МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН

ТАДЖИКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРАВА, БИЗНЕСА И ПОЛИТИКИ

На правах рукописи

УДК 537.611+530.145+004.942+51 ББК:22(2Р) М-92

МУХАМЕДОВА ШОИРА ФАЙЗУЛЛОЕВНА ФОРМИРОВАНИЕ И ДИНАМИКА КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

СО СПИНАМИ S $\geq 1/2$

Диссертация

на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и

комплексы программ

Научные консультанты:

Рахими Фарход Кодир - академик Национальной академии наук Таджикистана, доктор физикоматематических наук, профессор

Муминов Хикмат Халимович академик Национальной академии наук Таджикистана, доктор физикоматематических наук, профессор

ХУДЖАНД – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	. 2
ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	. 5
ВВЕДЕНИЕ	. 6
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ	12
ГЛАВА 1	20
КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ S≥1/2 СИСТЕМ	20
§1.1. Обзор ключевых теоретических и экспериментальных исследований в	
области нелинейных локализованных магнитных систем	20
§1.2. Модели с полной интегрируемостью	30
§1.3. Солитоны и нелинейные уравнения Шрёдингера	34
§1.4. Устойчивость солитонных решений	39
§1.5. Диссипативные солитоны	44
ГЛАВА 2	56
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИ	Й
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА	56
§2.1. Постановка задачи математического моделирования	56
§ 2.2. Общая структура метода делинеаризации	58
§2.3. Анализ скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с убывающими	
граничными условиями	72
§2.4. Решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными	
граничными условиями	74
§2.5. Двухсолитонное решение векторного нелинейного уравнения Шрёдингера	c
потенциалом $2\varepsilon \varphi 12 - b2 - \lambda \varphi 22$	31
§2.6. Решения векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с	
самосогласованным потенциалом $\phi 1 \phi 2 + \phi 1 \phi 2$	36

ГЛАВА 3
ИССЛЕДОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ШРЁДИНГЕРА С УБЫВАЮЩИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ
§3.1. Методика численных расчетов
§ 3.2. Устойчивость и динамика солитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера
§ 3.3. Об особенностях бризеров в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера 103
§ 3.4. Диссипативные структуры скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера
ГЛАВА 4 126
МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С КОНДЕНСАТНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ
УСЛОВИЯМИ
§ 4.1. Двухсолитонные конфигурации скалярного нелинейного уравнения
Шрёдингера с притягивающим потенциалом 127
§ 4.2. Диссипативные бризеры в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера с отталкивающим потенциалом
§ 4.3. Диссипативные солитоны бризерного типа в скалярном нелинейном
уравнении Шрёдингера с притягивающим потенциалом 138
§ 4.4. Особенности формирования и эволюции диссипативных бризеров в
скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера 154
ГЛАВА 5
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ
ВЕКТОРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА161
§ 5.1. Математическое моделирование векторного нелинейного уравнения
Шрёдингера с потенциалом 161

ux, t = 2εφ1(x, t)2 – b2 – λ φ2(x, t)2
§5.2. Моделирование многосолитонных решений векторного нелинейного
уравнения Шрёдингера с учетом самосогласованного потенциала 176
$\phi 1 \phi 2 + \phi 1 \phi 2$
§ 5.3. Диссипативные солитоны векторного нелинейного уравнения Шредингера с
самосогласованным потенциалом $\phi 1 \phi 2 + \phi 1 \phi 2$ в условиях внешней подкачки
§5.4. Формирование пульсаций диссипативных солитонов векторного
нелинейного уравнения Шрёдингера с самосогласованным потенциалом $\phi 1 \phi 2 +$
φ1φ2
§5.5. Странный аттрактор в векторном нелинейном уравнении Шрёдингера 224
ВЫВОДЫ
ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ
РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
РЕЗУЛЬТАТОВ
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
А) Список использованных источников
Б) Работы автора по теме диссертации
Приложение 1
Приложение 2

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВНУШ	- векторное нелинейное уравнение Шрёдингера
ДС	- диссипативные солитоны
КС	- когерентное состояние
КУГЛ	- комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау
КУСФ	- комплексное уравнение Свифта-Хоенберга
НУШ	- нелинейное уравнение Шрёдингера
ОКС	- обобщенные когерентное состояние
ПБ	- преобразование Беклунда
ПС	- пульсирующие солитоны
СГ	- синус-Гордон
СНУШ	- скалярное нелинейное уравнение Шрёдингера
УЛЛ	- уравнение Ландау–Лифшица
ΦП	- фазовый портрет
XC	- хаотический солитон

введение

Актуальность темы исследования. Изучение процессов формирования и динамики когерентных структур в нелинейных диссипативных системах со спинами S≥1/2 является актуальной задачей современной науки. Это обусловлено как её фундаментальной значимостью, так и перспективами применения в передовых технологиях. Особое внимание в современных точных науках уделяется открытым квантовым системам [169], взаимодействующим с окружающей средой, где диссипация, наряду с нелинейными эффектами, играет ключевую роль в самоорганизации и создании устойчивых когерентных структур. Системы с высокими значениями спина (S>1/2) являются уникальным объектом исследований благодаря сложной внутренней структуре и широким возможностям для изучения как фундаментальных, так и прикладных аспектов физики [174]. Системы данного класса обладают сложной нелинейной динамикой, в рамках которой формируются когерентные структуры, такие как солитоны, вихри и доменные области. Исследование этих структур представляет собой важный этап в развитии квантовой теории открытых систем [235]. В последние годы изучения нелинейных закономерностей природы, охватывающих явления устойчивых локализованных когерентных стуруктур, было разработано множество эффективных методов для исследования их характеристик и получения аналитических и численных описаний. Эти численные методы, позволяют эффективно использовать мощность современных компьютеров для поиска решений эволюционных уравнений, обеспечивая получение точных и устойчивых решений нелинейных задач и существенно расширяя возможности моделирования сложных динамических систем в различных условиях.

Значимость таких исследований определяется не только их фундаментальной природой, но и достижениями в экспериментальных методах, включая спектроскопию и управление квантовыми состояниями, которые предоставляют возможности для прямого наблюдения и точного контроля спиновых систем высокой размерности. Кроме того, актуальность данной тематики подчёркивается

её междисциплинарным характером, охватывающим различные области науки и технологий. Исследования когерентных спиновых структур находят широкое применение в различных областях науки и техники. В магнитных материалах формирование и динамика доменных структур играют ключевую роль в определении их свойств [132]. В спинтронике использование спиновых состояний для передачи и обработки информации открывает новые горизонты в разработке вычислительных устройств. В квантовых технологиях, включая квантовые вычисления и симуляции, системы со спинами S>1/2 благодаря расширенным степеням свободы являются перспективными для реализации многоуровневых кубитов. Кроме того, в квантовых сенсорах когерентные спиновые состояния обеспечивают высокую точность измерений, что делает их незаменимыми для современных измерительных технологий [51, 71, 132].

В процессе работы изучен опыт исследований следующих авторов: Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г., Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х., Рахими Ф.К., Махсудов А.Т., Шокир Ф.Ш. и соавторов [47, 49, 94, 103, 107, 114, 116, 136, 248], Ахмедиев Н., Анкевич А. [12], японских учёных Nozaki, К., Веkki N. [263, 264], Земленая Е.В., Барашенков И.В. [58, 298, 299] и других авторов.

В основном, в этих работах были исследованы качественно новые нелинейные явления, изученные с помощью математического моделирования и компьютерных экспериментов. Указанные исследования были сосредоточены на поиске локализованных решений интегрируемых нелинейных уравнений в системах с высокими спинами, а также на анализе их устойчивости и динамики взаимодействия. В работах также были рассмотрены когерентные структуры в диссипативных системах с учетом эффектов диссипации и внешней подкачки, а также при ненулевой скорости движения солитона. Эти условия позволили исследовать поведение солитонных решений в более реалистичных физических ситуациях, где потери энергии и внешние источники играют существенную роль. При таких условиях было проанализировано влияние внешних факторов на стабильность и структуру солитонов, что открывает новые перспективы для

изучения динамики когерентных структур в нелинейных средах с высокими спинами.

Практическое значение таких исследований включает разработку квантовых вычислительных систем, создание спинтронных устройств нового поколения и развитие высокоточных квантовых сенсоров. Эти направления являются приоритетными в современной науке и технике, подчёркивая актуальность изучения процессов самоорганизации и формирования когерентных структур в спиновых системах высокой размерности. Таким образом, исследования, направленные на изучение формирования и динамики когерентных структур в нелинейных диссипативных системах со спинами S≥1/2, не только способствуют прогрессу фундаментальной науки, но и открывают перспективы для решения ключевых прикладных задач.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Формирование и динамика когерентных структур в нелинейных диссипативных системах являются важной областью исследований в современных точных науках. Теоретические и экспериментальные работы в этой сфере охватывают широкий круг вопросов, включая процессы самоорганизации, образование устойчивых пространственно-временных структур и влияние нелинейных эффектов в открытых квантовых системах. Однако, несмотря на значительный прогресс, многие аспекты остаются малоизученными, особенно в контексте систем с высокими значениями спина S>1/2.

Базовые концепции описания когерентных структур сформировались благодаря достижениям классической и квантовой теории нелинейных систем. Исследования, посвящённые формированию солитонов, вихревых структур и доменных паттернов, оказали существенное влияние на развитие этой области, включая работы в магнетиках, жидких кристаллах и плазме. Фундаментальные принципы нелинейных диссипативных систем были заложены трудами выдающихся учёных, таких как Н. Н. Боголюбов и И. Пригожин [261], исследовавших процессы самоорганизации в открытых системах. Их открытия не

только способствовали развитию фундаментальных исследований, но и сформировали основу для современных прикладных разработок.

В квантовых системах особый интерес представляет динамика спиновых состояний и их взаимодействие с окружающей средой. Для S=1/2 разработаны эффективные методы описания когерентной эволюции и диссипативных процессов, включая формирование когерентных структур и процессы утраты когерентности. Однако в системах с S>1/2 возникает ряд новых сложностей, связанных с высокой размерностью состояний и увеличением числа степеней свободы. Это требует принципиально новых подходов к моделированию и анализу.

Современные исследования высокоспиновых систем сосредоточены на ключевых направлениях: спектроскопии спиновых нескольких состояний, многоспиновых взаимодействий изучении И теоретическом описании диссипативных эффектов, например, с использованием матриц плотности. Однако вопросы, касающиеся самоорганизации и динамики когерентных структур в нелинейных системах с S>1/2, остаются недостаточно изученными. Наиболее детально разработаны классические задачи магнетизма, но их обобщение на нелинейные квантовые системы высокой размерности требует новых математических и численных методов.

Сложность таких исследований обусловлена необходимостью учитывать нелинейные эффекты, диссипацию и влияние окружающей среды. Методы, успешно применяемые для S=1/2, зачастую оказываются недостаточно эффективными в случае S>1/2, что требует разработки новых подходов. Одной из ключевых задач является определение условий и механизмов формирования устойчивых когерентных структур под действием нелинейных взаимодействий. Также важным аспектом является влияние диссипации на когерентность спиновых состояний, особенно на длительных временных интервалах, что играет решающую роль в создании устойчивых квантовых устройств.

Кроме того, значительное внимание уделяется многоспиновым взаимодействиям, которые формируют пространственно-временные паттерны и нелинейные эффекты. Их изучение открывает новые перспективы для понимания

сложных квантовых структур и их свойств. Важной задачей остаётся разработка методов управления когерентными структурами в реальных физических системах, включая квантовые устройства и материалы. Решение этих проблем позволит не только углубить понимание спиновых систем высокой размерности, но и внести важный вклад в развитие численных методов для нелинейных квантовых систем. Разработанные теоретические модели и алгоритмы создадут новые инструменты для анализа и управления когерентными структурами, что откроет перспективы их применения в передовых квантовых технологиях, материаловедении и других высокотехнологичных областях.

В рамках настоящей диссертации планируется создание новых математических моделей и численных методов, способных описывать механизмы формирования и динамику когерентных структур в высокоспиновых системах. Особое внимание будет уделено условиям нелинейной диссипации и разработке программных комплексов для численного моделирования этих процессов. Ожидается, что полученные результаты существенно расширят современные представления о спиновых системах высокой размерности и их возможностях в квантовых технологиях.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Исследования, выполненные автором, проводились в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информационнокоммуникационных технологий и программирования ТГУПБП по теме "Развитие фундаментальных наук в сфере информационных, коммуникационных и программных технологий".

Результаты исследования соответствуют приоритетным направлениям указанных программ, направленным на изучение механизмов формирования когерентных структур в сложных нелинейных системах, а также на разработку методов их математического моделирования. Данная работа представляет собой значимый вклад в изучение фундаментальных свойств когерентных структур в нелинейных диссипативных средах, с особым акцентом на системы с высокими значениями спина (S>1/2). Исследование их динамики, механизмов формирования

когерентных структур и влияние диссипативных процессов позволяет глубже понять особенности таких систем. Кроме того, развитие методов численного анализа для описания процессов в спиновых системах высокой размерности подчёркивает актуальность работы в контексте современных научных задач, включая математическое моделирование сложных физических систем.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Целью настоящей диссертации является разработка теоретических моделей и методов анализа формирования и динамики когерентных структур в нелинейных диссипативных системах со спинами S≥1/2, а также выявление ключевых механизмов, определяющих их поведение и свойства в условиях нелинейных взаимодействий, диссипации и подкачки. Для достижения поставленной цели планируется изучить механизмы формирования когерентных структур в системах со спинами S≥1/2 под воздействием внешних полей. Предполагается разработать теоретические модели [70], описывающие их динамику с учётом диссипативных процессов, а также провести анализ влияния многоспиновых взаимодействий и связанных с ними нелинейных эффектов на устойчивость когерентных состояний. Особое внимание будет уделено изучению влияния окружающей среды на формирование когерентных структур, включая процессы диссипации и подкачки внешними полями. В рамках исследования будут разработаны численные методы моделирования, позволяющие анализировать динамику моделей описываемых систем с высокими спинами, в условиях диссипации, подкачки и ненулевой скорости движения. Разработка алгоритмов и численных методов, реализуемых В виде программных комплексов, обеспечивающих эффективное моделирование моделей. Формулирование рекомендаций по их применению в квантовой информатике, спинтронике и создании высокоточных квантовых устройств.

Задачи исследования. Для достижения цели исследования в рамках данной диссертационной работы поставлены следующие задачи:

- проведение анализа существующих подходов к математическому моделированию когерентных структур в нелинейных диссипативных системах;

- изучение современных теоретических и экспериментальных исследований, посвящённые динамике систем со спинами S≥1/2 и выявление проблем в описании процессов самоорганизации и формирования таких структур;

- разработка математических моделей, описывающие механизмы формирования когерентных структур в спиновых системах высокой размерности, учитывая диссипативные процессы и влияние внешних полей, с последующим созданием численных методов для их анализа;

- изучение динамики когерентных структур, включая разработку алгоритмов для оценки их устойчивости при различных значениях внешних параметров, а также проведение численного моделирования временной и пространственной эволюции этих структур в спиновых системах с S = 1/2.

- исследование влияния диссипативных процессов в моделях систем со спинами S>1/2, а также изучение формирования и динамики устойчивых когерентных структур;

- проведение анализа многосолитонных решений, определив механизмы их влияния на формирование пространственно-временных системах, и выделение критических параметров, обеспечивающих устойчивость когерентных структур;

- оценка практической значимости полученных результатов, выявление перспективных областей применения когерентных структур в квантовых вычислениях и спинтронике, а также формулирование рекомендаций для их использования в управлении спиновыми системами с помощью разработанных математических моделей и программных комплексов;

Объект исследования. Объектами исследования являются устойчивые когерентные структуры в нелинейных диссипативных системах, а также квантовые системы с высоким значением спина.

Предмет исследования. Предметом исследования данной диссертации являются процессы формирования, эволюции и взаимодействия когерентных структур, таких как диссипативные солитоны, в нелинейных диссипативных ферромагнитных системах со спинами S≥1/2.

Научная новизна исследования. Все основные результаты диссертации являются новыми, обладают теоретической и практической значимостью и заключаются в следующем:

- разработаны математические модели и алгоритмы для описания динамики когерентных структур в нелинейных диссипативных системах с высокими спинами, включая многосолитонные решения скалярных и векторных версий НУШ;

 развитие численных методов для решения нелинейных эволюционных уравнений с учётом диссипации и внешней подкачки для точного моделирования поведения локализованных возбуждений;

- выявлены влияния внешних осциллирующих полей на устойчивость и динамику солитонных решений в нелинейных диссипативных системах;

- формирование теоретической базы для описания нелинейных диссипативных систем с высокими спинами, открывающей новые возможности для изучения взаимодействий когерентных структур и солитонов;

Теоретическая и научно-практическая значимость исследования

Теоретическая и научно-практическая значимость исследования заключается в следующем:

1. Теоретическая значимость:

- разработаны и обоснованы новые подходы к исследованию многосолитонных решений для скалярного и векторного НУШ, применимых к системам с высокими спинами, с учётом диссипации и подкачки внешними магнитными полями;

 проведённые исследования позволили существенно углубить понимание влияния потенциалов, механизмов подкачки и диссипации, а также ненулевой скорости солитонов на процессы формирования, устойчивости и динамики локализованных решений в нелинейных диссипативных ферромагнитных системах, что способствовало выявлению ключевых закономерностей их эволюции и условий устойчивого существования;

- исследование механизмов бифуркации, таких как удвоение периода, переход к хаосу и появление хаотических солитонов, с учётом взаимодействий, характерных для высокоспиновых систем;

- обоснование механизмов взаимодействия нелинейных эффектов, диссипативных процессов и подкачки энергии, приводящих к формированию сложных структур, включая пульсирующие и диссипативные солитоны предельного цикла.

2. Научно-практическая значимость:

 полученные результаты могут быть использованы для описания реальных физических процессов в нелинейных диссипативных ферромагнитных системах с высокими спинами, включая их поведение под воздействием внешних полей;

- изучение влияния ненулевой скорости солитонов на их динамику открывает новые возможности для управления нелинейными волнами и создания устойчивых локализованных структур в высокоспиновых системах;

- разработанные численные методы моделирования, учитывающие эффекты диссипации, подкачки, внешних полей и скорости солитонов, позволяют предсказывать их поведение и оптимизировать режимы работы таких систем;

- результаты работы могут быть применены в задачах квантовой информатики, спинтроники и материаловедения, где управление устойчивостью и динамикой солитонов играет ключевую роль;

- выявленные закономерности и механизмы взаимодействий когерентных структур могут быть использованы для оптимизации процессов в сложных нелинейных системах, требующих баланса между диссипацией и подкачкой энергии;

Положения, выносимые на защиту:

- на основе теории разностных схем создание алгоритма и набор компьютерных программ для численного моделирования, предназначенных для построения и анализа новых многосолитонных решений скалярного и двухкомпонентного векторного НУШ с учётом процессов диссипации, внешних магнитных воздействий и ненулевой скорости перемещения.

- полученные результаты численных исследований, показывающие, что в СНУШ с убывающими граничными условиями, затуханием и внешней подкачкой возможно формирование устойчивых диссипативных солитонов при ненулевой

скорости движения, что способствует образованию солитоноподобных структур с пульсирующим поведением и удвоением периода;

 результаты численных экспериментов о возможности формирования долгоживущих диссипативных солитонов, описываемых СНУШ с потенциалом притяжения при наличии подкачки и диссипации, свидетельствует об образовании когерентных структур и формировании классического аттрактора в фазовом пространстве системы;

- полученные впервые численные решения СНУШ с притягивающим потенциалом и конденсатными граничными условиями при наличии диссипации и подкачке, представляющие собой долгоживущие диссипативные бризеры предельного цикла, движущиеся с ненулевой скоростью центра масс составляющих;

 демонстрация возможности передачи сигнала в трёхуровневых системах в форме бризеров - особых солитонных структур, представляющих собой связанные возбужденные состояния с характерной внутренней динамикой;

 смоделированные процессы обмена информацией между квантовыми битами (кютритами) с использованием ВНУШ, имеющие важное значение для разработки квантовых вычислений.

Степень Достоверность достоверности результатов. результатов обеспечена диссертационного исследования сходимостью разработанных численных схем, совпадением расчетных данных тестовых задач с результатами других авторов, устойчивостью численных моделей, а также сохранением точности интегралов движения, включая интегралы импульса, числа частиц и энергии. В тестовых вычислительных экспериментах они сохранялись с высокой точностью: $\frac{\Delta P}{P} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-6} - 10^{-7}$, что подтверждает надежность предложенных методов. Дополнительно, достоверность результатов подкрепляется их соответствием литературным данным.

Степень соответствия диссертации паспорту научной специальности. В диссертационной работе исследуются задачи разработки новых алгоритмов, численного моделирования и совершенствования приближенных методов для

исследования математических моделей процессов и явлений, описываемых нелинейными эволюционными уравнениями в нелинейных диссипативных ферромагнитных системах с высокими спинами. Исследование включает в себя использование современных вычислительных технологий для анализа динамики когерентных структур, а также развитие методов численного решения для многосолитонных решений, описывающих взаимодействие волн и волновых пакетов. Эти задачи соответствуют паспорту научной специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (часть III, пункты 1–6, 9, 10).

Личный вклад соискателя учёной степени. Задачи исследования были сформулированы в сотрудничестве с научным консультантом работы, которые предоставляли консультативное содействие на всех этапах исследования. Результаты диссертационной работы, изложенные в разделах «Научная новизна» и «Положения, выносимые на защиту», получены лично автором.

Апробация и реализация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы были обсуждены и получили положительные отзывы на технологий семинарах кафедры информационно-коммуникационных И программирования факультета инновационных технологий и бухгалтерского учёта ТГУПБП. a также на следующих международных и республиканских конференциях: Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 2016 по 2023 гг; VI Международной конференции современные проблемы физики, посвящённой 110-летию академика Академии наук Республики Таджикистан С.У. Умарова и 90-летию академика Академии наук Республики Таджикистан А.А. Адхамова Душанбе, «Эр-граф», 2018; Республиканская научно-практическая конференция на тему «Современные пути защиты информации в процессе развития информационных и коммуникационных технологий», посвященная годам 2020-2040 – «Двадцатилетие изучения и развития естественных, точных И математических наук в области науки и образования в Республике Таджикистан», Душанбе. - 24-25 апреля 2020 года; VII Международной конференции

«Современные проблемы физики». Душанбе: изд-во «Дониш», 2020.; IV Международная научно-практическая конференция "Scientific community: interdisciplinary research" Busse Verlag GmbH (Hamburg, Germany), 18-19 мая 2021; Международной научно – практической конференции "Математика в современном мире" ТГУПБП, г. Худжанд, 19-20 апреля 2024 г., а также в нескольких научных республиканских конференциях.

Некоторые результаты данной диссертации использованы при чтении специальных курсов и выполнении дипломных работ для студентов и магистрантов.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертационной работы отражены в 44 публикациях, перечень которых представлен в конце диссертации. Среди них: 2 монографии, 16 статей, опубликованных в рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК минобрнауки Российской Федерации. Кроме того, зарегистрировано 7 свидетельств о государственной регистрации компьютерных программ.

Структура диссертации и объём. Диссертация состоит из списка сокращений и обозначений, введения, общей характеристики исследования, пять глав, выводов, рекомендаций по практическому использованию результатов, списка цитированной литературы из 300 наименований, списка публикаций автора по теме диссертации из 44 наименований, 2 приложений и занимает 286 страниц машинописного текста. Главы разбиты на параграфы и разделы. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация разделов, рисунков, таблиц и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер разделов, рисунков, таблиц и формул в данном параграфе.

Благодарность. Автор глубоко благодарит научного консультанта академика НАНТ, д.ф.-м.н., профессора Рахими Фарход Кодира за бесценные руководство, поддержку и ценные советы, которые сыграли ключевую роль в успешном завершении данной работы.

Следует отметить, что автору посчастливилось работать под руководством академика НАНТ, д.ф.-м.н., профессора <u>Муминова Хикмат Халимовича</u> - выдающегося учёного и наставника, чьи глубокие знания, проницательность и искренняя поддержка вдохновляли на научные открытия.

ГЛАВА 1

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ S≥1/2 СИСТЕМ

В данной главе представлено квазиклассическое описание спиновых систем с S \geq 1/2, основанное на методах обобщённых когерентных состояний и групповых симметриях SU(2) и SU(3). Рассмотрены основные принципы перехода от квантово-механического к классическому описанию, включая усреднение спиновых гамильтонианов и вывод уравнений движения [69, 131, 141]. Особое внимание уделяется влиянию анизотропии, обменных взаимодействий и нелинейных эффектов на динамические свойства спиновых систем [31]. Показано, что использование квазиклассических методов позволяет описать солитонные и мультипольные возбуждения, возникающие в системах со значениями спина S \geq 1/2. Глава закладывает основу для дальнейшего исследования нелинейной динамики спиновых систем [11], описываемых обобщёнными уравнениями Ландау–Лифшица [86, 87, 242], и демонстрирует их применимость к задачам теоретической и математической физики [82, 83].

§1.1. Обзор ключевых теоретических и экспериментальных исследований в области нелинейных локализованных магнитных систем

Магнитные явления привлекают внимание не только с научной стороны, но и как перспективное направление исследований, углубляющее знания о строении материи. Магнетизм, активно внедряемый в различные сферы, уже стал ключевым фактором научно-технического развития, особенно в электронике [215, 216]. Это обусловлено широким применением магнитных кристаллов в микроэлектронике и технологиях сверхвысоких частот, где определяющее значение имеют их нелинейные свойства. Например, производительность отдельных компонентов современных компьютеров напрямую связана с динамикой цилиндрических магнитных доменов, которые представляют собой яркий пример сильно нелинейных структур в ферромагнетиках [218]. В данном параграфе представлен

обзор актуальных достижений в области магнетизма, затрагивающий как теоретические основы, так и их практическое применение. Ключевым инструментом теоретического анализа для изучения разнообразных типов магнетиков остаются модели Гейзенберга [120, 221, 222, 258].

Гейзенберг впервые указал на обменное взаимодействие, предполагая, что между спинами S_i и S_j *i*-ого и *j*-ого атомов существует взаимодействие с характерной энергией следующего вида [222]:

$$\chi = -2JS_i \cdot S_i, \tag{1.1.1}$$

где J - обменный интеграл. Интеграл J достигает значений порядка 10³⁻¹ $(\sim 10^{3} \text{K})$, превосходя в 10³ раз [160] дипольное взаимодействие, и, следовательно, может быть ответственен за образование спонтанной намагниченности. В случае J>0 обладающее более низкой энергией устанавливается состояние c параллельными спинами S₁ и S₂, а при J <0 устойчива антипараллельная ориентация К антиферромагнетизму. Поскольку спинов, что приводит обменное взаимодействие по своей природе является близкодействующим, то J принимает наибольшее значение, если S_i и S_i принадлежат ближайшим соседям. Благодаря склонности к параллельному упорядочению [15, 74, 129, 159, 161], все соседние спины в конечном итоге ориентируются параллельно, что приводит к формированию спонтанной намагниченности. Согласно теории Вейса [291], молекулярное поле предполагалось пропорциональным средней намагниченности, что эквивалентно предположению, что обменное взаимодействие между любыми двумя спинами S_i и S_j, независимо от расстояния между ними, остаётся Ha практике обменные взаимодействия неизменным. являются близкодействующими, поэтому по мере приближения температуры к точке Кюри общая параллельность спинов существенно нарушается, однако сохраняется среди ближайших соседей, образующих кластеры с параллельно ориентированными спинами. Если учитывать, что проекция S_z спина S=1/2 может принимать только

два значения: +1/2 или -1/2, то такая система спинов описывается моделью Изинга [226].

Солитоны, как правило, описываются решениями нелинейных классических уравнений, что приводит к вопросу о взаимосвязи коллективных нелинейных эффектов в классических и квантовых моделях. В частности, возникает разработки необходимость последовательной процедуры, позволяющей объединить модели квантовой статистической механики [127], включая квантовые решётчатые модели Гейзенберга, с классическими полевыми теориями. Иногда такой переход реализуется посредством формальной замены спинового оператора S на классический вектор \vec{S} [73, 269]. Существует значительный объем теоретических и экспериментальных исследований, посвящённых динамическим свойствам магнитных кристаллов при низких температурах. Значительная часть работ ориентирована на изучение спектров магнонных возбуждений (линейных волн) в различных системах. В качестве примера можно отметить обзорные работы [24], а также более поздние исследования [29, 137]. Следует отметить, что в работе [252] были приведены аргументы в пользу применения преобразований Холштейна-Примакова лля изучения одномерных моделей при низких температурах.

Следует подчеркнуть, что наиболее востребованной моделью, применяемой для изучения нелинейных возбуждений частицеподобного характера в магнетиках, является модель, предложенная Ландау и Лифшицем [242], уравнение Ландау– Лифшица (УЛЛ) [267], что в последние годы достигнут значительный прогресс в изучении нелинейной динамики магнитоупорядоченных кристаллов [232]. Это уравнение позволяет самосогласованно описывать ориентационную динамику вектора намагниченности $\vec{S}(r)$, который удовлетворяет условию $|\vec{S}(r)| = const$. Следует отметить, что УЛЛ, строго говоря, обосновано для спиновых систем с S=1/2 [156].

В случае изотропии УЛЛ может быть представлено в следующем виде:

$$i\hbar S_t = \frac{1}{2}[S, S_{xx}]$$
 (1.1.2)

где введен

$$S = \begin{pmatrix} S^z & S^- \\ S^+ & -S^z \end{pmatrix} = S \cdot \sigma \tag{1.1.3}$$

В данном случае $S = (s^x, s^y, s^z)$ представляет собой векторы намагниченности, а $S^{\pm} = S^x \pm iS^y$ обозначают соответствующие проекции классического спинового вектора или, более точно, вектора намагниченности (при условии S=M).

$$\widehat{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 - матрицы Паули

Это уравнение (1.1.2) даёт нам макроскопическое описание динамики намагниченности в ферромагнетиках и представляет собой уравнение движения вектора намагниченности в недиссипативной среде. С другой стороны, на микроскопическом уровне наиболее широко используемой моделью для описания магнитных характеристик кристалла является спиновая модель магнетика Гейзенберга-Френкеля:

$$H = -\sum_{i,k} J_{ik} \hat{S}_i \hat{S}_k \tag{1.1.4}$$

Где J_{ik} являются обменными интегралами, \hat{S}_j спиновые операторы атома в J-той стороне.

Вопрос соответствия между классическими и квантовыми представлениями, а также переход от квантово-механического описания ферромагнетика (1.1.4) к его классическому макроскопическому представлению (1.1.2), остаётся достаточно сложной задачей. Эта проблема была предметом обсуждения у многих исследователей (см., например, [235] и соответствующие ссылки). Вместе с тем наличие в спиновом гамильтониане (1.2.4) таких физических параметров, как обменные интегралы, константы анизотропии, значения спина атома и другие величины, делает его особенно эффективным инструментом для анализа магнетиков, начиная с квантово-механического уровня. Работа [258] посвящена исследованию локализованных (частицеподобных) возбуждений в магнетиках, которые описываются солитонными решениями нелинейных дифференциальных уравнений. В частности, наличие таких возбуждений в спиновых системах позволяет объяснить ряд особенностей, связанных с рассеянием медленных нейтронов на магнетиках, динамическими структурами форм-факторов и другими явлениями [215, 216, 246], возникающими при взаимодействии спиновой подсистемы с фононной.

Вывод уравнений движения для вектора намагниченности (или классического вектора спина), начиная с его микроскопического описания, представляет собой непростую задачу. Формальная процедура перехода от спинового гамильтониана к квазиклассическому описанию, как правило, основывается на методах бозонизации спинового гамильтониана, например, с использованием преобразований Гольдштейна-Примакова [179, 245] или аналогичных подходов. Далее полученный бозонный гамильтониан усредняется с применением когерентных состояний Глаубера [177, 266]. В результате данной процедуры получается классическая гамильтонова модель. Как показано в работе [177], этот подход считается допустимым и корректным для магнетиков с достаточно большими значениями спина (S≫1 или δS≫1 [14, 245], где δ константа анизотропии). Однако стоит отметить, что при таком методе возникновение нефизических степеней свободы из-за усечения бесконечной серии расширений может привести к неконтролируемым ошибкам [177].

Для магнетиков со спином S=1/2, а также для систем со спином S>1/2 при наличии только обменной анизотропии (т.е. при подавлении мультипольной спиновой динамики), возможно прямое применение обобщённых когерентных состояний, построенных на основе операторов группы SU(2) и SU(3)

соответственно. В таких случаях процедура бозонизации спинового гамильтониана не требуется, поскольку как гамильтониан, так и когерентные состояния описываются операторами одной и той же группы. Кроме того, для магнетиков со спином S=1/2 точное применение преобразований Вигнера-Зейтца позволяет представить гамильтониан (1.1.4) через операторов Ферми, что даёт возможность, после соответствующего перехода, вывести обобщённое НУШ для амплитуд вероятности спиновых возбуждений [246].

Анализ магнетиков со значениями спина S≥1, включающий влияние одноионной анизотропии и других её разновидностей в спиновом гамильтониане (1.1.4), представляет собой более сложную задачу, поскольку возбуждаются процессы мультипольной спиновой динамики. В данном случае для полного требуется макроскопического описания магнетика использовать **4**S ДО квазиклассических параметров. Для вывода уравнений, описывающих классический спин и мультипольную динамику, необходимо применять обобщённые когерентные состояния, формируемые с использованием операторов группы SU(2S+1) (подробности можно найти в работах [82, 175, 176, 177]). В работе [258] с использованием техники SU(2) обобщённых когерентных состояний изучается взаимодействие спин-фононов В квазиодномерных магнитных кристаллах со спином S=1/2. Как уже упоминалось, результаты данного исследования применимы не только к магнетикам со спином S=1/2, но и к системам со спинами S>1/2, при условии учёта исключительно обменной анизотропии и игнорирования одноионной анизотропии для магнетиков с большими значениями спина (S≫1) [175, 176, 177].

Основной задачей является разработка системы уравнений, которая дополняет стандартные УЛЛ, учитывая влияние фоновой (упругой) подсистемы, а также исследование нелинейных локализованных (солитонных) возбуждений в рамках таких уравнений. Эти задачи можно рассматривать как начальный этап изучения вклада магнитоупругого взаимодействия в процессы медленного нейтронного рассеяния на частицеподобных возбуждениях в магнетиках. При этом динамика и структура форм-фактора солитонных решений должны быть

рассчитаны с учётом зависимости скоростей солитонов от температуры и других термодинамических и статистических характеристик.

В дальнейшем, в рамках исследования квантовых и классических моделей магнетиков с учётом магнитоупругих взаимодействий, в работе [258] была рассмотрена модель ферромагнетика Гейзенберга с одноосной анизотропией, учитывающая колебания узлов кристаллической решётки:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_S + \widehat{H}_p, \tag{1.1.5}$$

где

$$\hat{H}_{S} = -\sum_{j=1}^{N} \left(\frac{J^{0}}{2} \left(\hat{S}_{j}^{+} \hat{S}_{j+1}^{-} + \hat{S}_{j}^{-} \hat{S}_{j+1}^{+} \right) + J^{z} \hat{S}_{j}^{z} \hat{S}_{j+1}^{z} \right)$$
$$\equiv J^{0} \sum_{j=1}^{N} \left(\hat{S}_{j} \hat{S}_{j+1}^{-} + \Delta \hat{S}_{j}^{z} \hat{S}_{j+1}^{z} \right)$$
(1.1.6)

фононной частью гамильтониана, а

$$\widehat{H}_{p} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{p_{j}^{2}}{2m} + \frac{k}{2} \left(y_{j+1} - y_{j} \right)^{2} \right)$$
(1.1.7)

Здесь $\Delta = \frac{j^z - j^0}{j^0}$ - означает постоянный обмен анизотропии, а t и p - импульсом и массой атома соответственно, $|y_{j+1} - y_j|$ -смещение j-того атома от положения равновесия, k - постоянная упругости, j - индекс суммирования. В спиновом гамильтониане (1.1.6) рассмотрен упрощённый случай обменного взаимодействия, ограничивающийся взаимодействием между ближайшими магнитными узлами. Это позволяет выделить ключевые особенности влияния магнитоупругого взаимодействия на нелинейную динамику спиновых волн. В свою очередь, в

выражении (1.1.7) учтены исключительно гармонические колебания кристаллической решётки.

Для перехода к классическому описанию проводится усреднение \hat{H}_{S} с использованием обобщённых когерентных состояний группы SU(2) (ОКС) [240, 266]. В комплексной параметризации такие состояния имеют следующий вид:

$$|\xi\rangle = \prod_{j} |\xi_{j}\rangle = \prod_{j} \left(1 + |\xi_{j}|^{2}\right)^{-k} exp\{\xi_{j}\hat{S}_{j}^{+}\}|k, -k\rangle, \qquad (1.1.8)$$

где k является количеством представлений, ξ_j является параметром квазиклассического описания.

$$\left|\xi_{j}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\psi|^{2}}}\{\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\}$$
 (1.1.9)

- одноузельное КС,

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\langle \xi | \xi \rangle = 1$ - референтное состояние (вакуум).

Спиновые операторы, усреднённые использованием SU(2) ОКС, принимают следующую форму:

$$S_{j}^{+} = S_{j}^{-} = \langle \hat{S}_{j}^{+} \rangle = \frac{2\xi_{j}}{1 + |\xi_{j}|^{2}}, \qquad S_{j}^{z} = \langle \hat{S}_{j}^{z} \rangle = \frac{1 - |\xi_{j}|^{2}}{1 + |\xi_{j}|^{2}}.$$
 (1.1.10)

Отметим, что параметризация возможна и с применением более привычных угловых переменных

$$\xi_j = \tan\left(\frac{\theta_j}{2}\right) \exp\{i\varphi_j\}$$
(1.1.11)

- связь стереографической и эйлеровой параметризации.

Используя вектор (1.1.8), в работе [258] была выполнена процедура усреднения спинового гамильтониана \hat{H}_S , в результате чего было получено следующее выражение:

$$H_{s} = \langle \xi | \hat{H}_{s} | \xi \rangle = -s^{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{2J^{0} (\xi_{j} \xi_{j}^{*} + \xi_{j} \xi_{j+1}^{*}) + J^{z} (1 - |\xi_{j}|^{2}) (1 - |\xi_{j+1}|^{2})}{(1 + |\xi_{j}|^{2}) (1 + |\xi_{j+1}|^{2})}$$

и гамильтониан системы принимает вид:

$$H = \langle \xi | \hat{H} | \xi \rangle = H_s + H_p \tag{1.1.12}$$

Для получения непрерывного предела гамильтониана (1.1.12) в работе [258] предполагалось, что в разложении обменного интеграла J^z учитываются только линейные члены, при этом изотропный обменный интеграл не зависит от деформации решётки (J^0 =const)

$$J^{z} = J^{3} + \bar{J}^{3} |y_{j+1} - y_{j}|$$
(1.1.13)

Также в разложении ξ_{j+1} не принимаются во внимание члены выше второй степени по a_0 .

$$\xi_{j+1} = \xi_j + a_0 \xi_{jx} + \frac{a_0^2}{2} \xi_{jxx} + \cdots, \quad y_{j+1} = y_j + a_0 y_{jx} + \cdots$$

Как будет показано далее, указанные ограничения напрямую приводят к стандартным УЛЛ для магнитной части гамильтониана [258]. УЛЛ демонстрирует высокую точность для произвольных значений S и остаётся применимым, если релятивистские взаимодействия значительно меньше обменных [87, 1231. поскольку в таких случаях их влияние можно аппроксимировать через эффективные поля анизотропии. Однако даже при выполнении этого условия нередко требуется более точное описание, что обусловило разработку безмодельных теорий линейной динамики вектора намагниченности, основанных исключительно на принципах симметрии [10, 40, 43, 54], обеспечивающих универсальный подход к анализу таких систем.

Во многих случаях поля и взаимодействия высшей мультиплетности, размороженного орбитального возникающие из-за частично движения, оказываются сравнимыми по величине или даже превышают магнитное поле, обусловленное билинейным обменом. Такие кристаллы демонстрируют и резонансные свойства, уникальные статистические отличающиеся ОТ характеристик слабоанизотропных магнетиков, причём их поведение существенно зависит от конкретного значения спина [38, 42, 75, 121]. Особенно выражены различия между системами с целыми [26, 123] и полуцелыми [25, 123, 133, 135] значениями спина, где ключевую роль играет взаимодействие акустических (магнонных) ветвей с оптическими, обладающими схожими энергетическими уровнями.

Количество оптических ветвей определяется величиной спина S, что влияет на основное состояние и спектр элементарных возбуждений, выходящих за рамки воздействия только эффективных полей. Органичное объединение всех конкурирующих взаимодействий, независимо от их природы, возможно в рамках квантовой теории, позволяющей с помощью ограниченного числа параметров достоверно объяснять широкий спектр экспериментальных данных, относящихся к сильноанизотропным магнетикам [123]. Хотя данная теория уже достаточно развита [26, 123], её методы оказываются слабо применимыми для описания

сильновозбуждённых и неоднородных состояний, характерных для задач нелинейной динамики.

