т.14(№29), с.3-5.

160.Раджабов Н. Некоторые граничные задачи типа Римана и Гильберта для обобщённой системы Коши-Римана с сингулярной линией. Материалы всесоюзной конф. по краевым задачам. Казанский госуниверситет.1970, с.203-209.

161.Раджабов Н. Обшая граничная задача для линейного сопряжения для обобщённой системы Коши-Римана с сингулярной линией. ./Н.Раджабов// Докл.АН Тадж ССР, 1971, т.14,№4, с.7-10.

162. Раджабов Н. Интегральные представления для обобщённой системы Коши-Римана с сингулярной линией. ./Н.Раджабов// Докл.АН Тадж ССР, 1972, т.15,№10, с.27-32.

163. Раджабов Н. , Михайлов Л.Г. Аналог формулы Пуассона для некоторых уравнений эллиптического типа. ./Н.Раджабов, Л.Г.Михайлов// Докл.АН Тадж ССР, 1972, т.15,№1, с.6-9

164. Раджабов Н. Интегральное представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений эллиптического типа. Докторская диссертация, 1974, Минск, 312 с.

165.Раджабов Н. Интегральные представления и граничные щадачи для некоторых уравнений эллиптического типа с сингулярной гиперплоскостью. ./Н.Раджабов// - Ж:Дифференциальные уравнения, Минск, 1976, т.12, №12, с 2251-2264.

166. Раджабов .Н.,Сатторов А., Джабиров Д.К. Фундаментальные решения и интегральные представлении для одного уравнения эллиптического типа с двумя сингулярными линиями. /Н.Радабов, А.Сатторов, Д. Джабиров// - Докл. АН Тадж.ССР, 1977, т.20, №9,с.13-17.

167.Раджабов Н. Представление многообразия решений, исследавание краевых задач для некоторых систем дифференциальных уравнений высщых порядков с сингулярными гиперплоскостями. Межд. сборник статьей «Дифференциальные и интегральные уравнения» ,1977, Душанбе, с.45-52.

168. Раджабов Н., Сатторов А., Джабиров Д.К.Построение потенциалов для одного уравнения типа второго порядка. /Н.Радабов// - Докл. АН Тадж.ССР, 1977, т.20, №11,с.7-10.

169. Раджабов Н.,Болтаев К. Об одном представлении многообразия решений обобщённой системы Коши-Римана с сингулярной линией, Межвузовский сб. «Дифференциальные и интегральные ур-я», 1977, Изд.ТГУ,вып.1,с.60-72.

170. Раджабов Н. Интегральные представления для некоторых классов дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными гиперплоскостями через решение уравнений с регулярными коэффициентами. /Н.Радабов//, Ж: ДАН СССР, 1977, т.223, №5,с.796-799.

171.Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями. Монография, Душанбе ч.1, ТГУ, 1980, 147 с.

172. Раджабов Н., Расулов А. Представление многообразие решений для одного класса системы дифференциальных уравнений высщих порядков с сингулярной линией. –Сб.статей Диф. ий интегр. ур-я, вып.3,ТГУ, с.72-76.

173. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых диф. уравнений с сингудярной линией или сингулярными поверхностями. Монография, часть 2.,Душанбе 1980,Изд.ТГУ, 170 с.

174.Раджабов Н. Интегральное представления и граничные задачи для некоторых диф. уравнений с сингулярными линиями и поверхностями. Монография, 1982, ч.2,Душанбе, 170 с.

175. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для обобщённой системы Коши-Риман с сингулярной линией. / Н.Раджабов//-ДАН СССР, 1982, т.267, №2, с.300-305.

176. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для обобщённой системы Коши-Риман с двумя сингулярными линиями. / Н.Раджабов//- ICM 82,Warshawa, 1983, Shot Communations Sectin p/21/

177.Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для обобщённой системы Коши-Риман с двумя сингулярными линиями. / Н.Раджабов//-Докл. АН Тадж.ССР, 1983, т.27, №2, с.125—129

178. Раджабов Н. Об одном методе представления через аналитические функции многообразия решений общего линейного уравнения эллиптического типа высшего порядка одной сингулярной линией на плоскости. / Н.Раджабов//-Научные труды по краевым задачам, Минск, 1985, с. 175-179.

179. Раджабов Н.,Расулов А. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых гиперболических уравнений с одной и двумя сингулярными линиями. / Н.Раджабов, А.Расулов//-ДАН СССР, 1985, т.281, №2, с.534-539.

180. Раджабов Н.. О представлении многообразия решений для линейного гиперболического уравнения второго порядка с одной сингулярной линией. / Н.Раджабов//-ДАН СССР, 1986, т.282, №7, с.390-393.

181. Раджабов Н. Об одном новом способе представления решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. . / Н.Раджабов//-Докл. АН Респ.Тадж.ССР, 1988, т.31, №2, с.85-89.

182. Раджабов Н. Об одном новом способе представления решений системы дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. . / /Н.Раджабов//-Докл. АН Респ.Тадж.ССР, 1988, т.31, №3, с.154-158.

183. Раджабов Н. К теории линейных эллиптических систем второго порядка для которых вся граница является сингулярной линией. /Н.Раджабов//-Yugslavia,1988, 301-307.