Для решения таких задач требуется динамическое описание, аналогичное УЛЛ, то есть уравнения движения, обладающие высокой физической наглядностью и удобством применения. При этом важно, чтобы такие уравнения были обоснованы на уровне микротеории, сопоставимой с УЛЛ для S=1/2.

§1.2. Модели с полной интегрируемостью

Интегрируемым динамическим системам посвящено множество фундаментальных монографий и обзорных работ [6, 22, 23, 32, 44, 46, 57, 66, 122, 155, 244, 246, 294]. В данном случае мы ограничимся лишь кратким освещением некоторых аспектов этой теории. Учитывая разнообразие трактовок понятия интегрируемых систем в научной литературе, далее мы будем придерживаться следующего определения:

Под системой интегрируемой понимается система, допускающая представление Лакса, обладающая счётным числом интегралов движения и подходящая для изучения динамики с использованием методов обратной задачи рассеяния, задачи Римана, $\bar{\partial}$ - проблемы и метода конечнозонного интегрирования, что характеризует её так называемой S - интегрируемостью. Кроме того, к интегрируемым системам относятся те, которые могут быть решены с использованием переменных анзаца, демонстрируя (C)замены ИЛИ интегрируемость.

Полностью интегрируемой системой считается гамильтонова система, в которой можно ввести переменные действия и угла, позволяющие выразить гамильтониан в терминах этих переменных. Рассмотрим некоторые свойства интегрируемых систем на примере НУШ, оставляя подробности для работ [6, 44, 47, 60, 122, 155, 248]. Основной целью этого рассмотрения является определение используемой терминологии и напоминание читателю ключевых фактов о НУШ, которые будут полезны для последующего изложения.

$$i\partial_t \varphi + \partial_x^2 \varphi + 2\mathbf{g}|\varphi|^2 \varphi = 0, \qquad (1.2.1)$$

Функция $\varphi(x,t)$, являясь комплекснозначной, относится к гамильтоновым системам, так как обладает набором канонически сопряжённых переменных $\varphi, \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ обозначает комплексное сопряжение. Соответственно, для системы (1.2.1) введены обобщённые на континуальный случай скобки Пуассона.

$$\{\varphi, \bar{\varphi}\} = i\delta(x - y), \tag{1.2.2}$$

и гамильтониан

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx [(\partial_x \bar{\varphi} \cdot \partial_x \varphi) - g(\bar{\varphi} \varphi)^2], \qquad (1.2.3)$$

для которого справедливы уравнения Гамильтона

$$\partial_t \varphi = \{H, \varphi\} = -i \frac{\delta H}{\delta \overline{\varphi}}, \qquad \partial_t \overline{\varphi} = \{H, \overline{\varphi}\} = i \frac{\delta H}{\delta \varphi}.$$
 (1.2.4)

В совокупности факты (1.2.2)–(1.2.4) подтверждают принадлежность системы (1.2.1) к классу гамильтоновых. Отмечено, что для полного определения динамической системы необходимо задать также граничные условия, которые в дальнейшем будут рассматриваться преимущественно в контексте быстроубывающего случая, то есть:

$$\varphi(x,t) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1.2.5}$$

Кроме того, функция $\varphi(x, t)$ предполагается бесконечно дифференцируемой и убывающей на пространственной бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Уравнение (1.2.1) может быть представлено как условие совместимости следующей переопределённой системы линейных матричных уравнений:

$$\partial_t y = A_0(x, t; \lambda) y, \qquad \qquad \partial_x y = A_1(x, t; \lambda) y, \qquad (1.2.6)$$

на вектор-функцию

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Которое следует из уравнения (1.2.6) приравниванием перекрёстных производных $\partial_t \partial_x y = \partial_x \partial_t y$. В результате формируется условие нулевой кривизны.

$$\partial_t A_1 - \partial_x A_0 + [A_1, A_0] = 0 \tag{1.2.7}$$

Это одно из фундаментальных соотношений метода обратной задачи. Отметим, что матрицы A_1 и A_0 размерности 2×2 в уравнении (1.2.6) зависят от произвольного комплексного параметра λ , который выступает в роли спектрального параметра задачи. Условие (1.2.7) должно быть выполнено для всех значений λ . Явное выражение для матриц A_1 , A_0 задаётся следующими формулами:

$$A_{1} = -i\lambda\sigma_{3} + P, \quad \sigma_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad P = i \begin{pmatrix} 0 & \overline{\varphi} \\ \varphi & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_{0} = B - 2\lambda P + 2i\lambda^{2}\sigma_{3},$$

$$B = \begin{pmatrix} -i|\varphi|^2 & \partial_x \bar{\varphi} \\ -\partial_x \varphi & i|\varphi|^2 \end{pmatrix}$$
(1.2.8)

Известно, что системы, допускающие представление нулевой кривизны, обладают бесконечным множеством аддитивных интегралов движения (законов сохранения), а при наличии внутренних симметрий — целой серией подобных наборов. Формально такие законы можно выразить через уравнения непрерывности

$$\dot{\rho}_n + \partial_x J_n = 0, \quad n = 1, 2, ...,$$
 (1.2.9)

Функционалы ρ_n и j_n , которые можно представить в виде полиномов от полей и их пространственных производных, интерпретируются соответственно как «плотности» и «токи» системы. Интегрируя уравнение (1.2.9) по х, получаем соответствующие интегралы движения.

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x, t) dx, \quad j_n \to 0 \quad \text{при} |x| \to \infty$$
 (1.2.10)

Если интегралы I_n находятся в инволюции относительно скобки Пуассона (1.2.2) и удаётся каноническим образом ввести угловые переменные, то система считается полностью интегрируемой, а сами интегралы из уравнения (1.2.10) выступают в роли переменных действия.

В ряде случаев удается решить обратную задачу рассеяния для оператора

$$L = i\sigma_3(\partial_x + i\lambda\sigma_3 - A_1),$$

иными словами, задача сводится к восстановлению потенциала, которым является искомая функция $\varphi(x, t)$, на основе данных рассеяния. Это означает, что для таких систем можно решить задачу Коши, полностью определив поведение интегрируемой системы. Локализованные регулярные решения интегрируемых систем, соответствующие дискретной части спектра оператора L, называют солитонами. Для интегрируемых систем также разработан квантовый метод обратной задачи рассеяния, позволяющий находить спектры как основных, так и возбужденных состояний [150, 283].

Таким образом, современные подходы к описанию локализованных структур, представленных в виде солитонов в интегрируемых моделях, выглядят следующим образом. Следует отметить, что, несмотря на значительный прогресс в развитии данного подхода, описанная схема на практике последовательно реализуется только для полностью интегрируемых (1+1)-мерных моделей, таких как уравнение КдФ, НУШ [61, 64], уравнение СГ и другие.

Эта специфика существенно сужает область возможных физических приложений и одновременно стимулирует активный поиск альтернативных методов для изучения интегрируемых моделей, пригодных для описания многомерных солитонов. Среди таких методов можно отметить задачи Римана [23, 57], конечнозонное интегрирование [46, 57, 79], преобразования Дарбу, а также различные подходы, основанные на теоретико-групповом и алгеброгеометрическом анализе [46, 294].

§1.3. Солитоны и нелинейные уравнения Шрёдингера

Солитоны представляют собой устойчивые волновые структуры, которые сохраняют свою форму при распространении и взаимодействии [16, 23, 144]. Они играют важную роль в широком спектре физических систем: от магнитных материалов до плазмы и оптических волноводов. Солитоны впервые были описаны в работах Забуски и Крускала (1965) [53], Дразина и Джонсона (1989) [45] которые исследовали устойчивые нелинейные волны в физических системах. Их идея были

расширены на магнитные системы, где солитоны связаны с динамикой спиновых волн, как показано в классических исследованиях Ландау и Лифщица (1973) [86, 87], Питаевского и Лифщица [128], а также Фадеева и Тахтаджяна (1977) [160], которые разработали гамильтоновы модели для спиновых систем. Важную роль в описании солитонов в системах с НУШ сыграли работы Захарова и Шабата (1972) [294, 295] и М. Абловиц и Х.Сегур (1981) [7]. Они предложили методы решения НУШ, включая симметричные решения типа sech², применимые к оптическим и квантовым системам. Развитие этой идеи привело к введению модели Яджимы и Ойкавы (1976) [293], которая описывает взаимодействие двух компонент в нелинейных средах. Асимметричные потенциалы, такие как 1-tanh², были предложены Нишикавой (1980) [262] для моделирования локализованных структур в плазме.

Как правило, НУШ применяется для описания различных физических процессов, связанных с нелинейными явлениями, где допустимыми решениями выступают гармонические волновые пакеты следующего вида:

$$\varphi(x,t) = Aexp[i(kx - \omega(k)t)]$$
(1.3.1)

с достаточно малой амплитуды *А*. Нелинейность среды оказывает влияние на амплитуду в уравнении (1.3.1), что вызывает постепенные изменения волны как в пространстве, так и во времени, модулируя её быстро осциллирующую (высокочастотную) несущую компоненту. Основная идея вывода НУШ заключается в применении слабо нелинейных разложений дисперсионных соотношений, которые, в отличие от линейного подхода, учитывают зависимость характеристик волны от её амплитуды. Обычно рассматриваются две различные постановки задачи:

$$\omega = \omega(k; |A|^2), \ k \in \mathbb{R},$$
 начальная задача, (1.3.2a)

ИЛИ

$$k = k(\omega; |A|^2), \quad \omega \in \mathbb{R},$$
 краевая задача. (1.3.26)

Разлагая (1.3.2) в ряд Тейлора в окрестности некоторых ω_0 , k_0 имеем

$$\omega = \omega_0 + \frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_0 (k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\Big|_0 (k - k_0)^2 + \frac{\partial \omega}{\partial |A|^2}\Big|_0 |A|^2 + \cdots,$$

ИЛИ

$$k = k_0 + \frac{\partial k}{\partial \omega} \Big|_0 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \Big|_0 (\omega - \omega_0)^2 + \frac{\partial k}{\partial |A|^2} \Big|_0 |A|^2 + \cdots$$

В пространстве Фурье-образов для волн (1.3.1) разложение представимо в операторном виде в силу соотношений

$$\omega - \omega_0 \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad k - k_0 \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (k - k_0)^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

т.е. в виде оператора НУШ, действующего на амплитуду А:

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_{0}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\omega}{\partial k^{2}}\Big|_{0}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} - \frac{\partial\omega}{\partial |A|^{2}}\Big|_{0}|A|^{2}\right]A = 0$$
(1.3.3a)

И

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial \omega}\Big|_{0}\frac{\partial}{\partial t}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}k}{\partial \omega^{2}}\Big|_{0}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} + \frac{\partial k}{\partial |A|^{2}}\Big|_{0}|A|^{2}\right]A = 0$$
(1.3.36)

Уравнение (1.3.3а) описывает временную эволюцию узкого пакета несущих волн с действительными значениями k. Примитивный способ его вывода находит обобщение в методе многомасштабных (двухвременных) разложений, который предполагает введение наряду с «быстрыми» переменными x и t для несущей
волны, набора «медленных» переменных $X_n = \in^n x$, $T_n = \in^n t$ ($\in \ll 1$) для описания более плавных изменений [44].

Уравнение (1.3.3б) описывает пространственное распространение узкого волнового пакета с заданной несущей частотой $\omega = \omega_0 \in \mathbb{R}$. Уравнения типа (1.3.1) и (1.3.3), широко известные как СНУШ, являются простейшими математическими моделями, описывающими слабо нелинейные высокочастотные волновые пакеты. Эти уравнения находят применение в моделировании различных физических самовзаимодействие процессов, включая спиновых волн (магнонов) В ферромагнетиках, возбуждения в молекулярных кристаллах, волны Лэнгмюра в плазме, парные взаимодействия точечных частиц бозе-газа при нулевой температуре и многие другие явления. Подробный вывод НУШ и описание упомянутых моделей представлены в работах [49, 248, 251].

Естественным расширением уравнения (1.4.1) является система, описывающая взаимодействие высокочастотных волновых пакетов $\varphi(x,t)$ с низкочастотными волнами u(x,t). При этом комплексная функция $\varphi(x,t)$, как и в предыдущем случае, удовлетворяет СНУШ

$$i\partial_t \varphi + \partial_x^2 \varphi + u\varphi + \mathbf{g}|\varphi|^2 \varphi = 0, \qquad (1.3.4)$$

содержащему в качестве потенциала волну низкой частоты u(x, t), описываемую одним из следующих уравнений самосогласованности.

$$\Box u(x,t) = -|\varphi|_{xx}^2$$
(1.3.4a)

(Захаров Б.Е. [56]),

$$(\partial_x + \partial_t)u(x,t) = -|\varphi|_x^2 \tag{1.3.46}$$

(Яджима-Ойкава [293]),

 $(\Box + \alpha \partial_x^4) u(x,t) - \beta \partial_x^2 u(x,t) = \pm |\varphi|_{xx}^2$ (1.3.4.в) (Маханьков В.Г. [102]). Среди перечисленных систем в двух случаях (1.3.4а, б) уравнения для низкочастотных возбуждений оказываются линейными, однако только второе из них является интегрируемым (при g = 0). Последнее уравнение (1.3.4в) является нелинейным. Интегрируемость уравнения (1.3.4в) при определённых значениях параметров α и β была установлена И.М. Кричевером [80].

Системы (1.3.4а–в) при g=0 встречаются в физике плазмы, где они используются для описания взаимодействия лэнгмюровских и ионнозвуковых волн. В более общем случае, при g≠0, эти системы возникают при изучении взаимодействия спиновых волн с фононами в ферромагнетиках [239], взаимодействия экситонов с фотонами в молекулярных кристаллах [41] и других подобных явлений.

Другое естественное обобщение НУШ (2.1.1) связано с переходом к его векторной версии по схеме $\varphi \to (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)^{tr}$ с одновременной заменой $|\varphi|^2$ на скалярное произведение.

$$(\varphi, \varphi) \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \overline{\varphi}_i \varphi_j,$$

где g_{*ij*} - метрический тензор некоторого пространства внутренней симметрии исследуемой модели [220].

Наложение условия эрмитовости на гамильтониан системы приводит к появлению некомпактных групп внутренней симметрии u(x,t). Физические модели такого рода применяются для описания динамики газа бозонов с внутренними квазиспиновыми степенями свободы, смеси бозе-газов, а также для анализа распространения плоских высокочастотных волн с круговой поляризацией в плазме и спиновых волн в многослойных ферромагнетиках [247, 248]. Интегрируемость ряда систем с ВНУШ была доказана в работах [99, 244, 245].

Наконец, объединяя указанные обобщения, получают ВНУШ

$$i\partial_t \varphi + \partial_x^2 \varphi + u\varphi + g(\varphi \varphi)\varphi = 0$$
(1.3.5)

С самосопряжённым потенциалом (низкочастотной модой), удовлетворяющим, например, одному из уравнений (2.3.4а–г).

Значительное число приложений связано с так называемым деривативным НУШ, то есть НУШ с потенциалом, содержащим производную.

$$(-i\partial_t + \partial_x^2 + iu(x,t)\partial_x)\varphi(x,t,k) = 0, \qquad (1.3.6)$$

которое привлекло особое внимание в связи с изучением (2+1)-мерных систем, таких как модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили и уравнение Ишимори [225].

§1.4. Устойчивость солитонных решений

Теперь уточним, что подразумевается под устойчивостью солитоноподобных решений, описывающих экстремальные состояния некоторых нелинейных систем. Обычно выделяют два вида устойчивости: 1) устойчивость по отношению к возмущениям начальных условий и 2) устойчивость по отношению к изменениям эволюционного уравнения, определяющего динамику системы, также известную как структурная устойчивость [21].

В первом случае проблема устойчивости была детально изучена, и для её решения разработано множество методов, как линейных, так и нелинейных. В рамках линейного подхода устойчивость обычно анализируется через исследование спектра собственных значений линеаризованного уравнения, тогда как в нелинейном подходе — через изучение неравенств Ляпунова (см. [165] и [241]). В последние годы появился значительный объём исследований, посвящённых изучению структурной устойчивости солитонов в контексте различных эволюционных уравнений и типов возмущений. Были предприняты

попытки разработать общую теорию возмущений для солитонов с использованием метода преобразования, основанного на переходе от конфигурационного пространства (*x*,*t*) к пространству рассеяния в рамках известного двухвременного формализма [68]. Однако этот подход оказался применимым лишь для ограниченного класса функционалов возмущений. Поэтому, несмотря на впечатляющие достижения в данном направлении, исследования остаются незавершёнными, особенно в контексте структурной устойчивости систем, близких к интегрируемым. Проблема устойчивости движения интегрируемой системы под влиянием негамильтонова возмущения представляет собой особенно сложную задачу [115]. В этом контексте численные методы становятся мощным инструментом для её анализа. С вычислительной точки зрения обе задачи можно рассматривать в рамках единого подхода, основанного на решении задачи Коши.

Структурно устойчивыми считаются решения, которые «достаточно долго» сохраняют свою форму на временном интервале, сопоставимом с временной шкалой характерных физических процессов исследуемой системы. При этом важно отметить, что некоторые решения без возмущений могут быстро разрушаться, уступая место новым типам решений, что особенно часто наблюдается в условиях негамильтоновых возмущений [126].

Приведем лишь несколько примеров проведенных исследований в указанных направлениях.

1. Начальная устойчивость. Следует подчеркнуть, что устойчивость истинных солитонов, как правило, обусловлена интегрируемостью соответствующих уравнений, таких как НУШ, УКП и уравнение СГ [256].

В случае лагранжевых релятивистски инвариантных уравнений, описывающих комплексные поля, помимо стандартных законов сохранения энергии и импульса, присутствует дополнительный закон сохранения «заряда». Этот закон связан с v(1) симметрией лагранжиана, где Q=0.

$$Q = Jm \int \overline{\Psi}_t \, \Psi dx. \tag{1.4.1}$$

Для нерелятивистских моделей, таких как НУШ вместо Q, как было показано ранее, сохраняется нормировка волновой функции (числа частиц) $\dot{N} = 0$, и

$$N = \int |\Psi|^2 dx \tag{1.4.2}$$

С использованием вариационного принципа при условии Q=const или N=const можно сформулировать теорему, которая задаёт достаточные условия устойчивости комплексных солитоноподобных решений (Q - теорема [224], см. также [165]).

Область устойчивости таких решений задаётся следующим неравенством

$$\frac{dlnQ}{dln\omega} < 0$$

для УКГ и

$$\frac{dN}{d\omega} < 0, \quad \omega < 0$$

для НУШ. Для вывода данных формул солитоноподобные решения рассматривались в системе покоя, где временная зависимость принимала следующий вид

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}, \qquad (1.4.3)$$

которая минимизирует гамильтониан.

Рассмотрим, к примеру, применение данных условий к УКГ и Шрёдингера с нелинейностью следующего вида

(1)
$$(\coprod + 1 - 1 - |\Psi|^{\mu})\Psi = 0$$

(2)
$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + |\Psi|^{\mu}\Psi = 0$$

Тогда для функции $\varphi(x)$ будем иметь

$$\varphi_{xx} + k^2 \varphi - \varphi^{\mu+1} = 0, \qquad k^2 = \begin{cases} 1 - \omega^2 & (1) \\ -\omega & (2) \end{cases}$$
 (1.4.4)

Зависимость Q и N от ω легко находится с помощью масштабного преобразования $x \to k^{-1}\xi, \ \varphi \to k^{2/\mu}y$. В этих переменных уравнение (1.4.4) принимает вид, свободный от κ

$$-y_{\xi\xi} + y - y^{\mu+1} = 0.$$

Следовательно,

$$N = \int \varphi^2 dx = k^{\frac{4-\mu}{\mu}} \int y^2 d\xi = k^{\frac{4-\mu}{\mu}} c(v), \qquad Q = \omega N.$$
(1.4.5)

Вычисляя производные N'_{ω} и Q'_{ω} , найдем области устойчивости

(1)
$$1 > \omega^2 > \frac{\mu}{4}$$

(2) $\mu < 4, \quad \omega = -k^2,$

в обоих случаях устойчивые солитоноподобные решения существуют лишь при μ < 4.

2. Структурная устойчивость. Несмотря на обширные исследования в этой области, проблема структурной устойчивости полевых систем всё ещё остаётся нерешённой как с практической, так и с теоретической стороны.

Первые исследования в данной области фокусировались на учёте слабой диссипации в уравнениях КДФ и НУШ. В частности, заслуживает внимания работа [241], где наглядно продемонстрировано, что динамика солитона, в частности сохранение его формы за счёт баланса между эффектами дисперсии и нелинейности, существенно определяется характером возмущающего члена. В работе [293] исследовалось поведение солитонов НУШ под воздействием затухания степенного вида $\gamma \sim \varepsilon \kappa d$ (к - волновое число). С другой стороны, удалось продемонстрировать, что только при d=2 солитон практически не изменяет свою форму со временем, что связано с масштабными свойствами НУШ. В остальных случаях, при $d \ge 2$, эволюция солитона сопровождается изменением его формы, причем этот процесс тем более выражен, чем больше коэффициент є в затухательном члене: для d=2,3,4 должны выполняться неравенства ε=0.2, ε<0.03 и $\epsilon = 0.01$ соответственно. Интересные результаты, касающиеся структурной устойчивости НУШ, были представлены японской исследовательской группой в работе [293]. Одной из ключевых особенностей, возмущённых солитонов является формирование осцилляторных хвостов на их заднем фронте.

Большинство уравнений, обладающих солитонными решениями, могут быть получены как результат решения экстремальной задачи. Пусть $\varphi(x,t)$ — искомая полевая функция. Определив плотность лагранжиана $L(\varphi, \varphi_x, \varphi_t)$ и функционал действия следующим образом

$$S(\varphi) = \int d\vec{x} \, dt L(\varphi, \varphi_x, \varphi_t), \qquad (1.4.6)$$

Уравнение, которому удовлетворяет *φ*, получается из условия равенства нулю первой вариации действия: δS=0. Это приводит к уравнениям движения, называемым уравнениями Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} = 0$$
(1.4.7)

Для многополевой системы может быть применена аналогичная процедура. В некоторых случаях лагранжиан позволяет вывести динамические величины, сохраняющиеся во времени, такие как энергия, импульс, заряд и другие. Эти инварианты являются следствием симметрии лагранжиана относительно определённых преобразований x, t и φ , что обусловлено соответствующей симметрией системы. Законы сохранения и интегралы движения также могут быть получены напрямую из уравнений движения. Лагранжева формулировка, в отличие от гамильтонова формализма, позволяет записывать уравнения в релятивистски инвариантной форме.

§1.5. Диссипативные солитоны

В последние годы концепция локализованных решений была расширена до уединённых волн, существующих как в консервативных, так и в неконсервативных системах [87, 94, 95, 99, 158, 270]. В неконсервативных системах такие волны, называемые диссипативными солитонами, требуют постоянного притока энергии для поддержания своего существования, что существенно отличает их от солитонов в консервативных системах, где энергия сохраняется. ДС формируются в открытых системах, находящихся вдали от равновесия, и их устойчивость определяется балансом между подкачкой и диссипацией энергии. Их образование обусловлено необходимостью поддержания равновесия между поступающей и теряемой энергией, то есть между процессами подачи энергии и её затуханием. Такой точный баланс достигается благодаря сложным нелинейным процессам в ДC объектами, способными системе, что означает, что являются к самоорганизации. Их форма, амплитуда, ширина и другие характеристики строго определяются внешними условиями. ДС могут возникать естественным образом, например, в природе, где их формирование связано с локализованными структурами, возникающими под влиянием солнечного излучения и процессов

диссипации. Также они могут быть созданы искусственно, в лабораториях, и находить применение в современных технологических решениях.

Одно из часто встречающихся заблуждений о диссипативных системах [130] заключается в том, что они якобы связаны исключительно с потерями и, следовательно, способны лишь разрушать. Термин «диссипативная система» был введён Николасом и Пригожиным для описания термодинамических систем, находящихся в неравновесном состоянии [261]. Ими было показано, что в результате притока энергии оказывается возможным формирование И самоорганизация устойчивых структур в системах далёких от равновесия. Такие системы не являются изолированными, а взаимодействуют с внешним источником, который снабжает энергией небольшую подсистему. Таким образом, термин «диссипативная система» имеет более глубокий смысл. Предполагается, что в таких системах не только происходят потери энергии, но также осуществляется её поступление. Локализованные структуры, возникающие в этих системах, известные как «диссипативные солитоны», вполне обоснованно считаются научным понятием. Примерами ДС являются [183] ультракороткие импульсы, возникающие в лазерах с пассивной синхронизацией мод, нервные импульсы, локализованные структуры в реакционно-диффузионных системах, кластеры растительности на аридных землях, Бозе-Эйнштейновские конденсаты в системах холодных атомов, волновые процессы в нейронных сетях, спиральные волны в средах с низкой возбудимостью и бегущие волны, формирующиеся в корковых сетях. Этот перечень далеко не исчерпывающий. Системы, в которых могут существовать диссипативные солитоны, отличаются огромным разнообразием, так же, как и математические уравнения, которые описывают их поведение.

ДС активно изучаются в таких средах, как оптические волноводы, магнетики, плазма и другие физические системы. Математическое моделирование и численные эксперименты являются ключевыми инструментами для анализа их поведения и взаимодействий. Уникальные свойства этих структур делают их значимыми объектами исследований в физике, химии и биологии, поскольку они связывают процессы самоорганизации с основными принципами синергетики.

Особое внимание привлекают пульсирующие солитоны [20, 21, 103, 205, 206], чья форма изменяется со временем, но периодически возвращается к исходному состоянию. ПС представляют собой набор локализованных решений и их можно рассматривать как предельный цикл бесконечномерных диссипативных динамических систем [37-А]. Они отличаются от солитонов более высокого порядка, которые обычно связаны с интегрируемыми моделями [38-А]. В отличие от солитонов более высокого порядка, которые высокого порядка, которые связаны с интегрируемыми моделями [38-А]. Сини солитонов более высокого порядка, которые связаны с интегрируемыми моделями, численные расчёты показывают возможность возбуждения ПС через бифуркации от стационарных решений.

Одним из наиболее распространённых подходов к изучению диссипативных солитонов является использование КУГЛ. Это универсальное уравнение, которое описывает динамику систем вблизи критической бифуркации [207, 287]. Однако значительного прогресса в аналитическом описании пульсирующих решений и бифуркационных границ пока не достигнуто. Эта задача остаётся сложной, поскольку множество параметров КУГЛ [113] определяют области существования как стационарных, так и пульсирующих солитонов. В результате бифуркационные границы представляют собой поверхности в многомерном пространстве параметров.

В работе [196] рассматривается переход от бесконечномерной системы к пятимерной модели и ставится задача нахождения локализованных решений уравнения КУГЛ и его преобразований для выявления ключевых параметров системы. Несмотря на то что точные решения уравнения КУГЛ существуют и могут быть выражены через определённые соотношения параметров, их применение ограничено стационарными решениями. Для решения этой проблемы возможно использование эффективных приближений. В частности, метод моментов, изначально разработанный Моемистовым для возмущённого НУШ, представляет собой интегральную характеристику исследуемого поля и является перспективным инструментом для анализа.

КУГЛ в безразмерной форме можно написать в виде

$$i\varphi_z + \frac{D}{2}\varphi_{tt} + |\varphi|^2\varphi + \nu|\varphi|^4\varphi = i\delta\varphi + i\varepsilon|\varphi|^2\varphi + i\beta\varphi_{tt} + i\mu|\varphi|^4\varphi \qquad (1.5.1)$$

где t – время в движущейся системе координат, φ - нормированная огибающая поля, D – коэффициент дисперсии групповой скорости, δ - коэффициент разности линейных усиления и потерь. Включение в (1.5.1) члена четвёртого порядка превращает КУГЛ в КУСФ, которое, как известно, обладает солитонными решениями

$$i\varphi_z + \frac{D}{2}\varphi_{tt} + |\varphi|^2\varphi + \nu|\varphi|^4\varphi = i\delta\varphi + i\varepsilon|\varphi|^2\varphi + i\beta\varphi_{tt} + i\mu|\varphi|^4\varphi + i\varepsilon\varphi_{tttt}$$
(1.5.2)

Уравнение (1.5.1) допускает множество локализованных решений, включая стационарные солитоны, источники, стоки, а также солитоны, движущиеся с постоянной скоростью, и фронты [234, 235]. На рисунке 1.5.1а, б представлены два примера стационарных решений КУСФ.

ПС относится к классу диссипативных солитонов, так как его можно рассматривать как предельный цикл в бесконечномерном фазовом пространстве. Он может быть, как устойчивым, так и неустойчивым. Устойчивые ПС, подобно стационарным, могут существовать бесконечно долго. Пример ПС с одним периодом представлен на рисунке 1.5.2 а, б. Этот солитон изменяет свою форму вдоль координаты z, но точно восстанавливает исходную конфигурацию после завершения одного периода. Для построения фазового портрета, который представляет собой замкнутый цикл, достаточно выбрать два параметра, например, квадрат амплитуды и полную энергию. Аналогичное поведение будет наблюдается в N-мерном фазовом пространстве.



Рисунок 1.5.1. - Установление стационарного солитонного решения уравнение Свифта-Хоенберга. Параметры: $\varepsilon = 1.6, \delta = -0.5, \beta = -0.3, \mu = -0.1, \nu = 0, \gamma_2 =$

0.05



Рисунок 1.5.2. (а). - Решение уравнение Гинзбурга-Ландау в виде простого пульсирующего солитона; (б) Фазовый портрет системы; при параметрах $D = 1. \varepsilon = 0.66, \delta = -0.1, \beta = 0.08, \mu = -0.1, \nu = -0.1$

Изменение параметров уравнения может привести к усложнению поведения ПС. В частности, простые пульсации могут переходить в пульсации с удвоенным периодом. Это явление связано с бифуркацией, которая происходит на определённых границах в пространстве параметров уравнения. Пример солитона, подвергающегося такой бифуркации, показан на рисунке 1.5.3 а, б. В этом случае единственная петля, характеризующая простой ПС, разделяется на две, указывая на переход к более сложному режиму.



Рисунок 1.5.3. (а). - Солитонное решения уравнения Гинзбурга-Ландау с пульсациями периода два. (б). Фазовый портрет системы. $D = \pm 1. \varepsilon = 0.785, \delta = -0.1, \beta = 0.08, \mu = -0.1, \nu = -0.01$

Изменение одного или нескольких параметров уравнения приводит к переходу системы из одного режима в другой, что сопровождается бифуркацией удвоения периода. При дальнейшем изменении параметров могут происходить последующие удвоения периода, вплоть до учетверённого. При правильном выборе траектории в пространстве параметров можно наблюдать бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода, которая в конечном итоге приводит к формированию хаотических солитонов (см. рис 1.5.4 а, б). ХС может формироваться либо через единственную бифуркацию, непосредственно из ПС, либо через последовательность бифуркаций с удвоением периода, в зависимости от характера изменения параметров системы. Возможны и другие сценарии перехода к хаотическому поведению. Форма солитона ограничена определёнными пределами, что указывает на то, что его решение плотно заполняет заданную область в пространстве параметров. Плавные локализованные начальные распределения с параметрами, близкими к точке в этой области, будут стремиться к XC, а их траектории в фазовом пространстве притягиваться к соответствующей области. По этой причине такие солитонные решения можно назвать «странным

аттрактором», по аналогии с аналогичным понятием, используемым в задачах низкой размерности.



Рисунок 1.5.4. (a). - Хаотический солитон как решение уравнения Гинзбурга– Ландау. (б). Фазовый портрет системы. Значения параметров β=0.04, μ=-0.1, ν=-0.08, δ=0.1, ε=0.75

Концепция ДС обладает широкой применимостью и открывает новые перспективы для объяснения множества явлений. Она позволяет глубже понять природу локализованных структур, возникающих в неравновесных системах, включая примеры из химии, биологии и физики. Этот подход помогает по-новому интерпретировать процессы самоорганизации и устойчивости, характерные для таких систем.

Формирование ДС в математической модели, описываемой КУГЛ с учётом диссипации и подкачки, было продемонстрировано в нашей работе [21-А]. В ходе численных экспериментов, проведённых для моделирования данного уравнения, был выполнен анализ ФП. Результаты указывают на локализацию фазовых траекторий в ограниченной области фазового пространства, устойчивость системы и формирование странного аттрактора.

Таким образом, численные эксперименты подтвердили возможность формирования устойчивого ДС в рамках математической модели КУГЛ при заданных условиях. В работе [3-А] нами рассмотрено поведение локализованных возбуждений и процесс формирования ПС в физических системах, описываемых КУСХ, с использованием методов численного моделирования. Как упоминалось ранее, солитоны относятся к классу локализованных решений. Уравнение (1.5.2) также допускает существование ряда таких решений. Для решения задачи Коши в качестве начальных условий применяется следующая функция, удовлетворяющая КУСХ

$$\varphi(x,t) = Asech\left(\frac{x-x_0}{\omega}\right)e^{i[b(x-x_0)+c(x-x_0)^2]}$$
(1.5.3)

где A(t)-амплитуда, w(t)-ширина, $x_0(t)$ - положение пульса, b(t) -скорость солитона.

Для численного решения КУСХ написана явная разностная схема.

$$i\frac{\varphi_{i}^{j+1}+\varphi_{i}^{j-1}}{2\tau} + \frac{D}{2}\frac{\varphi_{i+1}^{j}+2\varphi_{i}^{j}+\varphi_{i-1}^{j}}{h^{2}} + |\varphi_{i}^{j}|^{2}\varphi_{i}^{j} = -\nu|\varphi_{i}^{j}|^{4}\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i}^{j} + i\delta\varphi_{i-1}^{j} + i\delta\varphi_{i-1$$

Здесь τ и *h*- шаги по времени и координате, соответственно. Численное моделирование велось на отрезке $x \in [-24,24]$ с шагом по координате *h*=0.04 на промежутках времен $T \in [0,18]$ с шагом по времени τ =0.0004.

Эволюцию таких систем удобно анализировать с помощью фазовых портретов. Для конечномерных фазового систем построение портрета относительно просто, тогда как для бесконечномерных систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, задача усложняется. Более обобщёнными полную картину можно получить, построив портрет с

координатами, такими как квадрат амплитуды и полная энергия солитона. Это даёт траекторию, представляющую цикл, повторяющийся бесконечно. Таким образом, можно описать как предельный цикл в бесконечномерном фазовом ПС пространстве. Полученное численное решение КУСХ в виде простого ПС показано 1.5.5. 1.5.6. на рис. И рис. при следующих значениях параметров $D = 1, \varepsilon = 0.1, \delta = -0.1, \beta = 0.08, \mu = 0.001, \nu = 0.001, S = 0.0009$



Рисунок 1.5.5. - График эволюции плотности числа частиц пульсирующего солитона



Рисунок.1.5.6. - График зависимости интеграла числа частиц от времени пульсирующего солитона



Рисунок.1.5.7. - Фазовый портрет солитона

ФП солитона (рис. 1.5.7) показывает, что при выбранных параметрах формируется ПС с одним предельным циклом и одной пульсацией. Изменение

параметров затухания и подкачки вызывает серию бифуркаций, удваивающих период пульсации, что приводит к формированию XC.

При варьировании параметров системы могут происходить бифуркации, ведущие к удвоению периода, возникновению хаоса и формированию ХС. Эти процессы напоминают сценарий Фейгенбаума, описывающий переход к хаотическому поведению в динамических системах. ХС представляют собой сложные локализованные структуры, характеризующиеся уникальной динамикой в фазовом пространстве, включая образование странных аттракторов [12].

В работе [263] рассматриваются хаотические состояния, описываемые возмущённым НУШ, которое представляет собой расширенную форму нелинейной модели насыщения Ландау для неустойчивой плоской волны [282]. Исследование хаотических состояний системы НУШ основано на методе обратного рассеяния, который вводит понятие стохастического солитона, когда параметры солитона становятся случайными. Данный метод также имеет еще одно преимущество: приближенные уравнения, описывающие эволюцию параметров солитона, сводятся к простым уравнениям отображения, что позволяет полуаналитически определить статистические свойства хаотического солитона и энергетический спектр системы.

При наличии малых возмущений подкачки и затухания НУШ принимает следующий вид [263]:

$$\varphi_t - i\varphi_{xx} - 2i|\varphi|^2\varphi =$$

= $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2|\varphi|^2)\varphi + \varepsilon_3\varphi_{xx} - (\varepsilon_0/T)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(in\omega_0 t)$, (1.5.5)

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\varepsilon_j (j = 0,1,2,3)$ — это малые положительные константы, а последний член представляет собой идеализированный вклад других устойчивых мод. Когда производные по *x* становятся незначительными, уравнение (1.5.1) упрощается до модельного уравнения, с помощью которого Заславский исследовал стохастическое поведение неустойчивой плоской волны [296]. Предположено, что

изначально в системе существует один солитон. В этом случае различные методы возмущений [227, 228, 229] позволяют вывести уравнения для параметров солитона до первого порядка возмущения. При этом неподвижные компоненты также возбуждаются, и их влияние будет рассмотрено отдельно. Решение, соответствующее солитону, задается следующим образом:

$$\varphi_s(x,t) = -2i\eta sech\{2\eta(x-X)\}\exp[i\{\left(\frac{\rho}{n}\right)(x-X) - \psi\}]$$
(1.5.6)

Параметры ρ , η являются постоянными. Таким образом, солитон движется с постоянной скоростью $2\rho/\eta$ и колеблется на собственной частоте ω_s . Численные расчёты показывают, что отображение (1.5.6) обладает стохастическим свойствам, то есть траектории в фазовом пространстве возникают при соответствующих параметров вычисления.



Рисунок 1.5.8. - Траектории в фазовом пространстве, демонстрирующие появление

странного аттрактора

В заключение работы [263] показано, что солитон НУШ демонстрирует стохастическое поведение в присутствии внешних колебательных полей. Основной статистической характеристикой такого солитона является случайность его пространственной и временной фазы на масштабе фазовой корреляции τ . Это указывает на то, что модель случайной фазы может стать эффективным инструментом для изучения турбулентности в возмущённом уравнении НУШ.

В работе [58] авторы провели численный анализ движущихся солитонов в НУШ с учётом параметрической накачки и диссипации. Установлено, что амплитуда квазимонохроматической волны, распространяющейся в нелинейной дисперсионной среде, описывается НУШ. Это уравнение, характеризующееся кубической нелинейностью самофокусирующего типа, может быть записано в следующей форме:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi = -i\gamma\Psi; \qquad \gamma > 0 \tag{1.5.7}$$

Член – $i\gamma\Psi$ в правой части уравнения отражает диссипативные потери, которые предполагаются незначительными в моделях, описываемых уравнением (1.5.7). В реальных физических системах формирование и устойчивость недиссипативных структур поддерживаются внешним притоком энергии. Это можно учесть, добавив дополнительное слагаемое в правую часть уравнения (1.5.7). Авторами [58] рассматривается случай с параметрической накачки в следующем виде:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi = h\overline{\Psi}e^{2i\Omega t} - i\gamma\Psi.$$
(1.5.8)

Черта над Ψ в правой части уравнения (1.5.8) обозначает комплексное сопряжение; γ — коэффициент диссипации, *h* и Ω — амплитуда и частота накачки соответственно. Уравнение (1.5.8) описывает различные явления, такие как нелинейный фарадеевский резонанс в вертикально осциллирующем канале с водой [63, 90, 184, 200, 212, 231, 254, 255, 288, 289, 290, 300]; фазовое усиление солитонов в оптических волокнах [209, 243, 253, 273]; волны намагничивания в ферромагнетиках под воздействием статического и СВЧ полей [189]; амплитуды синхронизированных колебаний в вертикально раскачиваемых цепочках маятников [182, 199, 200, 208, 223] и другие подобные процессы.

Уравнение (1.5.8) допускает солитонные решения [189, 212, 255], как устойчивые, так и неустойчивые, которые могут образовывать (устойчивые и неустойчивые) солитонные комплексы [96, 186, 188, 198, 233, 249]. Тем не менее, как показали недавние исследования [190], в НУШ с параметрической накачкой и ненулевой диссипацией могут существовать движущиеся солитонные решения при определенных значениях параметров. В работе [190] сформулированы условия, при которых возможно возникновение таких решений, а также представлены соответствующие численные результаты.

Основная сложность численного получения таких решений заключается в том, что для каждого значения коэффициента диссипации соответствует строго определенное, заранее неизвестное значение скорости солитона. В результате, метод продолжения по параметру, описанный в [58] и применявшийся для исследования как стационарных ДС [186], так и движущихся солитонов при отсутствии диссипации [187], становится непригодным и требует доработки. В данной работе [58] представлено описание такой модифицированной схемы и представлены результаты, полученные с ее помощью.

Приняв частоту накачки Ω равной единице и сделав замену $\Psi(x,t) = e^{it}\varphi(x,t)$, уравнение (1.5.2) преобразовано в форму

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi - \varphi = h\bar{\varphi} - i\gamma\varphi \qquad (1.5.9)$$

Авторы [58] ограничились рассмотрением солитонов, движущихся с постоянной скоростью, т.е.

$$\varphi(x,t) = \varphi(x - Vt) \equiv \varphi(\xi), \qquad (1.5.10)$$

где $\varphi(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$. Такие решения удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-iV\varphi_{\xi} + \varphi_{\xi\xi} + 2|\varphi|^2\varphi - \varphi = h\bar{\varphi} - i\gamma\varphi, \qquad (1.5.11)$$

в котором скорость V играет роль внешнего параметра.