184.. Раджабов Н. Линейные эллиптические уравнения с сингулярными и сверх-сингулярными коэффициентами. /Н.Раджабов//-Сборник статей «Дифференциальные и интегральные уравнения», Душанбе, 1991,с. 70-74.

185. Раджабов Н., Мирзоев А. Х., Интегральные представления решений для одной системы уравнений первого порядка гиперболического типа с сингулярной точкой. Дифференциальные и интегральные уравнении и их приложение (ст. науч. трудов) Душанбе, 1991 с. 75 – 80.

186.Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. / Н.Раджабов//-Душанбе, 1992- 236 с.

187.Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для обобщённой системы Коши-Римана с сингулярной линией. / Н.Раджабов//-ДАН СССР,1993, т.267, №2, с.300-305.

188.Раджабов Н., Рузметов Э., Фозилов С. Интегральные представление многообразия решений для одного класса системы дифференциальных уравнений первого порядка $2n$- сингулярной линией на плоскости. –Изв. АН Тадж. ССР,1992, №2(3), с. 35-39.

189. Раджабов Н., Шамсиддинов Ф. Интегральные представление и граничные задачи для системы Коши-Римана с сингулярными точками./Н.Раджабов, Ф. Шамсиддинов//- Душанбе 1991, ВИНИТИ,№36, 20 с.

190. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных с сверхсингулярными коэффициентами. Монография ч.3 Душанбе, 1992, Изд. ТГУ, 236с.

191. Раджабов Н., Шамсиддинов Ф. Интегральные представление одного уравнения второго порядка эллиптического порядка, с сингулярными точками. Н.Раджабов, Ф. Шамсиддинов//- Душанбе Докл.АН РТ, 1996, т.39,№9-10..

192.Раджабов Н., Юсупов Д. К теорию одного класса дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной поверхностью. Межд. конф. диф. ур-я с синглярными коэффициентами.Душанбе, 1996, с.75.

193.Раджабов Н., Рузметов Э, Фозилов С.Е. К сингулярной теории нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка. Межд.конф. по диф. уравнения с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1998, Кн. С.73.

194.Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными особыми точками./Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова//- Докдады РАН, 2003, т.391,№1, с.20-22.

195. Раджабов Н.,Шоймкулов Б. К теории переопределённой системы трёх уравнений в частных производных второго порядка со сверх-сингулярными многообразиями. Материалы н.теор. конф., посвящённой 60-летию ВОВ, Душанбе 2005, ч.1,, с.25-25

196.Раджабов Н. К теории линейной переопределённой системы второго порядка с двумя сверх-сингулярными линиями. Саратовская зимняя школа, 2008, тезисы докл. С. 156-175.

197.Раджабов Н.,Зарипов С. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с сингулярными точками. /Н.Раджабов, С.Зарипов//,- Вестник ТНУ, 2008,№1, с. 37-47.

198. Раджабов Н. К теории одного класса линейного обыкновенного диффернциального уравнения четвёртого порядка с левой граничной точкой. . /Н.Раджабов//- Докл. АН РТ, т.14, №5-6, с.22-27.

199. Раджабовн. Болтаев К.С. Представление многообразия решений для уравнения третьего порядка с сингулярной линией висключительной случае. /Н.Раджабов, К.Болтаев//-Материалы межд.конф. «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел, мат.анализа», посвящённой 60-летию академика АНРТ Рахмонова З.Х., профессора Исхокова С.А. Душанбе, 2019, в книге, с,206-207.

200.Расулов А. Об одной задаче типа линейного сопряжения для одного класса систем эллиптического типа высшего порядка./А.Расулов//-Известия АН Тадж.ССР, 1991,№1(119), с.66-69.

201.Рахимов Р.М., Кабиров А. Представления решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. Респуликанская научно-практ.конф. посв.30-летию РТ, Душанбе, МУТС, 2021г. с. 61-64.

202..Рахимов Р.М.Формулы представления решений одного класса нелинейных уравнений в полных дифференциалах с сингулярной линией. Матералы межд. конф. посвящённой 60-летию профессора Шабозова М.Ш., 2012, С.131-134.

203.Рахимов Р.М. Представление решение одного класса уравнений второго порядка, произвольной степени с сингулярными коэффициентами. Материалы н.-пр.конф. «Роль математики в экономике», посвящённой 27- летию независымости РТ, 2018, в кн. С.86-92.

204.Рузметов Э. Исследование некоторых переопределённых систем дифференциальных уравнений на плоскости. /Э.Рузметов//-Докл.АН Тадж. ССР, 1977, т.20, №10, С.6-9.

205. Рузметов Э. Дифференциальные уравнения с параметром и их приложения к исследованию некоторых переопределённых систем уравнений в частных производных. /Э.Рузметов//-Монография, Душанбе, 1994, 241 с.

206. Рузметов Э. Об одной задаче теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Сб. научных трудов ИМ СО АН СССР, 1986, с. 54-76.

207. Рузметов Э., Пиров Р. О совместности и многообразиях решений некоторых систем трёх уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. . /Э.Рузметов//-Докл.АН Тадж. ССР, 1989, т.24, №10, С.3-9.

208. Рузметов Э., Дехконбоев Н. Интегральные представления для одного класса системы линейных уравнений в частных производных с сингулярной линией. /Э.Рузметов, Н.Дехконбоев//- В. Сб. «Дифференциальные и интегралные уравнения и их приложения», Вып.1,Душанбе, 1991, ДГПУ,с. 113-115.

209. Рузметов Э.,Сайдуллаева Р. Интегральные представления многообразия решений для некоторых классов переопределённых систем дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами на плоскости.

/Э.Рузметов, Р.Сайдуллаева//- В. Сб. «Дифференциальные и интегралные уравнения и их приложения», Вып.1,Душанбе, 1991, ДГПУ,с. 116-123.

210. Рузметов Э. Интегральные представления многообразия решений некоторых квазилинейных переопределённых систем первого порядка с одной сингулярной линией на плоскости. /Э.Рузметов, Р.//- В сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения»,Вып. 2, Душанбе, 1993, с. 46-53.

211. Рузметов Э.. Интегральные представления многообразия решений для простейщих переопределённых систем дифференциальных уравнений первого порядка с одной неизвестной функцией сингулярными коэффициентами. /Э.Рузметов//- В. Сб. «Дифференциальные и интегралные уравнения и их приложения», Вып.1,Душанбе, 1991, ДГПУ,с. 101-112.

212..Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. ОГИЗ ГИТ-ТЛ,М.: 1947, Ленинград, -354с.

213. Саидов Б.Б., Шодмонов.М.Х. Граничная задача для одного класса система уравнений в полных дифференциалах, с сингулярными линиями. Паёми Донишкадаи молия ва иќтисоди Тоҷикистон. №4. Душанбе 2016с.

214.Саидов Б.Б., Усманов Н. Сингулярная граничная задача сопряжения гармонических функций //Доклады АН Республики Таджикистан, 2015, т. 58, № 12. с. 1078-1083.

215.Саидов Б.Б. Об одной краевой задаче линейного сопряжения гармонических функций на окружности. Сборник научных трудов. Украина, Черновцы. Выпуск № 20, 2011, с. 372-380.

216. Саидов Б.Б. Задача сопряжения гармонических функций, имеющих особенности различных типов. Материалы республиканской научно-

теоретической конференции, посвящённой 75-летию доктора физико-математических наук Собирова Г. С. Душанбе, 2011, с. 42-47.

217.Саидов, Б. Б. Сингулярная краевая задача сопряжения гармонических функций [Текст] / Б.Б. Саидов // Вестник Финансово-экономического института Таджикистана. Спецвыпуск. - Душанбе, 2016. - № 1(5). - с.162-165.

218. Саидов Б.Б.,Шодмонов М.У. Граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений с сингулярными точками. Республиканская научно-практ.конф. посв.30-летию РТ, Душанбе, МУТС, 2021г. с. 65-68.

219. Саидов Б.Б.,Шодмонов М.У. Граничные задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений. / Б.Б. Саидов // Сб.ст.на междун. научно-практ.конф. посв.80-летию чл.корр. АН РТ профессора Мухаммадиева Э И. РТ, Душанбе, 2021, в кн. С.146-149.

210.Сайдулаева Р.Р.Об одном методе интегрирования системы уравнений в частных производных второго порядка с двумя сингулярными линиями, /Р.Р.Сайдулоеева//- Докл. АН РТ- 1993- т.35(№8). с.421-426.

220. Сайдулаева Р.Р. Системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями, /Р.Р.Сайдулоеева//- Кандидатская диссертация Душанбе, ТГУ, 1994, 95с..

221. Сайдулаева Р.Р. Системы уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными линиями, /Р.Р.Сайдулоеева//- Докл. АН РТ- 1993- т.36(№1). с.10-13.

222.Саркисян С.Ц. Свойства решений систем Коши-Римана с нелинейными правыми частями. /С.Ц.Саркисян//-Докл. АН Арм.ССР,1963,т.36(№13)- с.161-
223.Сафаров Д.Х..Двоякопериодические решения эллиптических систем первого порядка на плоскости. /Д.С.Сафаров//-Дифференциальные уравнения. !981,т. 17, №8, с.1468-1477.

224.Сафаров Д.Х.Двоякопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения. Душанбе, Дониш, 2012, 190с.

225.Сафаров Дж.С, О формуле обращения одного двумерного сингулярного интегрального уравнения. / Дж.Сафаров//- Материалы межд.н.конф, посвящённой 90-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г., 2018, с. 143-146

226. Сафаров Д.С.,Кулобиев М.Двояко периодические решения для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка на плоскости с нагруженными членами. /Д.С.Сафаров//-

227.Сафаров Д.С.,Миратов С.К. Точное решение уравнения ван дер поля-дуффинга с постоянными отклонениями аргумента. /Д.С.Сафаров//-

228.Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т1,2,Наука, М.:1976.

229. Смирнов В.И. Курс высшей математики./ В.И.Смирнов//-М.:Наука, 1981, т.3, ч.2-672 с.

230. Смирнов В.И. Курс высшей математики. /В.И.Смирнов//-М.: Наука- 1981- т.4, ч.2-547 с.

231. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, -Л.; ГИФ-МЛ- 1959 - 465с.

232.Тасмамбетов Ж.Н. О развитии исследований систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. –Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии инновации в науке и образовании»,- Актюбе, 2015,с.6-17.