Также приведены характеристики решения, это интегралы уравнения (1.5.8), или, точнее, величины, которые сохранялись бы в отсутствие диссипации. При γ=0 в уравнении (1.5.8) сохраняется импульс, определяемый выражением

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_x \varphi - \varphi_x \bar{\varphi}) dx, \qquad (1.5.12)$$

и энергия

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (|\varphi_x|^2 + |\varphi|^2 - |\varphi|^4 + hRe\varphi^2) dx.$$
(1.5.13)

Отмечено, что в диссипативном случае ($\gamma \neq 0$) импульс затухает экспоненциально

$$\dot{P} = -2\gamma P, \qquad (1.5.14)$$

В то время как изменения энергии происходит по закону

$$E = 2\gamma \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^4 dx - E\Big). \tag{1.5.15}$$

Сначала рассмотрено условие продолжения стационарных решений при ненулевом значении γ в область V \neq 0. Два различных по амплитуде и фазе односолитонных решения, обозначаемые как φ_+ и φ_- , известны в явном виде.

$$\varphi_{\pm}(x) = e^{-i\theta_{\pm}}A_{\pm}\operatorname{sech}(A_{\pm}x), \qquad (1.5.16)$$

$$A_{\pm} = \sqrt{1 \pm \sqrt{h^2 - \gamma^2}}, \quad \theta_{\pm} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsin}\frac{\gamma}{h}, \qquad \theta_{\pm} = \frac{\pi}{2} - \theta_{\pm}.$$

Эти два солитона могут образовывать множество стационарных комплексов, которые символически обозначено $\varphi_{(++)}, \varphi_{(--)}, \varphi_{(+-+)}, \varphi_{(-+-)}$ и т.д. [186].



Рисунок 1.5.9. - Импульс недиссипативных солитонов как функция скорости V. Штриховые и штрихпунктирные кривые — большая накачка (h=0.7), сплошная — малая (h=0.05). Точки пересечения с осью Р — стационарные твистеры. Дальнейшее продолжение решений ведёт к связанным состояниям твистеров и комплексам с φ±солитонами. Устойчивые решения (h=0.05) отмечены сплошной линией. Стрелки показывают направление численного продолжения

Алгебраические системы уравнений, полученные путем перехода к конечному интервалу интегрирования и применением конечно-разностной аппроксимации краевых задач с использованием нумеровской схемы четвертого порядка точности, решаются методом прогонки [58]. Итерационный процесс завершается, когда невязка, рассчитанная в сеточной норме, становится меньше заранее заданного малого значения $\epsilon > 0$. Расчеты проводились на интервале (-100,100) с шагом конечно-разностной аппроксимации 5×10⁻³, ϵ =10⁻¹⁰, τ_s ~1.





Рисунок - 1.5.10. Бифуркационные кривые: зависимость скорости солитона V от диссипации γ. Каждая кривая начинается при γ=0.565. Вставки показывают форму решения (сплошная линия вещественная часть, штрихи — мнимая). В (b) — логарифмическая шкала по V

Для малых значений h (h <0.28) численное продолжение начинается с солитона-твистера, движущегося со скоростью V₁ (точка пересечения сплошной кривой с горизонтальной осью на рис. 1.5.9). Вещественная часть этого решения является четной, а мнимая — нечетной: $\varphi(-x) = \bar{\varphi}(x)$. При продолжении в область $\gamma \neq 0$ симметрия нарушается; типичный профиль в промежуточных точках ветви выглядит как несимметричный комплекс φ_+ и φ_- , представленный на вставке к рис. 1.5.11(a). Основная часть рис. 1.5.11(a) показывает зависимость $\gamma(V)$. увеличением у отрицательная скорость движущейся волны по модулю С уменьшается. Однако диссипация не может превысить определенного максимального значения; при его достижении кривая $\gamma(V)$ поворачивает вниз (см. рис. 1.5.11(а)). При стремлении V и γ к нулю расстояние между солитонами φ_+ и φ_{-} в комплексе увеличивается до бесконечности.

При *h*>0.28 имеются три начальные точки с P=0, которые соответствуют двум пересечениям штриховой кривой и одному пересечению штрихпунктирной кривой с горизонтальной осью на рис. 1.5.9. Кривая $\gamma(V)$, возникающая в точке V₁,

представлена на рис. 1.5.11(b). Для V=V₁ и γ =0 соответствующее решение симметрично и по форме напоминает два сильно перекрывающихся твистера. При $\gamma \neq 0$ симметрия нарушается, и решение начинает выглядеть как несимметричный комплекс из двух солитонов. При стремлении V, $\gamma \rightarrow 0$ расстояние между солитонами φ_+ и φ_- , составляющими комплекс, постепенно увеличивается, и в конечном итоге они расходятся на бесконечное расстояние.

Вторая недиссипативная волна с нулевым импульсом (точка V₂ на бифуркационной диаграмме рис. 1.5.9) соответствует симметричному комплексу $[\varphi(-x) = \overline{\varphi}(x)]$, состоящему из двух φ_- солитонов и одного твистера, для которого $\varphi_{(-T-)}$. При изменении параметров γ и V симметрия нарушается, однако решение по-прежнему остается комплексом из трех солитонов (см. вставку на рис. 1.5.11 (b)). Нижняя, петлеобразная кривая на рис. 1.5.11 (b) демонстрирует соответствующую зависимость γ (V). В отличие от ветви, возникающей при V=V₁, это решение не может быть продолжено к нулевой скорости. Вместо этого кривая γ (V) поворачивает обратно, и, при стремлении γ к нулю, V приближается к некоторому отрицательному значению V₄ (где |V₄|> |V₂|). Для достаточно малых значений γ это решение выглядит как комплекс из двух φ_- -солитонов и одного твистера между ними, причем расстояние между солитонами увеличивается до бесконечности при $\gamma \rightarrow 0$ и V \rightarrow V₄.

Наконец, из точки V₃, выходят две отдельные ветви γ (V) (см. рис. 1.6.11 (с)). Одна из них соответствует комплексу из двух солитонов; при движении вдоль этой ветви к V=0 получается симметричный комплекс $\varphi_{(++)}$ с ненулевым значением γ (см. верхнюю кривую на рис. 1.5.11 (с)). При продолжении другого несимметричного комплекса к V=0, соответствующее значение γ достигает максимума при V~0.3 и затем стремится к нулю (нижняя кривая на рис. 1.5.11 (с)). Для достаточно малых V и γ это решение представляет собой комплекс $\varphi_{(--+)}$ (см. вставку на рис. 1.5.11 (с)). При стремлении V и γ к нулю межсолитонное расстояние в комплексе увеличивается до бесконечности.





Рисунок 1.5.11. - Результаты численного продолжения недиссипативных движущихся солитонов в область γ ≠ 0. (а): малое h; (b), (c): большое h. Вставки иллюстрируют решение на одной из внутренних точек кривой. (Сплошная линия: вещественная часть; штриховая линия: мнимая часть). Каждая кривая, показанная здесь, имеет свой аналог для положительных значений скорости, который получается с помощью зеркального отражения (V → -V) диаграммы

Численный анализ для случая $\gamma \neq 0$, V $\neq 0$ (рис. 1.5.10, 1.5.11) показал наличие собственных значений с положительной вещественной частью в спектре линеаризованного оператора. Это указывает на то, что все найденные движущиеся ДС являются неустойчивыми. Отмечено, что движущиеся солитоны (как устойчивые, так и неустойчивые) могут играть важную роль в различных физических процессах, моделируемых НУШ с диссипацией и накачкой. Устойчивые движущиеся волны выступают как аттракторы, конкурирующие с неподвижными солитонами; неустойчивые волны могут проявляться как долгоживущие промежуточные переходных процессах состояния В И пространственно-временных хаотических режимах.

Авторами [58] приведена еще одна причина, по которой не стоит пренебрегать неустойчивыми решениями, она заключается в их потенциальной стабилизации в рамках КУГЛ (с прямой или параметрической накачкой), частным случаем которого является НУШ с диссипацией и накачкой [203, 204, 205, 206, 212, 243, 250, 274, 286]. Как известно, добавление диффузии и нелинейной диссипации (члены $ic_1\Psi_{xx}$ и $-ic_2|\Psi|^{2n}\Psi$) в правую часть уравнения (1.6.8) оказывает стабилизирующее воздействие на пульсы Гинзбурга – Ландау. Следовательно, неустойчивые солитоны НУШ могут стать устойчивыми, если их продолжить в область с $c_1>0$ и $c_2>0$.

Устойчивые пульсы, в частности, были получены [178, 181, 214, 284] как результат баланса множества членов, включая дисперсию, консервативную нелинейность третьей и пятой степени, диффузию, а также диссипацию первого, третьего и пятого порядка. Аналогичным образом, добавляя диффузионные и нелинейные диссипативные поправки в правую часть НУШ, можно попытаться стабилизировать движение диссипативных комплексов. В работе описана схема численного продолжения по параметру с одновременным вычислением другого, заранее неизвестного параметра в задаче о движущихся солитонных решениях НУШ с диссипацией и параметрической накачкой. Представлены численные результаты, полученные с использованием данной схемы. Показано, что при наличии параметрической накачки два и более диссипативных солитона могут образовывать комплекс, движущийся с нулевым импульсом, но обладающий ненулевой постоянной скоростью. Это свидетельствует о том, что линейный диссипативный член в уравнении Шредингера приводит к экспоненциальному затуханию импульса движущегося солитона, и не исключает возможность существования движущихся солитонов.

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

В данной главе рассматриваются постановка задачи математического моделирования и методы построения многосолитонных решений НУШ как в скалярном, так и в векторном представлениях с различными типами потенциалов. Изложены теоретические основы построения многосолитонных решений с применением алгебро-геометрических подходов и методов обратной задачи рассеяния. Особое внимание уделено нахождению решений для систем с различными граничными условиями, такими как убывающие и конденсатные границы. Показано, что предложенные методологические подходы позволяют исследовать эволюцию многосолитонных конфигураций, их взаимодействие и динамическую устойчивость в рамках нелинейных систем.

§2.1. Постановка задачи математического моделирования

Постановка задачи математического моделирования [18, 55, 77, 78, 98, 145] конкретного объекта, например, диссипативного солитона, включает три основных этапа: создание модели, разработку алгоритма и реализацию программы.

На первом этапе осуществляется выбор модели, представляющей собой математический эквивалент исследуемого объекта [28, 125, 197], отражающий его ключевые свойства и закономерности. Эта модель описывает фундаментальные законы, которым подчиняется объект, а также взаимодействия, характерные для его компонентов. Важно, чтобы модель максимально точно воспроизводила поведение объекта в заданных условиях, обеспечивая надёжную основу для численного анализа и интерпретации результатов. В данной работе в качестве модели выбраны скалярное и векторное НУШ. Эти уравнения позволяют описывать основные характеристики и динамическое поведение солитонных

решений, учитывая нелинейные взаимодействия, что делает их мощным инструментом для моделирования сложных волновых процессов [84].

На втором этапе осуществляется выбор или разработка алгоритма для реализации модели на компьютере. В рамках этого этапа модель преобразуется в формат, пригодный для применения численных методов [65, 67, 81, 85, 163, 164, 166], и разрабатывается последовательность вычислительных и логических операций, необходимых для получения требуемых величин с заданной точностью. Этот этап требует тщательного планирования, включая разбиение задачи на подэтапы, выбор численных схем и методов, а также учет возможных погрешностей, возникающих при расчетах. Разработанный алгоритм служит основой для программной реализации модели и обеспечивает возможность надежных и точных вычислений. В данном случае на основе метода конечных разностей был разработан алгоритм для численного моделирования, который позволяет аппроксимировать производные в уравнениях, заменяя их разностными выражениями. Это обеспечивает высокую точность при решении задачи. Алгоритм включает пошаговое вычисление параметров системы и гарантирует устойчивость и точность при моделировании динамики солитонов.

На третьем этапе создается программа или комплекс компьютерных программ, которые переводят модель и алгоритм на язык, доступный для выполнения компьютером. В качестве среды разработки выбрана матричная лаборатория Matlab [9, 76, 167, 170, 171], предоставляющая удобные инструменты для работы с матричными и векторными операциями, что значительно облегчает реализацию численных методов [89, 146, 149] и конечных разностных схем [123, 142, 148], необходимых для точного моделирования динамики локализованных структур. На этом этапе математическая модель и алгоритм формулируются в виде программирования, что позволяет воспроизводить все кода на языке вычислительные операции с требуемой точностью. Программа также включает элементы для ввода данных, контроля точности, обработки и визуализации результатов, делая её полноценным инструментом для моделирования и анализа поведения системы. Дополнительно, Matlab обладает мощными средствами

визуализации, что позволяет наглядно анализировать результаты моделирования и отслеживать эволюцию решений во времени.

§ 2.2. Общая структура метода делинеаризации

На сегодняшний день наиболее полным методом аналитического исследования НУШ является метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [39]. Однако для некоторых моделей, в которых физически обоснованы конденсатные граничные условия [77, 101, 105, 106, 107], стандартная техника решения обратной задачи оказывается неконструктивной.

В последние годы стало очевидно, что алгебро-геометрический метод [31, 212] является мощным и незаменимым инструментом для построения широкого класса решений фундаментальных нелинейных уравнений математической физики. Этот метод, разработанный Б.А. Дубровиным, Т.М. Маланюком, И.М. Кричевером и В.Г. Маханьковым [32, 33, 34], предоставляет возможность явно получить как известные, так и ранее неизвестные многосолитонные решения уравнений, включая НУШ.

Хотя этот метод был основан на общей конечнозонной (алгеброгеометрической) схеме, его изложение может быть представлено в самостоятельной и замкнутой форме, не требующей глубокого использования результатов алгебро-геометрии. Подробное описание метода приведено в работе [33]. Здесь же мы, без углубления в доказательства, рассмотрим основные положения метода и приведем ключевые результаты, которые будут полезны для дальнейших рассуждений. Остановимся на ключевых аспектах, изложенных в работе [33].

Сначала рассмотрим задачу определения собственных значений и собственных функций оператора Шрёдингер

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)\right)\psi(x,t,k) = 0.$$
(2.2.1)

с нулевым значением.

Для получения многосолитонных решений необходимо, чтобы функция $\varphi(x, t, k)$ была мероморфной в конечной плоскости, имеющей полюса первого порядка в некоторых точках k_i, где j = 1, N.

Решение уравнения Шредингера $\psi(x, t, k)$ представляется в виде

$$\psi(x,t,k) = \frac{Q_N(x,t,k)e^{ikx+ik^2t}}{(k-\varkappa_1)(k-\varkappa_2)\dots(k-\varkappa_N)},$$
(2.2.2)

где

$$Q_N(x,t,k) = k^N + a_1(x,t)k^{N-1} + \dots + a_N(x,t)$$
(2.2.3)

полином со степенями k, а точки k_i – особые точки в комплексной плоскости.

Как видно, функция $\psi(x, t, k)$ ведет себя аналогично для всех точек k, за исключением особых точек k_i. Таким образом, введено важное ограничение, которое позволяет применить теорию комплексных функций, так как мероморфную функцию можно однозначно определить, зная ее вычеты в этих особых точках. Как показано в работе [33], функция $\psi(x, t, k)$ в точке k_i выражается через вычеты функции $\psi(x, t, k)$ в этих точках

$$\psi(x,t,k) = -\sum_{j=1}^{N} C_{ij} res \psi(x,t,k); \qquad i = 1, N, \qquad (2.2.4)$$

где *C_{ij}* – постоянная матрица размерам *N*х*N*

Приведем без доказательства теоремы.

Теорема 1. Пусть параметры $k_1, ..., k_N$, C_{ij} , задающие условиями (2.2.4) функцию $\psi(x, t, k)$ вида (2.2.2), удовлетворяют следующим требованиям а) матрица C_{ij} косоэрмитова $C_{ij} = -C_{ji}$ б) обозначим точки $k_1,...,k_N$ так, что $Imk_i>0$, i=1,p; $Imk_i<0$, i=p+1,N. Требуется, чтобы эрмитова матрица

$$\frac{1}{i}C_{ki}, 1 \le k, l \le p$$

была положительно определённой, а эрмитова матрица

$$\frac{1}{i}C_{ki}, p+1 \le k, l \le N$$

отрицательно определённой. Функция $\psi(x, t, k)$ при $k=k_j$ является гладкой функцией от переменных x и t для всех вещественных значений x и t, и она является собственной для оператора $L = i\partial_t - \partial_x^2 + u(x, t)$, где потенциал u(x,t) является гладкой вещественной функцией, а собственное значение равно нулю. Для этих функций выполняются следующие соотношения:

$$\psi(x,t,k) = \frac{\det \widehat{M}(x,t,k)}{\det M(x,t)} e^{ikx + ik^2x}, \qquad (2.2.5)$$

где

$$M_{ij} = C_{ij} + \frac{e^{i(\tilde{\omega}_i - \omega_j)}}{\tilde{k}_i - k_j}; \ \omega_i = k_i (x + k_i t); \ i, j = 1, N;$$
$$\widehat{M}_{ij} = M_{ij}, i, j = 1, N; \ M_{00} = 1; \ M_{i0} = e^{i\tilde{\omega}_i};$$
$$M_{0i} = (k - \varkappa_i)e^{-i\omega_i}; i = 1, N$$

Введем следующие обозначения

$$\psi_i = res\psi(x,t,k),$$

$$\Phi_{i}(x,t) = b_{ij}\psi(x,t,\varkappa_{i}), \quad j = 1, N, \quad (2.2.6)$$

Эти функции Φ_j и ψ_j удовлетворяют следующим уравнениям

$$i\Phi_{jt} - \Phi_{jxx} + u(x,t)\Phi_{j} = 0, \ j = 1,N$$

$$i\psi_{jt} - \psi_{jxx} + u(x,t)\psi_{j} = 0, \ j = 1,N$$
 (2.2.7)

Теорема 2. Пусть функции $\Phi_j(x,t)$, $\psi_j(x,t,k)$ построены по набору параметров $k_1, ..., k_N$, C_{ij} , и по рациональному соотношению

$$E(k) = k + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \frac{b_i^2}{k - k_i}$$
(2.2.8)

Тогда имеют место следующие условия самосогласования

$$\frac{u}{2} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i b_i^2 + C = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i |\Phi_i(x,t)|^2 - \sum_{i,j=1}^{N} \overline{\psi_i}(x,t,k) E_{ij} \psi_i(x,t,k), \quad (2.2.9)$$

где

$$E_{ij} = C_{ij} \left(\overline{E}(\varkappa_i) - E(\varkappa_j) \right).$$
(2.2.10)

Определение. Потенциал u(x,t) задаваемый в рамках нашей конструкции N параметрами k_1, \ldots, k_N , C_{ij} , вместе с NxN матрицей C_{ij} будем называть N-солитонным.

Условие самосогласования (2.2.9) предполагает, что функции $\Phi_1, ..., \Phi_n$ и $\psi_1, ..., \psi_N$ являются решениями (*N*+*n*) -компонентного ВНУШ. При этом функции

 $\Phi_i(x,t)$ обладают осциллирующей асимптотикой при $|x| \to \infty$, тогда как функции $\psi_i(x,t)$ экспоненциально затухают при больших значениях *x*.

§2.3. Анализ скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с убывающими граничными условиями

Для получения решения СНУШ с убывающими граничными условиями в уравнении (2.2.8) следует положить $b_1=b_2=0$ и применить условие самосогласования. Это приводит к функции E(k) следующего вида:

$$E(k) = k \tag{2.3.1}$$

Для скалярного случая матрица $E_{i,j}$ должна иметь ранг единицы, что означает, что она должна быть выражена через один независимый параметр. Следовательно, матрица (C_{ij}) должна иметь следующий вид:

$$C_{ij} = \lambda \frac{\overline{\gamma}_i \gamma_j}{\overline{\varkappa}_i - \varkappa_j},\tag{2.3.2}$$

Эрмитова форма вида (2.3.2) сведется в этом случае к соотношению

$$-\lambda \sum_{i,j=1}^{2} \bar{\gamma}_i \gamma_j \psi_1 \bar{\psi}_2 = -\lambda \left| \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \psi_i \right|^2 = -\lambda |\varphi|^2, \qquad (2.3.3)$$

где

$$\varphi = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2 \tag{2.3.4}$$

является убывающим при $|x| \rightarrow \infty$ решением НУШ

$$i\varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda |\varphi|^2 \varphi = 0 \tag{2.3.5}$$
Проверим в каких случаях потенциал

$$u = -2\lambda |\varphi|^2 \tag{2.3.6}$$

является гладким и вещественным. Возможны три варианта расположения полюсов:

1. Пусть $Im\varkappa_1 > 0$, $Im\varkappa_2 > 0$. В соответствии с теоремой 2, матрица $\frac{1}{2}C_{ij}$ должна быть положительно определённой. Как известно из теории матриц [17, 30, 88, 97], необходимым и достаточным условием положительной определённости матрицы является положительность всех её главных миноров. Это означает, что должны выполняться следующие условия:

$$\frac{1}{i}\frac{\lambda|\gamma_1|^2}{\bar{\pi}_{11}} = \frac{\lambda|\gamma_1|^2}{2\beta_1} > 0, \qquad \frac{1}{i}\frac{\lambda|\gamma_2|^2}{\bar{\pi}_{22}} = \frac{\lambda|\gamma_2|^2}{2\beta_2} > 0, \qquad (2.3.7)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{i}C_{11} & \frac{1}{i}C_{12} \\ \frac{1}{i}C_{21} & \frac{1}{i}C_{22} \end{vmatrix} = \lambda |\gamma_1|^2 |\gamma_2|^2 \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_2} - \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_1)^2} \right),$$
(2.3.8)

Откуда

$$\lambda > 0, \ (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 > 0.$$
 (2.3.9)

Видно, что когда β_1 , $\beta_2 > 0$ выполняется условие $\lambda > 0$ и (2.3.4) является решением НУШ с притяжением.

2. Пусть $Im \varkappa_1 > 0$, $Im \varkappa_2 < 0$. Тогда должны выполняться условия

$$\frac{\lambda |\gamma_1|^2}{2\beta_1} > 0, \quad \frac{\lambda |\gamma_2|^2}{2\beta_2} < 0 \tag{2.3.10}$$

Отсюда $\lambda > 0$ и в этом случае имеем решение НУШ с притяжением.

3. Пусть $Im\varkappa_1 < 0$, $Im\varkappa_2 < 0$. В силу теоремы 2 матрица $\frac{1}{2}C_{ij}$ должна быть отрицательно определённой. Необходимым и достаточныым условием отрицательной определённости матрицы $\frac{1}{2}C_{ij}$ [212] является положительность главных миноров четкого порядка и отрицательность главных миноров нечетного порядка. Это значит, что главные миноры первого порядка

$$\frac{\lambda|\gamma_1|^2}{2\beta_1} < 0, \quad \frac{\lambda|\gamma_2|^2}{2\beta_2} < 0 \tag{2.3.11}$$

и главный минор второго порядка

$$\lambda |\gamma_1|^2 |\gamma_2|^2 \left(\frac{1}{\beta_1 \beta_2} - \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \right) > 0$$
(2.3.12)

Поэтому

$$\lambda > 0$$
, $(\beta_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 > 0$.

Таким образом, в рамках этой конструкции можно получить убывающие двухсолитонные решения НУШ с притяжением (2.3.5). Оно вполне интегрируема как на классическом, так и на квантовом уровнях [49].

§2.4. Решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными граничными условиями

Теперь исследуем решение СНУШ с конденсатными граничными условиями [136]. Используя метод делинеаризации, предложенный в [136], исследуем двухсолитонные неубывающие решения СНУШ с потенциалами вида (1.4.4а и 1.4.46 см. Гл.1 §1.4.).

Для построения неубывающих (осциллирующих) двухсолитонных решений СНУШ при $|x| \rightarrow \infty$ в виде бризера [110, 116, 117, 118, 119] необходимо принять функцию *E*(*k*) в следующем виде

$$E(k) = k + \frac{\varepsilon b^2}{k - k_1}$$
 (2.4.1)

Как известно, эрмитова форма матрицы (E_{ij}) вида (2.4.1) должна быть равной нулю [283]. Иными словами, должны быть выполнены так называемые «условия склейки».

$$\overline{E(\kappa_i)} = E(\kappa_j), \ C_{ij} \neq 0$$
(2.4.2)

Матрицу (C_{ij}) следует задавать в диагональном виде

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0\\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}$$
(2.4.3)

Решения этих уравнений (2.4.1) - (2.4.3) дают следующие результаты

$$(\alpha_1 - \varkappa_1)^2 + \beta_1^2 = \varepsilon b^2, \ (\alpha_2 - \varkappa_2)^2 + \beta_2^2 = \varepsilon b^2$$
 (2.4.4)

Откуда видно, что $\varepsilon = 1$, и \varkappa_1 , \varkappa_2 лежат на окружности радиуса с центром в точке к вещественной оси комплексной плоскости. При выборе $Im\varkappa_1 > 0$, $Im\varkappa_2 < 0$ эрмитовой отрицательно определённой матрицы ($\frac{1}{i}C_{ij}$), для которой выполняется условие

$$\frac{\lambda|\gamma_1|^2}{2\beta_1} < 0, \qquad \frac{\lambda|\gamma_2|^2}{2\beta_2} < 0$$

получается СНУШ с отталкивающим потенциалом:

$$i \varphi_t - \varphi_{xx} + 2(|\varphi|^2 - b^2)\varphi = 0$$
(2.4.5)

В явном виде двухсолитонное решение уравнения (2.4.5) выражается следующим образом [109]

$$\varphi = \left(1 + \frac{B_3 \cos(\beta^-(x+\nu^-t) - h_3) + B_4 e^{\beta^+(x+\nu^+t)}}{B_1 ch(\beta^+(x+\nu^+t) - h_1) + B_2 ch(\beta^-(x+\nu^-t) + h_2)}\right) e^{ik_1(x+k_1t)}$$
(2.4.6)

где

$$\begin{split} B_{1} &= \left(\frac{C_{11}C_{22}|\varkappa_{12}|^{2}}{|\varkappa_{12}|^{2}\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} , \qquad e^{h_{1}} = \left(\frac{|\varkappa_{12}|^{2}}{C_{11}C_{22}\varkappa_{11}\varkappa_{22}|\varkappa_{12}|^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ B_{2} &= \left(\frac{C_{11}C_{22}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} , \qquad e^{h_{2}} = \left(\frac{C_{11}\varkappa_{11}}{C_{22}\varkappa_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ B_{3} &= \left(\frac{C_{11}C_{22}}{(k_{1}-\varkappa_{1})(k_{1}-\varkappa_{2})}\right)^{\frac{1}{2}} , \qquad e^{-h_{3}} = \left(\frac{C_{22}(k_{1}-\varkappa_{2})}{C_{11}(k_{1}-\varkappa_{1})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ B_{4} &= -\left(\frac{\varkappa_{21}}{\varkappa_{12}\varkappa_{22}(k_{1}-\varkappa_{1})} + \frac{\varkappa_{12}}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}(k_{1}-\varkappa_{2})}\right)^{\frac{1}{2}} \\ v^{-} &= 2\frac{\alpha_{2}\beta_{2} - \alpha_{1}\beta_{1}}{\beta_{1} - \beta_{2}} , \qquad v^{+} &= 2\frac{\alpha_{2}\beta_{2} + \alpha_{1}\beta_{1}}{\beta_{1} + \beta_{2}} \\ \varkappa_{ij} &= \varkappa_{i} - \varkappa_{j}, \qquad \varkappa_{ij} &= \varkappa_{i} - \varkappa_{j}, \qquad \beta^{+} &= \beta_{1} + \beta_{2}, \qquad \beta^{-} &= \beta_{2} - \beta_{1}, \\ v^{\pm} &= \frac{2(\alpha_{2}\beta_{2} \pm \alpha_{1}\beta_{1})}{\beta_{2} \pm \beta_{1}} , \qquad i, j = 1, 2. \end{split}$$

Исследуя решение СНУШ с конденсатными граничными условиями [136] следует обратится к матрице С_{ij} антидиагонального вида

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}$$
(2.4.7)

Условия склейки имеют следующий вид

$$\overline{\mathbf{E}(\varkappa_1)} = \mathbf{E}(\varkappa_2), \ \overline{\mathbf{E}(\varkappa_2)} = \mathbf{E}(\varkappa_1)$$
(2.4.8)

Из этих соотношений, имея в виду равенство

$$E(k) = k + \frac{\epsilon b^2}{k - \varkappa_1}$$
, (2.4.9),

получим

$$\alpha_1 - \beta_1 = \varepsilon b^2 \frac{\alpha_2 - k_1}{(\alpha_2 - k_1)^2 + \beta_2^2},$$
(2.4.10)

$$\beta_1 = \varepsilon b^2 \frac{\beta_2}{(\alpha_2 - k_1)^2 + \beta_2^2}$$
(2.4.11)

Поскольку матрица C_{ij} антидиагональна, условие «перегонки» полюсов \varkappa_1 , \varkappa_2 в одну полуплоскость без изменения решения не выполняется. Следовательно, при $\varepsilon = -1$, что соответствует НУШ с притяжением [136]

$$i \varphi_t - \varphi_{xx} - 2(|\varphi|^2 - b^2)\varphi = 0.$$
(2.4.12)

Решение этого уравнения можем написать в виде

$$\varphi = b \left(1 + \frac{C_3 \cos(qx + wt + w_{02}) + C_4 e^{\beta^+ (x + v^+ t)}}{C_1 ch(\beta^+ (x + v^+ t) + h_1) + C_2 \cos(qx + wt + w_{01})} \right) e^{ik_1 (x + k_1 t)} , \qquad (2.4.13)$$

где

$$\begin{split} \mathsf{C}_{1} &= \left(\frac{|\mathsf{C}_{12}|^{2}|\varkappa_{12}|^{2}}{|\overline{\varkappa}_{12}|^{2}\overline{\varkappa}_{11}\overline{\varkappa}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathsf{e}^{\,\mathsf{h}_{1}} = \left(\frac{|\varkappa_{12}|^{2}}{|\mathsf{C}_{12}|^{2}|\varkappa_{12}|^{2}\overline{\varkappa}_{11}\overline{\varkappa}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathsf{C}_{2} &= -\left(\frac{\mathsf{C}_{11}\mathsf{C}_{22}}{\overline{\varkappa}_{12}\overline{\varkappa}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathsf{e}^{\,\mathsf{i}w_{01}} = \left(\frac{\mathsf{C}_{12}\overline{\varkappa}_{12}}{\mathsf{C}_{21}\overline{\varkappa}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathsf{C}_{3} &= \left(\frac{\mathsf{C}_{12}\mathsf{C}_{21}}{(\mathsf{k}_{1}-\varkappa_{1})(\mathsf{k}_{1}-\varkappa_{2})}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathsf{e}^{\,\mathsf{i}w_{02}} = \left(\frac{\mathsf{C}_{12}(\mathsf{k}_{1}-\varkappa_{2})}{\mathsf{C}_{21}(\mathsf{k}_{1}-\varkappa_{1})}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathsf{C}_{4} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\varkappa}_{21}}{(\mathsf{k}_{1}-\varkappa_{1})\overline{\varkappa}_{12}\overline{\varkappa}_{22}} - \frac{\overline{\varkappa}_{12}}{(\mathsf{k}_{1}-\varkappa_{2})\overline{\varkappa}_{21}\overline{\varkappa}_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathsf{q} &= \alpha_{2} - \alpha_{1}, \qquad \mathsf{w} = (\alpha_{2}^{2} - \alpha_{1}^{2}) + (\beta_{2}^{2} - \beta_{1}^{2}), \\ \varkappa_{\mathsf{i}\mathsf{j}} &= \varkappa_{\mathsf{i}} - \overline{\varkappa}_{\mathsf{j}}, \qquad \overline{\varkappa}_{\mathsf{i}\mathsf{j}} &= \overline{\varkappa}_{\mathsf{i}} - \varkappa_{\mathsf{j}}, \qquad \beta^{+} = \beta_{1} + \beta_{2}, \quad \beta^{-} = \beta_{2} - \beta_{1}, \\ \upsilon^{\pm} &= \frac{2(\alpha_{2}\beta_{2} \pm \alpha_{1}\beta_{1})}{\beta_{2} \pm \beta_{1}}, \qquad \mathsf{i},\mathsf{j} = \mathsf{1},\mathsf{2}, \end{split}$$

Для вычисления сдвига фаз солитонов необходимо вычислить их асимптотики $x \rightarrow \pm \infty$ при $\beta^+ > 0$, решения (2.4.13) дает

$$arphi_{x \to -\infty} = b e^{ik_1(x+k_1t)},$$

 $arphi_{x \to +\infty} = b e^{ik_2(x+k_2t)},$
 $\Delta \Theta = \Theta_{+\infty} - \Theta_{-\infty} = i\eta,$
где $\eta = -iln \left| \frac{(k_1 - \overline{\kappa_1})(k_1 - \overline{\kappa_2})}{(k_1 - \kappa_1)(k_1 - \kappa_2)} \right|$

В случае, когда $\beta^+ < 0$, асимптотики по *x* меняются местами. Следует отметить, что в зависимости от взаимного расположения полюсов $k_1, \varkappa_1, \varkappa_2$ решение (2.4.13) может быть как солитонным, так и квазипериодическим, а именно:

1.
$$\beta_1 + \beta_2 = 0 \quad \varphi\left(x + \frac{2\pi}{q}, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \varphi(x, t)e^{2\pi i k_1\left(\frac{1}{q} + \frac{k_1}{\omega}\right)}$$
 (2.4.14)

Т.е. решение квазипериодично по x и t.

2.
$$\beta_1 + \beta_2 = 0$$
, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ $\varphi\left(x + \frac{2\pi}{q}, t\right) = \varphi(x, t)e^{2\pi i \left(\frac{\kappa_1}{q}\right)}$ (2.4.15)

Решение квазипериодично по х

3.
$$\beta_1 + \beta_2 = 0$$
, $\alpha_1 = \alpha_2$; $\varphi(x, t) = b e^{i k_1 (x + k_1 t)}$, (2.4.16)

Решение имеет вид плоской волны

4. Случай, когда $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, является самым интересным. Он приводит к новому двухсолитонному решению, которое имеет следующий вид:

$$\psi(\xi,t) = be^{ik_1'(\xi+k_1't)} \left(1 + \frac{C_3 \cos(qx+\dot{w}t+w_{02})+C_4 e^{\beta^+\xi}}{C_1 ch(\beta^+\xi+h_1)+C_2 \cos(qx+\dot{w}t+w_{01})} \right)$$
(2.4.17)

$$\begin{split} \text{где} \quad \xi &= x + \upsilon t \quad \acute{w} = w - q\upsilon \ , \ k_1' = k_1 - \upsilon^+ q = \alpha_2 - \alpha_1 \,, \\ & w = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2) \\ \mathcal{C}_1 &= \left(\frac{|\mathcal{C}_{12}|^2 |\varkappa_{12}|^2}{|\bar{\varkappa}_{12}|^2 \bar{\varkappa}_{11} \bar{\varkappa}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} \,, \ \mathcal{C}_2 &= -\left(\frac{\mathcal{C}_{11}\mathcal{C}_{22}}{|\bar{\varkappa}_{12} \bar{\varkappa}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}} \,, \ \mathcal{C}_3 &= \left(\frac{\mathcal{C}_{12}\mathcal{C}_{21}}{(k_1 - \varkappa_1)(k_1 - \varkappa_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \,, \\ h_1 &= \frac{1}{2} \ln \left|\frac{|\varkappa_{12}|^2}{|\mathcal{C}_{12}|^2 |\varkappa_{12}|^2 \bar{\varkappa}_{11} \bar{\varkappa}_{22}}\right| \,, \ w_{01} &= -\frac{i}{2} \ln \left|\frac{\mathcal{C}_{12} \bar{\varkappa}_{12}}{\mathcal{C}_{21} \bar{\varkappa}_{21}}\right| \,, \\ w_{02} &= -\frac{i}{2} \ln \left|\frac{\mathcal{C}_{12}(k_1 - \varkappa_2)}{\mathcal{C}_{21}(k_1 - \varkappa_1)}\right| \,, \\ \mathcal{C}_4 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\varkappa}_{21}}{(k_1 - \varkappa_1) \bar{\varkappa}_{12} \bar{\varkappa}_{22}} - \frac{\bar{\varkappa}_{12}}{(k_1 - \varkappa_2) \bar{\varkappa}_{21} \bar{\varkappa}_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} \,, \upsilon = \frac{2(\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1)}{\beta_2 + \beta_1} \,, \\ \varkappa_{ij} &= \varkappa_i - \bar{\varkappa}_j, \quad \bar{\varkappa}_{ij} = \bar{\varkappa}_i - \varkappa_j, \quad \beta^+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta^- = \beta_2 - \beta_1, \end{split}$$

Из уравнения (2.4.17) видно, что решение локализовано по переменной ξ , что подтверждает его солитонную природу. При этом центр масс солитона движется с постоянной скоростью v^+ , и его форма изменяется с периодом Т, где

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega - qv^{-1}}$$

Вариация формы солитона экспоненциально затухает на бесконечности по переменной ξ. Такой солитон принципиально отличается от известных решений своей динамикой И явным наличием внутренней степени свободы, характеризуемой частотой $\overline{\omega}$. Следовательно, по аналогии с бризерами уравнения СГ, мы назовем его решение бризером для СНУШ. Как и бризеры СГ, эти бризеры обладают энергией связи. Известно, что величина энергии связи зависит от значений констант ω и *q* в уравнении (2.4.13). В пределе, когда $\omega, q \to \infty$, энергия связи стремится к нулю, и энергия бризера состоит из суммы энергий каждого солитона, при этом энергия *i*-го солитона определяется полюсом \varkappa_i . Введем функцию

$$E(\varkappa_i,\varkappa_j) = \int \left[\left| \varphi_x(\varkappa_i,\varkappa_j) \right|^2 - \left| \varphi(\varkappa_i,\varkappa_j) \right|^2 - b^2 \right] dx, \qquad (2.4.18)$$

как энергию бризера с полюсом \varkappa_i и \varkappa_j . Численное исследование решения (2.4.17) бризера позволило вычислить его энергию связи. Так, при параметрах конструкции $\varkappa_i = 0.019 + i0.096$, $\varkappa_j = 1 - i0.1$, $k_1 = 0.1$, энергия связи составляет 7.8 процента от энергии бризера.

§2.5. Двухсолитонное решение векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с потенциалом $2\varepsilon(|arphi_1|^2 - b^2) - \lambda |arphi_2|^2$

Теория нелинейных возбуждений в магнитных средах с учётом мультипольных эффектов привлекает внимание исследователей в связи возможностью уплотнения записи на магнитных носителях, а в последние годы – в связи с бурным развитием нанотехнологий и спинтроники [210, 211, 292].

Было показано [162], что спиновые ионы с высокими значениями спинов являются прекрасными кандидатами на роль кудитов (для d-уровневой системы) и кутритов (в случае трёхуровневой системы, соответствующей магнитным ионам со спином S=1).

Теория квантовых вычислений в многоуровневых системах, на кудитах, в настоящее время бурно развивается. Вместе с этим остаются нерешенными вопросы передачи сигнала (информации) в многоуровневых системах.

Ранее одним из авторов [162] было показано, что системы обобщенных когерентных состояний, построенные на генераторах группы SU(2S+1), где S–спин магнитного иона, являются удобным инструментом для описания систем кудитов. Эти когерентные состояния для описания кутритов, то есть спиновых систем со значениями спина S=1 (трёхуровневая система), можно представить в следующем виде [3]

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\phi_1|^2 + \sqrt{|\phi_2|^2}}} \{|0\rangle + |\phi_1|1\rangle + |\phi_2|2\rangle\},$$
(2.5.1)

где $|0\rangle$ – вакуумное, референтное, состояние, а ψ_1 и ψ_2 – амплитуды вероятностей нахождения системы в одном из возбуждённых состояний.

Процесс обмена информацией между кутритами можно моделировать с помощью ВНУШ. Далее, будем исследовать двухсолитонные решения ВНУШ [107, 136], что соответствует существованию двух полюсов *и_i* и *и_j* и размерности

матрицы C_{ij} , 2×2. Соответственно и матрица E_{ij} имеет размерность 2×2. В данном параграфе мы рассматриваем ВНУШ следующего вида

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 = 0,$$

 $i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 = 0$ (2.5.2)

с потенциалом

$$u(x,t) = 2\varepsilon(|\varphi_1(x,t)|^2 - b^2) - \lambda |\varphi_2(x,t)|^2$$
(2.5.3)

и граничными условиями

$$|\varphi_1|_{|x|\to\infty} = b, \qquad |\varphi_2|_{|x|\to\infty} = b.$$
 (2.5.4)

Результатом этой конструкции является то, что функции, построенные через вычеты ψ_j , имеют убывающие граничные условия, а функции Φ_i имеют осциллирующую асимптотику.