233.Терсенов С.А. Об одном уравнении эластического типа, вырождающемся на границе. /С.А. Терсенов//-ДАН СССР,1977,т.145, №4, с. 670-673.

234.Титчмарш Е. Теория функций. М.:-«Наука», ГРФМЛ,-1980,-463с.

235.Усмонов З.Д. Обобщённый системы Коши-Риман с сингулярной точкой. Душанбе, Таджик НИИНТИ, 1993, 245 с.

236.Усманов Н. Некоторые задачи сопряжения с производными второго порядка, а также их сингулярные случаем для гармонических функций на

Плоскости // ДАН Тадж. ССР, 1992, т. XXXV, № 5-6. с. 237-240.

237. Усманов Н. Сингулярные случаи задачи сопряжения гармонических функций с производными второго порядка включительно. Тезисы докладов республиканской научной конференции дифференциальные уравнения и их приложения, Куляб, 1991, с.162-163.

238. Усманов Н. О задачах сопряжения гармонических функций с разрывными коэффициентами и разомкнутыми контурами // ДАН РТ, 1996, т. 39, №9-10, с. 61-38.

239. Усманов Н, Муминов А. Об одной краевой задаче сопряжения гармонических функций и её особый случай. Дифференциальные уравнения и их приложения. Выпуск 7, Душанбе , 1988, с. 85-89.

240. Усманов Н. Решение задачи сопряжения гармонических функций с разрывными коэффициентами. Материалы международной конференции, посвященной 10-ой годовщине независимости Республики Таджикистан и 90-летия профессора М. А. Субхонкулова. Методы теории функции и их приложения, Душанбе 2000, с. 45-46.

241.Усманов Н., Саидов Б.Б. Сингулярные точки в граничном условии задачи сопряжения гармонических функций для полуплоскости // Доклады АН Республики Таджикистан, 2011, т. 54, №12, с. 977-983.

242. Усманов Н., Саидов Б. Б. О задачах сопряжения гармонических функций в сингулярном случае // Вестник Национального университета. Серия естественных наук. №1/2(81). 2012, с. 53-56.

243. Усманов Н., Михайлов Л. Г. Сингулярные краевые задачи сопряжения // ДАН России 2002, т.387. №3, с. 309-313.

244.Усманов Н. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного

сопряжения.- Мат. Заметки. Якутск. 2001, т.8. Выпуск. 2. с. 46-47.

245. Усманов Н., Саидов Б.Б. Задача линейного сопряжения гармонических функций для полуплоскости. Материалы международной конференции, посвящённой 20- летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных математиков А. Мухсинова, А. Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева Худжанд- 2014, №2(29),ч.1, с. 254-256.

246. Усманов Н., Саидов Б.Б. Об одной краевой задаче сопряжения гармонических функций // Вестник Финансово-экономического института Таджикистана. Серия естественных наук. № 2. Душанбе, 2014, с. 119-123.

247.Усманов Н., Саидов Б.Б. Задача сопряжения гармонических функций с сингулярними точками на контуре. Материалы республиканской научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию Кулябского государственного Университета им. Абуабдулло Рудаки. Куляб-2015, ч.1, с. 184-188.

248. Усманов Н., Саидов Б.Б. Некоторые задачи сопряжения гармонических функций с сингулярными точками на контуре // Вестник Национального университета. Серия естественных наук. №1/1(156). 2015, с. 58-61.

249. Усманов Н., Саидов Б.Б. Сингулярная граничная задача сопряжения гармонических функций //Доклады АН Республики Таджикистан, 2015, т. 58, № 12. с. 1078-1083.

250.Умарали Б. Формула представление решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. /Б.Умарали//-Материалы межд.н.конф., посвящённой 90-детию академика АН РТ Михайлова Л.Г. 2018, с. 152-153.

251. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.-/Г.М.Фихтенгольц// -М.;Наука-Т.1-3, 1970.

252.Фомин С.В., Беркинблит М.Б. Математические проблемы в биологии. Наука, ГРФМЛ., 1973,110 с.

253.Фукс Б.А. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. -М:, ГИФМЛ, 1963, 424 с.

254.Хидиров Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной точкой, когда характеристическое уравнение

имеет кратные корни. /Х.С.Хидиров//- Материалы межд.конф посвящённой 60-летию академика Шобозова М.Ш.Душанбе, 2012, с.176-179.

255. Хидиров Х.С. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной точкой, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. /Х.С.Хидиров//-Докл. АН РТ, 2009, т.52,№7,с.507-512.

256.Хёрмандер Р. Уравнения с частными производными. -М.; Мир- 1981-277с.

257.Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.; Мир-1970 - 720 с.

258.Холикова М. Б. Сингулярные случаи задачи сопряжения гармонических функций, разрешимых в замкнутой форме // Вестник педуниверситета, Душанбе. 2002, №4, с. 87-90.

259.Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Наука, ГРФМЛ, -Москва, 1959,576 с.

260. Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопредел¨енной системе с сингулярной

точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Академии наук Респуб-лики Таджикистан. – 2004. – Т.47. – №4. – С. 56-61.

261. Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопредел¨енной системы со сверхсингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2003. –

Т.46. – №3 - 4. – С. 15-21.

262. Шамсуддинов Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами. /Ф.Шамсуддинов//- Вестник ДГПУ, 2013, №5(54), с.97-100.

263.Shamsuddinv F.M. About an over determined system second ordervith singular coeffitient. /F/Shamsuddinov//, Iran, Annual Matematics conf., 2013, p.211-212.

264.Шамсуддинов Ф.М.,Хомиддин С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами. Сб. статей и межд.н.-пр. конференции , посвящённой 80-летию чл.корр. профессора Э.М.Мухаммадиева, в кн.с.211-215.

265.Ширинбеков М. О некоторых дифференциальных системах на плоскости.

/М.Ширинбеков//-В кн.: Труды международной научно-теоретической конференции, посвящённой 10-летию РТСУ. Душанбе -2005- с. 70-71.

266. Шоймкулов Б.М. О некоторых линейных переопределённых систем трёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой./Б.Шоймкулов//- В кн. Труды международной научно-теоретической конференции, посвящённой 10-летию РТСУ.- Душанбе-2005- с.72-74.

267.Шоймкулов.Б.М. Переопределённые системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной слабой сингулярной и сверх-сингулярной линией. Материалы международной научной конференции посвящённой 70-летию проф. Джангибекова Г. Душанбе, ТНУ,2020, С.331-336.

268.Шоймкулов Б.М. О некоторых переопределённых системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя

сингулярными линиями. Материалы межд.конф. посвящённой 60-летию академика АН РТ Шабозова М.Ш. Душанбе, 2012, С.223-223.

269.Шарипов Б. Некоторые квазилинейные совместные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, интегрируемые в квадратурах./Б.Шарипов//- Докл. АН Тадж.ССР- 1980- т.23, (№3)- с.126-130.

270.Шарипов Б. Об интегрируемости в квадратурах системы, в полных дифференциалах с одной искомой функцией от трёх независимых переменных.-/Б.Шарипов//-Докл. АН Тадж. ССР-1983-т.26(№7)- с.418-423.

271.Шарипов Б. О некоторых системах в полных дифференциалах, интегрируемых явно. /Б.Шарипов// -Докл. АН Тадж.ССР-1984- т.27(№7)- с.365-368.

272.Шарипов Б. Явные формулы представления решений некоторых квазилинейных систем Коши-Римана с двумя комплексными переменными.-.Докл. АН Тадж. ССР, 1985, т.28(№1), с. 16-20.

273.Шарипов Б. О некоторых системах в полных дифференциалах, разрешимые в квадратурах, в случае произвольного числа независимых переменных. –/Б.Шарипов//-Докл. АН Тадж. ССР- 1987- т.30(№9)-с.555-560.

274.Шарипов Б.,Рахимов Р.М. О представление многообразия решений некоторых о.с.К.- Р. со многими независимыми переменными.-Душанбе,1987, Всесоюзная конф. по теор. и приложениям функ.-дифференциальных уравн-й., Кн.-Тезисы докл, с.148-149.

275. Шарипов Б. Об одной формуле представления переопределённых систем уравнений в частных производных от двух искомых функций на плоскости.

/Б.Шарипов//- Депонированная работа в Таджик НИИНТИ для журнала Известия АН Тадж. ССР,Душанбе, 1990, 8с.

276. Шарипов Б. Формула представление решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах./Б.Шарипов//- Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.- Сб. научных трудов. ДГПУ-Душанбе-1991-с. 188-193.

277.Шарипов Б., Явные формулы представления решений одного класса обобщённой системы Коши-Римана произвольного числа переменных. /Б.Шарипов//- Душанбинский Гос.пед. институт- Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (Сб.н.трудов-Душанбе 1993(вып.2)- с. 77-81.

278. Шарипов Б., Формулы представления решений некоторых нелинейных обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- Душанбинский гос.пед. институт- Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения. Сб.н.трудов(вып 4)- Душанбе -1996, - с.104-109.

279.Шарипов Б. Формулы представления решений одного класса нелинейных обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- Международная конференция.- Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами- Душанбе -1996- с.97.

280.Шарипов Б., Раджабов Б.Х. Интегральное представление решений одного класса переопределённой системы дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами на плоскости. Душанбе, Сб. тезисов, респ. конференции в ДИПТ,1997, - с.246-248.

281.Шарипов Б., Раджабов Б.Х. Представление решений одного класса переопределённой системы диф. Уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- Международная конференция.- Дифференциальные уравнения и их приложения- Душанбе- 1998 - с. 86.

282.Шарипов Б.,Юсупов С.Ю. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений в решении некоторых задач экономики.- /Б.Шарипов//- В кн.: Сб. Материалов международной научно-практической конференции “Использование экономико- математических методов в науке, управлении и образовании.- Новосибирск, 2009, с. 353-358.

283.Шарипов Б. Формулы представления решений одного класса системы диф. уравнения произвольного порядка с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- Международная конференция посвящённой 80-летию проф. М.А.Субхонкулова. Методы теории функции и их приложения- Душанбе, 2000, - с.44.

284.Шарипов Б. Формулы представления решений одного класса переопределённой системы дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//-Международная конференция посвящённой 60-летию Темура Сабирова,Дифференциальные уравнения и их приложения. –Душанбе- 2000, с.116.

285.Шарипов Б. О явно решении одного класса переопределённой системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Сборник ст. Донишгохи Тичоратии Точикистон, 2001, вып. 2,-с.126- 128.