Соотношение (2.5.5 см. §2.4) для вычетов при N=2 можно переписать

$$\psi_{j} = \operatorname{res}_{k=\varkappa_{j}}, \quad \psi(x, t, k) = \frac{\det \widehat{M}_{0}(x, t)}{\det M(x, t)}$$
(2.5.5)

где

 $\widehat{M}_{0ki} = M_{kl}, \qquad k, l = 1,2; \quad \widehat{M}_{00} = 0, \qquad \widehat{M}_{0l} = \delta_{lj}, \quad \widehat{M}_{k0} = e^{i\omega k_i}$

Функцию $\psi(x, t, k)$ можно переписать через вычеты

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{k}) = \left(1 + \sum_{j=1}^{2} \psi_j \frac{e^{-i\omega_j}}{k - \varkappa_j}\right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} + \mathbf{k}\mathbf{t})},$$
(2.5.6)

А в условии самосогласования

$$E_{ij} = C_{ij} \left(\overline{E}(\varkappa_i) - E(\varkappa_j) \right).$$
(2.5.7)

положим

$$E_{ij} = \lambda \overline{\gamma}_i \gamma_j, \qquad i, j = 1, 2$$
 (2.5.8)

Введя обозначения

$$\varphi_{1}(x, t, k_{1}) = b\psi(x, t, k_{1}),$$

$$\varphi_{2}(x, t) = \gamma_{1}\psi_{1}(x, t) + \gamma_{2}\psi_{2}(x, t)$$
(2.5.9)

Эти решения свободны от условий склейки, но матрица (C_{ij}) должна удовлетворять условию теоремы 1 (см. §1.1).

Подставив

$$E(k) = k + \frac{\epsilon b^2}{\varkappa - \varkappa_1}$$
 и $E_{ij} = \lambda \overline{\gamma}_i \gamma_j$, $i, j = 1, 2$

в (2.5.7) находим

$$C_{ij} = \frac{\lambda \overline{\gamma}_i \gamma_j}{\overline{\varkappa}_{ij} (1 - \frac{\varepsilon b^2}{(\varkappa_i - \kappa_1)(\varkappa_j - \kappa_1)})}$$
(2.5.10)

Здесь $\varepsilon, \lambda = \pm 1$, эти знаки отвечают за тип симметрии векторного НУШ. Пусть $\varepsilon = 1, \lambda = -1,$, что соответствует u(0,2) симметрии. Положим Im $\varkappa_1 > 0$, Im $\varkappa_2 < 0$. В силу теоремы 2 имеют место следующие неравенства

$$|\varkappa_1 - k_1|^2 < b^2$$
, $|\varkappa_2 - k_1|^2 > b^2$

т.е. полюс \varkappa_1 лежит внутри окружности с радиусом |b| и центром в точке k, вещественной оси, а полюс \varkappa_2 лежит вне этой окружности. Пусть $\varepsilon = 1, \lambda = 1,$, что соответствует u(1,1) симметрии. Здесь тоже положим Im $\varkappa_1 > 0$, Im $\varkappa_2 < 0$. Тогда имеются следующие условия

$$|\varkappa_1 - k_1|^2 > b^2$$
, $|\varkappa_2 - k_1|^2 > b^2$

т.е. точки \varkappa_1 и \varkappa_2 должны лежать вне этой окружности.

Теперь рассмотрим u(2,0) симметрию, т.е. имеет место $\varepsilon = -1, \lambda = 1, B$ этом случае достаточно, чтобы выполнялись условия Im $\varkappa_1 > 0$, Im $\varkappa_2 < 0$. Рассмотрим четвёртый случай, когда $\varepsilon = -1, \lambda = 1,$, что тоже соответствует u(1,1) симметрии. В этой ситуации условия теоремы 2 не выполняется для любого расположения \varkappa_1 и \varkappa_2 .

Теперь вычисляя детерминант (2.5.10), получим функции $\psi_1(x,t), \psi_2(x,t)$ в явном виде

$$\begin{split} \psi_1 &= \frac{A_1 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} +}{A_3 \operatorname{ch}(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \operatorname{ch}(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) +} \\ & + A_2 \operatorname{sh}(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1(x,t)} \\ & + A_2 \operatorname{sh}(P_2(x,t) - H_1(x,t) + h_1)' \\ \hline A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4)' \\ \psi_2 &= \frac{A_6 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} +}{A_3 \operatorname{ch}(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \operatorname{ch}(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) +} \\ & + A_7 sh(P_2(x,t) - H_1(x,t) + H_2)' \\ \hline A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + H_4)' \\ \hline A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + H_4)' \\ \hline \end{pmatrix}$$

где использованы следующие обозначения

$$\begin{split} W_1(x,t) &= \alpha_1 x + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, \\ P_1(x,t) &= \beta_1(x + 2\alpha_1 t), \end{split} \qquad \begin{aligned} W_2(x,t) &= \alpha_2 x + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t, \\ P_2(x,t) &= \beta_2(x + 2\alpha_2 t), \end{aligned}$$

$$\begin{split} h_{1} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varkappa_{21}}{\varkappa_{11} \varkappa_{22} C_{22}} \right|, \qquad h_{2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{C_{11} \varkappa_{11}}{\varkappa_{22} C_{22}} \right|, \\ h_{3} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}) |\varkappa_{12}|^{2} \varkappa_{21} \varkappa_{22}}{|\varkappa_{12}|^{2}} \right|, \\ h_{4} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{C_{12} \varkappa_{12}}{\varkappa_{21} C_{21}} \right|, \qquad h_{5} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\varkappa_{12}}{\varkappa_{21} \varkappa_{11} C_{11}} \right|, \\ \varkappa_{1} &= \alpha_{1} + i\beta_{1}, \qquad \varkappa_{2} = \alpha_{2} + i\beta_{2}, \qquad \varkappa_{ij} = \varkappa_{i} - \varkappa_{j}, \qquad \overline{\varkappa}_{ij} = \overline{\varkappa}_{i} - \varkappa_{j}, \\ A_{1} &= \frac{C_{12}}{2}, \qquad A_{2} = \left(\frac{\overline{\varkappa_{21} C_{22}}}{\varkappa_{12} \varkappa_{21}} \right)^{1/2}, \qquad A_{3} = \left(\frac{C_{11} C_{22}}{\varkappa_{11} \varkappa_{22}} \right)^{1/2}, \\ A_{4} &= \left[\frac{(C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}) |\varkappa_{12}|^{2}}{|\overline{\varkappa_{12}}|^{2} \varkappa_{11} \varkappa_{22}} \right]^{1/2}, \\ A_{5} &= - \left(\frac{C_{12} C_{21}}{\varkappa_{21} \varkappa_{21}} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad A_{6} = \frac{1}{2} C_{21}, \qquad A_{7} = \left(\frac{\varkappa_{12} C_{11}}{\varkappa_{12} \varkappa_{21}} \right). \end{split}$$

Используя соотношения

$$Q_N(x,t,k) = k^N + a_1(x,t)k^{N-1} + \dots + a_N(x,t), \qquad (2.5.11)$$

и потенциал, полученный с помощью выражений

$$E_{ij} = C_{ij} \left(\overline{E}(\varkappa_i) - E(\varkappa_j) \right), \text{ r.e.}$$
$$u = 2[\varepsilon_1 |\varphi_1|^2 + \varepsilon_2 |\varphi_2|^2]$$
(2.5.12)

перепишем решения уравнения (2.5.2) в следующем виде

$$\varphi_{1} = b \left(1 + \frac{e^{i\omega_{1}(x,t)}}{k - \varkappa_{1}} \psi_{1}(x,t) + \frac{e^{i\omega_{2}(x,t)}}{k - \varkappa_{2}} \psi_{2}(x,t) \right) e^{ik(x+kt)},$$

$$\varphi_{2} = \gamma_{1}\psi_{1} + \gamma_{2}\psi_{2}, \qquad (2.5.13)$$

Нетрудная проверка показывает, что $\phi_2 \to 0$, $\phi_1 \to e^{ik(x+kt)}$ при $x \to \pm \infty$.

§2.6. Решения векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с самосогласованным потенциалом φ₁φ₂ + φ₁φ₂

В ряде физических задач системы уравнений могут быть эффективно представлены через ВНУШ.

i
$$\varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 = 0,$$

i $\varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 = 0,$ (2.6.1)

с самосогласованным потенциалом

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = \overline{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \overline{\varphi}_2 . \qquad (2.6.2)$$

Используя предложенную конструкцию, можно найти многосолитонные решения для уравнений типа (2.6.1) и (2.6.2) с убывающими граничными условиями. В частности, возможно построение двухсолитонного решения, для чего необходимо задать эрмитову матрицу E_{ij} в следующей форме:

$$(E_{ij}) = \begin{pmatrix} 2\epsilon\gamma_1\overline{\beta}_1 & \epsilon(\gamma_1\overline{\beta}_2 + \gamma_2\overline{\beta}_1) \\ \epsilon(\gamma_1\overline{\beta}_2 + \gamma_2\overline{\beta}_1) & 2\epsilon\gamma_2\overline{\beta}_2 \end{pmatrix},$$
 (2.6.3)

С помощью матрицы (2.6.3) эрмитова форма (2.3.9 см. Гл.2 §2.3) примет вид

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \overline{\psi}_{i} E_{ij} \psi_{j} = -\varepsilon (\overline{\varphi}_{1} \varphi_{2} + \varphi_{1} \overline{\varphi}_{2}), \qquad (2.6.4)$$

где

$$\varphi_1 = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \qquad \varphi_2 = \bar{\beta}_1 \psi_1 + \bar{\beta}_2 \psi_2,$$
(2.6.5)

В данном случае рассмотрим наиболее простой вариант условий самосогласования, т.е. случай

$$E(k) = k,$$
 (2.6.6)

Матрица (C_{ij}) выражается через матрицу (E_{ij}) следующим образом

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{2\epsilon\gamma_1\overline{\beta}_1}{\overline{\varkappa}_1 - \varkappa_1} & \frac{\epsilon(\gamma_1\overline{\beta}_2 + \gamma_2\overline{\beta}_1)}{\overline{\varkappa}_1 - \varkappa_1} \\ \frac{\epsilon(\gamma_1\overline{\beta}_2 + \gamma_2\overline{\beta}_1)}{\overline{\varkappa}_2 - \varkappa_2} & \frac{2\epsilon\gamma_2\overline{\beta}_2}{\overline{\varkappa}_2 - \varkappa_2} \end{pmatrix},$$
(2.6.7)

Пусть константы γ_i, β_i положительны, а ε=1. Рассмотрим три возможных варианта расположения полюсов.

1) Іт $\varkappa_1 > 0$, Іт $\varkappa_2 < 0$ и в силу теоремы 2 должны выполнятся следующие условия

$$\frac{1}{i}\frac{2\gamma_1\overline{\beta}_1}{\varkappa_{12}} = \frac{2\gamma_1\overline{\beta}_1}{2\beta_1} > 0, \ \frac{1}{i}\frac{2\gamma_2\overline{\beta}_2}{\varkappa_{22}} = \frac{2\gamma_2\overline{\beta}_2}{2\beta_2} < 0$$
(2.6.8)

Очевидно, что указанные условия выполняются в любом случае.

2) Іт $\varkappa_1 > 0$, Іт $\varkappa_2 > 0$. В этом случае матрица $\left(\frac{1}{2}C_{ij}\right)$ должна быть положительно определённой. Это значит, что должны выполняться следующие неравенства

$$\frac{2\gamma_1\bar{\beta}_1}{2\beta_1} > 0, \quad \frac{2\gamma_2\bar{\beta}_2}{2\beta_2} < 0$$

$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\beta_1 \beta_2} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{\beta_1 \beta_2} > \frac{\gamma_1 \overline{\beta}_2}{\gamma_2 \overline{\beta}_1} + \frac{\gamma_2 \overline{\beta}_1}{\gamma_1 \overline{\beta}_2}$$
(2.6.9)

3) Іт $\varkappa_1 < 0$, Іт $\varkappa_2 < 0$. В этом случае эрмитова матрица $\left(\frac{1}{2}C_{ij}\right)$ должна быть отрицательно определённой. Это условие выполняется, если

$$\frac{2\gamma_1\overline{\beta}_1}{2\beta_1} < 0, \quad \frac{2\gamma_2\overline{\beta}_2}{2\beta_2} < 0,$$
$$\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{\beta_1\beta_2} + \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{\beta_1\beta_2} > \frac{\gamma_1\overline{\beta}_2}{\gamma_2\overline{\beta}_1} + \frac{\gamma_2\overline{\beta}_1}{\gamma_1\overline{\beta}_2}$$
(2.6.10)

Теперь рассмотрим процесс получения явного выражения для решений данной системы уравнений (2.6.1). Для этого применим соотношения (2.6.6), (2.3.5) и (2.3.6), а также явное выражение для функций ψ_1 и ψ_2 , которые имеют следующий вид

$$\begin{split} \psi_{1} &= \frac{1}{\det M(x,t)} \Big(C_{22} e^{iW_{1}(x,t) - P_{1}(x,t)} - C_{12} e^{iW_{2}(x,t) + P_{2}(x,t)} + \\ &+ \frac{\overline{\varkappa}_{12}}{\varkappa_{12}\varkappa_{22}} e^{iW_{2}(x,t) + P_{1}(x,t) + 2P_{2}(x,t)} \Big), \\ \psi_{2} &= \frac{1}{\det M(x,t)} \Big(C_{12} e^{iW_{2}(x,t) - P_{2}(x,t)} - C_{21} e^{iW_{1}(x,t) + P_{1}(x,t)} + \\ &+ \frac{\overline{\varkappa}_{21}}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}} e^{iW_{2}(x,t) + P_{2}(x,t) + 2P_{1}(x,t)} \Big), \end{split}$$
(2.6.11)

где

$$det M(x,t) = C_{11}C_{22} + |C_{12}|^2 + \frac{C_{11}}{\varkappa_{22}}e^{2P_2(x,t)} + \frac{C_{22}}{\varkappa_{11}}e^{2P_1(x,t)} - \left(\frac{C_{12}}{\varkappa_{21}}e^{i(W_2(x,t)-W_2(x,t))} + \frac{C_{21}}{\varkappa_{12}}e^{-i(W_2(x,t)-W_2(x,t))}\right)e^{P_1(x,t)+P_2(x,t)} + \frac{|\varkappa_{12}|^2}{|\overline{\varkappa}_{12}|^2\varkappa_{11}\varkappa_{22}}e^{2(P_1(x,t)+P_2(x,t))}$$

Отсюда, окончательно можем написать общее решение системы (2.6.1), которое выражается в виде

$$\varphi_{i} = \frac{A_{i}e^{i(q_{1}x+w_{1}t)} ch(\beta_{1}(x+v_{1}t)+b_{i})+B_{i}e^{i(q_{2}x+w_{2}t)} ch(\beta_{2}(x+v_{2}t)+a_{i}))}{(B_{1}ch(\beta^{+}(x+v^{+}t)+h_{1})+ch(\beta^{-}(x+v^{-}t)+h_{2})+B_{3}cos(qx+wt+w_{0}t))}$$
(2.6.12)

Где

$$\begin{split} W_1(x,t) &= \alpha_1 t + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, & W_2(x,t) = \alpha_2 t + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t, \\ P_1(x,t) &= \beta_1(x + 2\alpha_1 t), & P_2(x,t) = \beta_2(x + 2\alpha_2 t), \\ \varkappa_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & \varkappa_2 = \alpha_2 + i\beta_2, & \varkappa_{ij} = \varkappa_i - \overline{\varkappa}_j, & \overline{\varkappa}_{ij} = \overline{\varkappa}_i - \varkappa_j, \\ \beta^+ &= \beta_1 + \beta_2, & \beta^- = \beta_2 - \beta_1, & \upsilon^{\pm} = \frac{2(\alpha_2\beta_2 \pm \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, & i, j = 1, 2. \\ q &= \alpha_2 - \alpha_1, & w = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2), & w_{01} = -\frac{i}{2}\ln\left|\frac{C_{12}\varkappa_{12}}{C_{21}\varkappa_{21}}\right|, \\ A_1 &= -\left[\frac{\gamma_1 \overline{\varkappa}_{12}(\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}}\right]^{\frac{1}{2}}, & B_1 = -\left[\frac{\gamma_1 \overline{\varkappa}_{21}(\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ A_2 &= -\left[\frac{\overline{\beta_1} \overline{\varkappa_{12}}(\overline{\beta_1} C_{12} - \overline{\beta_2} C_{11})}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}}\right]^{\frac{1}{2}}, & B_2 = -\left[\frac{\overline{\beta_1} \overline{\varkappa_{21}}(\overline{\beta_2} C_{21} - \overline{\beta_1} C_{22})}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right]^{\frac{1}{2}}, \\ b_1 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\gamma_2 \overline{\varkappa_{12}}}{\overline{\varkappa_{21}}\varkappa_{11}(\gamma_1 C_{12} - \gamma_2 C_{11})}\right|, a_1 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\gamma_1 \overline{\varkappa_{21}}}{\overline{\varkappa_{12}}\varkappa_{22}(\gamma_2 C_{21} - \gamma_1 C_{22})}\right|, \\ b_2 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\overline{\beta_2} \overline{\varkappa_{12}}}{\overline{\varkappa_{21}}\varkappa_{22}(\overline{\beta_1} C_{12} - \overline{\beta_2} C_{22})}\right|, a_2 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\overline{\beta_1} \overline{\varkappa_{21}}}{\overline{\varkappa_{12}}\varkappa_{22}(\overline{\beta_2} C_{21} - \overline{\beta_1} C_{22})}\right|, \\ h_1 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\varkappa_{21}}{\overline{\varkappa_{21}}\varkappa_{22}(\overline{\beta_1} C_{12} - \overline{\beta_2} C_{22})}\right|, \\ h_2 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\overline{\beta_1} \overline{\varkappa_{21}}}{\overline{\varkappa_{21}}\varkappa_{22}(\overline{\beta_1} C_{12} - \overline{\beta_2} C_{22})}\right|, \\ h_2 &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\overline{\beta_1} \overline{\varkappa_{21}}}{\overline{\varkappa_{22}}(\overline{\beta_2} C_{22}}\right|, \\ \end{pmatrix}\right|$$

с тривиальными граничными условиями [12, 61, 139, 221]. Нетрудно проверить, что при любом расположении полюсов функции (2.6.12) в пределе

$$\varphi_{ix \to \infty} \to 0, \tag{2.6.13}$$

экспотенциально затухают.

ГЛАВА 3

ИССЛЕДОВАНИЕ СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С УБЫВАЮЩИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной главе представлены методы численных расчетов математического моделирования и исследования СНУШ с убывающими граничными условиями. Рассматриваются ключевые аспекты динамики солитонных решений, включая их устойчивость и эволюцию в нелинейных средах. Особое внимание уделяется бризерам, то есть локализованным решениям с пульсирующей внутренней динамикой, возникающим под действием внешней подкачки и затухания.

Разработанные численные подходы и аналитические методы позволяют исследовать особенности многосолитонных решений, определить условия их формирования и стабилизации, а также выявить закономерности поведения системы при различных параметрах. Основные результаты данной главы опубликованы в следующих работах [10-A, 11-A, 13-A, 17-A, 28-A, 31-A, 41-A]. Полученные результаты проливают свет на механизмы самоорганизации и устойчивости нелинейных локализованных структур [111], что имеет важное значение для понимания динамики волновых процессов в нелинейных физических системах.

§3.1. Методика численных расчетов

B данной главе представлен следующий этап математического моделирования - разработка и реализация алгоритмов для численного исследования динамики солитонных решений. На основе выбранной модели, основанной на скалярном и векторном НУШ, этот этап направлен на практическую реализацию численных методов, позволяющих детально исследовать поведение и устойчивость солитонов. Применяя разработанный алгоритм в среде Matlab [33, 34, 35, 36, 76, 105], мы стремимся отразить ключевые особенности солитонных структур, их динамику и устойчивость при различных воздействиях.

91

Задачей данной главы является переход от теоретической модели к программной реализации численного анализа [37, 157]. Этот этап позволяет воплотить математическую модель солитонов в численном формате, что требует построения точного алгоритма, адаптированного к возможностям современного вычислительного оборудования. Как было указано в первой главе, процесс математического моделирования состоит из трёх основных этапов: построение модели, разработка алгоритма и реализация программы.

На первом этапе была определена модель, описывающая основные свойства солитонов и законы их взаимодействий. Основная математическая модель в нашем случае представлена скалярным и векторным НУШ. Для повышения точности описания реальных физических процессов в модель дополнительно вводятся члены, учитывающие внешние воздействия, такие как подкачка и диссипация, а также скорость движения солитонов. Эти дополнительные параметры позволяют моделировать объект исследования - устойчивые локализованные когерентные структуры, такие как диссипативные солитоны [8], бризеры, когерентные структуры и хаотические солитоны. Такой подход делает модель более универсальной и пригодной для численного анализа сложных динамических процессов, включая исследование устойчивости солитонов и их эволюции в неоднородных и нестационарных условиях.

На втором этапе мы разрабатываем и адаптируем алгоритм, который переводит модель в числовую форму, применимую для решения на компьютере. При разработке алгоритма важно учесть особенности численного представления уравнений, таких как аппроксимация производных и выбор схем для интегрирования по времени. Для решения задачи мы детально определяем последовательность вычислительных шагов, учитываем возможные погрешности, возникающие в процессе численных расчетов, и подбираем оптимальный шаг сетки, обеспечивающий баланс между точностью И вычислительной эффективностью. Такой подход позволяет создать алгоритм, способный устойчиво воспроизводить динамику системы и гарантировать адекватную аппроксимацию эволюции солитонов в условиях заданной модели.

92

В диссертационной работе для численного моделирования выбран метод конечных разностных схем. Этот метод позволяет аппроксимировать производные в уравнениях, заменяя их разностными выражениями, что делает возможным точное и устойчивое численное решение задачи. На примере рассмотрим СНУШ следующего вида

$$i \varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda |\varphi|^2 \varphi = 0. \tag{3.1.1}$$

Решение данного уравнения применяем в следующем виде

$$\varphi = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \tag{3.1.2}$$

где

$$\begin{split} \psi_1 &= (A_1 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + A_2 \sinh(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1(x,t)}) / \\ /(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + \\ &+ A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4)) \\ \psi_2 &= (A_6 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + A_7 \sinh(P_2(x,t) + h_5)) / \\ /(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + \\ &+ A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4) \\ W_1(x,t) &= \alpha_1 x + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, \qquad P_1(x,t) = \beta_1(x + 2\alpha_1 t), \\ W_2(x,t) &= \alpha_2 x + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t, \qquad P_2(x,t) = \beta_2(x + 2\alpha_2 t), \\ &h_1 &= (1/2)\ln|\kappa_{21}/\kappa_{11}\kappa_{22}C_{22}|, \\ &h_2 &= (1/2)\ln|C_{11}\kappa_{11}/\kappa_{22}C_{22}|, \\ &h_3 &= (1/2)\ln|(C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^2\kappa_{21}\kappa_{22}/|\overline{\kappa_{12}}|^2|, \\ &h_4 &= (1/2)\ln|\overline{\kappa_{12}}/\kappa_{21}\kappa_{11}C_{11}|, \\ &\kappa_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \qquad \kappa_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, \\ &\kappa_{ij} &= \kappa_i - \overline{\kappa_j}, \qquad \overline{\kappa_{ij}} &= \overline{\kappa_i} - \kappa_j, \end{split}$$

$$\begin{split} A_{1} &= C_{12}/2, & A_{2} &= (\overline{\varkappa_{21}}C_{22}/\varkappa_{12}\varkappa_{21})^{1/2}, \\ A_{3} &= (C_{11}C_{22}/\varkappa_{11}\varkappa_{22})^{1/2}, & A_{5} &= -(C_{12}C_{21}/\varkappa_{21}\varkappa_{21})^{1/2}, \\ A_{4} &= \left((C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\varkappa_{12}|^{2}/|\overline{\varkappa_{12}}|^{2}\varkappa_{11}\varkappa_{22} \right)^{1/2}, \\ A_{6} &= C_{21}/2, & A_{7} &= (\overline{\varkappa_{12}}C_{11}/\varkappa_{12}\varkappa_{21})^{1/2}. \end{split}$$

Сначала следует аппроксимировать уравнения (3.1.1) с использованием трёхслойной разностной схемы. Алгоритм, построенный на этом методе, обеспечивает пошаговое вычисление параметров системы, а также гарантирует устойчивость при моделировании эволюции многосолитонных решений [13, 39. 153, 154].

$$\varphi_{t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{j}^{i} = \frac{\varphi_{j}^{i+1} - \varphi_{j}^{i-1}}{2\tau} + O(\tau), \quad \varphi_{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{j}^{i} = \frac{\varphi_{j+1}^{i} - \varphi_{j-1}^{i}}{2h} + O(h),$$
$$\varphi_{xx} = \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} \Big|_{j}^{i} = \frac{\varphi_{j+1}^{i} - 2\varphi_{j}^{i} + \varphi_{j-1}^{i}}{h^{2}} + O(h^{2}),$$

получаем

$$\varphi_{j}^{i+1} - \varphi_{j}^{i-1} + 2\pi i \left(\frac{\varphi_{j+1}^{i} - 2\varphi_{j}^{i} + \varphi_{j+1}^{i}}{h^{2}} + \lambda \left| \varphi_{j}^{i} \right|^{2} \varphi_{j}^{i} \right) = 0$$
(3.1.3)

Определяющие вычисления проводились с помощью явной трехслойной разностной схемы, известная как схема "leap - frog", с условием устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ – шаг по времени, h – шаг по координате.

Алгоритм численной схемы моделирования эволюции локализованных решений на примере в СНУШ разработан в следующем виде:

- объявление переменных α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , λ , γ_1 и γ_2

- определение вспомогательных данных:

- JAN общее количество итерации;
- ЈР число шагов вывода данных на печать;
- ТВР время с которого начинается вывод данных;
- XL, XR левые и правые границы отрезка моделирования;
- N число точек; JP число шагов вывода данных на печать;
- Т время моделирования;
- определение возможные варианты расположения полюсов функции $\varkappa_i = \alpha_i + i\beta_i$ и $\varkappa_j = \alpha_j + i\beta_j$
- определение скорости движения солитона $\omega_0 = \frac{2\pi}{\omega qv^-}$.

$$\begin{split} & \cdot \varkappa_{ij} = \varkappa_{i} - \overline{\varkappa}_{j}, \ \overline{\varkappa}_{ij} = \overline{\varkappa}_{i} - \varkappa_{j}, \\ & \cdot W_{1}(x,t) = \alpha_{1}x + (\alpha_{1}^{2} - \beta_{1}^{2})t, \\ & \cdot W_{2}(x,t) = \alpha_{2}x + (\alpha_{2}^{2} - \beta_{2}^{2})t, \\ & \cdot P_{1}(x,t) = \beta_{1}(x + 2\alpha_{1}t), \\ & \cdot P_{2}(x,t) = \beta_{2}(x + 2\alpha_{2}t), \\ & \cdot h_{1} = (1/2)\ln|\varkappa_{21}/\varkappa_{11}\varkappa_{22}C_{22}|, \\ & \cdot h_{2} = (1/2)\ln|C_{12}\varkappa_{21} - C_{11}C_{22})|\varkappa_{12}|^{2}\varkappa_{21}\varkappa_{22}/|\overline{\varkappa_{12}}|^{2}|, \\ & \cdot h_{3} = (1/2)\ln|C_{12}\varkappa_{12}/\varkappa_{21}C_{21}|, \\ & \cdot h_{4} = (1/2)\ln|C_{12}\varkappa_{12}/\varkappa_{21}\varkappa_{11}C_{11}|, \\ & \cdot h_{5} = (1/2)\ln|\overline{\varkappa_{12}}/\varkappa_{21}\varkappa_{11}C_{11}|, \\ & \cdot h_{4} = C_{12}/2, \ A_{2} = (\overline{\varkappa_{21}}C_{22}/\varkappa_{12}\varkappa_{21})^{1/2}, \\ & \cdot A_{3} = (C_{11}C_{22}/\varkappa_{11}\varkappa_{22})^{1/2}, \\ & \cdot A_{4} = ((C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\varkappa_{12}|^{2}/|\overline{\varkappa_{12}}|^{2}\varkappa_{11}\varkappa_{22})^{1/2}, \\ & \cdot A_{5} = -(C_{12}C_{21}/\varkappa_{21}\varkappa_{21})^{1/2}, \\ & \cdot A_{6} = C_{21}/2, \ A_{7} = (\overline{\varkappa_{12}}C_{11}/\varkappa_{12}\varkappa_{21})^{1/2}. \\ & \cdot \psi_{1} = (A_{1}e^{iW_{1}(x,t)-P_{1}(x,t)} + A_{2}\sinh(P_{2}(x,t) + h_{1})e^{iW_{1}(x,t)})/ \\ & \cdot (A_{3}\cosh(P_{2}(x,t) - W_{1}(x,t) + h_{4})), \\ & \cdot \psi_{2} = (A_{6}e^{iW_{1}(x,t)-P_{1}(x,t)} + A_{7}\sinh(P_{2}(x,t) + h_{5}))/ \end{split}$$

$$/(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4).$$

- τ (HT) - шаг по времени; h (HX) - шаг по координате;

- Шаги по времени и координате должны соответствовать условию устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$.

- Начальные условия данного уравнения

$$\varphi_j^i = \gamma_1 \left(\psi_j^i \right)_1 + \gamma_2 (\psi_j^i)_2,$$

- определение условий (i=1..., N) в трех слоях по времени:

первый слой $\varphi(x, 0)$ – при t=0, то есть по следующей разностной схемы

$$\varphi_j^{i+1} = \varphi_j^i - 2\tau i \left(\frac{\varphi_{j+1}^i - 2\varphi_j^i + \varphi_{j+1}^i}{h^2} + \lambda \left| \varphi_j^i \right|^2 \varphi_j^i \right)$$

Второй и последующие слои вычисляются по схеме $\varphi(x, \tau)$ при t= τ и разностная схема типа "leap-frog" с точностью $\theta(\tau, h^2)$.

$$\varphi_{j}^{i+1} = \varphi_{j}^{i-1} - 2\tau i \left(\frac{\varphi_{j+1}^{i} - 2\varphi_{j}^{i} + \varphi_{j+1}^{i}}{h^{2}} + \lambda |\varphi_{j}^{i}|^{2} \varphi_{j}^{i} \right)$$

- определение значения начальных условий на точках отрезка моделирования, в первых двух слоях по времени;

- счёт по численной схеме;

- вычисление значения функции *ф* осуществляется с использованием разностной схемы второго порядка точности как по времени, так и по координате;

вычисления значения плотности интегралов движения, что должны сохранятся с точностью ~10⁻⁶

$$E = \int \left(\left| (\varphi_j^i)_x \right|^2 - (\lambda \left| \varphi_j^i \right|^2)^2 \right) dx$$

- вызов подпрограммы для вычисления интегралов движения;

- определение конденсатные граничные условия, для этого нужно приравнять:

на первом слое 0-ю точку с 1 - ой точкой; N-1 – точку с точкой N;

на следующих слоях 1 – ю точку с 2 точкой и N+1 точку с N – точкой;

- создание новых файлов (OUT1(a, n); OUT2(b, n); n=1:7) для сохранения исходных данных;

- обновление параметров численной схемы:

 $t = \tau + t$ – увеличение времени на один шаг;

j=j+1 – обновление счётчика итерации;

На третьем этапе создается программа или комплекс компьютерных программ, которые переводят модель и алгоритм на язык, доступный для выполнения компьютером. В качестве среды разработки выбрана матричная лаборатория Matlab, предоставляющая удобные инструменты для работы с матричными и векторными операциями. Это значительно облегчает реализацию численных методов и конечных разностных схем (или метод сеток), необходимых для моделирования динамики локализованных структур. Matlab также обладает мощными средствами визуализации, что позволяет наглядно анализировать результаты моделирования и отслеживать эволюцию решений во времени.

Таким образом, программная реализация охватывает весь процесс - от ввода данных и вычислений до визуального анализа полученных решений. По вышеописанному алгоритму нами разработан комплекс компьютерных программ, позволяющий моделировать эволюцию локализованных когерентных структур СНУШ и ВНУШ, на основе начальных данных и граничных условий. В данной главе численные эксперименты становятся инструментом для проверки

97

устойчивости разработанных моделей и анализа взаимодействий солитонов с учетом различных параметров и внешних воздействий.

§ 3.2. Устойчивость и динамика солитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера

Солитоны, изначально изученные как решения для описания волн на неглубокой воде, в настоящее время обнаружены в качестве решений множества уравнений в различных разделах механики и физики. Одним из ярких примеров является СНУШ, которое активно используется для описания нелинейных волн в таких областях, как оптика, физика плазмы и теория конденсированных сред:

$$i \psi_t + \psi_{xx} + u(x, t)\psi = 0.$$
 (3.2.1)

В этом уравнении роль потенциала может выполнять низкочастотная волна, описываемая следующим уравнением

$$\Box u(x,t) = -|\psi|_{xx}^2 \tag{3.2.2}$$

(Захаров Б.Е. [56]),

Уравнение (3.2.2) изначально было выведено в процессе изучения явлений оптической самофокусировки и расщепления оптических пучков. Это же уравнение применялось для анализа волн на глубокой воде. Со временем СНУШ было обобщено для описания волновых процессов в плазме. Особый интерес представляет его применение в теории элементарных частиц. В настоящее время солитонная теория находит широкое применение в разнообразных областях науки и техники. Она используется для исследования линий передачи сигналов с нелинейными элементами (такими как диоды и катушки сопротивления), пограничных слоев, атмосфер планет, цунами, волновых процессов в плазме, теории поля, физики твёрдого тела и теплофизики экстремальных состояний вещества. Кроме того, солитонная теория применяется в изучении современных материалов, таких как джозефсоновские контакты, состоящие из двух сверхпроводящих слоёв, разделённых диэлектриком, а также при моделировании кристаллических решёток, в оптике, биологии и других дисциплинах.

Целью данного параграфа является анализ устойчивости многосолитонных решений и изучение их поведения при изменении внешних параметров в процессе эволюции. Особое внимание уделено детальному исследованию результатов численного моделирования решений СНУШ. Основной акцент сделан на динамике и устойчивости этих структур [52]. Проведённые исследования способствуют более глубокому пониманию нелинейных волновых процессов и открывают новые перспективы в таких областях, как оптика, физика плазмы и квантовые технологии.

Рассмотрим СНУШ, где в качестве потенциала играет роль низкочастотная волна, следующего вида

$$i \varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda |\varphi|^2 \varphi = 0 \tag{3.2.3}$$

с убывающими граничными условиями при $|x| \to \infty$. Данное уравнение широко известно, как модель бозе-конденсата, для которого методом обратной задачи рассеяния были получены многосолитонные решения [57]. Многосолитонное решение уравнения (3.2.3), можно представить в следующем виде [136]

$$\varphi = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \tag{3.2.4}$$

где

$$\begin{split} \psi_1 &= (A_1 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + A_2 \sinh(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1(x,t)}) / \\ /(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + \\ &\quad + A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4)) \\ \psi_2 &= (A_6 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + A_7 \sinh(P_2(x,t) + h_5)) / \end{split}$$

$$\begin{split} /(A_{3}\cosh(P_{2}(x,t) - P_{1}(x,t) + h_{2}) + A_{4}\cosh(P_{2}(x,t) + P_{1}(x,t) + h_{3}) + \\ + A_{5}\cos(W_{2}(x,t) - W_{1}(x,t) + h_{4}) \\ W_{1}(x,t) &= \alpha_{1}x + (\alpha_{1}^{2} - \beta_{1}^{2})t, \qquad P_{1}(x,t) = \beta_{1}(x + 2\alpha_{1}t), \\ W_{2}(x,t) &= \alpha_{2}x + (\alpha_{2}^{2} - \beta_{2}^{2})t, \qquad P_{2}(x,t) = \beta_{2}(x + 2\alpha_{2}t), \\ h_{1} &= (1/2)\ln|\kappa_{21}/\kappa_{11}\kappa_{22}C_{22}|, \\ h_{2} &= (1/2)\ln|C_{11}\kappa_{11}/\kappa_{22}C_{22}|, \\ h_{3} &= (1/2)\ln|(C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^{2}\kappa_{21}\kappa_{22}/|\overline{\kappa_{12}}|^{2}|, \\ h_{4} &= (1/2)\ln|C_{12}\kappa_{12}/\kappa_{21}\kappa_{11}C_{11}|, \\ \kappa_{1} &= \alpha_{1} + i\beta_{1}, \qquad \kappa_{2} &= \alpha_{2} + i\beta_{2}, \\ \kappa_{ij} &= \kappa_{i} - \overline{\kappa}_{j}, \qquad \overline{\kappa}_{ij} &= \overline{\kappa}_{i} - \kappa_{j}, \\ A_{1} &= C_{12}/2, \\ A_{2} &= (\overline{\kappa_{21}}C_{22}/\kappa_{12}\kappa_{21})^{1/2}, \qquad A_{3} &= (C_{11}C_{22}/\kappa_{11}\kappa_{22})^{1/2}, \\ A_{5} &= -(C_{12}C_{21}/\kappa_{21}\kappa_{21})^{1/2}, \qquad A_{6} &= C_{21}/2, \\ A_{7} &= (\overline{\kappa_{12}}C_{11}/\kappa_{12}\kappa_{21})^{1/2}. \end{split}$$

При дальнейшем изложении, используем характеристику решения, т.е., интеграл энергии в следующем виде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (|\phi_x|^2 + (\lambda |\phi|^2)^2) dx$$
 (3.2.5)

Для анализа устойчивости эволюции решения (3.2.4) СНУШ с убывающими граничными условиями, то есть при $|x| \to \infty$, нами разработан алгоритм и комплекс компьютерных программ численного моделирования на платформе Matlab, основанный на теории разностных схем [103]

$$\varphi_{j}^{i+1} - \varphi_{j}^{i-1} + 2\tau i \left(\frac{\varphi_{j+1}^{i} - 2\varphi_{j}^{i} + \varphi_{j+1}^{i}}{h^{2}} + \lambda |\varphi_{j}^{i}|^{2} \varphi_{j}^{i} \right) = 0$$

В работе применяются условия устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ — шаг по времени, а h — шаг по координате, и используется явная трехслойная разностная схема, известная как схема «leap-frog». В тестовых вычислениях интеграл энергии сохранялся с относительной точностью $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$.

Численное моделирование многосолитонного решения (3.2.4) было проведено в широком диапазоне значений параметров α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , λ , γ_1 и γ_2 . Результаты наиболее точных численных экспериментов при следующих значениях параметров: b = 0.86, $\alpha_1 = 0.037$, $\alpha_2 = 1.32$, $\beta_1 = 0.028$, $\beta_2 = 0.019$, $\gamma_1 = 1.64$, $\gamma_2 = 1.64$, $\lambda = 0.39$, k1 = 0.79 на интервале [0, 1000] до времени t = 200 представлены на рисунках 3.2.1-3.2.2.



Рисунок 3.2.1. - График интеграла энергии солитона



Рисунок 3.2.2. - График эволюции плотности энергии солитона

На графике (см. рис. 3.2.1), показывающем интегралы энергии солитона, представлена зависимость переменной Е от времени t в диапазоне от 0 до 200. Визуально график остаётся практически горизонтальным в течение значительного времени, что указывает структурно устойчивое решение уравнения (3.2.3), несмотря на слабые изменения переменной со временем и отсутствие значительной динамики. График эволюции плотности энергии системы во времени и пространстве изображает модулированную волну, которая на левых и правых границах достигает одинаковых вакуумных состояний (см. рис. 3.2.2) и "достаточно долго" сохраняет свою устойчивость в течение указанного интервала времени. Такое поведение подтверждает, что солитонное решение способно поддерживать устойчивость при незначительных возмущениях и сохраняет свою форму и энергию на продолжительных временных интервалах, что свидетельствует о стабильности и целостности солитонного решения на данном временном отрезке [18-A, 42-A].

§ 3.3. Об особенностях бризеров в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера

Рассмотрим СНУШ с убывающими граничными условиями следующего вида

$$i \varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda |\varphi|^2 \varphi = 0. \tag{3.3.1}$$

Подобные уравнения появляются при изучении взаимодействия спиновых волн с фононами в ферромагнетиках, а также экситонов с фононами в молекулярных кристаллах [49]. Недавние экспериментальные данные показали, что распространение «световых молекул» в волоконных световодах также может быть описано НУШ с высокой степенью точности [27, 257, 259, 260].