286.Шарипов Б.Формулы представления решений одного класса переопределённой системы дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- Труды международной конференции по качественным исследованиям диф. ур. и их приложений, посвящённой 10-летию РТСУ- Душанбе- 2005- с. 64-66.

287.Шарипов Б.,Менгниев А. Эффективность теории дифференциальных уравнений в решении задач рекламы. / Шарипов Б.,Менгниев А. //,Математические заметки, 2007, ЯГУ, Том 14, Вып.1.С.122.

288.Шарипов Б. Об одном методе интегрирования уравнения типа полных дифференциалов функций двух комплексных переменных. /Б.Шарипов// В кн.:- Труды республиканской научной конференции Дифференциальные и нтегральные уравнения, посвящённой 70-летию академика АН РТ Раджабова Н., -Душанбе- 2008- с.87-90.

289.Шарипов Б. Формула представления решений одного класса уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов// -В кн.: Вестник ИПС (№18) – Душанбе- 2008- с. 5-13.

290. Шарипов Б. Явное представление многообразия решений одного класса системы в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов// - Вестник пед. Университета- 2009(№1)- с.92-100.

291. Шарипов Б. Об одном методе интегрирования одного класса полных дифференциалов системы произвольного числа переменных с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов// -В кн.: сб. научных работ, по международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и их

приложений”, посвященной 60-летию академика К.Х.Бойматова- Душанбе- - 2010- с. 112-113.

292.Шарипов Б. Об одном методе интегрирования одного класса полных дифференциалов системы произвольного числа переменных с сингулярными коэффициентами.- /Б.Шарипов// - В кн.: Вестник, ИПС(№ 20)- посвящённой 70-летию профессора М.И.Исмати**,** -Душанбе- 2010- с.121-132.

293.Шарипов Б. Формула представления решений одного класса нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками в трёх-мерном пространстве.- /Б.Шарипов// - В кн. Вестник ИПС- 2010(№20)- с.2-12.

294.Шарипов Б. Формула представления решений одного класса нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками в трёхмерном пространстве. /Б.Шарипов// -Докл. АН Респ. Таджикистан- 2010- т. 53(№9)-с. 666-673.

295.Шарипов Б. О некоторых системах в полных дифференциалах с сингулярными точками в пространстве. /Б.Шарипов// - Докл. АН Респ. Таджикистан- 2010- т.53(№10)- с.759-765.

296.Шарипов Б. О формулах представления решений некоторых нелинейных систем в полных дифференциалах с сингулярной точкой. /Б.Шарипов//. - Докл. АН Респ. Таджикистан- 2011- т.54(№3)-с.186-193.

297.Шарипов Б. Об одной обобщённой системе Коши- Римана с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//. -Современные проблемы математического анализа и теории функции. Кн. Материалы международной конференции, посвящённой 60- летию академика АН РТ Шабозова М.Ш- 2012- с. 221-222.

298. Шарипов Б. Об одном классе нелинейных обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//-Душанбе- Вестник Педагогического университета- 2012(№2)- с. 9-13.

299.Шарипов Б. Формула представление решений одного класса уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- Вестник Таджикского Технического университета- 2012- №3- с. 7-12.

300. Шарипов Б. Формула представление решений одного класса уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. /Б.Шарипов//- Вестник Таджикского Технического университета им. академика М. С. Осими – 2013--№4- с.15-20.

301. Шарипов Б. О формулах представление решений одного класса нелинейных системы уравнений в полных дифференциалах. /Б.Шарипов//- Современные проблемы теории функции и дифференциальных уравнений. В кн: Материалы международной конференции, посвящённой 85- летию академика Михайлова Л.Г.,- Душанбе- 2013- с. 153-155.

302. Шарипов Б. О некоторых системах уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. /Б.Шарипов//- Душанбе, - Вестник пед. университета, - 2013(№5)- с. 3-8.

303. Шарипов Б. Явное представления многообразия решений одного класса системы в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. /Б.Шарипов//- 7-я международная научно - практическая конференция ТТУ им. академика М.С.Осими- 2014- с. 132-139.

304.Шарипов Б. Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. / Б.Шарипов//-Межд.конф-я посвящённой 20-летию Конституции РТ,Ходжент, Номаи Донишгох, 2014, с.272-274.

305.Шарипов Б. Представление решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками. /Б.Шарипов//- Труды международной конференции “ Функциональные пространства и теория приближения функций” посвященной 110-летию со дня рождения академика С. М.Никольского. Москва- 2015- с.250-252.

306. Шарипов. Б. Об одном классе нелинейных обобщённых систем Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. /Б,Шарипов Б.//-Дифференциальные уравнения- 2015- том 51(№ 9)- с. 1252-1256.

307.Шарипов Б., Рахимов Р.М., Мирзоев Н. Приложение системы уравнений в полных дифференциалах к решении некоторых задач экономики. Материалы научно- методических конф.,посвящённой 25-летию незав.РТ, Душанбе, 2016, ФЭИТ, Вестник,2016, с.17-21.

308. Шарипов Б.Об одном классе нелинейной обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными точками ./Б,Шарипов Б.//- Труды международной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 25- летию независимости РТ в Филиале МГУ им. М.В. Ломоносова-2016- с.66-68.