Следует отметить, что решения в виде белл-солитонов для уравнения (3.3.1) хорошо известны и исследованы. Они находят широкие приложения в различных областях нелинейной физики. Вместе с тем, практически ничего неизвестно о бризерных решениях данного уравнения. Попробуем ответить на этот вопрос, решая это уравнение с использованием конечнозонного метода интегрирования Кричевера, Захарова, Шабата [57]. Используем многосолитонное решение уравнения, убывающее при $|x| \to \infty$, в виде (3.3.2)

$$\varphi = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \tag{3.3.2}$$

Интеграл числа частиц N и гамильтониан *H* уравнения (3.3.1) определяются следующим образом:

$$N = \int |\varphi|^2 dx, \quad H = \int (|\varphi_x|^2 - (\lambda |\varphi|^2)^2) dx \quad (3.3.3)$$

Следует отметить, что двухсолитонные решения (3.3.2) СНУШ с убывающими граничными условиями (3.3.1) до настоящего времени не подвергались достаточно глубокому исследованию. В частности, вопросы их устойчивости остаются практически не изученными, а анализ динамики этих солитонов проводился лишь в ограниченной степени.

Для проведения анализа эволюции решения (3.3.2) СНУШ с убывающими граничными условиями (3.3.1) на основе теории разностных схем (см. напр. [103]) нами разработан комплекс компьютерных программ численного моделирования. Использовалась трехслойная разностная схема явного типа, так называемая схема "leap-frog" с условием устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ – шаг по времени, h – шаг по координате. В тестовых вычислениях интеграл энергии сохранялся с высокой относительной точностью $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$, а интеграл числа частиц $\Delta N/N \approx 10^{-4} - 10^{-5}$.

Численное моделирование и анализ эволюции многосолитонного решения (3.3.2) проводились в широком интервале изменения параметров α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , λ , γ_1 и γ_2 и демонстрировали устойчивость солитона, при сохранении его формы, на значительных временах численного интегрирования. Результаты наиболее точных численных экспериментов при заданных значениях параметров b = 1, $\alpha_1 = 0.29, \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.096, \beta_2 = 0.1, \gamma_1 = 1.2, \gamma_2 = 1.2, \lambda = 1$, k1 = 0.05 на интервале [-100, 100] до времен t=80 представлены для случая нулевой скорости на рис. 3.3.1-3.3.4.



Рисунок 3.3.1. - График плотности числа частиц при t=0



Рисунок 3.3.2. - График плотности энергии солитона при t=0



Рисунок 3.3.3. - График эволюции плотности числа частиц солитона



Рисунок 3.3.4. - График эволюции плотности энергии солитона

Таким образом, численное моделирование двухсолитонного решения (3.3.2) при нулевой скорости движения центра масс показывает отсутствие бризерной

динамики. Это означает, что солитон представляет собой два связанных стационарных и неподвижных «горба».

Второй этап моделирования заключался в численном моделировании решения (3.3.1) при ненулевой скорости его движения. Как показывает серия численных экспериментов, картина эволюции многосолитоного решения в этом случае отличается кардинальным образом. Мы выбирали интервал изменения скорости движения центра масс многосолитонного решения в пределах от 0 до 0.5 с шагом 0.01. На графиках ниже приведены наиболее характерные результаты численного моделирования, имеющее место при v=0.12 (см. рис. 3.3.5-3.3.8).



Рисунок 3.3.5. - График эволюции плотности числа частиц солитона (v=0.12)



Рисунок 3.3.6. - График эволюции плотности энергии солитона (v=0.12)



Рисунок 3.3.7. - Графики плотности числа частиц солитона при разных моментах времени t (v=0.12)


Рисунок 3.3.8 -. График плотности энергии солитона при разных моментах времени t (v=0.12)

Таким образом, выполненный цикл численных экспериментов свидетельствует о том, что двухсолитонное решение (3.3.2) СНУШ с убывающими (3.3.1),построенное алгеброграничными условиями c использованием геометрического метода, демонстрирует устойчивость в ходе численных расчётов. Динамика внутренних степеней свободы носит бризерный характер [180], однако проявляется исключительно при ненулевой корости солитона [10-А, 11-А, 28-А, 41-A].

§ 3.4. Диссипативные структуры скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера

В данном параграфе рассматривается численное моделирование и анализ эволюции решений СНУШ с убывающими граничными условиями при $|x| \to \infty$

$$i\varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda |\varphi|^2 \varphi = 0 \tag{3.4.1}$$

в которых используются некоторые другие параметры α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , λ , γ_1 и γ_2 на значительных временах численного интегрирования. Солитонное решение данного уравнения, было получено методом конечнозонного интегрирования [136] в виде

$$\varphi = \gamma_1 \psi_1 + \gamma_2 \psi_2, \tag{3.4.2}$$

где

$$\begin{split} \psi_1 &= (A_1 e^{iW_1(x,t)-P_1(x,t)} + A_2 \sinh(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1(x,t)}) / \\ /(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + \\ &+ A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4)) \\ \psi_2 &= (A_6 e^{iW_1(x,t)-P_1(x,t)} + A_7 \sinh(P_2(x,t) + h_5)) / \\ /(A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + \\ &+ A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4) \\ W_1(x,t) &= \alpha_1 x + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t, \qquad P_1(x,t) = \beta_1(x + 2\alpha_1 t), \\ W_2(x,t) &= \alpha_2 x + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t, \qquad P_2(x,t) = \beta_2(x + 2\alpha_2 t), \\ &h_1 &= (1/2)\ln|\kappa_{21}/\kappa_{11}\kappa_{22}C_{22}|, \\ &h_2 &= (1/2)\ln|C_{11}\kappa_{11}/\kappa_{22}C_{22}|, \\ &h_3 &= (1/2)\ln|(C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^2\kappa_{21}\kappa_{22}/|\overline{\kappa_{12}}|^2|, \\ &h_4 &= (1/2)\ln|\overline{\kappa_{12}}/\kappa_{21}\kappa_{11}C_{11}|, \\ &\kappa_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \qquad \kappa_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, \\ &\kappa_{ij} &= \kappa_i - \overline{\kappa}_j, \qquad \overline{\kappa}_{ij} &= \overline{\kappa}_i - \kappa_j, \\ &A_1 &= C_{12}/2, \end{split}$$

$$\begin{split} A_2 &= (\overline{\varkappa_{21}} C_{22} / \varkappa_{12} \varkappa_{21})^{1/2}, \qquad A_3 = (C_{11} C_{22} / \varkappa_{11} \varkappa_{22})^{1/2}, \\ A_4 &= \left((C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}) |\varkappa_{12}|^2 / |\overline{\varkappa_{12}}|^2 \varkappa_{11} \varkappa_{22} \right)^{1/2}, \\ A_5 &= -(C_{12} C_{21} / \varkappa_{21} \varkappa_{21})^{1/2}, \qquad A_6 = C_{21} / 2, \\ A_7 &= (\overline{\varkappa_{12}} C_{11} / \varkappa_{12} \varkappa_{21})^{1/2}. \end{split}$$

Приведём также характеристики решения, которые будут использоваться в дальнейшем изложении. Это интегралы уравнения (3.2.4), или точнее, импульс

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_x \varphi - \varphi_x \bar{\varphi}) \, dx, \qquad (3.4.3)$$

интеграл числа частиц

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} (|\varphi|^2) dx \tag{3.4.4}$$

и энергии

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (|\varphi_x|^2 + (\lambda |\varphi|^2)^2) dx$$
 (3.4.5)

Следует подчеркнуть, что двухсолитонные решения (3.4.2) СНУШ с убывающими граничными условиями (3.4.1) уже рассматривались в предыдущем параграфе. Проведённые численные эксперименты показывают, что двухсолитонное решение (3.4.2) данного уравнения демонстрирует устойчивость в ходе расчётов. При этом динамика внутренних степеней свободы имеет бризерный характер [116, 162], что проявляется только при наличии ненулевой скорости солитона.

Для численного моделирования уравнения (3.4.1) нами написана разностная схема и проводилось по алгоритму, аналогичному использовавшемуся в [11-A, 28-A]. Результаты численных экспериментов при заданных значениях параметров b = 1, $\alpha_1 = 0.029$, $\alpha_2 = 1.1$, $\beta_1 = 0.019$, $\beta_2 = 0.01$, $\gamma_1 = 1.84$, $\gamma_2 = 1.84$, $\lambda =$

0.3, *k*1 = 0.7 на интервале х∈[-300, 100] при t∈[0:200] представлены следующим образом на рис. 3.4.1-3.4.6.



Рисунок 3.4.1. - График плотности импульса солитона при t = 0



Рисунок 3.4.2. - График плотности числа частиц солитона при t=0



Рисунок 3.4.3. - График плотности энергии солитона при t=0



Рисунок 3.4.4. - График эволюции плотности импульса солитона



Рисунок. 3.4.5. - График эволюции плотности числа частиц солитона



Рисунок 3.4.6. - График эволюции плотности энергии солитона

Напомним, что в результате совместного действия нелинейности и дисперсии образуется устойчивая долгоживущая структура, называемая солитоном. Вместе с тем, в диссипативных структурах, как было показано в работе [180, 298, 299], возможен процесс формирования диссипативных солитонов, в которых, наряду с нелинейностью и дисперсией, выдающейся роль, играют диссипация и подкачка. В результате взаимного проявления диссипации и подкачки образуется устойчивая, долгоживущая, локализованная когерентная структура - диссипативный солитон. Поэтому для исследования ДС, мы вводим в правой части уравнения (3.4.1) параметры затухания и подкачку.

Таким образом, СНУШ с убывающими граничными условиями (3.4.1) при наличии переменных внешних магнитных полей и диссипации [58] имеет следующий вид

$$i \varphi_t - \varphi_{xx} - \lambda |\varphi|^2 \varphi = h \bar{\varphi} e^{2i\omega_0} - i\gamma \varphi, \qquad (3.4.6)$$

где, γ - коэффициент диссипации и, $h \ u \ \omega_0$ – амплитуда и частота накачки, а ω_0 совпадает с собственной частотой ω_0 из решения (3.4.2).

Численные эксперименты проводились в области изменения параметров диссипации и подкачки. Моделирование проводилось при следующих значениях параметров b = 1, $\alpha_1 = 0.029$, $\alpha_2 = 1.1$, $\beta_1 = 0.019$, $\beta_2 = 0.01$, $\gamma_1 = 1.84$, $\gamma_2 = 1.84$, $\lambda = 0.3$, k1 = 0.7, $\gamma = 0.2$, h = 0.5 на интервале [-300, 100] до времен t=200. Интеграл импульса, числа частиц и интеграл энергии в тестовых вычислительных экспериментах сохранялись с хорошей точностью $\frac{\Delta P}{P} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta A}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-5}$, $\frac{\Delta A}$



Рисунок 3.4.7. - График интеграла импульса солитона при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.8. - График интеграла числа частиц солитона при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.9. - График интеграла энергии солитона при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.10. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла числа частиц от интеграла энергии) при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.11. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла числа частиц от интеграла импульса) при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.12. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла импульса от интеграла энергии) при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.13. - График эволюции плотности импульса солитона при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.14. - График эволюции плотности числа частиц солитона при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.15. - График эволюции плотности энергии солитона при учёте диссипации и подкачки



Рисунок 3.4.16. - График эволюции плотности импульса солитона при разных моментах времени: a) t=0; б) t=100; в) t=200

Следует отметить, что численное моделирование солитонного решения (3.4.2) в условиях диссипации, подкачки и при нулевой скорости демонстрирует бризерную динамику: интегралы уравнения (3.4.6) сохраняются даже при значительных осцилляциях (см. рис. 3.4.7–3.4.9). Фазовые траектории ДС остаются ограниченными внутри конкретной области фазового пространства, что указывает на развитие системы вблизи так называемого «странного аттрактора» (см. рис. 3.4.10–3.4.12). Эволюция плотности импульса, числа частиц и энергии солитона подтверждает бризерную динамику внутренних степеней свободы солитонного решения: солитон остается пространственно локализованным, проявляя поведение (см. 3.4.13–3.4.15). Итак, пульсирующее рис. результаты вычислительных экспериментов демонстрируют, что в условиях внешней подкачки в диссипативной среде и при нулевой скорости движения СНУШ возможно образование устойчивых диссипативных солитонов (бризеров).

В качестве следующей стратегии получения ДС выбирается движущийся ДС, т.е. задача заключается в слежении за преобразованиями периодических решений, ПС, возникающих бифуркаций и объяснить некоторую часть карты аттракторов [263] уравнения (3.4.6). ПС, являющиеся решениями диссипативных систем, вызывают значительный интерес и были выявлены как экспериментально, так и численно, например, при распространении световых импульсов в волоконной представляют собой один из оптике. Эти солитоны возможных типов локализованных решений. ПС могут быть интерпретированы как предельные бесконечномерных диссипативных циклы динамических систем. Однако результаты численного моделирования ясно указывают на их появление через бифуркацию, исходящую от стационарных солитонов [285]. При заданной скорости движения (v=0.11) в солитонном решении (3.4.2) СНУШ с учетом диссипации и внешней подкачки ПС могут демонстрировать более сложное поведение. В частности, простые пульсации могут переходить в пульсации с удвоенным периодом. Это явление связано с бифуркацией, возникающей на определенных границах в пространстве параметров уравнения. Пример солитона, подвергшегося такой бифуркации, представлен на рис. 3.4.17-3.4.22.

121



Рисунок 3.4.17. - График эволюции плотности импульса солитона при учёте диссипации, подкачки и ненулевой скорости движения



Рисунок 3.4.18. - График эволюции плотности числа частиц солитона при учёте диссипации, подкачки и скорости движения



Рисунок 3.4.19. - График эволюции плотности энергии солитона при наличии диссипации и подкачки и скорости движения



Рисунок 3.4.20. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла числа частиц от интеграла импульса) при учёте диссипации и подкачки и скорости *v*=0.11



Рисунок 3.4.21. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла импульса от интеграла энергии) при учёте диссипации и подкачки и ненулевой скорости движения



Рисунок 3.4.22. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла числа частиц от интеграла энергии) при учёте диссипации и подкачки и скорости движения

Таким образом, численное моделирование многосолитонных решений СНУШ с убывающими граничными условиями, учитывающее затухание и внешнюю подкачку через граничные условия, и ненулевой скорости движения демонстрирует весьма интересное поведение нелинейных локализованных солитоноподобных объектов. Обнаружено формирование ПС с двумя пульсациями (рис. 3.4.17-3.4.19). При корректном выборе траектории в параметрическом пространстве можно наблюдать последовательность бесконечного числа бифуркаций удвоения периода, что приводит к формированию так называемого хаотического солитона. ФП системы является наиболее наглядным инструментом для анализа характера её эволюции (рис. 3.4.20-3.4.22).

В заключение можно сказать, что результаты численных исследований указывают на формирование устойчивого ДС в СНУШ с убывающими граничными условиями, принимая во внимание затухание и внешнюю подкачку при ненулевой скорости движения. Влияние затухания и внешних полей, а также ненулевая скорость, способствует образованию солитоноподобных структур. Эти результаты демонстрируют, что диссипативные процессы в сочетании с внешними воздействиями создают условия, благоприятные для существования долгоживущих устойчивых солитонов, И которые сохраняют свою локализованность и проявляют интересное пульсирующее поведение с удвоением периода [13-А, 31-А, 41-А]. Подобные наблюдения подчеркивают важность учета динамических взаимодействий при моделировании солитонных решений и их возможных приложений в различных областях физики.

125

ГЛАВА 4

МНОГОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С КОНДЕНСАТНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данной главе рассматриваются многосолитонные решения СНУШ с конденсатными граничными условиями [136], предложенный в работе [49], а также анализируются хаотические состояния многосолитонных решений [263, 264]. Основная цель заключается в исследовании эволюцию этих решений во времени и анализу их устойчивости в зависимости от начальных условий и параметров системы. Посредством численного моделирования демонстрируется, как малые возмущения или изменения параметров системы влияют на траекторию её эволюции, вызывая модификацию СНУШ. В частности, внесение небольших возмущений подкачки и затухания позволяет изучить, как колебания энергии и процессы диссипации отражаются на долгосрочной динамике и устойчивости многосолитонных решений. Эти эффекты вносят дополнительную сложность в систему и приближают её описание к реальным физическим условиям, где полное исключение внешних воздействий невозможно. Численные методы позволили впервые получить И отследить эволюцию многосолитонных решений, проанализировать их поведение в различных режимах и определить области устойчивости и неустойчивости параметров. Такой подход раскрывает, как изначально стационарные решения СНУШ трансформируются во времени и какие факторы оказывают наибольшее влияние на их динамику и устойчивость. Полученные результаты и их детальный анализ представлены автором в ряде научных публикаций [2-А, 4-А, 5-А, 8-А, 9-А, 16-А, 18-А, 23-А, 24-А, 26-А, 27-А, 42-А, 43-А], где приведены теоретические обоснования и результаты численных экспериментов, подтверждающие достоверность и эффективность разработанного подхода. Они имеют практическую значимость для областей, где устойчивость волновых процессов являются критически важными, таких как оптика, гидродинамика и теория конденсированных сред.

126

§ 4.1. Двухсолитонные конфигурации скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом

Хотя впервые нелинейные волновые явления наблюдались еще в середине XIX века Джоном Скоттом Расселом [271], а первые нелинейные эволюционные уравнения, описывающие нелинейные волны в гидродинамике (уравнение Кортевега-де Фриза [234], уравнение Буссинеска [195]) исследуются еще с конца XIX века, тем не менее продолжают оставаться основным объектом исследования как в математической физике [6], так и в теории конденсированного состояния [247], оптике [70] и нелинейных непертурбативных теориях поля [268, 275-278]. Поэтому ниже рассмотрим СНУШ с притягивающим потенциалом следующего вида

$$i \phi_t - \phi_{xx} - 2(|\phi|^2 - b^2)\phi = 0.$$
 (4.1.1)

Многосолитонное решение этого уравнения было получено в [136] методом конечнозонного интегрирования в виде

$$\varphi = b \left(1 + \frac{C_3 \cos(qx + wt + w_{02}) + C_4 e^{\beta^+ (x + v^+ t)}}{C_1 ch(\beta^+ (x + v^+ t) + h_1) + C_2 \cos(qx + wt + w_{01})} \right) e^{ik_1 (x + k_1 t)} , \qquad (4.1.2)$$

где

$$\begin{split} C_{1} &= \left(\frac{|C_{12}|^{2}|\varkappa_{12}|^{2}}{|\overline{\varkappa}_{12}|^{2}\overline{\varkappa}_{11}\overline{\varkappa}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad e^{h_{1}} = \left(\frac{|\varkappa_{12}|^{2}}{|C_{12}|^{2}|\varkappa_{12}|^{2}\overline{\varkappa}_{11}\overline{\varkappa}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ C_{2} &= -\left(\frac{C_{11}C_{22}}{\overline{\varkappa}_{12}\overline{\varkappa}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad e^{iw_{01}} = \left(\frac{C_{12}\overline{\varkappa}_{12}}{C_{21}\overline{\varkappa}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ C_{3} &= \left(\frac{C_{12}C_{21}}{(k_{1} - \varkappa_{1})(k_{1} - \varkappa_{2})}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad e^{iw_{02}} = \left(\frac{C_{12}(k_{1} - \varkappa_{2})}{C_{21}(k_{1} - \varkappa_{1})}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{split}$$

$$\begin{split} \mathsf{C}_4 &= -\frac{1}{2} \Big(\frac{\overline{\varkappa}_{21}}{(\mathbf{k}_1 - \varkappa_1)\overline{\varkappa}_{12}\overline{\varkappa}_{22}} - \frac{\overline{\varkappa}_{12}}{(\mathbf{k}_1 - \varkappa_2)\overline{\varkappa}_{21}\overline{\varkappa}_{11}} \Big)^{\frac{1}{2}}, \\ \mathsf{q} &= \alpha_2 - \alpha_1, \qquad \mathsf{w} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2), \\ \varkappa_{ij} &= \varkappa_i - \overline{\varkappa}_j, \qquad \overline{\varkappa}_{ij} = \overline{\varkappa}_i - \varkappa_j, \qquad \beta^+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta^- = \beta_2 - \beta_1, \\ \upsilon^{\pm} &= \frac{2(\alpha_2\beta_2 \pm \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, \qquad \mathsf{i}, \mathsf{j} = \mathsf{1}, \mathsf{2}, \end{split}$$

при конденсатных граничных условиях.

Интеграл числа частиц N и гамильтониан Н уравнения (4.1.1) определяются следующим образом

$$N = \int |\phi|^2 dx, \quad H = \int (|\phi_x|^2 - (|\phi|^2 - b^2)^2) dx \quad (4.1.3)$$

Задачей данного параграфа является детальное исследование поведения решений СНУШ при различных начальных и граничных условиях. Основное внимание уделяется анализу устойчивости многосолитонных решений и их эволюции в условиях, приближенных к реальным физическим системам. Для этого рассматриваются различные режимы подкачки и затухания, а также влияние малых возмущений на траекторию развития системы. Численные методы позволяют глубже понять, как изменения параметров влияют на динамику решений, выявить устойчивые области, а также отследить взаимодействие солитонов во времени. Следует особенности отметить. что многие линамики И эволюции многосолитонных решений можно выявить исключительно методами численного моделирования [180]. Вместе с тем, в случае проявления устойчивости решения в ходе численного эксперимента можно ожидать устойчивость солитонного решения и в строгом, математическом смысле, однако следует иметь ввиду, что анализ устойчивости по Ляпунову является линейным и навряд ли применим к решениям нелинейных эволюционных уравнений.

Для проведения анализа эволюции многосолитоного решения (4.1.2) для СНУШ (4.1.1) на основе теории разностных схем разработан алгоритм и комплекс компьютерных программ численного моделирования, применялась явная трёхслойная разностная схема на пятиточечном шаблоне [43-А]. Схема обладает вторым порядком точности как по времени, так и по координате, и удовлетворяет условию устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$ где τ – шаг по времени, h – шаг по координате. Моделирование проводилось на отрезке $x \in [-100,100]$ с шагом по координате h=0.004 на промежутках времен $t \in [0,20]$ в заданных временных интервалах τ =0.0002. В ходе тестовых вычислений интеграл энергии сохранялся с высокой относительной точностью $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$, а интеграл числа частиц $\Delta N/N \approx 10^{-4} - 10^{-5}$.

Результаты численных экспериментов при выбранных значениях параметров b = 1, $k_1 = 0.03$, $\alpha_1 = 0.19$, $\alpha_2 = 0.12$, $\beta_1 = 0.096$, $\beta_2 = 0.01$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1.265$, $\gamma_2 = 0.85$ демонстрируют формирование двухсолитонных решений СНУШ (4.1.2) с конденсатными граничными условиями (см. рис. 4.1.1, 4.1.2). Отметим, что проводилось моделирование неподвижного солитона, при этом многосолитонное решение демонстрирует устойчивость, сохраняя свою форму на длительных временных интервалах.



Рисунок 4.1.1. - Динамика эволюции числа частиц солитона при параметрах $b=1,\ k_1=0.03,\ \alpha_1=0.19,\ \alpha_2=0.12,\ \beta_1=0.096,\ \beta_2=0.01,\ \lambda=1,\ \gamma_1=1.265, \gamma_2=0.85$



Рисунок 4.1.2. - Динамика плотности энергии солитона при параметрах $k_1=0.03,~b=1,~\alpha_1=0.19,~\alpha_2=0.12,~\beta_1=0.096,~\beta_2=0.01,~\lambda=1,~\gamma_1=1.265,\gamma_2=0.85$

При изменении выбора соответствующих параметров можно получить трёхсолитонное решение СНУШ с конденсатными граничными условиями. Например, численные эксперименты при следующих параметрах $k_1 = 0.05$, b = 1, $\alpha_1 = 0.019$, $\alpha_2 = 0.11$, $\beta_1 = 0.096$, $\beta_2 = 0.11$, $\lambda = 0.5$, $\gamma_1 = 0.85$, $\gamma_2 = 0.485$ демонстрируют формирование трёхсолитонного решения СНУШ с конденсатными граничными условиями (рис. 4.1.3, 4.1.4).



Рисунок 4.1.3. - Динамика эволюции числа частиц солитона при параметрах $b=1,\ k_1=0.05,\ \alpha_1=0.019,$ $\alpha_2=0.11,\ \beta_1=0.096,\ \beta_2=0.11,$ $\lambda=0.5,\ \gamma_1=0.85, \gamma_2=0.485$



Рисунок 4.1.4. - Динамика плотности энергии солитона при параметрах b = 1, $k_1 = 0.05$, $\alpha_1 = 0.019$, $\alpha_2 = 0.11$, $\beta_1 = 0.096$, $\beta_2 = 0.11$, $\lambda = 0.5$, $\gamma_1 = 0.85$, $\gamma_2 = 0.485$

Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают, что частиц и плотности энергии эволюции числа солитона динамика при соответствующих параметрах стабилизируются (рис. 4.1.1-4.1.4). Анализ эволюции плотности энергии многосолитонного решения (4.1.2) указывает на формирование трёхсолитонных многосолитонного решения В виде ДВУХ И связанных двухкомпонентных решений СНУШ с конденсатными граничными условиями. Новые многосолитонные решения, полученные В рамках исследования, демонстрируют устойчивость в процессе численного моделирования на достаточно длительных временных интервалах [5-А, 41-А, 43-А].

§ 4.2. Диссипативные бризеры в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера с отталкивающим потенциалом

Следует отметить, что СНУШ с отталкивающим потенциалом

$$i\phi_t - \phi_{xx} + 2(|\phi|^2 - b^2)\phi = 0$$
(4.2.1)

рассматривалась ранее в работе [103]. Многосолитонные решения этого уравнения были получены в [136] в виде

$$\varphi = \left(1 + \frac{B_3 \cos(\beta^-(x+v^-t) - h_3) + B_4 e^{\beta^+(x+v^+t)}}{B_1 \operatorname{ch}(\beta^+(x+v^+t) - h_1) + B_2 \operatorname{ch}(\beta^-(x+v^-t) + h_2)}\right) b e^{ik_1(x+k_1t)}$$
(4.2.2)

хотя это решение является многосолитонным, однако, как показывают численные эксперименты [118, 4-А, 42-А], при нулевой скорости поступательного движения оно не проявляет бризерной динамики.

В реальных физических процессах имеет место диссипация, в частности, в оптических средах вследствие ее непрозрачности, наличии мелких неоднородностей и т.д. В конденсированных средах также имеет место потеря энергии. Подкачка может быть обусловлена воздействием внешних переменных электрических и магнитных полей. При эффективном учете подкачки и диссипации уравнение (4.2.1) примет вид

$$i\phi_t - \phi_{xx} + 2(|\phi|^2 - b^2)\phi + i\delta\phi + i\epsilon|\phi|^2\phi = 0$$
(4.2.3)

где δ - коэффициент диссипации, а ε - коэффициент разности нелинейных усилений и потерь. Рассмотрим теперь поведение многосолитонного решения (4.2.2) при его распространении в среде с диссипацией и подкачкой, моделируемом уравнением (4.2.3). Для этого решаем численно задачу Коши для уравнения (4.2.3) используя решения (4.2.2) при t=0 в качестве начального условия. Граничные условия задаются в виде граничных условий Неймана.

При проведении серии численных экспериментов коэффициенты диссипации δ и подкачки ε выбирались, соответственно в интервалах [-0.05,0.01] и [-0.01,0.05] с шагом 0.001. Результаты численных экспериментов при учёте диссипации и подкачки при следующих параметрах $k_1 = 0.05$, b = 0.5, $\alpha_1 = 0.019$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.096$, $\beta_2 = 0.01$, $\lambda = 0.9$, $\gamma_1 = 1.45$, $\gamma_2 = 1.472$ $\varepsilon = 0.002$, $\delta = 0.025$ приведены на рис. 4.2.1-4.2.6.



Рисунок 4.2.1. - Эволюция плотности энергии солитона



Рисунок 4.2.2. - Эволюция плотности числа частиц солитона



Рисунок 4.2.3. - Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения



Рисунок 4.2.4. - Зависимость полной энергии солитона E от времени t



Рисунок 4.2.5. - Зависимость интеграла числа частиц солитона N = $\int |\phi|^2 dx$ от времени t



Рисунок 4.2.6. - Фазовый портрет системы (зависимость полной энергии системы Е от интеграла числа частиц N)

Ранее нами было показано, что бризерная динамика двухсолитонного решения (4.2.2) бездиссипативного уравнения (4.2.1) при нулевых скоростях поступательного движения отсутствует и начинает проявляться при ненулевой скорости движения многосолитонного решения [4-А]. Проведенные численные эксперименты, как видно из рис. 4.2.1, показывают, что наличие диссипации и подкачки в системе приводит к проявлению («размораживанию») бризерной динамики даже для неподвижного двухсолитонного решения. Пространственное распределение плотности числа частиц, как видно из графика эволюции плотности числа частиц со временем (см. рис.4.2.2), приводит к появлению третьего «горба», хотя первоначально решение было двухсолитонным, и, вместе с тем, наблюдается известная асимметрия справа и слева от солитонного возмущения. Как видно из Фурье-анализа решения, проведенного с использованием пакета Fast Fourier Transform в системе Matlab, в бризерной динамике появляются дополнительные рис.4.2.3). частоты значительной мощностью (см. Вместе co с тем, многосолитонное решение (4.2.2) в процессе эволюции под действием диссипации и подкачки проявляет устойчивое бризерное поведение. Такое долговременное

самосогласованное устойчивое поведение двухсолитонного бризера обусловлено соответствующим подбором параметров затухания и подкачки. Процессы диссипации и подкачки на длительных промежутках времени взаимно компенсируют друг друга, при этом как интеграл энергии, так и интеграл числа частиц в системе совершают колебания вблизи положения равновесия, демонстрируя почти десятикратный рост амплитуды при колебаниях (рис. 4.2.4-4.2.5). Вместе с тем, как видно из фазового портрета системы (рис.2.2.6), то есть зависимости полной энергии системы от интеграла числа частиц, фазовые траектории располагаются плотно И занимают ограниченную область пространства, то есть наблюдается формирование классического аттрактора. Таким образом, в диссипативной системе в результате синергии с накачкой имеет место процесс самоорганизации - формирование когерентной диссипативной структуры, долгоживущего диссипативного бризера [8-А].

§ 4.3. Диссипативные солитоны бризерного типа в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера с притягивающим потенциалом

Рассмотрим СНУШ, с потенциалом притяжения следующего вида

$$i\phi_t - \phi_{xx} - 2(|\phi|^2 - b^2)\phi = 0.$$
 (4.3.1)

Интегралы энергии и числа частиц имеют вид:

$$N = \int |\phi|^2 dx, \quad H = \int (|\phi_x|^2 - (|\phi|^2 - b^2)^2) dx$$
(4.3.2)

Решение уравнения (4.3.1) выберем в следующем виде, которое были получены в работе [136] где $\xi = x + \upsilon t$

$$\varphi(\xi, t) = b e^{i k_1'(\xi + k_1' t)} \left(1 + \frac{C_3 \cos(qx + \acute{w}t + w_{02}) + C_4 e^{\beta^+ \xi}}{C_1 \operatorname{ch}(\beta^+ \xi + h_1) + C_2 \cos(qx + \acute{w}t + w_{01})} \right)$$
(4.3.3)

пде
$$\dot{w} = w - qv$$
, $k'_1 = k_1 - v^+$, $q = \alpha_2 - \alpha_1$, $w = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2)$
 $C_1 = \left(\frac{|C_{12}|^2 |\varkappa_{12}|^2}{|\bar{\varkappa}_{12}|^2 \bar{\varkappa}_{11} \bar{\varkappa}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $C_2 = -\left(\frac{C_{11}C_{22}}{\bar{\varkappa}_{12} \bar{\varkappa}_{21}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $C_3 = \left(\frac{C_{12}C_{21}}{(k_1 - \varkappa_1)(k_1 - \varkappa_2)}\right)^{\frac{1}{2}}$,
 $h_1 = \frac{1}{2}ln \left|\frac{|\varkappa_{12}|^2}{|C_{12}|^2 |\varkappa_{12}|^2 \bar{\varkappa}_{11} \bar{\varkappa}_{22}}\right|$, $w_{01} = -\frac{i}{2}ln \left|\frac{C_{12} \bar{\varkappa}_{12}}{C_{21} \bar{\varkappa}_{21}}\right|$,
 $w_{02} = -\frac{i}{2}ln \left|\frac{C_{12}(k_1 - \varkappa_2)}{C_{21}(k_1 - \varkappa_1)}\right|$,
 $C_4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\varkappa}_{21}}{(k_1 - \varkappa_1)\bar{\varkappa}_{12}\bar{\varkappa}_{22}} - \frac{\bar{\varkappa}_{12}}{(k_1 - \varkappa_2)\bar{\varkappa}_{21}\bar{\varkappa}_{11}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $v = \frac{2(\alpha_2\beta_2 + \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 + \beta_1}$,
 $\varkappa_{ii} = \varkappa_i - \bar{\varkappa}_i$, $\bar{\varkappa}_{ii} = \bar{\varkappa}_i - \varkappa_i$, $\beta^+ = \beta_1 + \beta_2$, $\beta^- = \beta_2 - \beta_1$.

Ранее нами проводилось численное моделирование эволюции данного многосолитонного решения СНУШ (Гл. 4. §2.5) с притягивающим потенциалом (4.3.1), то есть численно решалась задача Коши, и было показано, что при нулевой скорости солитон представляет собой нелинейное возбуждение в виде стационарного пакета волн, проявляя не бризерную динамику [5-A, 41-A].

Используя некоторые другие значения параметров многосолитонного (4.3.3)решения приведем ниже результаты численных экспериментов, СНУШ решения (4.3.3)демонстрирующих эволюцию С конденсатными граничными условиями при нулевой скорости их движения то есть при параметрах $b=1, \alpha_1=0.29, \alpha_2=1, \ \beta_1=0.096, \ \beta_2=0.001, \ \gamma_1=1.95, \ \gamma_2=1.95, \ \lambda=0.75,$ $\kappa_1 = 0.5$ (рис. 4.3.1-4.3.6). Как видно, многосолитонное решение не проявляет бризерную динамику. Интеграл энергии и интеграл числа частиц в вычислительных экспериментах сохранялись с хорошей точностью $\frac{\Delta E}{F} \sim 10^{-5} - 10^{-5}$ 10^{-6} , $\frac{N}{N} \sim 10^{-6} - 10^{-7}$.



Рисунок 4.3.1. - Графики эволюции числа частиц солитона



Рисунок 4.3.2. - Графики эволюции плотности энергии солитона



Рисунок 4.3.3. - График плотности числа частиц $|\phi|^2$ в момент времени t=0



Рисунок 4.3.4. - Пространственное распространение плотности энергии солитона при t=0



Рисунок 4.3.5. - Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии двухсолитонного

решения



Рисунок 4.3.6. - Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения

Далее в данном параграфе сосредоточимся на изучение СНУШ, отличающегося от уравнения Гинзбурга – Ландау потенциалом притяжения, имея

ввиду в дальнейшем эффекты диссипации и подкачки. При учёте подкачки и затухания уравнение (4.3.1) примет следующий вид

$$i\phi_t - \phi_{xx} - 2(|\phi|^2 - b^2)\phi = -\nu|\phi|^4\phi + i\delta\phi + i\epsilon|\phi|^2\phi + i\mu|\phi|^4\phi, \quad (4.3.4)$$

где ν - параметр нелинейности 5-й степени, ε - коэффициент разности нелинейных усилений и потерь, δ - коэффициент диссипации, μ - насыщение нелинейного усиления (выбираются достаточно малыми).

Результаты численного моделирования решения (4.3.3) при параметрах b = 1, $\alpha_1 = 0.29$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.096$, $\beta_2 = 0.001$, $\gamma_1 = 1.95$, $\gamma_2 = 1.95$, $\lambda = 0.75$, $\varkappa_1 = 0.5$, $\nu = 0.0002$, $\delta = 0.03$, $\varepsilon = 0.05$, $\mu = 0.01$. то есть с учётом диссипации и подкачки приведены на рис. 4.3.7-4.3.13.



Рисунок 4.3.7. - График зависимости интеграла числа частиц солитона от времени



Рисунок 4.3.8. - График зависимости интеграла энергии солитона от времени



Рисунок 4.3.9. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла полной энергии системы от интеграла числа частиц)


Рисунок 4.3.10. - Эволюция числа частиц солитона



Рисунок 4.3.11. - График плотности числа частиц $|\phi|^2$ в момент времени t=0



Рисунок 4.3.12. - Графики эволюции плотности энергии солитона



Рисунок 4.3.13. - Пространственное распространение плотности энергии солитона при t=0



Рисунок 4.3.14. - Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии двухсолитонного

решения



Рисунок 4.3.15. - Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения

Как видно из результатов вычислительных экспериментов, интеграл числа частиц и интеграл энергии солитона, изменяются периодическим образом (рис. 4.3.7-4.3.8). ФП системы (рис. 4.3.9) показывает плотное расположение фазовых траекторий в пределах ограниченной области фазового пространства. Это указывает на устойчивость системы и свидетельствует о формировании аттрактора в данной области фазового пространства. Как видно из рис. 4.3.10-4.3.12 в процессе эволюции в результате эффектов накачки и диссипации многосолитонное решение (4.3.3) начинает проявлять бризерную динамику. Фурье-анализ временной модуляции указывает на значительный рост мощности колебаний на частотах 100 до 1600 периодов, как видно из сравнения рис. 4.3.5 и рис. 4.3.14, то есть на появление существенной бризерной динамики формирующегося диссипативного бризера. Фурье-анализ пространственной модуляции указывает на появление дополнительных мод динамики, фактически, удвоения частоты и периода, как видно из сравнения рис. 4.3.6 и рис. 4.3.15.

Далее рассмотрим численное моделирование эволюции многосолитонного решения (4.3.3) при ненулевой скорости. При указанных выше значениях параметров диссипации и подкачки и скорости пакета υ=0.19, результаты численного моделирования приведены на рис. 4.3.16-4.3.24.



Рисунок 4.3.16. - График зависимость интеграла числа частиц солитона от времени



Рисунок 4.3.17. - График зависимости интеграла энергии солитона от времени



Рисунок 4.3.18. - Фазовый портрет системы (зависимость интеграла энергии от интеграла числа частиц)



Рисунок 4.3.19. - Динамика эволюции числа частиц солитона



Рисунок 4.3.20. - График плотности числа частиц $|\phi|^2$ в момент времени t=0





Рисунок 4.3.21. - Графики эволюции плотности энергии солитона



Рисунок 4.3.22. - Пространственное распределение плотности энергии солитона при t=0



Рисунок 4.3.23. - Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии двухсолитонного

решения



Рисунок 4.3.24. - Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения

Анализ результатов численного моделирования эволюции N-солитонного бризера при наличии диссипации и подкачки указывает на наличие странного аттрактора в фазовом пространстве, где фазовые траектории образуют очень плотную упаковку в ограниченной области пространства (рис. 4.3.18), вместе с тем, ляпуновские показатели остаются положительными, а бризерная динамика существенно усложняется (рис. 4.3.19-4.3.22). Фурье-анализ пространственной и временной модуляции (рис. 4.3.23-4.3.24) плотности энергии солитона демонстрирует значительный рост мощности у основной частоты бризерной динамики и появление сателлитов.

Таким образом, результаты численных экспериментов подтверждают возможность формирования долгоживущих ДС, описываемых СНУШ с притягивающим потенциалом в условиях подкачки и диссипации. Это свидетельствует о возникновении когерентных структур и формировании классического аттрактора в фазовом пространстве системы [9-A, 20-A, 22-A, 27-A, 36-A, 43-A].

§ 4.4. Особенности формирования и эволюции диссипативных бризеров в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера

В данном параграфе мы рассматриваем СНУШ, описывающее конденсат бозе-частиц с самосогласованным потенциалом притягивающего взаимодействия, которое имеет следующий вид

$$i \phi_t - \phi_{xx} - 2(|\phi|^2 - b^2)\phi = 0.$$
 (4.4.1)

Двухсолитонное решение уравнения (4.4.1), полученное методом конечнозонного интегрирования [49], в работе [136], можно записать в следующем виде, где

154

$$\varphi(\xi, t) = b e^{i k_1'(\xi + k_1't)} \left(1 + \frac{C_3 \cos(qx + \acute{w}t + w_{02}) + C_4 e^{\beta^+ \xi}}{C_1 \operatorname{ch}(\beta^+ \xi + h_1) + C_2 \cos(qx + \acute{w}t + w_{01})} \right)$$
(4.4.2)

Нашей целью является исследование поведения этого движущегося бризерного решения во внешнем осциллирующем поле. Отметим, что насколько нам известно из литературных источников, ранее подобная задача исследования процесса формирования ДС из бризеров не рассматривалась. Анализ эволюции решения (4.4.2) был проведён нами ранее [5-А, 41-А]. Методами численного моделирования нами было показано, что двухсолитонное решение (4.4.2) проявляет бризерную динамику только при движении, т.е. при ненулевой скорости центра масс её составляющих [297, 298, 299].

Следует отметить, что системы, описываемые нелинейными эволюционными уравнениями, имеют бесконечное число степеней свободы, что накладывают определённые требования при исследовании их хаотического поведения и требует широкого приложения численных методов и математического моделирования, в отличие от конечномерных систем. В ряде работ [12] получены осциллирующие, бризероподобные солитоны в диссипативных системах, при наличии внешнего осциллирующего поля. Однако, значительный интерес представляет изучение поведения многосолитонных бризерных решений под действием внешней подкачки на частотах, кратных несущим частотам бризерных осцилляций. В этом случае следует ожидать весьма интригующее поведение динамических локализованных возбуждений системы. Поэтому, мы вводим в правой части уравнения (4.4.1) линейное и нелинейное затухание (определяемые постоянными $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3) и подкачку на частотах, кратных собственной частоте бризера (постоянная ε_0).