309. Шарипов Б., Михайлова Л.Г. Об уравнениях в полных дифференциалах с сингулярными точками. /Б.Шарипов, Михайлов Л.Г.//- Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа. В кн:

Материалы республиканской научно-теоретической конференции, посвящённой 70- летию профессора Сатторова А.С.- Душанбе- 2013- с. 71-76.

310.Представление многообразие решений одного класса обобщённой системы Коши-Римана. Материалы межд.конф. посвящённой 80-летию В.Я.Стеценко, Душанбе, 2015, с. 152-155.

311. Шарипов Б. Представления решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. /Б.Шарипов//-Казанский федеральный университет. Международная конференция посв. Юбилею Широковых А.П.и П.А. по «Алгебре, анализ и геометрии»-2016-с. 154-156.

312. Шарипов Б. Представление решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. / Б.Шарипов//-Душанбе, 2016, Вестник, №2(6), с. 177-182.

313. Шарипов Б., Михайлов Л.Г. Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярной линией.[Текст] / Михайлов Л.Г,,Шарипов Б.// -Дифференциальные уравнения. Москва, Минск, 2016,том 52, №6, с. 696-700.

314.Шарипов Б. Об одном классе нелинейной обобщённой системе Коши-

Римана с сингулярными коэффициентами. Вестник Казанского государственного технологического университета, им. А.Н.Туполева, 2016, №2, с.94-99.

315. Шарипов Б. Представления решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярной точкой. /Б.Шарипов//- Вестник ФЭИТ, 2017,№1(9), с 137-148.

316. Шарипов Б. Представления решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярной точкой. /Б.Шарипов//- Вестник ФЭИТ, 2017,№1(9), с 137-148.

317.Шарипов Б.,Назарова З. О решении одного класса уравнений в частных производных с сингулярными точками. Материалы межд.науч.конф., посвящённой 25-летию ВСРТ, с.134-136.

318.Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Об одном классе линейных обобщённых систем Коши –Римана с сингулярными коэффициентами./Б.Шарипов//- Вестник Филиала МГУ им. М.В.Ломоносова в г.Душанбе,2018,№3(2), с.68-77.

319. Шарипов Б. О поведении решений одного класса нелинейных систем в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами./Б.Шарипов//- Материалы межд.конф. посв. 70-летию ТНУ и 80-летию академика АНРТ Раджабова Н., Душанбе, ТНУ, 2018, с.333-339.

320.Шарипов Б. О формуле представление решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными линиями. / Б.Шарипов//- Межд. конф. посвящённой 90-летию академика Л.Г.Михайлова,2018, Душанбе, с.189-191.

321.Шарипов Б. Формула представление решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. Материалы научно-пр. конф. посвящённой 27-летию РТ,2018, с.92-98.

322.Шарипов Б. Формула представление решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. Вестник ТГФЭУ, 2018, №1(13), с.54-60.

323. Шарипов Б. Джумаев Э.Х. Представление решений одного класса переопр. обобщённой системы Коши- Римана с сингулярными точками. Совр. Проблемы математики и ее приложений. /Б.Шарипов //-Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова в г.Душанбе, 2018, с.240-241.

324. Шарипов Б.,Раджабов Б.Х,Карорматулои М. Тасвири мачмуи халхои як системаи муодилахо дар дифференсиали пурра. Материалы н.-пр. конференции «Роль математики в экономике», посв.27-летию РТ, 29.06. 2018, с.113-121.
325.Шарипов Б. , Джумаев Э.Х.Формула представления решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. Межд. науч.конф. «Уфимская математическая школа», Уфа, 2019, с.262-263.

326.Шарипов Б.Формула представление решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами. ./Б.Шарипов//-Материалы межд.конф. посв. 80-летию профессора

Имомназарова Б.. Душанбе, 2019,с. 290-294.

327.Шарипов Б. Представление многообразие решений одного класса систем уравнений в полных дифференциалах с сингулярной точкой. ./Б.Шарипов//-Душанбе, Вестник ТГФЭУ, 2019, с.77-86.

328. Шарипов Б. Представление решений одного класса системы уравнений в комплексной плоскости. ./Б.Шарипов//-Душанбе, Вестник ТГФЭУ, 2019, 1,, 1,(3), с.23-30.

329.Шарипов Б., Рахимов Р.М. Формула представления решений одного класса системы дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. Душанбе, Вестник ТГФЭУ, 2019, №1,(3), с.30-39

330.Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Формула представление решений одного класса систем дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. ./Б.Шарипов//-Материалы межд.конф. посв. 60-летию академика АНРТ Рахмонова З., чл.кор. АНРТ Исокова С.А., Душанбе, 2019,с. 285-286.

331.Шарипов Б., Неъмонов С. Об одном методе представления решений систем уравнений в частных производных второго порядка на плоскости.- Материалы Респ. н/пр. конференции, 2019, Душанбе, Тезисы конф. с. 340-343.

332.Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Представление решений одного класса переопределённой системы Коши-Римана. ./Б.Шарипов//-Материалы межд.конф. посв. 80-летию академика АНРТ Бойматова К.Х.. Душанбе, 2020,с. 311-312.

333.Шарипов Б. Об одном классе нелинейной обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. / Б.Шарипов //- Вестник Дагистанского государственного университета. Серия 1 Естественные науки, 2020, т. 35, Вып.1,- с.35-41.

334. Шарипов Б.Представление решений одного класса переопределённой системы Коши-Римана. Материалы международной конференции, посвящённой 70-летию со дня рождения академика, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова К.Х. ,Душанбе, 2020.с. ……..

335. Шарипов Б. О представления решений одного класса системы дифференциальных уравнений в комплексной плоскости.- Душанбе, 2020,Кн. Совр. проб. Теории диф.ур.. материалы респ.конф. посв.80-летию пр.М. Исмати.- с.28-32.

336. Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Формула о представления решений одного класса эллиптической уравнений второго порядка.- 2020, Душанбе.-Кн. Совр. проб. Теор. диф.ур. материалы респ.конф. посв.80-летию пр.М. Исмати.-с.64-69.

337.Шарипов Б. Об одной нелинейной обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Уфимская математическая школа-2021. Материалы международной конференции, т.2., с.118-119.

338. Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Формула представление решений одного класса систем уравнений в комплексной плоскости. Материалы международной научной конференции, посвящённой , Казанский университет РФ??????????????.

339. Шарипов Б., Рахимов Р.М. О формуле представление решений одного класса системы дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. Сб.ст.

Междун.научно-практич. Конф. «О применении диф.ур. при решении прикладных задач»,посв. 80-летию чл.корр. АН РТ Мухаммадиева Э.М.ТНУ, Душанбе, 2021, с.135-138.

340. Шарипов Б.Представление решений одного класса системы дифференциальных уравнений в комплексной плоскости. . Сб.ст. междун. научно- практич. Конф. «О применении диф.ур. при решении прикладных задач»,посв. 80-летию чл.корр. АН РТ Мухаммадиева Э.М.ТНУ, Душанбе, 2021, с.215-218.

341**.** Шарипов Б.Джумаев Э.Х.Представление решений некоторых системы дифференциальных уравнений. . Сб.ст. междун.научно-практич. Конф. «О применении диф.ур. при решении прикладных задач»,посв. 80-летию чл.корр. АН РТ Э.М.Мухаммадиева, ТНУ, Душанбе, 2021, с.222-227.

342**.** Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Представление решений одного класса систем уравнений с частными комплексной плоскости с сингулярными коэффициентами. Республиканская научно-практ.конф. посв.30-летию РТ, Душанбе, МУТС, 04.12.2021г. с.

343. Шарипов Б., Джумаев Э.Х.,Шомирзоев А. Приложение теории дифференциальных уравнений в решение некоторой задачи экологии.

Сб.науч.труды в Межд.н-пр. конференции посвящённой памяти А.Хотамова, Душанбе, - 2022. с. 127-136.

344.Mihailov L.G., Kreis V. On an over determined system of partial differential equatios. / Mihailov L.G .// -Dokl. AN SSSR, T, 228,1976, №6, s. 917-921.

345.Goursat E. Lecons sur lintegration des rquations aux derives partielles du premier ordre. Paris, 1921,- 454p.

346. Tutschke W. Partielle komplexe differential gleichungen in eine und mehreren komplexen variablen.- VEB, Deutscher verlad der Wissenschaften, Berlin,1977,308s.

347. Frobenius G. Uber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen . / Frobenius G. // -Journal fur die rein eund angewandte Mathenatik. – 1873. – V.76. – P.214-235.

348.Nevanlinna R. Sur les equations aux derives particles du premier ordre.-C.R. Acad.sci, 1958,v. 247,№22, p/1953-1954.

349. Pompein D. Sur une classed de phonetics dune variable complexes. Rend. Circolo mat.- Palermo, 1942,-V, 33-P., 108-113; 1913,-V, 35,-P, 277-281.

350. Юнусов М.Исследование интегро-дифференциальных систем, связанных с биосистемой «хишник-жертва». Кн.: Тезисы республиканской конференции по уравнениям мат.- физики, ТГУ им. В.И.Ленина, 1983, с. 186-187.

351.Юнуси М. Полиномиальные представления дифференциальных уравнений с экстремальными свойствами. Душанбе, межд. конф., посвящённой 85-летию академика НАН РТ, Михайлова Л.Г., 2013, 160-164.

352. Юнуси М. Об уравнениях с экстремальными свойствами и их приложения. Современные проблемы математики и ее приложений. Межд.конф. Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова в г.Душанбе,2016, 149-156.

353, Ynusi M, Numbers Tree Models and some its applications in Economics. Современные проблемы математики и ее приложений. Межд.конф. Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова в г.Душанбе,2016, 156-158.

354. Юнуси М. Оценка численности биологических популяции на основе принципа максимума. Современные проблемемы мат.анализа и т. функций. Матер. межд. конф., посвящённой 60-летию Шобозова М.Ш.,ТНУ,2012,116-117.

355.Юнуси М. О свойствах одного класса модел.ных функционалов и информационные пространства связанные с ними. Современные проблемемы мат.анализа и т. функций. Матер. межд. конф., посвящённой 60-летию Шобозова М.Ш.,ТНУ,2012,231-233.

356.Юнуси М.Исследование одной системы интегро-дифференциальной уравнений в частных производных и ее применения в проблеме устойчивого развития. Международная конференция посвящённой 80 летию академика НАН РТ Раджабова Н. , Душанбе, 2020, ТНУс. 367-371.