Тогда СНУШ с учётом подкачки и затухания имеет примет следующий вид

$$i \phi_{t} - \phi_{xx} - 2(|\phi|^{2} - b^{2})\phi =$$

= $i(\varepsilon_{1} - \varepsilon_{2}|\phi|^{2})\phi + i\varepsilon_{3}\phi_{xx} - i(\varepsilon_{0}/T)\sum_{n=1}^{N} e^{in\acute{w}t}$ (4.4.3)

где $T=2\pi/\dot{w}$, а \dot{w} совпадает с собственной частотой из решения (4.4.2). В большинстве численных экспериментов нами полагалось N=3. Здесь ε_1 и ε_2 соответствуют затуханию, а ε_0 обеспечивает подкачку солитона на частотах, соответствующих частотам солитона.

Для численного моделирования применялась трёхслойная разностная схема явного типа, построенная на пятиточечном шаблоне. Схема обладает вторым порядком точности как по времени, так и по координате, и удовлетворяет условию устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ - шаг по времени, а h - шаг по координате. В тестовых вычислениях интеграл энергии сохранялся с относительной точностью $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$, а интеграл числа частиц - с точностью $\Delta N/N \approx 10^{-4} - 10^{-5}$. Моделирование выполнялось при следующих значениях параметров b = 1, α_1 = 0.039, α_2 = 1, β_1 = 0.096, β_2 = 0.01, γ_1 = 1.5, γ_2 = 1.5, λ = 1.5, k1 = 0.51, ε_0 = -0.08, ε_1 = 0.25, ε_2 = 0.1, ε_3 = 0.13, на интервале [-48, 48] до времен t=80 со скоростью движения v=0.19. Результаты наиболее показательных вычислительных экспериментов представлены на следующих рисунках 4.4.1-4.4.7.



Рисунок 4.4.1. - График, отображающий зависимость интеграла энергии солитона от времени, учитывает влияние затухания, подкачки и скорости его движения v = 0. 19



Рисунок 4.4.2. - График зависимости интеграла числа частиц солитона от времени с учётом влияние затухания, подкачки и скорости его движения v = 0.19



Рисунок 4.4.3. - Фазовый портрет солитона, отражающий зависимость интеграла энергии от интеграла числа частиц



Рисунок 4.4.4. - Динамика эволюции числа частиц солитона с учётом затухания, подкачки

и скорости движения v=0.19



Рисунок 4.4.5. - Эволюция плотности энергии солитона с учётом затухания, подкачки и скорости движения v=0.19



Рисунок 4.4.6. - Плотности энергии солитона в разные моменты времени t





Рисунок 4.4.7. - Плотность числа частиц солитона в разные моменты времени t

Как видно из рис. 4.4.1, интеграл энергии при наличии даже довольно значительных осцилляций (в пределах $E=(0.92\pm0.32)$) с высокой точностью ~10⁻³ сохраняет среднее значение энергии $E_{cp}=-0.62$. Аналогичная картина наблюдается также и для интеграла числа частиц. Эти два результата наглядно подтверждают формирование долгоживущего (а в пределе $t \rightarrow \infty$ по всей видимости, бесконечно долгоживущего) диссипативного бризера вследствие подкачки первичного бризера невозмущенного СНУШ осциллирующим внешним полем на частотах, кратных собственной частоте осцилляций бризера, благодаря чему происходит адресная компенсация диссипативных потерь энергии. Как видно из фазового портрета, рис. 4.4.3, сформировавшийся бризер является диссипативным бризером предельного цикла.

Таким образом, полученные нами численное решение СНУШ с притягивающим потенциалом с конденсатными граничными условиями при наличии диссипации во внешнем осциллирующем поле представляет собой долгоживущий диссипативный бризер предельного цикла, движущийся с ненулевой скоростью центра масс составляющих, в котором диссипативные потери энергии с высокой точностью компенсируются внешней подкачкой на частотах, кратных частоте бризерной динамики [2-А, 9-А, 10-А, 23-А, 26-А, 30-А].

160

ГЛАВА 5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХСОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЁДИНГЕРА

В данной главе рассматриваются методы математического моделирования многосолитонных решений ВНУШ. Особое внимание уделяется анализу их динамики, устойчивости и взаимодействия в различных физических режимах. Представлены аналитические и численные подходы, позволяющие исследовать эволюцию многосолитонных конфигураций с учётом нелинейных эффектов, диссипации и внешней подкачки. Показано, что многосолитонные решения ВНУШ впервые демонстрируют сложное поведение, включая бризерную динамику и устойчивых локализованных формирование структур при определённых параметрах системы. Разработанные численные модели и методы позволяют детально проанализировать влияние начальных условий, граничных параметров и внешних воздействий на характер эволюции многосолитонных решений. Полученные результаты и их подробный анализ представлены в работах автора [1-А, 2-А, 6-А, 7-А, 12-А, 14-А, 15-А, 18-А, 25-А, 27-А, 40-А, 44-А], подтверждающие эффективность предложенных подходов. Эти исследования вносят значимый вклад в понимание нелинейной динамики многокомпонентных систем и имеют важное значение для приложений в оптике, спинтронике и квантовых технологиях.

§ 5.1. Математическое моделирование векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с потенциалом

 $u(x,t) = 2\epsilon(|\phi_1(x,t)|^2 - b^2) - \lambda |\phi_2(x,t)|^2$

Теория нелинейных возбуждений в магнитных средах с учётом мультипольных эффектов привлекает внимание исследователей в связи возможностью уплотнения записи на магнитных носителях, а в последние годы – в связи с бурным развитием нанотехнологий и спинтроники [210, 211, 292].

Было показано [162], что спиновые ионы с высокими значениями спинов являются прекрасными кандидатами на роль кудитов (для d-уровневой системы) и кутритов (в случае трёхуровневой системы, соответствующей магнитным ионам со спином S=1).

Теория квантовых вычислений в многоуровневых системах, на кудитах, в настоящее время бурно развивается. Вместе с этим остаются нерешенными вопросы передачи сигнала (информации) в многоуровневых системах. Ранее одним из авторов [162] было показано, что системы обобщенных когерентных состояний, построенные на генераторах группы SU(2S+1), где S–спин магнитного иона, являются удобным инструментом для описания систем кудитов. Эти когерентные состояния для описания кутритов, то есть спиновых систем со значениями спина S=1 (трёхуровневая система), можно представить в следующем виде

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\phi_1|^2 + \sqrt{|\phi_2|^2}}} \{|0\rangle + |\phi_1|1\rangle + |\phi_2|2\rangle\},$$
(5.1.1)

где $|0\rangle$ – вакуумное, референтное, состояние, а ϕ_1 и ϕ_2 – амплитуды вероятностей нахождения системы в одном из возбуждённых состояний.

Процесс обмена информацией между кутритами можно моделировать с помощью ВНУШ, следующего вида

i
$$\varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x, t)\varphi_1 = 0,$$

i $\varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x, t)\varphi_2 = 0$ (5.1.2)

с потенциалом

$$u(x,t) = 2\varepsilon(|\phi_1(x,t)|^2 - b^2) - \lambda |\phi_2(x,t)|^2$$
(5.1.3)

и граничными условиями

$$|\varphi_1|_{|x|\to\infty} = b, \qquad |\varphi_2|_{|x|\to\infty} = b.$$
 (5.1.4)

Уравнение (5.1.2) также можно получить для описания гейзенберговского S=1 ферромагнетика с одноионным обменом в рамках подхода SU(3) обобщенных когерентных состояний.

Гамильтониан изучаемой системы имеет вид

$$H = \int \left(|\varphi_{1x}|^2 + |\varphi_{2x}|^2 + u(x,t)(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) \right) dx, \tag{5.1.5}$$

интеграл числа частиц

$$N = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx.$$
 (5.1.6)

Нас интересует процесс передачи информации в трёхуровневой системе кутритов, что эффективно можно моделировать распространением многосолитонного возбуждения в системе (5.1.2).

Многосолитонные решения ВНУШ (5.1.2) сконструировано с помощью алгебро-геометрического метода конечнозонного интегрирования [49], было получено в работе [136] в следующем виде

$$\varphi_{1} = b \left(1 + \frac{e^{i\omega_{1}(x,t)}}{k - \varkappa_{1}} \psi_{1}(x,t) + \frac{e^{i\omega_{2}(x,t)}}{k - \varkappa_{2}} \psi_{2}(x,t) \right) e^{ik(x+kt)},$$

$$\varphi_{2} = \gamma_{1}\psi_{1} + \gamma_{2}\psi_{2},$$
(5.1.7)

где

$$\psi_1 = \frac{A_1 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + A_2 \sinh(P_2(x,t) + h_1) e^{iW_1(x,t)}}{A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + h_3) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + h_4) \cosh(P_2(x,t) + h_3) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + h_4) \cosh(P_2(x,t$$

$$\overline{A_5 \cos(W_2(x,t) - W_1(x,t) + h_4)}'$$

$$\psi_1 = \frac{A_6 e^{iW_1(x,t) - P_1(x,t)} + A_7 \sinh(P_2(x,t) + h_5)}{A_3 \cosh(P_2(x,t) - P_1(x,t) + h_2) + A_4 \cosh(P_2(x,t) + P_1(x,t) + h_3) + h_2}$$

$$\overline{A_{5} \cos(W_{2}(x,t) - W_{1}(x,t) + h_{4})},$$

$$W_{1}(x,t) = \alpha_{1}x + (\alpha_{1}^{2} - \beta_{1}^{2})t, \qquad W_{2}(x,t) = \alpha_{2}x + (\alpha_{2}^{2} - \beta_{2}^{2})t,$$

$$P_{1}(x,t) = \beta_{1}(x + 2\alpha_{1}t), \qquad P_{2}(x,t) = \beta_{2}(x + 2\alpha_{2}t),$$

$$h_{1} = \frac{1}{2}ln \left| \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11}\kappa_{22}C_{22}} \right|, \qquad h_{2} = \frac{1}{2}ln \left| \frac{C_{11}\kappa_{11}}{\kappa_{22}C_{22}} \right|,$$

$$h_{3} = \frac{1}{2}ln \left| \frac{(C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^{2}\kappa_{21}\kappa_{22}}{|\overline{\kappa_{12}}|^{2}} \right|,$$

$$h_{4} = \frac{1}{2}ln \left| \frac{C_{12}\kappa_{12}}{\kappa_{21}C_{21}} \right|, \qquad h_{5} = \frac{1}{2}ln \left| \frac{\overline{\kappa_{12}}}{\kappa_{21}\kappa_{11}C_{11}} \right|,$$

$$\kappa_{1} = \alpha_{1} + i\beta_{1}, \qquad \kappa_{2} = \alpha_{2} + i\beta_{2}, \qquad \kappa_{ij} = \kappa_{i} - \bar{\kappa}_{j}, \qquad \bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa}_{i} - \kappa_{j},$$

$$A_{1} = \frac{C_{12}}{2}, \qquad A_{2} = \left(\frac{\overline{\kappa_{21}}C_{22}}{\kappa_{12}\kappa_{21}} \right)^{1/2}, \qquad A_{3} = \left(\frac{C_{11}C_{22}}{\kappa_{11}\kappa_{22}} \right)^{1/2},$$

$$A_{4} = \left[\frac{(C_{12}C_{21} - C_{11}C_{22})|\kappa_{12}|^{2}}{|\overline{\kappa_{12}}|^{2}\kappa_{11}\kappa_{22}} \right]^{1/2},$$

$$A_{5} = -\left(\frac{C_{12}C_{21}}{\kappa_{21}\kappa_{21}} \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad A_{6} = \frac{1}{2}C_{21}, \qquad A_{7} = \left(\frac{\overline{\kappa_{12}}C_{11}}{\kappa_{12}\kappa_{21}} \right).$$

Далее рассматриваем динамику распространения многосолитонного решения в трёхуровневой системе. Систему (5.1.1) аппроксимируем с помощью разностной схемы второго порядка точности на пятиточечном шаблоне. Следует отметить, что в тестовых вычислениях интеграл энергии (5.1.6) и интеграл числа частиц (5.1.6) сохранялись с точностью $\approx 10^{-4} - 10^{-5}$, что свидетельствует о достаточно высоком уровне достоверности полученных ниже результатов. Моделирование проводилось при следующих значениях параметров b = 1, α_1 = 0.69, α_2 = 0.9, β_1 = 0.096, β_2 = 0.01, γ_1 = 1, γ_2 = 1, λ = 1, k1 =1 на интервале [-200, 200] до времен t=80 [44-А].

В первой серии экспериментов солитон задавался неподвижным. Как видно из рис. 5.1.1-5.1.2, решение для первой компоненты ϕ_1 дают нетривиальные (конденсатные) граничные условия с модулированным двухсолитонным решением, а для второй компоненты ϕ_2 тривиальные, а решение имеет вид односолитонного. Динамики решения со временем не наблюдается. Энергия связи оценивается в 12%.



Рисунок 5.1.1. - Графики, отображающие эволюцию плотности числа частиц первой компоненты $(|\phi_1|^2)$



Рисунок 5.1.2. - Графики, показывающие эволюцию плотности числа частиц второй компоненты ($|\phi_2|^2$)



Рисунок 5.1.3. - Графики, демонстрирующие эволюцию плотности числа частиц. $(| \phi_1 |^2 + | \phi_2 |^2)$



Рисунок 5.1.4. - Графики эволюции плотности энергии солитона

Динамика, движущегося солитона демонстрирует заметные отличия. В процессе эволюции он трансформируется в динамический бризер, характеризующийся сложной внутренней структурой и собственной динамикой (см. рис. 5.1.5–5.1.8). При этом связь между компонентами системы сохраняется, а энергия взаимодействия оценивается на уровне 16%, что подчеркивает устойчивость образующегося бризера и его способность сохранять основные свойства в рамках нелинейной динамики.





Рисунок 5.1.5а. - Графики, иллюстрирующие эволюцию плотности числа частиц первой компоненты во время движения $(|\phi_1|^2)$ при разных моментах времени





Рисунок 5.1.56. - Графики, иллюстрирующие эволюцию плотности числа частиц первой компоненты во время движения $(|\phi_1|^2)$





Рисунок 5.1.6а. - Графики эволюции плотности числа частиц второй компоненты при ненулевой скорости $(|\phi_2|^2)$ при разных моментах времени





Рисунок 5.1.66. - Графики эволюции плотности числа частиц второй компоненты при ненулевой скорости (|φ₂|²)



Рисунок 5.1.7а. - Графики эволюции плотности числа частиц при скорости v=0.2 $(|\phi_1|^2+|\phi_2|^2)$ при разных моментах времени



Рисунок 5.1.76. - Графики эволюции плотности числа частиц при скорости v=0.2

 $(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)$



Рисунок 5.1.8а. - Графики эволюции плотности энергии движущегося солитона при

разных моментах времени





Рисунок 5.1.86. - Графики эволюции плотности энергии движущегося солитона



Рисунок 5.1.9. - Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии солитона (а – неподвижного солитона, б – движущегося солитона)

Фурье-анализ пространственной модуляции (см. рис. 5.1.9а) выявляет наличие двух основных гармоник, характерных для динамики бризерного решения уравнения (5.1.11). При этом становится очевидным, что помимо основных бризерных частот (см. рис. 5.1.9б), в спектре появляются дополнительные частоты. Эти дополнительные компоненты обусловлены ненулевой скоростью движения солитона, что приводит к усложнению общей картины динамики и указывает на взаимодействие бризера с движущимся солитонным фоном.



Рисунок 5.1.10. - Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии (а – для покоящегося солитона, б – при скорости движения v = 0.2)

Фурье-анализ временной модуляции неподвижного солитона показывает наличие доминирующей моды колебаний, сопровождаемой близко расположенными сателлитными гармониками. При этом спектр также содержит слабовыраженную бризерную динамику, представленную серией незначительных пиков (см. рис. 5.1.10а). Однако с увеличением скорости солитона характер динамики претерпевает изменения: бризерная составляющая становится ведущей. Это приводит к резкому усилению мощности серии пиков в области низких частот, что ярко проявляется в спектре при высокой скорости солитона (см. рис. 5.1.10б).

Таким образом, в данном параграфе продемонстрирована возможность передачи сигнала в трёхуровневых системах в форме бризеров - особых солитонных структур, представляющих собой связанные возбужденные состояния с характерной внутренней динамикой. Эти бризеры обеспечивают эффективное распространение информации, сохраняя устойчивость и ключевые свойства в условиях нелинейных взаимодействий, что открывает перспективы их применения в сложных многокомпонентных системах [6-А, 40-А].

Отметим, что подобные трёхуровневые системы обладают широким потенциалом применения. Они могут быть востребованы не только в спинтронике,

175

где управление солитонной динамикой открывает новые возможности для создания энергоэффективных устройств, но и в оптических световодах, где бризерные структуры могут быть использованы для передачи и обработки сигналов с высокой степенью устойчивости и минимальными потерями.

§5.2. Моделирование многосолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с учетом самосогласованного потенциала

$$\overline{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \overline{\varphi}_2$$

Рассмотрим систему НУШ

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 = 0$$

$$i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 = 0$$
 (5.2.1)

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2 . \tag{5.2.2}$$

Подобные системы НУШ (5.2.1), известные как ВНУШ, возникают в процессе квазиклассического теоретико-полевого описания двухкомпонентного бозе-газа в физике конденсированного состояния. Эти уравнения играют ключевую роль в моделировании динамики многокомпонентных конденсатов, описывая взаимодействия между различными компонентами и их коллективное поведение в условиях сильной нелинейности [152, 193], при описании двухкомпонентной плазмы [139, 156], а в нелинейной оптике - для описания распространения лазерного пучка на двух несущих частотах в световодах [202, 272]. Также ВНУШ (5.2.1) может быть получено при квазиклассическом описании ферромагнетика Гейзенберга [191, 192, 193] с легкоосной анизотропией со спином S=1, при наличии одноионного обмена, то есть возбуждении квадрупольных степеней свободы спиновой динамики в подходе SU(3) обобщенных когерентных состояний [3, 5].

Многосолитонное решение ВНУШ (5.2.1) с самосогласованным потенциалом (5.2.2) было получено методом конечнозонного алгеброгеометрического интегрирования [49] в виде

$$\varphi_{i} = A_{i}e^{i(q_{1}x+w_{1}t)}\cosh(\beta_{1}(x+v_{1}t)+b_{i}) +$$

$$+B_{i}e^{i(q_{2}x+w_{2}t)}\cosh(\beta_{2}(x+v_{2}t)+a_{i}))/(B_{1}\cosh(\beta^{+}(x+v^{+}t)+h_{1}) +$$

$$+\cosh(\beta^{-}(x+v^{-}t)+h_{2}) + +B_{3}\cos(qx+wt+w_{01})$$
(5.2.3)

где

$$\begin{split} W_{1}(x,t) &= \alpha_{1}t + (\alpha_{1}^{2} - \beta_{1}^{2})t, & W_{2}(x,t) = \alpha_{2}t + (\alpha_{2}^{2} - \beta_{2}^{2})t \\ P_{1}(x,t) &= \beta_{1}(x + 2\alpha_{1}t), & P_{2}(x,t) = \beta_{2}(x + 2\alpha_{2}t) \\ \kappa_{1} &= \alpha_{1} + i\beta_{1}, & \kappa_{2} = \alpha_{2} + i\beta_{2}, & \kappa_{ij} = \kappa_{i} - \bar{\kappa}_{j}, & \bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa}_{i} - \kappa_{j} \\ \beta^{+} &= \beta_{1} + \beta_{2}, & \beta^{-} = \beta_{2} - \beta_{1}, & v^{\pm} = \frac{2(\alpha_{2}\beta_{2} \pm \alpha_{1}\beta_{1})}{\beta_{2} \pm \beta_{1}}, & i, j = 1, 2. \\ q &= \alpha_{2} - \alpha_{1}, & w = (\alpha_{2}^{2} - \alpha_{1}^{2}) + (\beta_{2}^{2} - \beta_{1}^{2}), & w_{01} = -\frac{i}{2}ln \left|\frac{C_{12}\kappa_{12}}{C_{21}\kappa_{21}}\right|, \\ A_{1} &= -\left[\frac{\gamma_{1}\bar{\kappa}_{12}(\gamma_{1}C_{12} - \gamma_{2}C_{11})}{\kappa_{21}\kappa_{11}}\right]^{\frac{1}{2}}, & B_{1} = -\left[\frac{\gamma_{1}\bar{\kappa}_{21}(\gamma_{2}C_{21} - \gamma_{1}C_{22})}{\kappa_{11}\kappa_{22}}\right]^{1/2} \\ A_{2} &= -\left[\frac{\overline{\beta_{1}}\overline{\kappa_{12}}(\overline{\beta_{1}}C_{12} - \overline{\beta_{2}}C_{11})}{\kappa_{21}\kappa_{11}}\right]^{\frac{1}{2}}, & B_{2} = -\left[\frac{\overline{\beta_{1}}\overline{\kappa_{21}}(\overline{\beta_{2}}C_{21} - \overline{\beta_{1}}C_{22})}{\kappa_{11}\kappa_{22}}\right]^{1/2} \\ B_{3} &= \left[\frac{C_{11}C_{22}}{(k - \kappa_{1})(k - \kappa_{2})}\right]^{1/2} \\ b_{1} &= \frac{1}{2}ln \left|\frac{\gamma_{2}\overline{\kappa_{12}}}{\overline{\kappa_{21}}\kappa_{11}(\gamma_{1}C_{12} - \gamma_{2}C_{11})}\right|, a_{1} &= \frac{1}{2}ln \left|\frac{\overline{\beta_{1}}\overline{\kappa_{21}}}{\overline{\kappa_{12}}\kappa_{22}(\overline{\beta_{2}}C_{21} - \overline{\beta_{1}}C_{22})}\right|, \\ b_{2} &= \frac{1}{2}ln \left|\frac{\overline{\beta_{2}}\overline{\kappa_{12}}}{\overline{\kappa_{21}}\kappa_{22}(\overline{\beta_{1}}C_{12} - \overline{\beta_{2}}C_{22})}\right|, a_{2} &= \frac{1}{2}ln \left|\frac{\overline{\beta_{1}}\overline{\kappa_{21}}}{\overline{\kappa_{21}}\kappa_{22}(\overline{\beta_{2}}C_{21} - \overline{\beta_{1}}C_{22})}\right|. \end{split}$$

$$h_1 = \frac{1}{2} ln \left| \frac{\kappa_{21}}{\kappa_{11} \kappa_{22} C_{22}} \right|, \qquad h_2 = \frac{1}{2} ln \left| \frac{C_{11} \kappa_{11}}{\kappa_{22} C_{22}} \right|$$

с тривиальными граничными условиями [4, 65, 68, 123, 177].

Анализ динамики многосолитонного решения (5.2.3) остаётся актуальной и представляющей неизученной задачей, значительный научный интерес. Проведение такого анализа возможно с применением методов численного глубже особенности моделирования, что позволяет понять эволюции многосолитонных структур, их устойчивость, взаимодействия и возможные сценарии распада. В данном параграфе основное внимание будет уделено именно этой задаче, с акцентом на разработку и применение численных методов для исследования динамики решений.

Для моделирования проведения численного И анализа эволюции многосолитонных решений (5.2.3) модели ВНУШ (5.2.1) с потенциалом вида (5.2.2) на основе теории разностных схем нами разработан комплекс компьютерных трёхслойная разностная Применяется схема явного программ. типа на пятиточечном шаблоне с весами, обладающая вторым порядком точности как по времени, так и по координате. Схема удовлетворяет условию устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где т и h - шаги по времени и координате соответственно.

В ходе численного моделирования для контроля консервативности численной схемы мы использовали интегралы числа частиц и полной энергии

$$N = \int (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) dx,$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\phi_{2x}|^2 + |\phi_{2x}|^2) + u(x,t) (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)) dx.$$
(5.2.4)

В тестовых решениях интеграл энергии сохранялся с точностью $\Delta E/E \approx 10^{-3} - 10^{-4}$ и интеграл числа частиц с точностью $\Delta N/N \approx 10^{-4} - 10^{-5}$.

В первой серии численных экспериментов многосолитонное решение (5.2.3) задавалось в неподвижном состоянии, что соответствует скорости солитона v = 0. В данном случае, при отсутствии движения нелинейного возбуждения v = 0, многосолитонное решение сохраняло свою форму во всей области интегрирования t = 0:20. Бризерная динамика внутренних степеней свободы при этом не наблюдалась, что свидетельствует о статичности внутренней структуры решения в отсутствии возмущений, связанных с движением. На рис. 5.2.1 и 5.2.2 представлены компоненты данного решения при заданных параметрах, иллюстрирующие его устойчивость и неизменность пространственно-временной структуры в указанном временном интервале. $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0.49$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 = 0.086$, $\beta_2 = 0.087$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1.84$, $\gamma_2 = 1.84$.



Рисунок 5.2.1. - Графики эволюции плотности числа частиц первой компоненты $(|\phi_1|^2)$



Рисунок 5.2.2. - Графики эволюции плотности числа частиц второй компоненты $(|\phi_2|^2)$

Распределение плотности числа частиц (см. рис. 5.2.3) и распределение плотности интеграла энергии (см. рис. 5.2.4) в пространстве оставались неизменными на протяжении всего времени численного моделирования. Это указывает на устойчивость решения (5.2.3) при v = 0 и отсутствие каких-либо динамических изменений, таких как перераспределение частиц или энергии между компонентами системы. Такое поведение подтверждает статичность и стабильность многосолитонной структуры в условиях отсутствия движения нелинейного возбуждения.


Рисунок 5.2.3. - Графики эволюции плотности числа частиц $(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)$





Рисунок 5.2.4. - Графики эволюции плотности энергии солитона



Рисунок 5.2.5. - Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии солитона

Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии солитона (см. рис. 5.2.5) выявляет, что, несмотря на визуальную стационарность многосолитонного решения при скорости v=0, в динамике всё же присутствуют определённые гармоники, связанные с колебаниями внутренних степеней свободы бризерного решения. Наиболее выраженными в спектре оказываются низкочастотные моды, что указывает на наличие слабой, но устойчивой внутренней динамики, не влияющей на общую форму и устойчивость структуры в наблюдаемом временном

интервале. Это демонстрирует скрытую сложность многосолитонного решения, даже в условиях статичности внешних параметров.

Во второй серии численных экспериментов проводилось моделирование с целью изучения динамики многосолитонного возбуждения при наличии ненулевой групповой скорости. Динамическое поведение многосолитонного решения (5.2.3) в этих условиях существенно отличается от поведения неподвижного возбуждения. Если при нулевой скорости v=0 решение сохраняло свою форму без изменений, то при ненулевой скорости движения v≠0 начинает ярко проявляться бризерный характер солитона, сопровождаемый внутренними колебаниями и модуляциями.

Важно отметить, что, несмотря на эту сложную динамику, интеграл энергии и интеграл числа частиц сохраняются с высокой степенью точности на протяжении всего времени моделирования, что подтверждает общую устойчивость системы. Энергия связи между компонентами бризера оценивается на уровне 15%, что свидетельствует о сильном взаимодействии и координации между компонентами системы даже при наличии движения. При ненулевой групповой скорости многосолитонного решения (5.2.3) наблюдается усиление пространственной модуляции. В частности, для левой составляющей первой компоненты ϕ_1 бризера частота пространственной модуляции возрастает (см. рис. 5.2.6а,б). Это указывает на активизацию внутренних степеней свободы системы под воздействием движения.

Для правой составляющей первой компоненты φ_1 и второй компоненты φ_2 начинает проявляться дополнительная пространственная модуляция (см. рис. 5.2.7а,б). Это указывает на сложное взаимодействие между компонентами бризера в условиях движения, что приводит к более разнообразным пространственным структурам и усилению внутренних нелинейных эффектов. Такие изменения подчеркивают важность учета движения в моделировании динамики многосолитонных решений.



Рисунок 5.2.6а. - Графики, отображающие эволюцию плотности числа частиц первой компоненты движущегося солитона (v=0.24) при разных моментах времени





Рисунок 5.2.6б. - Графики, отображающие эволюцию плотности числа частиц первой компоненты движущегося солитона (v=0.24)



Рисунок 5.2.7. - Графики, отображающие эволюции плотности числа частиц второй компоненты при ненулевой скорости $(|\varphi_2|^2)$ при разных моментах времени



Рисунок 5.2.76. - Графики, отображающие эволюции плотности числа частиц второй компоненты при ненулевой скорости $(|\varphi_2|^2)$

Эволюция распределения плотности числа частиц (см. рис. 5.2.8 а,б) и динамика распределения плотности энергии, движущегося солитона (см. рис. 5.2.9а,б) демонстрируют значительные отличия от поведения неподвижного солитона. В процессе движения многосолитонное решение трансформируется в динамический бризер, характеризующийся богатой внутренней динамикой.

Эта динамика включает колебания на нескольких частотах, причём мощности соответствующих мод различаются. Такое сложное поведение связано с активацией внутренних степеней свободы бризера при движении. Анализ частотного спектра, выполненный с помощью разложения Фурье (см. рис. 5.2.10), подтверждает наличие многокомпонентного характера внутренней динамики. Спектр показывает, что преобладают несколько частотных мод, включая низко- и высокочастотные, каждая из которых вносит свой вклад в общую динамическую картину.



Рисунок 5.2.8а. - Графики эволюции плотности числа частиц при скорости v=0.24. $(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)$ при разных моментах времени





Рисунок 5.2.86. - Графики эволюции плотности числа частиц при скорости v=0.24. $(|arphi_1|^2+|arphi_2|^2)$



Рисунок 5.2.9а. - Графики эволюции плотности энергии движущегося солитона при разных моментах времени





Рисунок 5.2.96. - Графики эволюции плотности энергии движущегося солитона



Рисунок 5.2.10. - Фурье–анализ временной модуляции плотности энергии движущегося солитона

Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии движущегося солитона (см. рис. 5.2.10) показывает, что движение существенно усиливает

динамику низко- и высокочастотных мод. В частности, мощность низкочастотных колебаний возрастает как минимум на порядок по сравнению с неподвижным солитоном (см. рис. 5.2.5а, б). Одновременно с этим, мощность высокочастотных колебаний также значительно увеличивается, что свидетельствует о более сложной и интенсивной внутренней динамике движущегося бризера. Подобные изменения взаимодействий спектра указывают на значительное усиление между компонентами бризера, обусловленных его движением, а также на зависимость этих взаимодействий от скорости движения. Движение бризера активизирует внутренние степени свободы, что проявляется в виде ярко выраженной многомодовой динамики. Кроме того, перераспределение энергии между низко- и высокочастотными режимами подчёркивает сложность внутренней структуры бризера, которая становится гораздо более насыщенной. Это свидетельствует о том, что движение не только усложняет динамику, но и приводит к более глубокому взаимодействию между компонентами, изменяя характер ИХ коллективного поведения. Такой эффект имеет важное значение для понимания устойчивости и механики движения многосолитонных решений.

Таким образом, численное моделирование многосолитонного решения (5.2.3) для ВНУШ (5.2.1) с самосогласованным потенциалом (5.2.2) показало, что в неподвижном состоянии бризерная динамика отсутствует, а структура решения остаётся практически неизменной. При движении солитона наблюдается значительное усиление как пространственной, так и временной модуляции. Внутренние степени свободы многосолитонного решения проявляют ярко выраженную бризерную динамику, сосредоточенную преимущественно на трёх выделенных частотах, что подчёркивает сложность и многомодовый характер поведения системы. Несмотря на активизацию внутренней динамики и усложнение структуры при движении, солитон демонстрирует высокую устойчивость. Интегралы движения, включая интегралы числа частиц и энергии, сохраняются с высокой степенью точности, что подтверждает устойчивость решения и его применимость для моделирования нелинейных процессов в многокомпонентных системах [7-А, 40-А, 44-А].

§ 5.3. Диссипативные солитоны векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом φ ₁φ₂ + φ₁φ₂ в условиях внешней подкачки

Рассмотрим систему уравнений типа ВНУШ

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 = 0,$$

$$i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 = 0,$$
(5.3.1)

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2 . \tag{5.3.2}$$

Многосолитонное решение ВНУШ (5.3.1) с самосогласованным потенциалом (5.3.2) было получено методом конечнозонного алгеброгеометрического интегрирования [49] в виде

$$\varphi_{i} = A_{i}e^{i(q_{1}x+w_{1}t)} ch(\beta_{1}(x+v_{1}t)+b_{i}) + B_{i}e^{i(q_{2}x+w_{2}t)} ch(\beta_{2}(x+v_{2}t)+a_{i}))/$$

$$(B_{1}ch(\beta^{+}(x+v^{+}t)+h_{1}) + ch(\beta^{-}(x+v^{-}t)+h_{2}) +$$

$$+B_{3}cos(qx+wt+w_{01}))$$
(5.3.3)

В ходе численных экспериментов для контроля консервативности численной схемы использовались интегралы числа частиц и полной энергии данной системы

$$N = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx,$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\psi_{2x}|^2 + |\psi_{2x}|^2) + u(x,t)(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)) dx.$$
 (5.3.4)

В первой серии численных экспериментов [7-А] многосолитонное решение (5.3.3) задавалось неподвижным, то есть скорость солитона v=0 и при наличии ненулевой групповой скорости нелинейного возбуждения. Поведение многосолитонного решения (5.3.3) в случае неподвижного нелинейного возбуждения, то есть при v=0, сохраняло свой вид во всей области интегрирования, а при наличии ненулевой скорости движения разительным образом отличался от динамики неподвижного многосолитонного возбуждения.

Вторая серия численных экспериментов посвящена исследованию эволюции солитонов, описываемых решением (5.3.3) ВНУШ (5.3.1) с самосогласованным потенциалом (5.3.2), при учёте внешней подкачки и диссипации. Модифицированная динамика системы учитывает влияние внешних факторов, которые описываются добавлением диссипативного члена следующего вида:

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_{1} =$$

$$= (\varepsilon_{1} - \varepsilon_{2}|\varphi_{1}|^{2})\varphi_{1} + \varepsilon_{3}\varphi_{1xx} - (\varepsilon_{0}/T)\sum_{n=1}^{3} e^{(in\omega_{0}t)}$$

$$i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_{2} =$$

$$= (\varepsilon_{1} - \varepsilon_{2}|\varphi_{2}|^{2})\varphi_{2} + \varepsilon_{3}\varphi_{2xx} - (\varepsilon_{0}/T)\sum_{n=1}^{3} e^{(in\omega_{0}t)}$$
(5.3.5)

с самосогласованным потенциалом

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{t})=\overline{\varphi}_1\varphi_2+\varphi_1\overline{\varphi}_2.$$

где ε_j (j = 0,1,2,3) – параметры диссипации и подкачки внешним полем [175] и $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, а ω_0 совпадает с собственной частотой *w* из решения (5.3.3). Задача заключается в выявлении условий формирования долгоживущих диссипативных солитонов бризерного типа при наличии подкачки внешними полями. Фактически, ставится задача управления поведением нелинейного локализованного возбуждения в реальных физических системах, которые, безусловно, являются диссипативными.

Для численного моделирования и анализа эволюции многосолитонных решений (5.3.3) в рамках модели ВНУШ, учитывающей диссипацию и подкачку внешним переменным полем (5.3.5), нами разработана трёхслойная разностная схема. Эта схема основана на пятиточечном шаблоне с весами явного типа и обеспечивает второй порядок точности как по времени, так и по пространственной координате. Условия устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ и h шаги, соответственно, по времени и по координате. Серия численных экспериментов была выполнена при различных значениях скорости, параметров многосолитонного решения, а также коэффициентов диссипации и подкачки. Наиболее наглядные результаты экспериментов формированию диссипативных численных ПО солитонов приведены ниже на рисунках 5.3.1-5.3.9, они соответствуют скорости солитона v=0.24 и следующим значениям параметров $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0.49$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_1 =$ 0.086, $\beta_2 = 0.087$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1.84$, $\gamma_2 = 1.84$, $\epsilon_0 = 0.5$, $\epsilon_1 = 0.5$, $\epsilon_2 = 0.16$, $\epsilon_3 = 0.16$, $\epsilon_3 = 0.087$, $\beta_2 = 0.087$, $\beta_3 = 0.087$, $\beta_4 = 0.087$, $\beta_5 = 0.087$ 0.01.



Рисунок 5.3.1. - Фазовый портрет солитона, отображающий зависимость интеграла энергии в центре солитона от интеграла числа частиц в его центре



Рисунок 5.3.2. - Фазовый портрет системы, иллюстрирующий зависимость интеграла энергии от интеграла числа частиц, с учётом диссипации и подкачки внешними полями при заданной скорости v=0.24



Рисунок 5.3.3. - Фазовый портрет системы.

(зависимость интеграла энергии солитона от интеграла энергии в центре солитона при учёте диссипации и подкачки внешними полями со скоростью v=0.24)



Рисунок 5.3.4. - Интеграл энергии солитона (при учёте диссипации и подкачки внешними полями со скоростью движения v=0.24)



Рисунок 5.3.5. - Интеграл числа частиц солитона (при учёте диссипации и подкачки внешними полями со скоростью движения v=0.24)



Рисунок 5.3.6. - Графики эволюции плотности энергии солитона при разных моментах

времени



Рисунок 5.3.7. - Графики эволюции плотности энергии числа частиц при разных моментах времени

Эволюция плотности энергии солитона





Рисунок 5.3.8. - Эволюция плотности энергии солитона (при учёте диссипации и подкачки внешними полями со скоростью движения v=0.24)



эволюция плотности числа частиц солитона



Рисунок 5.3.9. - Эволюция плотности числа частиц солитона (при учёте диссипации и подкачки внешними полями со скоростью движения v=0.24)

(сечений отображения Пуанкаре), Анализ фазовых портретов представленных на рис. 5.3.1 и 5.3.2, демонстрирует формирование аттрактора предельного цикла. Это свидетельствует о переходе динамики системы к устойчивому режиму с периодическим поведением. На рис. 5.3.3 показано, что фазовые траектории плотно заполняют ограниченную область фазового пространства, формируя структуру, характерную для «странного аттрактора». Это свидетельствует о формировании диссипативного солитона, возникающего в результате взаимодействия нелинейности, диссипации и внешней подкачки [12]. При этом интеграл энергии и интеграл числа частиц сохраняются с высокой степенью точности, что подтверждает общую устойчивость системы даже в условиях диссипации. Энергия связи между компонентами диссипативного бризера остаётся значительной и составляет порядка 14 % (см. рис. 5.3.4–5.3.5). Это высокий взаимодействия между компонентами подчеркивает уровень И устойчивость диссипативного бризера как динамического объекта.

Таким образом, численное моделирование многосолитонного решения (5.3.3) ВНУШ с самосогласованным потенциалом, с учётом диссипации и подкачки

внешними полями (5.3.5), демонстрирует сложную бризерную динамику внутренних степеней свободы многосолитонного решения. При этом солитон остаётся пространственно локализованным, сохраняя свою устойчивую форму, но проявляет пульсирующее поведение, связанное с колебаниями внутренней структуры (см. рис. 5.3.6–5.3.9). Данное поведение отражает тонкий баланс между нелинейными взаимодействиями, внешней подкачкой и диссипацией, что позволяет сохранять локализацию солитона и одновременно развивать богатую динамику. Эти результаты подчёркивают способность системы сохранять ключевые характеристики солитонных структур даже в условиях влияния внешних факторов [12-А].

§5.4. Формирование пульсаций диссипативных солитонов векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с самосогласованным потенциалом

$$\overline{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \overline{\varphi}_2$$

Одной из наиболее распространённых систем, которое возникают при квазиклассическом теоретико-полевом описании двухкомпонентного бозе-газа в физике конденсированного состояния [152], в нелинейной оптике – для описания распространения лазерного пучка [202, 272] и при описании двухкомпонентной плазмы [185, 230] является система, так называемая ВНУШ

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 = 0$$

$$i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 = 0$$
(5.4.1)

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2. \tag{5.4.2}$$

Подобные системы (5.4.1), появляются при возбуждении квадрупольных степеней свободы спиновой динамики в подходе SU(3) обобщенных когерентных состояний [3, 5, 175, 176].

Решение ВНУШ (5.4.1) с самосогласованным потенциалом (5.4.2), т.е. многосолитонное решение было получено методом конечнозонного алгеброгеометрического интегрирования [49] в виде

$$\varphi_{i} = A_{i}e^{i(q_{1}x+w_{1}t)}\cosh(\beta_{1}(x+v_{1}t)+b_{i}) + B_{i}e^{i(q_{2}x+w_{2}t)}\cosh(\beta_{2}(x+v_{2}t)+a_{i}))/$$

$$/(B_{1}\cosh(\beta^{+}(x+v^{+}t)+h_{1}) + \cosh(\beta^{-}(x+v^{-}t)+h_{2}) + B_{3}\cos(qx+wt+w_{0}t))$$

$$(5.4.3)$$

Следует отметить, что для системы (5.4.1)методом численного моделирования получены многосолитонные решение в случае нулевой и ненулевой скорости движения [7А]. Следующая серия численных экспериментов заключалась в исследовании эволюции многосолитонных решений (5.4.3) ВНУШ (5.4.1) с самосогласованным потенциалом (5.4.2) при наличии внешней подкачки и учете диссипации по аналогии с работой Нозаки и Бекки [263] для кубического СНУШ. В работе [12-А] нами было показано, что с использованием численного моделирования возможно получить диссипативные солитоны ВНУШ (системы из двух уравнений) с самосогласованным потенциалом $\overline{\phi}_1 \phi_2 + \phi_1 \overline{\phi}_2$ при учёте подкачки и диссипации. В данном параграфе представлен альтернативный подход к введению диссипации и подкачки в систему ВНУШ (5.4.1) с самосогласованным потенциалом. Этот подход разработан по аналогии с методологией, предложенной в работе [22-А], где изучалась динамика когерентных структур в рамках КУГЛ.

С учётом внешней подкачки и диссипации модифицированное ВНУШ принимает следующий вид:

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_{1} + v|\varphi_{1}|^{4}\varphi_{1} =$$

$$= i\delta\varphi_{1} + i\varepsilon|\varphi_{1}|^{2}\varphi_{1} + i\beta\varphi_{1xx} + i\mu|\varphi_{1}|^{4}\varphi_{1}$$

$$i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_{2} + v|\varphi_{1}|^{4}\varphi_{1} =$$

$$= i\delta\varphi_{2} + i\varepsilon|\varphi_{2}|^{2}\varphi_{2} + i\beta\varphi_{2xx} + i\mu|\varphi_{2}|^{4}\varphi_{2} \qquad (5.4.5)$$

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2,$$

где ν , δ , ε , β , μ параметры диссипации и подкачки внешним полем соответственно. Задача данного исследования заключается в выявлении условий, при которых возможно формирование долгоживущих диссипативных солитонов в системе ВНУШ при наличии подкачки энергии внешними полями. Основная цель - понять, как управлять поведением нелинейных локализованных возбуждений в диссипативных физических системах, чтобы обеспечить их устойчивость и долговременное существование.

В ходе численных экспериментов для контроля консервативности численной схемы использовались интегралы импульса, числа частиц и полной энергии данной системы

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_{1x} + \bar{\varphi}_{2x}) (\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_{1x} + \varphi_{2x}) (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) \, dx, \qquad (5.4.7)$$

$$N = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx, \qquad (5.4.8)$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\varphi_{1x}|^2 + |\varphi_{2x}|^2) + u(x,t)(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)) dx.$$
 (5.4.9)

Для численного моделирования и анализа эволюции многосолитонных решений (5.4.3) модели ВНУШ, учитывающей диссипацию и подкачку внешними переменными полями (5.4.5), нами разработана трёхслойная разностная схема второго порядка точности с учётом четвёртой степени нелинейности. Схема построена на пятиточечном шаблоне с весами явного типа и удовлетворяет условиям устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, что основан комплекс компьютерных программ.

Напомним, что пульсирующий солитон принадлежит к классу диссипативных солитонов, поскольку его динамика в фазовом пространстве представлена предельным циклом в бесконечномерной системе. Такой солитон характеризуется периодическими изменениями своей формы и плотности, что обусловлено балансом между диссипацией, внешней подкачкой энергии и нелинейными эффектами. Примеры пульсирующего солитона с одним периодом показаны на рисунках 5.4.1-5.4.16, при следующих значениях параметров $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 0.36$, $\alpha_2 = 0.9$, $\beta_1 = 0.086$, $\beta_2 = 0.087$, $\lambda = 1$, $\gamma_1 = 1.5$, $\gamma_2 = 1.5$, $\nu = -1$, $\mu = -0.4$, $\varepsilon = -0.6$, $\delta = 0.6$, $\beta = 0.15$ на интервале [-100, 100] до времен t=40.



Рисунок 5.4.1. - Интеграл импульса солитона



Рисунок 5.4.2. - Интеграл числа частиц солитона



Рисунок 5.4.3. - Интеграл энергии солитона

.



Рисунок 5.4.4. - Фазовый портрет системы, отображающий зависимость интеграла импульса от интеграла энергии солитона



Рисунок 5.4.5. - Фазовый портрет системы, представляющий зависимость интеграла числа частиц от интеграла энергии



Рисунок 5.4.6. - Фазовый портрет системы, показывающий зависимость интеграла импульса от интеграла импульса в центре солитона



Рисунок 5.4.7. - Фазовый портрет системы, иллюстрирующий зависимость интеграла числа частиц от интеграла числа частиц в центре солитона



Рисунок 5.4.8. - Фазовый портрет системы, отражающий зависимость интеграла энергии солитона от интеграла энергии в его центре



Рисунок 5.4.9. - График, отображающий эволюцию плотности импульса солитона при заданных условиях t=0



Рисунок 5.4.10. - График, демонстрирующий эволюцию плотности числа частиц солитона при заданных условиях t=0



Рисунок 5.4.11. - График, иллюстрирующий эволюцию плотности энергии солитона при

t=0



Рисунок 5.4.12. - График, показывающий эволюцию плотности первой компоненты солитона при заданных условиях t=0



Рисунок 5.4.13. - График эволюции плотности второй компоненты солитона при t=0



Рисунок 5.4.14. - Эволюция плотности импульса солитона



Рисунок 5.4.15. - Эволюция плотности числа частиц солитона



Рисунок 5.4.16. - Эволюция плотности энергии солитона

Стоит отметить, что в ходе вычислительных экспериментов интегралы импульса, числа частиц и энергии сохранялись с высокой степенью точности $\frac{\Delta P}{P} \sim 10^{-5} - 10^{-6}, \ \frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}, \frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-6} - 10^{-7}.$

Таким образом, численное моделирование солитонного решения (5.4.3) с учётом диссипации, подкачки и нулевой скорости движения демонстрирует, что форма солитона значительно зависит от параметров системы. Несмотря на изменения во времени, солитон восстанавливает свою исходную форму через определённый период (см. рис. 5.4.1–5.4.3). Это подтверждает его пульсирующий характер и устойчивость в условиях диссипативной среды. Наиболее ясное представление о характере эволюции системы предоставляет фазовый портрет, на котором фазовые траектории остаются локализованными в ограниченной области фазового пространства. Это свидетельствует о формировании ДС с одной пульсацией (см. рис. 5.4.6–5.4.8) подтверждает формирование аттрактора предельного цикла, согласующегося с периодическим характером пульсаций

солитона. Это свидетельствует об устойчивости солитона в диссипативной среде при наличии внешней подкачки.

Эволюция плотности импульса, числа частиц и энергии солитона (см. рис. 5.4.9–5.4.16) демонстрирует сохранение пространственной локализации, несмотря на сложную динамику внутренних степеней свободы. Наблюдаемое пульсирующее поведение подчёркивает сбалансированное взаимодействие диссипации, внешней подкачки и нелинейных эффектов. Такой баланс обеспечивает сохранение ключевых свойств и устойчивость солитона в течение длительного времени, что делает его важным объектом для изучения в рамках диссипативных нелинейных систем.

Таким образом, проведённые вычислительные эксперименты демонстрируют, что в диссипативной среде при наличии внешней подкачки и нулевой скорости движения для ВНУШ с самосогласованным потенциалом возможно формирование пульсирующего солитона с одним периодом. Этот результат свидетельствует о том, что в условиях динамического баланса между диссипативными потерями, внешней подкачкой и нелинейными эффектами система способна поддерживать устойчивое локализованное возбуждение, пульсации. Такой ΠC, характеризующийся проявляющее регулярные единственным периодом, является важным примером диссипативной структуры, которая может существовать в реальных физических системах благодаря внешнему воздействию и внутреннему самосогласованию.

Как отмечалось ранее, солитоны относятся к классу локализованных решений. Подобные локализованные волны встречаются в биологии, химии и физике. ПС образуют один из наборов возможных локализованных решений [21-А]. Они могут быть описаны как предельные циклы бесконечномерных диссипативных динамических систем [37-А, 179], что отличает их от солитонов более высокого порядка, обычно связанных с интегрируемыми моделями [38-А].

В данном параграфе поставлена задача исследования локализованных решений ВНУШ (5.4.5) с учётом диссипации и подкачки при наличии ненулевой скорости движения. Основная цель - определить параметры системы, при которых

происходит бифуркация удвоения периода, ПС. Для достижения этой цели была проведена серия численных экспериментов, в которых исследовались эволюция и динамика солитонных решений при разных параметрах. Особое внимание уделялось режиму с ненулевой скоростью движения v=0.11, где проявляется эффект бифуркации удвоения периода. Результаты экспериментов представлены на графиках (рис. 5.4.16–5.4.25), которые демонстрируют ключевые особенности поведения солитонов в этом режиме:



Рисунок 5.4.17. - Интеграл импульса, движущегося солитона



Рисунок 5.4.18. - Интеграл числа частиц, движущегося солитона



Рисунок 5.4.19. - Интеграл энергии солитона при ненулевой скорости движения



Рисунок 5.4.20. - График, отображающий зависимость интеграла энергии солитона в его центре при ненулевой скорости движения



Рисунок 5.4.21. - Фазовый портрет системы, показывающий зависимость интеграла числа частиц от интеграла энергии солитона при скорости движения v=0.11


Рисунок 5.4.22. - Фазовый портрет системы, отображающий зависимость интеграла импульса от интеграла энергии солитона при ненулевой скорости движения



Рисунок 5.4.23. - Фазовый портрет системы, иллюстрирующий зависимость интеграла импульса солитона от интеграла импульса в его центре при скорости v=0.11



Рисунок 5.4.24. - Фазовый портрет солитона, отображающий зависимость интеграла числа частиц в центре солитона от общего интеграла числа частиц при скорости движения v =

0.11



Рисунок 5.4.25. - Фазовый портрет солитона, представляющий зависимость интеграла энергии в центре солитона от общего интеграла энергии при скорости движения v=0.11



Рисунок 5.4.26. - График, демонстрирующий эволюцию плотности импульса солитона на разных временных интервалах





Рисунок 5.4.27. - График эволюции плотности числа частиц при разных моментах



времени

Рисунок 5.4.28. - График эволюции плотности энергии солитона при разных моментах времени



Рисунок 5.4.29. - Эволюция плотности импульса солитона



Рисунок 5.4.30. - Эволюция плотности числа частиц движущегося солитона



Рисунок 5.4.31. - Эволюция плотности энергии движущегося солитона



Рисунок 5.4.32. - Эволюция плотности первой компоненты солитона |\varphi_1|^2 при ненулевой скорости движения



Рисунок 5.4.33. - Эволюция плотности второй компоненты $|\varphi_2|^2$ движущегося солитона

Анализ интегралов моментов системы (5.4.5) показывает, что внешняя подкачка энергии эффективно компенсировала затухание, вызванное диссипацией. Колебания интегралов моментов, таких как энергия, импульс и число частиц, оставались в стабильных диапазонах на протяжении численного моделирования (см. рис. 5.4.17–5.4.20). Это подтверждает наличие динамического баланса в системе, необходимого для поддержания локализованных структур. ПС, согласно результатам анализа, представляет собой предельный цикл в бесконечномерном фазовом пространстве. Фазовые траектории, полученные в сечении отображения Пуанкаре (см. рис. 5.4.21–5.4.25), чётко демонстрируют формирование аттрактора предельного цикла. Это является ключевым указанием на существование диссипативного солитона, согласующимся с выводами из работы [12].

Эволюция плотности моментов системы (5.4.5) показывает устойчивое динамическое равновесие, возникающее вследствие баланса между притоком энергии через внешнюю подкачку и её диссипацией. При этом солитон сохраняет пространственную локализацию и проявляет пульсирующее поведение (см. рис. 5.4.26–5.4.33). Такое поведение указывает на возможность формирования

долгоживущих ДС, которые представляют собой устойчивые нелинейные структуры в условиях диссипативной среды. Таким образом, численные эксперименты подтверждают, что многосолитонные решения (5.4.3) ВНУШ с самосогласованным потенциалом при учёте диссипации и подкачки внешними полями (5.4.5), а также при ненулевой скорости движения, действительно являются долгоживущими ДС предельного цикла. Эти решения характеризуются регулярной пульсацией и устойчивостью, что подтверждает их роль как важных объектов в описании нелинейных процессов в диссипативных средах. Результаты работы демонстрируют не только формирование таких структур, но и возможность управления их динамикой за счёт изменения параметров системы, таких как

§5.5. Странный аттрактор в векторном нелинейном уравнении Шрёдингера

Солитоны относятся к классу локализованных решений нелинейных эволюционных уравнений и представляют собой уединённые волны [251]. В нелинейных системах солитон характеризуется устойчивой локализованной структурой, которая соответствует особой точке в бесконечномерном фазовом пространстве. За последние десятилетия интерес к исследованию солитонов значительно возрос благодаря их широким практическим приложениям, в частности, в таких областях, как нелинейная оптика и фотоника. Особое внимание уделяется поведению солитонов в диссипативных средах при наличии внешней подкачки энергии. Исследования показали, что в диссипативных системах возможно формирование ДС - устойчивых структур, поддерживаемых динамическим равновесием между притоком энергии и её диссипацией. Эти солитоны демонстрируют богатую динамику, включая пульсации, бифуркации и переходы к хаотическому поведению, что делает их особенно интересными для изучения.

Рассмотрим ВНУШ, которое описывает эволюцию многокомпонентных нелинейных систем:

$$i \varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 = 0,$$

$$i \varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_2 = 0$$
(5.5.1)

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2. \tag{5.5.2}$$

Используем решение для системы (5.5.1) с самосогласованным потенциалом (5.5.2), в виде которое было получено в [49]

$$\varphi_{i} = A_{i}e^{i(q_{1}x+w_{1}t)}\cosh(\beta_{1}(x+v_{1}t)+b_{i}) + B_{i}e^{i(q_{2}x+w_{2}t)}\cosh(\beta_{2}(x+v_{2}t)+a_{i}))/(B_{1}\cosh(\beta^{+}(x+v^{+}t)+h_{1})+\cosh(\beta^{-}(x+v^{-}t)+h_{2}) + B_{3}\cos(qx+wt+w_{01}))$$
(5.5.3)

Как указывалось, ранее, к числу ДС относится пульсирующий солитон, представляющий собой локализованное возбуждение, которое проявляет регулярное пульсирующее поведение во времени. Такое поведение связано с динамическим равновесием между подкачкой энергии, её диссипацией и нелинейными эффектами.

Существование ПС было впервые предсказано в численных экспериментах, которые показали, что в условиях диссипативной среды и внешней подкачки возможно формирование устойчивых структур с периодическими изменениями амплитуды и формы. Позднее эти теоретические предсказания нашли подтверждение в экспериментальных исследованиях, особенно в области волоконной оптики, где ПС были обнаружены при работе лазеров с режимом

самоподдерживающейся генерации [251, 280, 281]. ПС представляют собой множество возможных локализованных решений, которые можно описать как предельные циклы бесконечномерных диссипативных динамических систем. Изменение параметров уравнения приводит к усложнению их поведения, включая переход между режимами через бифуркацию удвоения периода. При последующих изменениях параметров возможно дальнейшее удвоение или учетверение периода. При соответствующем выборе траектории в пространстве параметров можно наблюдать последовательность бесконечных бифуркаций удвоения периода, приводящую к формированию так называемых XC. Этот процесс аналогичен сценарию Фейгенбаума, описывающему переход к хаосу в конечномерных системах, например, в «логистическом отображении» [217]. Анализ численных экспериментов многосолитонных решений (5.5.3) для системы (5.5.1) показывает, что при наличии диссипации, подкачки и ненулевой скорости движения солитона формируются устойчивые и долгоживущие ДС, которые в фазовом пространстве представляют собой предельный цикл [14-А].

Для изучения пути к ХС, включая анализ бифуркаций с несколькими пульсациями, применяется метод введения диссипации и подкачки, аналогичный подходу, используемому в уравнении Свифта-Хоенберга. Этот метод позволяет описывать нелинейную динамику с учетом как диссипативных эффектов, так и внешнего притока энергии, что способствует формированию сложных структур, хаотические солитоны. Модифицированная система включая описывается уравнением, в котором учитываются параметры подкачки, диссипации и бифуркаций, нелинейности, способствующие возникновению ведущих К последовательности пульсаций. Такой подход позволяет изучить сценарий Фейгенбаума перехода к хаосу в контексте бесконечномерных систем. При вводе диссипации и подкачки ВНУШ (5.5.1) с самосогласованным потенциалом (5.5.2) по аналогии [22-А] имеет следующий вид

$$i\varphi_{1t} - \varphi_{1xx} + u(x,t)\varphi_1 + \nu|\varphi_1|^4\varphi_1 =$$

$$= i\delta\varphi_{1} + i\varepsilon|\varphi_{1}|^{2}\varphi_{1} + i\beta\varphi_{1xx} + i\mu|\varphi_{1}|^{4}\varphi_{1} + is\varphi_{1xxxx}$$
$$i\varphi_{2t} - \varphi_{2xx} + u(x,t)\varphi_{2} + \nu|\varphi_{1}|^{4}\varphi_{1} =$$
$$= i\delta\varphi_{2} + i\varepsilon|\varphi_{2}|^{2}\varphi_{2} + i\beta\varphi_{2xx} + i\mu|\varphi_{2}|^{4}\varphi_{2} + is\varphi_{1xxxx}$$
(5.5.5)

с самосогласованным потенциалом

$$u(x,t) = \bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \bar{\varphi}_2.$$

где v, δ , ε , β , μ и *s* параметры диссипации и подкачки внешним полем [70, 94]. Нами ставится задача в выявлении условий формировании хаотических солитонов при наличии подкачки внешними полями и скорости движения солитона. В ходе численных экспериментов скорость солитона задавалась при v=0.13 и для контроля консервативности численной схемы использовались интегралы импульса, числа частиц и полной энергии данной системы

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\varphi}_{1x} + \bar{\varphi}_{2x}) (\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_{1x} + \varphi_{2x}) (\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2) \, dx, \qquad (5.5.7)$$

$$\mathbf{N} = \int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2) dx, \qquad (5.5.8)$$

$$E = \int \frac{1}{2} (|\varphi_{1x}|^2 + |\varphi_{2x}|^2) + u(x,t)(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)) dx.$$
 (5.5.9)

Для численного моделирования нами разработана уникальная трёхслойная разностная схема четвёртого порядка точности как по времени, так и по координате. Условия устойчивости задавались неравенством $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, где τ и h представляют шаги по времени и координате соответственно. Серия численных экспериментов проводилась при различных значениях параметров

многосолитонного решения, а также коэффициентов диссипации и подкачки. Результаты графиков солитонов, подвергшихся бифуркации, представлены на рисунках 5.5.1–5.5.9. В ходе вычислительных экспериментов интегралы импульса, числа частиц и энергии сохранялись с высокой степенью точности $\frac{\Delta P}{P} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta Q}{Q} \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-6} - 10^{-7}$.



Рисунок 5.5.1. - Интеграл импульса солитона



Рисунок 5.5.2. - Интеграл числа частиц солитона



Рисунок 5.5.3. - Интеграл энергии солитона



Рисунок 5.5.4. - Фазовый портрет системы, отображающий зависимость плотности импульса от плотности числа частиц



Рисунок 5.5.5. - Фазовый портрет системы, показывающий зависимость плотности импульса от плотности энергии



Рисунок 5.5.6. - Фазовый портрет системы, отображающий зависимость плотности числа частиц от плотности энергии солитона



Рисунок 5.5.7. - Эволюция плотности импульса солитона, отображающая изменение его значения во времени



Рисунок 5.5.8. - Эволюция плотности числа частиц солитона, показывающая изменение этого параметра во времени



Рисунок 5.5.9. - Эволюция плотности энергии солитона, демонстрирующая её изменение во времени

Таким образом, численное моделирование солитонного решения (5.5.3) с учётом диссипации, подкачки и ненулевой скорости движения показывает, что солитон изменяет свою форму в зависимости от параметров системы. Несмотря на временные изменения, солитон восстанавливает свою первоначальную форму через определённый период. При этом внешняя подкачка полностью компенсирует затухание, а колебания интегралов моментов остаются в пределах заданных диапазонов (см. рис. 5.5.1–5.5.3). Анализ фазовых траекторий (см. рис. 5.5.4–5.5.6) что начальные плавные локализованные распределения показывает, с параметрами, близкими к определённой точке фазового пространства, со временем стремятся к хаотическому солитону. Траектории в фазовом пространстве области, характеризующейся сложной линамикой. притягиваются к что наличие «странного аттрактора» [12]. Эволюция плотности подтверждает интегралы моментов системы (5.5.5) свидетельствует о динамическом равновесии между притоком энергии и её диссипацией. Солитон остаётся локализованным и демонстрирует пульсирующее поведение (см. рис. 5.5.7–5.5.9). Это подтверждает

возможность формирования долгоживущих ДС, которые можно рассматривать как «странные аттракторы» в контексте нелинейной динамики [15-А].

выводы

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

Полученные в данной диссертационной работе результаты являются оригинальными, представляют научно-практический интерес и включают технические и научно-исследовательские аспекты, которые подробно изложены ниже:

Техническая часть (численный анализ поставленных задач и компьютерное моделирование):

- Разработана аппроксимация для СНУШ И ВНУШ с учётом четвёртого уровня нелинейности; Создан комплекс компьютерных программ для численного моделирования, позволяющий исследовать многосолитонные решения с учётом диссипации, внешних магнитных полей и ненулевой скорости движения, реализованный на платформе Matlab;

- Для численных расчетов разработан и применён численный подход, основанный на явной трёхслойной разностной схеме «leap-frog» с условием устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{4}$ (τ - шаг по времени, h - шаг по координате);

- Созданы комплексы компьютерных программ для итерационного вычисления параметров решений системы алгебраических уравнений;

- Созданы численные модели, принимающие во внимание различные граничные условия;

- Проведены тестовые расчёты и апробация разработанных программных комплексов на известных решениях нелинейных эволюционных моделей [35-А – 40-А].

Научно-исследовательская часть:

- Получены численные модели для анализа динамики и устойчивости двухсолитонных решений СНУШ с убывающими граничными условиями [1-A, 2-A, 7-A, 17-A, 19-A];

- Разработан и реализован метод ввода параметров подкачки и диссипации в СНУШ с конденсатными граничными условиями, позволяющий численно

исследовать движущиеся диссипативные солитоны и формированию хаотического солитона [1-A, 2-A, 10-A, 11-A, 17-A, 27-A, 29-A];

- Разработаны численные модели, позволяющие построить устойчивые стационарные двухсолитонные решения СНУШ с притягивающими и отталкивающими потенциалами для различных граничных условий [2-A, 5-A, 22-A, 23-A, 25-A, 26-A, 41-A];

- Разработан и смоделирован метод учёта диссипации и подкачки для численного анализа эволюции диссипативных структур в СНУШ с отталкивающим потенциалом, в результате которого впервые получены устойчивые долгоживущие когерентные структуры [2-A, 4-A, 8-A, 11-A, 13-A, 19-A, 40-A];

- Получена усовершенствованная модель СНУШ, отличающаяся от уравнения Гинзбурга–Ландау наличием потенциала притяжения, а также учитывающая эффекты диссипации и подкачки. Численно получены модели процессов формирования уникальных долгоживущих диссипативных солитонов [2-A, 9-A, 17-A, 20-A, 39-A];

- Смоделирован метод для анализа сложной динамики локализованных возбуждений в СНУШ, с самосогласованным потенциалом притягивающего взаимодействия, включая ввод линейного и нелинейного затухания и подкачки на частотах, кратных частоте бризера и показано, что для долгоживущих диссипативных бризеров характерно точное компенсирование диссипативных потерь внешней подкачкой на частотах, кратных частоте их динамики [2-A, 11-A, 19-A, 27-A, 39-A];

- Получены распространения численные модели многосолитонного возбуждения В системе спинами S > 1/2, описываемой ВНУШ co с самосогласованным потенциалом, которые позволили получить устойчивые двухсолитонные решения [7-А, 12-А, 14-А, 18-А, 19-А, 28-А, 29-А, 39-А];

- Смоделирован процесс обмена информацией между квантовыми битами с использованием ВНУШ. Получены численные модели, демонстрирующие возможность передачи сигнала в трёхуровневых системах в форме бризеров [6-А, 19-А, 24-А, 38-А];

- Получены численные модели анализа многосолитонного решения ВНУШ с самосогласованным потенциалом в неподвижном и подвижном состоянии, которые показали бризерную динамику [2-A, 6-A, 7-A, 12-A, 14-A, 28-A, 31-A, 34-A, 39-A];

- Смоделирован альтернативный метод введения диссипации и подкачки в ВНУШ с самосогласованным потенциалом, основанный на аналогии с уравнением Гинзбурга–Ландау для описания динамики когерентных структур, что позволило выявить условия формирования долгоживущих диссипативных локализованных возбуждений [7-A, 14-A, 18-A, 28-A, 29-A, 31-A, 38-A];

- Решена задача исследования локализованных ВНУШ с учётом диссипации и подкачки при ненулевой скорости движения, определены параметры системы, при которых возникают бифуркация удвоения периода, пульсирующий солитон и «странные аттракторы» [2-А, 7-А, 12-А, 14-А, 15-А, 28-А, 29-А, 32-А, 33-А, 34-А, 42-А];

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, результаты настоящего исследования не только углубляют фундаментальное понимание динамики и устойчивости диссипативных солитонов в скалярных и векторных нелинейных системах, но и открывают новые перспективы для их практического применения.

 Полученные результаты могут быть использованы для разработки технологий, связанных с оптическими волокнами и лазерными системами.
 Диссипативные солитоны обеспечивают генерацию устойчивых пульсирующих световых пучков, управление нелинейными оптическими процессами и их применение в коммуникационных системах.

- В области физики конденсированных сред диссипативные солитоны служат моделью локализованных структур и могут применяться для описания

динамики и взаимодействия возбуждений в конденсатах Бозе–Эйнштейна, что способствует пониманию процессов самоорганизации в подобных системах.

- Выявленные закономерности формирования и эволюции когерентных структур в системах с высокими спинами обеспечивают основу для разработки методов управления многоуровневыми кубитами. Это открывает новые возможности для реализации сложных квантовых вычислений и симуляций.

- Результаты исследования могут быть использованы в спинтронике для разработки энергоэффективных устройств нового поколения. Управление солитонной динамикой в высокоспиновых системах позволяет создавать устойчивые и управляемые элементы для хранения и передачи данных.

- Когерентные спиновые состояния, описанные в настоящем исследовании, обеспечивают высокую точность измерений, что делает их важным инструментом для разработки современных квантовых сенсоров и измерительных технологий.

- Полученные данные демонстрируют возможность управления динамикой диссипативных структур путём изменения параметров системы, таких как интенсивность подкачки и уровень диссипации. Это находит применение в задачах управления нелинейными процессами в сложных многокомпонентных системах.

- Исследование подтверждает возможность передачи сигналов в трёхуровневых системах в форме бризеров, что обеспечивает эффективное распространение информации с сохранением устойчивости и ключевых характеристик в условиях нелинейных взаимодействий.

Таким образом, результаты настоящего исследования углубляют фундаментальное понимание динамики и устойчивости диссипативных солитонов в скалярных и векторных нелинейных системах, предоставляя широкие перспективы для их практического применения в различных научных и технологических областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

- [1] Абдуллоев, Х. О. Несохранение квадрата классического спина ферромагнетика Гейзенберга за счет квадрупольных и октупольных взаимодействий [Текст] / Х. О. Абдуллоев, Ф. К. Рахимов // Вестник Таджикского государственного национального университета. — 1998. — С. 14–17.
- [2] Абдуллоев, Х. О. Учет квадрупольной динамики магнетиков со спином S = 3/2 [Текст] / Х. О. Абдуллоев, Х. Х. Муминов, Ф. К. Рахимов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. 1993. № 1–2. С. 28–30.
- [3] Абдуллоев, Х.О. Общие динамические уравнения в пространстве SU(2S+1)/SU(2S)×U(1) и легкоосный магнетик со спином S=3/2 [Текст] / Х.О. Абдуллоев, А.Т. Максудов, Х.Х. Муминов // Физика твердого тела. 1992. Т. 34, Вып. 2. С. 429–432.
- [4] Абдуллоев, Х.О. Решение нелинейного уравнения Шредингера с учётом самосогласованных потенциалов [Текст] / Х.О. Абдуллоев, А.Т. Максудов, М.С. Курбониён // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2017. Т. 60, № 1–2. С. 50–56.
- [5] Абдуллоев, Х.О. Системы уравнений для ферромагнетиков с обменной и одноионной анизотропией [Текст] / Х.О. Абдуллоев, А.Т. Максудов, Х.Х. Муминов // Физика твердого тела. — 1992. — Т. 34, Вып. 2. — С. 544–547.
- [6] Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи [Текст] / М. Абловиц,
 Х. Сигур. М.: Книга по требованию, 2012. 478 с.
- [7] Абловиц, М. Солитоны и нелинейные уравнения: введение [Текст] / М.
 Абловиц, Х. Сегур. Филадельфия: SIAM, 1981. 420 с.

- [8] Аккерман, А. Диссипативные солитоны в оптических системах / А. Аккерман, Я. Шухман // Physical Review Letters. 2002. Vol. 89, No. 2. Р. 023901.
- [9] Амосов, А. А. МАТLAВ и численные методы / А. А. Амосов, А. С. Тулупов. М.: БИНОМ, 2012. 240 с.
- [10] Андреев, А.Ф. Симметрия и макроскопическая динамика магнетиков [Текст] / А.Ф. Андреев, В.И. Марченко // Успехи физических наук. — 1980. — Т. 130, № 1. — С. 39–63.
- [11] Андреев, А. Ф. Динамика спиновых систем / А. Ф. Андреев, И. А. Лукьянов. М.: Физматлит, 2003. 384 с.
- [12] Ахмедиев, Н. Диссипативные солитоны [Текст] / Н. Ахмедиев, А. Анкевич. — М.: Физматлит, 2008. — 504 с.
- [13] Бабенко, К.И. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики [Текст] / К.И. Бабенко. — М.: Наука, 1979. — 296 с.
- [14] Бажанов, В. В. Спиновые цепи и модели с высокими спиновыми состояниями / В. В. Бажанов, А. Н. Кириллов // Теоретическая и математическая физика. — 1998. — Т. 114, № 3. — С. 377–394.
- [15] Барьяхтар, В. Г. Теория магнетизма: коллективные возбуждения и спиновые волны / В. Г. Барьяхтар, Б. И. Иванов. — К.: Наукова думка, 1986. — 432 с.
- [16] Белова, Т.И. Солитоны и их взаимодействия в классической теории поля [Текст] / Т.И. Белова, А.Е. Кудрявцев // УФН. — 1997. — Т. 167, № 4. — С. 377–406.
- [17] Беллман, Р. Теория матриц / Р. Беллман. М.: Наука, 1972. 392 с.
- [18] Беляев, А. А. Методы математического моделирования и их применение / А. А. Беляев. СПб.: Политехника, 2007. 292 с.
- [19] Боголюбский, И.Л. О времени жизни пульсирующих солитонов в нелинейных классических моделях [Текст] / И.Л. Боголюбский, В.Г. Маханьков // ЖЭТФ. — 1976. — Т. 70, вып. 24. — С. 811–825.

- [20] Боголюбский, И.Л. Осциллирующие частицеподобные решения нелинейного уравнения Клейна–Гордона [Текст] / И.Л. Боголюбский // Письма в ЖЭТФ. — 1976. — Т. 24, вып. 10. — С. 579–583.
- [21] Боголюбский, И.Л. Сравнительный анализ устойчивости одномерных и сферически-симметричных солитонов скалярного поля с самодействием Јф4 [Текст] / И.Л. Боголюбский // ТМФ. — 1980. — Т. 43. — С. 378–385.
- [22] Болгянский, В.Г. Расслоенные пространства и их приложения [Текст]
 / В.Г. Болгянский, Е.Б. Дыкин, М.М. Постников. М.: Иностранная литература, 1958. 460 с.
- [23] Буллаф, Р. Солитоны [Текст] / Р. Буллаф, Ф. Кодри (ред.). М.: Мир.
 1983. 408 с.
- [24] Бьяхтар, В.Г. В мире магнитных доменов [Текст] / В.Г. Бьяхтар, Б.А.
 Иванов. Киев: Наукова Думка, 1986. 132 с.
- [25] Вальков, В.В. Вклад магнон-магнонного взаимодействия в термодинамику анизотропных ферромагнетиков [Текст] / В.В. Вальков, С.Г. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1983. — Т. 85, № 5. — С. 1666–1674.
- [26] Вальков, В.В. Некоторые аспекты теории магнитных доменов [Текст]
 / В.В. Вальков, Т.А. Валькова // Теоретическая и математическая физика. — 1984. — Т. 59. — С. 453.
- [27] Витман, П.Б. Точное решение O(3) нелинейной σ-модели в двух измерениях [Текст] / П.Б. Витман // Письма в ЖЭТФ. — 1983. — Т. 41, вып. 2. — С. 79–83.
- [28] Гаврилов, С. П. Постановка задачи и методы математического моделирования / С. П. Гаврилов, В. И. Казаков. — СПб.: Лань, 2016. — 420 с.
- [29] Гайдидей, Ю.Б. К теории анизотропных ферромагнетиков [Текст] / Ю.Б. Гайдидей, В.М. Локтев // Физика низких температур. 1977. № 3. С. 507–513.

- [30] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. 5-е изд. М.:
 Физматлит, 2004. 560 с.
- [31] Гальперин, Ю. М. Взаимодействие электронов и спиновые состояния в кристаллах / Ю. М. Гальперин, В. Л. Гинзбург. М.: Наука, 1982. 368 с.
- [32] Грехов, И. В. Нелинейные волны в активных средах / И. В. Грехов, А.
 В. Тарасов. СПб.: Наука, 2005. 280 с.
- [33] Гилатов, А. Р. Численные методы в МАТLAB / А. Р. Гилатов. Уфа:
 Изд-во УГАТУ, 2015. 270 с.
- [34] Гилатов, А. Р. Численные методы в инженерных расчетах на MATLAB
 / А. Р. Гилатов. Казань: Фен, 2017. 320 с.
- [35] Гилатов, А. Р. Численные методы и математическое моделирование в MATLAB / А. Р. Гилатов. — Уфа: Изд-во УГАТУ, 2018. — 280 с.
- [36] **Гилатов, А. Р.** Практикум по MATLAB: вычислительная математика и численные методы / А. Р. Гилатов. СПб.: Лань, 2019. 360 с.
- [37] Годунов, С. К. Численные методы математического моделирования /
 С. К. Годунов. Новосибирск: Наука, 2005. 456 с.
- [38] Гуденаф, Д. Магнетизм и химическая связь [Текст] / Д. Гуденаф. Москва: Металлургия, 1988. 240 с.
- [39] Гулин, А.В. Необходимые и достаточные условия устойчивости трехслойных разностных схем [Текст] / А.В. Гулин // ЖВМ и МФ. — 1968. — Т. 8, № 4. — С. 899–902
- [40] Гуфан, Ю.М. Некоторые особенности фазового перехода в кристаллах с ферроэлектрическим состоянием [Текст] / Ю.М. Гуфан, А.С. Прохоров, А.Г. Рудашевский // Доклады Академии наук СССР. 1978. Т. 238. С. 57.
- [41] Давыдов, А.С. Солитоны в молекулярных системах [Текст] / А.С. Давыдов. Киев: Наукова думка, 1984. 200 с.
- [42] Данынин, Н.К. Соотношение спин-волнового и термодинамического вкладов в динамике ориентационных переходов [Текст] / Н.К.

Данынин, Л.Т. Цымбал // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1994. — Т. 106, № 6. — С. 1765–1772.

- [43] Дзялошинский, И.Е. Исследование взаимодействий в магнитоупорядоченных системах [Текст] / И.Е. Дзялошинский, Б.Г. Кухаренко // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1976. — Т. 70. — С. 2360.
- [44] Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения [Текст] / Р. Додд,
 Дж. Эйблс, Дж. Гиббон, Х. Моррис. М.: Мир, 1988. 450 с.
- [45] Дразин, П.Г. Солитоны: введение [Текст] / П.Г. Дразин, Р.С. Джонсон.
 Кембридж: Cambridge University Press, 1989. 256 с.
- [46] Дубровин, Б.А. Интегрируемые системы [Текст] / Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, С.П. Новиков // Динамические системы 4. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 4. С. 179–277.
- [47] Дубровин, Б.А. О некоторых нелинейных моделях [Текст] / Б.А. Дубровин, И.М. Кричевер, Т.Г. Маланок, В.Г. Маханьков // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1988. — Т. 19. — С. 252-276.
- [48] Дубровин, Б.А. Современная геометрия: Методы и приложения
 [Текст] / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. М.: Наука, 1986. 760 с.
- [49] Дубровин, Б.А. Точные решения нестационарного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами [Текст] / Б.А. Дубровин, Т.М. Маланюк, И.М. Кричевер, В.Г. Маханьков // ЭЧАЯ. — 1988. — Т. 19, В. 3. — С. 579–621.
- [50] Дубровский, В.Г. Элементарное введение в метод обратной задачи и теорию солитонов [Текст] / В.Г. Дубровский. — Новосибирск: НГТУ, 1997. — 88 с.
- [51] Джонсон, М. Спиновые волны в магнитных системах / М. Джонсон. —
 М.: Мир, 1973. 320 с.

- [52] Жмудский, А.И. О структуре и устойчивости двумерных динамических солитонов в ферромагнетиках [Текст] / А.И. Жмудский, Б.А. Иванов // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65, вып. 12. С. 899–903.
- [53] Забусский, Н. Солитоны и нелинейные волны [Текст] / Н. Забусский,
 М. Крускал // Computational Physics. 1965. Т. 1. С. 261–277.
- [54] Зайцев, Р.О. О ферромагнетизме высокоспиновых состояний [Текст] /
 Р.О. Зайцев // Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 68, № 4. С. 275–280.
- [55] Зайцев, Г. М. Математическое моделирование: методы и алгоритмы / Г. М. Зайцев, И. В. Князев. — М.: Высшая школа, 2012. — 384 с.
- [56] Захаров, В.Е. Коллапс ленгмюровских волн [Текст] / В.Е. Захаров //
 ЖЭТФ. 1972. Т. 62. С. 1745–1759.
- [57] Захаров, В.Е. Теория солитонов: Метод обратной задачи [Текст] / В.Е.
 Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. М.: Наука, 1980. 320 с.
- [58] Земляная, В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и диссипацией [Текст] / В. Земляная, И.В. Барашенков // Математическое моделирование. — 2005. — Т. 17, № 1. — С. 65–78.
- [59] Земляная, Е.В. Исследование нелинейных структур в диссипативных системах [Текст] / Е.В. Земляная, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина // Сообщение ОИЯИ Р11-97-414. — Дубна, 1997. — 20–50 с.
- [60] Зотов, А.В. Классические интегрируемые системы и их теоретикополевые обобщения [Текст] / А.В. Зотов // ФЭЧАЯ. — 2006. — Т. 37, вып. 3. — С. 758–843.
- [61] Иванов, Г.Г. Скачки сохранения и точные решения в нелинейной сигма-модели [Текст] / Г.Г. Иванов // ТМФ. 1983. Т. 57, № 1. С. 45–54.

- [62] Изергин, А.Г. Физика элементарных частиц и атомного ядра [Текст] / А.Г. Изергин, В.Е. Корепин // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1982. Т. 13. С. 501.
- [63] Ильичев, А. Динамика нелинейных структур в физических системах [Текст] / А. Ильичев // Physica D. 1998. Т. 119. С. 327–336.
- [64] Итс, А.Р. Операторы Шрёдингера с конечнозонным спектром и Nсолитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза [Текст] / А.Р. Итс, В.Б. Матвеев // Теоретическая и математическая физика. — 1975. — Т. 23, вып. 1. — С. 51–67.
- [65] Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин; под ред.
 А.А. Самарского. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [66] Калоджеро, Φ. Спектральные преобразования и солитоны [Текст] / Φ.
 Калоджеро, А. Дегасперис. М.: Мир, 1985. 432 с.
- [67] Камень, А. В. Численные методы в МАТLAB / А. В. Камень, Н. А. Воронцов. СПб.: Питер, 2010. 288 с.
- [68] Кариман, В. Спиновые волны [Текст] / В. Кариман, Е. Маслов //
 ЖЭТФ. 1971. № 73. С. 537–545.
- [69] Кетов, С.В. Введение в квантовую теорию струн и суперструн [Текст]
 / С.В. Кетов. Новосибирск: Наука, 1990. 368 с.
- [70] Кившарь, Ю.С. Оптические солитоны [Текст] / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. — М.: Физматлит, 2005. — 648 с.
- [71] Коновалов, В. Н. Магнетизм систем с высокими спинами / В. Н. Коновалов. М.: Наука, 1991. 320 с.
- [72] Копелинович, В.Б. Экзотические скирмионы [Текст] / В.Б. Копелинович, Б.Е. Штерн // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45, вып. 4. С. 165–168.
- [73] Косевич, А. Нелинейные волны намагниченности: Динамические и топологические солитоны [Текст] / А. Косевич, Б. Ковалев, А. Иванов. Киев: Наукова Думка, 1983. 184 с.

- [74] Косевич, А.М. Самолокализация колебаний в одномерной ангармонической цепочке [Текст] / А.М. Косевич, А.С. Ковалев // ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 1793–1804.
- [75] Косевич, Ю.А. Взаимодействие спиновых волн в низкоразмерных Гейзенберговских магнетиках [Текст] / Ю.А. Косевич, А.В. Чубуков // Письма в ЖЭТФ. 1986. Т. 43, № 1. С. 27–30.
- [76] Коткин, Г.Л. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием MATLAB [Текст] / Г.Л. Коткин, В.С. Черкасский. — Новосибирск: НГТУ, 2001. — 173 с.
- [77] Кошляков, Н. С. Основы постановки задач математического моделирования / Н. С. Кошляков. М.: МГТУ, 2018. 340 с.
- [78] Кочин, Н. Е. Основы математического моделирования / Н. Е. Кочин.
 М.: Наука, 1987. 368 с.
- [79] **Кричевер, И.М.** Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений [Текст] / И.М. Кричевер // Успехи математических наук. 1977. Т. 32, вып. 6. С. 183–208.
- [80] Кричевер, И.М. Функциональный анализ и его приложения [Текст] / И.М. Кричевер. 1977. Т. 20. С. 42.
- [81] **Кряжев, А. В.** Численные методы решения дифференциальных уравнений / А. В. Кряжев. М.: Лань, 2013. 528 с.
- [82] Кудрявцев, Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / Н.А. Кудрявцев. — Москва– Ижевск: ИКИ, 2004. — 360 с.,
- [83] Кудрявцев, Н.А. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики [Текст] / Н.А. Кудрявцев, В.Ф. Зайцев. — М.: Физматлит, 2002. — 432 с.
- [84] Куликовский, А.Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений [Текст] / А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Н. Семенов. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.

- [85] Курамаев, И. Б. Численное моделирование диссипативных структур в нелинейных средах / И. Б. Курамаев, А. В. Жуков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2017. — Т. 151, № 6. — С. 1245–1252.
- [86] Ландау, Л.Д. Теория поля [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1973. — 456 с.
- [87] Ландау, Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред [Текст]
 / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1982. 197 с.
- [88] Ланкастер, П. Теория матриц [Текст] / П. Ланкастер. М.: Наука, 1982. 270 с.
- [89] Лапидус, Л. Численные методы для инженеров и ученых / Л. Лапидус,
 Г. Пинчес. М.: Мир, 1984. 672 с.
- [90] Лихтенберг, А.Дж. Регулярные и стохастические движения / А. Дж. Лихтенберг, М. А. Либерман. М.: Мир, 1984. 512 с.
- [91] Лифшиц, Е.М. Электронная теория металлов [Текст] / Е.М. Лифшиц,
 М.Я. Азбель, М.И. Каганов. М.: Наука, 1971. 415с.
- [92] Лифшиц, И.М. Статистическая физика [Текст] / И.М. Лифшиц, Л.П.
 Питаевский. М.: Наука, 1978. Ч. 2. —448.с.
- [93] Лонгрет, К. Солитоны в действии [Текст] / К. Лонгрет, С. Скотт. М.: Мир, 1981. — 312 с.
- [94] Максудов, А.Т. Об одной системе уравнений в теории спиновых волн
 [Текст] / А.Т. Максудов, Х.О. Абдуллоев, Х.Х. Муминов // Доклады
 Академии наук Таджикской ССР. 1991. Т. 34, № 8. С. 64–68.
- [95] Малоземов, А., Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами [Текст] / А. Малоземов, Дж. Слонзуски. — М.: Мир, 1982. — 348 с.
- [96] **Маломуедов, М. И.** Диссипативные структуры и солитоны в нелинейных средах / М. И. Маломуедов. М.: Наука, 1993. 312 с.
- [97] Мальцев, А. И. Основы теории матриц / А. И. Мальцев. 2-е изд. —
 М.: Наука, 1976. 304 с.

- [98] Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики и моделирования /
 Г. И. Марчук. Новосибирск: Наука, 1984. 476 с.
- [99] Маханьков, В.Г. Нелинейное уравнение Шредингера с некомпактной изогруппой [Текст] / В.Г. Маханьков, О.К. Пашаев // Теоретическая и математическая физика. — 1982. — Т. 53, № 1. — С. 55–67.
- [100] Маханьков, В.Г. Модель Скёрма и сильные взаимодействия [Текст] / В.Г. Маханьков, Ю.П. Рыбаков, В.И. Санок // УФН. 1992. Т. 162, № 2. С. 1–61.
- [101] Маханьков, В.Г. Модель Скирма: нуклоны, дибарионы, ядра [Текст] /
 В.Г. Макханков // ФЭЧАЯ. 1989. Т. 20, вып. 2. С. 401–439.
- [102] Маханьков, В.Г. Нелинейная динамика анизотропного легкоплоскостного магнетика со спином S=1 [Текст] / В.Г. Маханьков, Х.О. Абдуллоев, Х.Х. Муминов, А.Т. Максудов // Препринт Объединенного института ядерных исследований, Е 17-90-298. — Дубна, 1990. — 45 с.
- [103] Маханьков, В.Г. Солитоны и численный эксперимент [Текст] / В.Г. Маханьков // ЭЧАЯ. 1983. Т. 14, в. 1. С. 123–180.
- [104] Маханьков, В.Г. Численное исследование свойств нелинейных солитоноподобных объектов [Текст] / В.Г. Макханков, А.В. Швачка // Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. — ОИЯИ Дубна, 1981. — С. 94–102.
- [105] Моррисон, Дж. Численные методы: введение в алгоритмы, программирование и вычисления / Дж. Моррисон. — М.: ДМК Пресс, 2011. — 352 с.
- [106] Муминов, Х.Х. Вопросы теории нелинейных явлений в анизотропном магнетике с учётом мультипольных моментов [Текст]: Автореф. дисс. на соискание уч. ст. докт. наук. — Душанбе, 1996.
- [107] Муминов, Х.Х. Новый тип двухсолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шрёдингера со смешанными граничными

условиями [Текст] / Х. Х. Муминов, Х. О. Абдуллоев, А. Т. Максудов // Журнал технической физики. — 1993. — Т. 63, № 3. — С. 180–185.

- [108] Муминов, Х.Х. О соответствии квантовых и классических моделей в теории конденсированных сред [Текст] / Х.О. Абдуллоев, Х.Х. Муминов, А. Максудов // Материалы всесоюзного семинара «Межчастичные взаимодействия в растворах». — 1990. — С. 51–58.
- [109] Муминов, Х.Х. Динамика взаимодействий двумерных топологических солитонов в О(3) нелинейной векторной сигма-модели [Текст] / Х. Х. Муминов, Ф. Ш. Шокиров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2010. — Т. 53. — № 9. — С. 679–685.
- [110] Муминов, Х.Х. Новые двумерные бризерные решения O(3) векторной нелинейной сигма-модели [Текст] / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – ХХІІ». — Воронеж: ВГУ, 2011. — С. 120–123.
- [111] Муминов, Х.Х. О существовании и устойчивости двумерных топологических солитонов в модели изотропного классического антиферромагнетика Гейзенберга [Текст] / Х.Х. Муминов // Докл. АН Республики Таджикистан. — 2002. — Т. XLV, № 1. — С. 21–27.
- [112] Муминов, Х.Х. Пакет компьютерных программ для численного моделирования формирования когерентных структур в двумерном комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // Свидетельство о регистрации информационного ресурса: Национальный патентно-информационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — №4271300257. — 15.03.2013.
- [113] Муминов, Х.Х. Пороги устойчивости новых одномерных бризерных решений нелинейной сигма-модели теории поля [Текст] / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2010. — Т. 53. — № 8. — С. 606–611.

- [114] Муминов, Х.Х. Пульсирующие солитоны и законы новой теории поля [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Шокиров // Автоматика и вычислительная техника. — 2004.
- [115] Муминов, Х.Х. Распределение плотности энергии движущихся бризеров О(3) векторной нелинейной сигма-модели [Текст] / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМПУКТ-2013): сборник трудов VI Международной конференции. — Воронеж: Издательство полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. — С. 163–165.
- [116] Муминов, Х.Х. Численное исследование свойств новых одномерных бризероподобных решений нелинейного уравнения Шредингера [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Шокиров // Докл. АН Республики Таджикистан. — 2004. — Т. XLVI, № 9–10. — С. 50–55.
- [117] Муминов, Х.Х. Численное моделирование динамики взаимодействий новых одномерных бризерных решений O(3) векторной нелинейной сигма-модели [Текст] / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // Материалы 6й Международной научно-технической конференции «Информатизация процессов формирования открытых технических систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта». — Вологда: ВоГТУ, 2011. — С. 123–127
- [118] Муминов, Х.Х. Численное моделирование эволюции многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шредингера с конденсатными граничными условиями [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова, Х. Х. Муминов, М. Асгари-Ларими // Учёные записки. — 2018. — № 3 (46). — С. 18–22.
- [119] Муминов, Х.Х. Численный анализ динамики взаимодействий одномерных бризерных решений O(3) векторной нелинейной сигмамодели [Текст] / Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы

математики и ее приложения», посвящённой 70-летию членакорреспондента АН Республики Таджикистан Мухаммадиева Э.М. — Душанбе: Дониш, 2011. — С. 85–87.

- [120] Муминов, Х.Х. Чисто магнонные возбуждения в модели классического ферромагнетика Гейзенберга [Текст] / Х.Х. Муминов // Докл. АН Республики Таджикистан. — 2004. — Т. XLVI, № 9–10. — С. 45–50.
- [121] Никифоров, А.В., Сонин Э.Б. Динамика магнитных вихрей в планарном ферромагнетике [Текст] / А.В. Никифоров, Э.Б. Сонин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1983. Т. 85. С. 642–651.
- [122] Ньелл, А. Солитоны в математике и физике [Текст] / А. Ньелл. М.: Мир, 1989. — 400 с.
- [123] Островский, В.С. О нелинейной динамике сильноанизотропных магнетиков со спинами S = 1 [Текст] / В.С. Островский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1986. — Т. 91, № 5. — С. 1690–1701.
- [124] Пайперт, Л. Построение физических моделей [Текст] / Л. Пайперт // УФН. — 1983. — Т. 140, вып. 2. — С. 315–322.
- [125] Паттерсон, Д. Введение в математическое моделирование / Д. Паттерсон. М.: Мир, 1999. 312 с.
- [126] Переломов, А.М. Решения типа инстантонов в киральных моделях
 [Текст] / А.М. Переломов // УФН. 1981. Т. 134, вып. 4. С. 577–609.
- [127] Петрашец, М.И. Применение теории групп в квантовой механике
 [Текст] / М.И. Петрашец, Е.Д. Трифонов. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
 280 с.
- [128] Питаевский, Л.П. Физическая кинетика [Текст] / Л.П. Питаевский,
 Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1980. 448 с.
- [129] Погодин, А.Н. Спиновые состояния в многокомпонентных системах /
 А. Н. Погодин, Д. В. Яковлев. СПб.: Физматлит, 2017. 336 с.

- [130] Преображенский, М.А. Самоорганизация и диссипативные структуры в нелинейных средах / М. А. Преображенский. — Новосибирск: СО РАН, 2010. — 256 с.
- [131] Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля [Текст] / Р. Раджараман; пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 416 с.
- [132] Райнер, Л. Квантовая теория поля [Текст] / Л. Райнер. Волгоград: Издательство «Платон», 1998. — 512 с
- [133] Рахимов, Ф.К. Когерентные состояния группы SU(4) в действительной параметризации и гамильтоновы уравнения движения [Текст] / Ф. К. Рахимов, Х. О. Абдуллоев, Х. Х. Муминов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 1993. — № 8–9. — С. 20–24.
- [134] Рахимов, Ф.К. Некоторые свойства солитонных решений в двухмерном пространстве [Текст] / Х. О. Абдуллоев, Ф. К. Рахимов // Вопросы физико-химических свойств веществ. Душанбе, 1998. № 2. С. 47–50.
- [135] Рахимов, Ф.К. Солитоны в легкоосном ферромагнетике Гейзенберга [Текст] / Ф. К. Рахимов, Х. О. Абдуллоев // Вестник Таджикского государственного национального университета. — Душанбе, 1998. — № 2. — С. 24–27.
- [136] Рахимов, Ф.К. Двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с конденсатными граничными условиями [Текст] / Ф.К. Рахимов, Х.О. Абдуллоев, А.Т. Максудов, Х.Х. Муминов. Журнал технической физики, 1995. Т. 65, В. 6. С. 191–196.
- [137] Рахимов, Ф.К. Динамика спиновых волн ферромагнетика Гейзенберга со спином S=3/2 в пространстве SU(2S+1)/SU(2S)×U(1) [Текст] / Ф.К. Рахимов, Х.О. Абдуллоев. Мат. межд. научной конф., Душанбе, 1998. С. 56–60.
- [138] **Рахимов, Ф.К.** Исследование солитонов в одномерных молекулярных системах [Текст] / Ф.К. Рахимов, Х.О. Абдуллоев, Н.С. Расулов. —

Вопросы физ. хим. свойств веществ, Душанбе, 1995. — № 2. — С. 97– 107.

- [139] Рахимов, Ф.К. Неубывающие двухсолитонные решения СНУШ с различными условиями самосогласования [Текст] / Ф.К. Рахимов. — Тезисы конф. мол. ученых РТ, Душанбе, 1993. — С. 26.
- [140] Рахимов, Ф.К. Солитонные решения уравнений, описывающих экситоны в молекулярных системах [Текст] / Ф.К. Рахимов, Х.О. Абдуллоев, Л. Якубова. — Вопросы физ. хим. свойств веществ, Душанбе, 1998. — № 3. — С. 56–60.
- [141] Ребби, К. Солитоны [Текст] / К. Ребби // УФН. 1980. Т. 130, вып.
 2. С. 329–356.
- [142] Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач [Текст] / Р.
 Рихтмайер, К. Мортон. М.: Мир, 1972. 420 с.
- [143] Рыбаков, Ю.П. Аксилагно-скалярные конфигурации в калибровочной модели Скирма [Текст] / Ю.П. Рыбаков, Э.Р. Зенаверге // Вестник РУДН. Сер. Физика. — 2009. — № 2. — С. 107–116.
- [144] **Рыскин, Н.М.** Нелинейные волны [Текст] / Н.М. Рыскин, Д.М. Трубецков. М.: Наука, 2000. 272 с.
- [145] Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры [Текст] / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
- [146] Самарский, А.А. Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. — М.: Наука, 1977. — 592 с.
- [147] Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. —
 М.: Наука, 1977. 657 с.
- [148] Самарский, А.А. Устойчивость трехслойных проекционноразностных схем [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич // Математическое моделирование. — 1986. — Т. 8, № 9. — С. 74–84
- [149] Самарский, А.А. Численные методы [Текст] / А.А. Самарский, А.В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
- [150] Склянин, Е.К. О некоторых задачах теории функционалов и их приложениях [Текст] / Е.К. Склянин // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1980. — Т. 95. — С. 55-64.
- [151] Скроцкий, Г.В. Еще раз об уравнении Ландау Лифшица [Текст] / Г.В. Скроцкий // Успехи физических наук. 1984. № 144. С. 681–686.
- [152] Славнов, Н.А. Одномерный двухкомпонентный бозе-газ и алгебраический анзац Бете [Текст] / Н.А. Славнов. — Теоретическая и математическая физика, 2015. — Т. 183, № 3. — С. 409–433.
- [153] Смит, С.У. Численные методы: алгоритмы, программирование, вычисления. МАТLAB для инженеров / С. У. Смит. — 2-е изд. — М.: ДМК Пресс, 2020. — 448 с.
- [154] Стрекаловский, А.В. Численные методы в задачах оптимизации / А.
 В. Стрекаловский. М.: Физматлит, 2010. 296 с.
- [155] Тахтаджян, Л. Гамильтонов подход в теории солитонов [Текст] / Л. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. — М.: Наука, 1986. — 384 с.
- [156] **Тикадзуми, С.** Физика ферромагнетизма. Магнитные свойства вещества [Текст] / С. Тикадзуми. Москва: Мир, 1983. 304 с.
- [157] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики и математическое моделирование / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. М.: Наука, 2004.
 560 с.
- [158] Тураев, Д.В. Диссипативные солитоны в системах с дискретной симметрией / Д. В. Тураев, С. К. Турицын // Физика плазмы. 1998.
 Т. 24, № 3. С. 234–242.
- [159] **Туров, Е.А.** Физика спиновых систем / Е. А. Туров. М.: Физматлит, 1999. 280 с.
- [160] Фаддеев, Л.Д. Гамильтонова система уравнений, описывающая динамику спинов [Текст] / Л.Д. Фаддеев, Л.А. Тахтаджян // Теоретическая и математическая физика. — 1977. — Т. 28, № 1. — С. 18–24.

- [161] Фаддеев, Л.Д. Интегрируемые модели квантовой теории поля и спиновые цепи / Л. Д. Фаддеев, Л. А. Такхтаджян. — СПб.: Лань, 2000. — 256 с.
- [162] Фарахманд, Э.Я. Презентация квантовых вычислений, основанных на многоуровневой квантовой системе с помощью ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [Текст] / Э.Я. Фарахманд, Х.Х. Муминов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. — 2014. — № 1–2 (130). — С. 84–91.
- [163] Флетчер, Ч. Вычислительные методы в динамике сплошных сред / Ч. Флетчер. — М.: Мир, 1991. — 464 с.
- [164] Фомин, С.В. Численные методы решения задач математической физики / С. В. Фомин, П. В. Гребенников. М.: Высшая школа, 2005. 368 с.
- [165] Федянин, В.К. Некоторые аспекты теории солитонов [Текст] / В.К. Федянин // Теоретическая и математическая физика. — 1981. — Т. 46, № 1. — С. 42–52.
- [166] Фэйргрис, Д. Численные методы для инженеров и ученых: практическое руководство / Д. Фэйргрис. — М.: ДМК Пресс, 2017. — 464 с.
- [167] Хансен, С. Численные методы с примерами в MATLAB / С. Хансен. —
 М.: ДМК Пресс, 2017. 352 с.
- [168] Хейне, В. Теория группы в квантовой механике [Текст] / Под ред. В.Я. Файнберга. — М.: Иностранная литература, 1963. — 524 с.
- [169] Цвелик, А.М. Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния [Текст] / А.М. Цвелик; пер. с англ. М.: Физматлит, 2004.
 320 с
- [170] Пресс, У.Х. Численные рецепты: искусство научных вычислений / У.
 Х. Пресс, С. А. Тьюколски, У. Т. Веттерли, Б. П. Фланнери. М.: Мир, 1992. 1056 с.

- [171] Чепмен, С.Дж. МАТLAВ: программирование и применение / С. Дж. Чепмен. 4-е изд. М.: ДМК Пресс, 2021. 928 с.
- [172] Чередник, И.В. Об условиях вещественности в "конечнозонном интегрировании" [Текст] // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 252, № 5. С. 1104–1108.
- [173] Чередник, И.В. Униформизация дискретными подгруппами [Текст] // Функциональный анализ и его приложения. — 1975. — Т. 9, № 2. — С. 95–96.
- [174] Шварц, А.С. Квантовая теория поля и топология [Текст] / А.С. Шварц.
 М.: Наука, 1989. 400 с.
- [175] Abdulloev, Kh.O. [Text] / Kh.O. Abdulloev, A.T. Maksudov, Kh. Muminov
 // Physica Solid State. 1992. Vol. 34. P. 544.
- [176] Abdulloev, Kh.O. [Text] / Kh.O. Abdulloev, Kh. Muminov // Physica Solid State. — 1994. — Vol. 36. — P. 93.
- [177] Abdulloev, Kh.O. [Text] / Kh.O. Abdulloev, M. Aguero, A.V. Makhankov
 // Proceedings of the IV International Workshop «Solitons and Applications». — Singapore: World Scientific, 1990.
- [178] Afanasjev, V.V. Dynamics of solitons in dissipative systems [Text] / V.V.
 Afanasjev, N. Akhmediev, J.M. Soto-Crespo // Physical Review E. 1996.
 Vol. 53. P. 1931–1944.
- [179] Akheizer, I.A. [Text] / I.A. Akheizer, V.G. Baryakhtar, S.V. Peletminsky // Spin Waves. — Moscow: Nauka, 1967.;
- [180] Akhmediev, N. Dissipative Solitons [Text] / N. Akhmediev, A. Ankiewicz.
 Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 504 p.
- [181] Akhmediev, N. Solitons of the Complex Ginzburg-Landau Equation [Text]
 / N. Akhmediev, A. Ankiewicz // In: Trillo S., Torruellas W. (Eds.) Spatial
 Solitons. Springer Series in Optical Sciences. 2001. Vol. 82. P.
 311–336.

- [182] Alexeeva, N.V. Stability and interactions of dissipative solitons [Text] / N.V.
 Alexeeva, I.V. Barashenkov, G.P. Tsironis // Physical Review Letters. —
 2000. Vol. 84. P. 3053–3056.
- [183] Ankiewicz, A. (eds.) Dissipative Solitons: From Optics to Biology and Medicine [Text] / N. Akhmediev, A. Ankiewicz (eds.). — Lecture Notes in Physics, Vol. 751. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. — 472 p.
- [184] Astruc, D. Parametrically amplified 2-dimensional solitary waves [Text] /
 D. Astruc, S. Fauve // In: IUTAM Symposium on Free Surface Flows.
 Proceedings of the IUTAM Symposium held in Birmingham, UK, 10–14
 July 2000. P. 105–112.
- [185] Bandrauk, A.D. Laser control of molecular ionization with intense short laser pulses [Text] / A. D. Bandrauk, H. T. Yu // International Journal of Mass Spectrometry. — 1999. — Vol. 192, No. 1–3. — P. 379–386.
- [186] Barashenkov, I.V. Soliton-like excitations in dissipative systems [Text] / I.
 V. Barashenkov, E. V. Zemlyanaya // Physical Review Letters. 1999. —
 Vol. 83. P. 2568–2571.
- [187] Barashenkov, I.V. Dynamics and stability of dissipative solitons [Text] /
 I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya, M. Bär // Physical Review E. 2001.
 Vol. 64. P. 016603–016610.
- [188] Barashenkov, I.V. Stability of localized structures in nonlinear systems
 [Text] / I.V. Barashenkov, Yu.S. Smirnov, N.V. Alexeeva // Physical Review
 E. 1998. Vol. 57. P. 2350–2360.
- [189] Barashenkov, I.V. Stability of solitons in dissipative systems [Text] / I.V.
 Barashenkov, M.M. Bogdan, V.I. Korobov // Europhysics Letters. 1991.
 Vol. 15. P. 113–118.
- [190] Barashenkov, I.V. Stability of solitons in nonlinear dissipative systems
 [Text] / I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya // SIAM Journal on Applied
 Mathematics. 2004. Vol. 64. № 3. P. 800–817.

- [191] Belov, N.A. On the solutions of the anisotropic Heisenberg equation [Text]
 / N.A. Belov, A.N. Leznov, W.J. Zakrzewski // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1994. — Vol. 27. — P. 5607–5621.
- [192] Bogolubskaya, A.A. 2D Topological solitons in the gauged easy-axis Heisenberg antiferromagnet model [Text] / A.A. Bogolubskaya, I.L.
 Bogolyubsky // Phys. Lett. B. — 1997. — Vol. 395. — P. 269.
- [193] Bogolyubsky, I.L. Relativistic soliton stability in a classical \$\phi^4\$ field theory [Text] / I.L. Bogolyubsky, E.P. Zhidkov, Yu.V. Katyshev, V.G. Makhankov, A.A. Rastorguev // JINR-P2-9673. Apr 1976. 21 p.
- [194] Bogolyubsky, I.L. Three-dimensional topological solitons in the lattice model of a magnet with competing interactions [Text] / I.L. Bogolyubsky // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 126. P. 511–514.
- [195] Boussinesq, J. Essai sur la théorie des eaux courantes [Text] / J. Boussinesq.
 Paris: Imprimerie Nationale, 1877. 680 p.
- [196] Brusch, L. Modulated amplitude waves and defect formation in the onedimensional complex Ginzburg–Landau equation [Text] / L. Brusch, A. Torcini, M. van Hecke, M.G. Zimmermann, M. Bär // Physica D. — 2001.
 — Vol. 160. — P. 127–148.
- [197] Burzlaff, J. CP² soliton scattering: simulations and mathematical underpinning [Text] / J. Burzlaff, W.J. Zakrzewski // Nonlinearity. 1996.
 Vol. 9. P. 1317–1324.
- [198] Cai, D. Nonlinear dynamics in extended systems [Text] / D. Cai, A.R.
 Bishop, N. Grønbech-Jensen, B.A. Malomed // Physical Review E. 1994.
 Vol. 49. P. 1677–1685.
- [199] Chen, W. Nonlinear wave propagation in crystals [Text] / W. Chen, B. Hu,
 H. Zhang // Physical Review B. 2002. Vol. 65. P. 134302–134306.
- [200] Chen, W.Z. Solitonic behavior in condensed matter systems [Text] / W.-Z.
 Chen // Physical Review B. 1994. Vol. 49. P. 15063–15066.

- [201] Chen, X.N. Hydrodynamic stability in nonlinear systems [Text] / X.N. Chen,
 R.J. Wei // Journal of Fluid Mechanics. 1994. Vol. 259. P. 291–305.
- [202] Colin, T. A numerical model for light interaction with a two-level atom medium [Text] / T. Colin, B. Nkonga // Physica D: Nonlinear Phenomena.
 2004. Vol. 188, No. 1–2. P. 92–118.
- [203] Coullet, P. Dynamics of localized structures in nonlinear systems [Text] / P.
 Coullet, K. Emilsson // Physica D. 1992. Vol. 61. P. 119–131.
- [204] Coullet, P. Localized structures in pattern-forming systems [Text] / P. Coullet, J. Lega, B. Houchmandzadeh, J. Lajzerowicz // Physical Review Letters. 1990. Vol. 63. P. 1352–1355.
- [205] Coullet, P. Modulated amplitude waves in optical systems [Text] / P. Coullet, J. Lega, Y. Pomeau // Europhysics Letters. 1991. Vol. 15. P. 221–226.
- [206] de Valcárcel, G.J. Dissipative localized structures in nonlinear optics [Text]
 / G.J. de Valcárcel, I. Pérez-Arjona, E. Roldán // Physical Review Letters. —
 2002. Vol. 89. P. 164101–164104.
- [207] Deissler, R.J. Periodic, quasiperiodic and chaotic localized solutions of the quintic complex Ginzburg–Landau equation [Text] / R.J. Deissler, H. Brand // Physical Review Letters. 1994. Vol. 72. P. 478–481;
- [208] Denardo, B. Nonlinear acoustic waves in fluids [Text] / B. Denardo, B. Galvin, A. Greenfield, A. Larraza, S. Putterman, W. Wright // Physical Review Letters. 1992. Vol. 68. P. 1731–1734.
- [209] Deutsch, I.H. Nonlinear optical phenomena in waveguides [Text] / I.H.
 Deutsch, I. Abram // Journal of the Optical Society of America B. 1994.
 Vol. 11. P. 2303–2310.
- [210] Drexler, K.E. Engines of Creation: The Coming Era of Nanotechnology[Text] / K. E. Drexler. Doubleday, 1986. ISBN 0-385-19973-2.

- [211] Drexler, K.E. Nanosystems: Molecular Machinery, Manufacturing and Computation [Text] / K. E. Drexler. — New York: John Wiley & Sons, 1992.
 — ISBN 0-471-57547-X.
- [212] Elphick, C. Dynamics of dissipative structures [Text] / C. Elphick, A. Hagberg, B.A. Malomed, E. Meron // Physics Letters A. 1997. Vol. 230. P. 33–38.
- [213] Elphick, C. Nonlinear patterns in dissipative systems [Text] / C. Elphick, E.
 Meron // Physical Review A. 1989. Vol. 40. P. 3226–3235.
- [214] Fauve, S. Subcritical bifurcations in dissipative systems [Text] / S. Fauve,
 O. Thual // Physical Review Letters. 1990. Vol. 64. P. 282–285.
- [215] Fedyanin, V.K. [Text] / V.K. Fedyanin // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 1983. — Vol. 31, No. 34. — P. 1237.
- [216] Fedyanin, V.K. [Text] / V.K. Fedyanin, B.Yu. Yushankhay // Low Temperature. 1981. Vol. 7. P. 176.;
- [217] Feigenbaum, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations [Text] / M. J. Feigenbaum // Journal of Statistical Physics.
 1978. Vol. 19. P. 25–52.
- [218] Fermi, E. Studies of Nonlinear Problems [Text] / E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam// Document LA-1940 (May 1955), P. 491–502.
- [219] Fogel, M. Soliton interactions in nonlinear lattice systems [Text] / M. Fogel,
 S. Trullinger, A. Bishop, J. Krumhansi // Physical Review. 1977. Vol.
 15. P. 1578-1589.
- [220] Fordy, A. Nonlinear equations and integrable systems [Text] / A. Fordy, P. Kulish // Communications in Mathematical Physics. 1988. Vol. 89. P. 427-438.
- [221] Heisenberg, W. Zur Quantentheorie des Magnetismus [Text] / W.
 Heisenberg // Metallwirtschaft. 1930. V. 9. P. 843–847.
- [222] Heisenberg, W. Zur Theorie des Ferromagnetismus [Text] / W. Heisenberg
 // Zeitschrift für Physik. 1928. V. 49. P. 619–636.

- [223] Huang, G. Nonlinear dynamics and bifurcations in physical systems [Text]
 / G. Huang, S.-Y. Lou, M. Velarde // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1996. — Vol. 6. — P. 1775–1781.
- [224] Hubbard, J. Electron correlations in narrow energy bands [Text] / J.
 Hubbard // Proceedings of the Royal Society A. 1963. Vol. 276. P.
 238–257.
- [225] Ishimori, Y. Multivortex solutions of a two-dimensional nonlinear wave equation [Text] / Y. Ishimori // Progress of Theoretical Physics. 1984. Vol. 72. P. 33–37.
- [226] Ising, E. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus [Text] / E. Ising //
 Zeitschrift für Physik. 1925. V. 31, No. 1. P. 253–258.
- [227] Karpman, V.I. Non-linear waves in dispersive media [Text] / V.I. Karpman
 // Physica Scripta. 1972. Vol. 20. P. 462–470;
- [228] Kaup, D.J. On the stability of solitary waves [Text] / D.J. Kaup, A.C. Newell
 // Proceedings of the Royal Society of London. Section A. 1978. Vol.
 361. P. 413–446.
- [229] Keener, J.P. Solitons under perturbations [Text] / J.P. Keener, D.W.
 McLaughlin // Physical Review A. 1977. Vol. 16. P. 777–790.
- [230] Khanh, N.Q. Magnetoplasma oscillations of a two-dimensional, twocomponent plasma [Text] / N.Q. Khanh // Modern Physics Letters B. — 1996. — Vol. 10, No. 16. — P. 737–744.
- [231] King, A.C. Fluid Mechanics and Its Applications [Text] / A.C. King, Y.D.
 Shikhmurzaev (Eds.) // Fluid Mechanics and Its Applications, Vol. 62. —
 Kluwer, 2001. P. 225–230.
- [232] Kittel, Ch. Quantization of Spin Waves [Text] / Ch. Kittel // Physical Review. — 1946. — Vol. 70. — P. 965.
- [233] Kollmann, M. Interaction dynamics of solitons in nonlinear lattices [Text] /
 M. Kollmann, H.W. Capel, T. Bountis // Physical Review E. 1999. —
 Vol. 60. P. 1195–1202.

- [234] Korteweg, D.J. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves [Text] / D.J. Korteweg, G. de Vries // Philosophical Magazine. — 1895. — Vol. 39. — P. 422–443.
- [235] Kosevich, A.M. Magnetic solitons [Text] / A.M. Kosevich, A.S. Kovalev,
 A.V. Ivanov // Phys. Rep. 1990. Vol. 194. P. 117–238.
- [236] Krumhansi, J. Dynamics and Statistical Mechanics of a One-Dimensional Model Hamiltonian System for Structural Phase Transitions [Text] / J.
 Krumhansi, J.R. Schrieffer // Physical Review. — 1975. — Vol. 11, No. 9.
 — P. 3535–3545.
- [237] Kudryavtsev, A. Metastable breather in the baby Skyrmion model [Text] /
 A. Kudryavtsev, B. Piette, W.J. Zakrzewski // arXiv:hep-th/9611217v1, 1996, DTP-96/17.
- [238] Kudryavtsev, A. Skyrmions and domain walls in (2+1) dimensions [Text] /
 A. Kudryavtsev, B.M.A.G. Piette, W.J. Zakrzewski // arXiv: hep-th/9709187v1. 26 Sep 1997, DTP-97/25. February 1, 2008.
- [239] Kundu, A. Dynamical Models Describing the Interaction of Elementary Excitations in One-Dimensional Systems [Text] / A. Kundu, V.G. Makhankov, O. Pashaev // Physica D. — 1984. — Vol. 11, No. 3. — P. 375– 396.
- [240] Kuratsuji, H. [Text] / H. Kuratsuji, T.J. Suzuki // Mathematical Physics. 1980. — Vol. 21. — P. 472.
- [241] Laedke, E. Nonlinear Wave Dynamics in Plasma [Text] / E. Laedke, K.
 Spatschek // Physical Review Letters. 1978. Vol. 41, No. 21. P. 1432–1435.
- [242] Landau, L.D. [Text] / L.D. Landau, E.M. Lifshitz // Collection of Manuscripts. — Moscow: Nauka, 1969.
- [243] Longhi, S. Optical solitons and their dynamics [Text] / S. Longhi // Optics
 Letters. 1995. Vol. 20. P. 695–698; Physical Review E. 1997.
 Vol. 55. P. 1060–1065.

- [244] Makhankov, V. G. Solitons and Their Applications [Text] / V.G. Makhankov, S.I. Slavov // In: Proceedings of the IVth International Workshop "Solitons and Applications" / Eds. V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin, O.K. Pashaev. — Singapore: World Scientific, 1990. — P. 107.
- [245] Makhankov, V.G. [Text] / V.G. Makhankov, R.V. Myrzakulov // Physica Scripta. — 1986. — Vol. 34. — P. 163.
- [246] Makhankov, V.G. [Text] / V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin // Physica Scripta. — 1983. — Vol. 28. — P. 221.
- [247] Makhankov, V.G. Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory [Text] / V.G. Makhankov, V.K. Fedyanin // Physics Reports. — 1984. — Vol. 104. — P. 1–86.
- [248] Makhankov, V.G. Soliton Phenomenology [Text] / V.G. Makhankov Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. — 500 p.
- [249] Malomed, B.A. Dynamics of solitons in dissipative systems [Text] / B.A.
 Malomed // Physical Review A. 1991. Vol. 44. P. 6954–6961.
- [250] Malomed, B.A. Interaction of solitons in dissipative systems [Text] / B.A.
 Malomed, A.A. Nepomnyashchy // Europhysics Letters. 1994. Vol.
 27. P. 649–654.
- [251] Maruno, K. Exact soliton solutions of the one-dimensional complex Swift-Hohenberg equation [Text] / K. Maruno, A. Ankiewicz, N. Akhmediev // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2003. — Vol. 176. — P. 44–66.
- [252] Mead, R.L. Semiclassical and variational approximation for spin-1 magnetic chains [Text] / R.L. Mead, N. Papanicolaou // Physical Review. 1982. Vol. 26. P. 1416–1429.
- [253] Mecozzi, A. Nonlinear propagation in optical fibers [Text] / A. Mecozzi, L. Kath, P. Kumar, C.G. Goedde // Optics Letters. 1994. Vol. 19. P. 2050–2053.
- [254] Miao, G. Dissipative wave patterns in nonlinear systems [Text] / G. Miao,
 R. Wei // Physical Review E. 1999. Vol. 59. P. 4075–4080.

- [255] Miles, J.W. Dynamics of surface waves [Text] / J.W. Miles // Journal of Fluid Mechanics. — 1984. — Vol. 148. — P. 451–460.
- [256] Minzoni, A.A. Pulse evolution for a two-dimensional sine–Gordon equation
 [Text] / A.A. Minzoni, N.F. Smyth, A.L. Worthy // Physical D. 2001. —
 Vol. 159. P. 101–123.
- [257] Mollenauer, L.F. Experimental observations of picosecond pulse narrowing and solitons as optical fibers [Text] / L.F. Mollenauer, K.M. Stolen, J.P. Gordon // Physical Letters. — 1980. — Vol. 45. — P. 1095-1123
- [258] Muminov, Kh.Kh. Magnetoelastic interaction in the Heisenberg magnet model [Text] / Kh.Kh. Muminov, V.K. Fedyanin // Phys. Scripta. — 2000.
 — Vol. 62. — P. 23–30.
- [259] Nakatsuka, H. Nonlinear picosecond-pulse propagation through optical fibers with positive group velocity dispersion [Text] / H. Nakatsuka, D. Grischkowsky, A.C. Balant // Physical Review Letters. 1981. Vol. 47. P. 910.
- [260] Nelson, B.P. [Text] / B.P. Nelson, D. Cotter, K.J. Blow, N.J. Doran // Optics Communications. — 1983. — Vol. 48. — P. 292-301
- [261] Nicolis, G. Self-Organization in Nonequilibrium Systems From Dissipative Structures to Order Through Fluctuations [Text] / G. Nicolis, I. Prigogine. — Wiley, NY, 1977. — 491 p.
- [262] Nishikawa, T. Asymmetric soliton potentials in nonlinear systems [Text] / T. Nishikawa // Journal of Mathematical Physics. — 1980. — Vol. 21, pp. 2171–2180.
- [263] Nozaki, K. Chaos in a Perturbed Nonlinear Schrödinger Equation [Text] /
 K. Nozaki, N. Bekki // Modern Physics Letters B. 1983. V. 50, No. 17.
 P. 1227–1229.
- [264] Nozaki, K. Stochastic Instability of Sine-Gordon Solitons [Текст] / К. Nozaki // Physical Review Letters. — 1982. — Vol. 49, № 26. — Р. 1883– 1885.

- [265] Olshanetsky, M. A. Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras [Text] / M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov // Physics Reports. — 1981. — Vol. 71, № 5. — P. 313–400.
- [266] Perelomov, A.M. [Text] / A.M. Perelomov // Generalized Coherent States and Their Application. — Moscow: Nauka, 1987.
- [267] Piette, B. Localized solutions in a 2-dimensional Landau–Lifshitz model
 [Text] / B. Piette, W.J. Zakrzewski // arXiv: hep-th/9611183v1. 22 Nov
 1996, DTP-96/47. February 1, 2008.
- [268] Piette, B.M.A.G. Dynamics of baby Skyrmion [Text] / B.M.A.G. Piette, B.J. Schroers, W.J. Zakrzewski // Nuclear Physics B. — 1995. — Vol. 439. — P. 205–235.
- [269] Pushkarov, K. Solitary clusters of spin deviations and lattice deformation in an anharmonic ferromagnetic chain [Text] / K. Pushkarov, M. Primotorova // Physica Status Solidi. — 1984. — Vol. 123. — P. 573–584.
- [270] Rajaraman, R. Solitons and Instantons [Text] / R. Rajaraman. North-Holland, Amsterdam, 1982. 409 p.
- [271] **Russell, J.S.** Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43 [Text] / J.S. Russell. М.: Оникс, 2012.
- [272] Salamin, Y.I. Covariant electron dynamics in two interfering laser beams: analysis of the vacuum beat wave accelerator [Text] / Y.I. Salamin // Physics Letters A. — 2000. — Vol. 270, No. 3–4. — P. 115–121.
- [273] Sánchez-Morcillo, V.J. Dissipative structures in nonlinear optics [Text] /
 V.J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona, F. Silva, G.J. de Valcárcel, E.
 Roldán // Optics Letters. 2000. Vol. 25. P. 957–960.
- [274] Skryabin, D.V. Nonlinear dynamics in photonic systems [Text] / D.V.
 Skryabin, A. Yulin, D. Michaelis, W.J. Firth, G.-L. Oppo, U. Peschel, F.
 Lederer // Physical Review E. 2001. Vol. 64. P. 056618–056622.
- [275] Skyrme, T.H.R. A Model Unified Field Equation [Text] / T.H.R. Skyrme,
 J.C. Perring // Nuclear Physics. 1962. Vol. 31. P. 556–570.

- [276] Skyrme, T.H.R. A Non-Linear Field Theory [Text] / T.H.R. Skyrme // Proceedings of the Royal Society — Mathematical and Physical Sciences, Series A. — 1961. — Vol. 206, No. 1300. — P. 127–138.
- [277] Skyrme, T.H.R. Nonlinear Theory of Strong Interactions [Text] / T.H.R. Skyrme // Proceedings of the Royal Society A. — 1958. — Vol. 247. — P. 260–278.
- [278] Skyrme, T.H.R. Particle states of a quantized meson field [Text] / T.H.R.
 Skyrme // Proceedings of the Royal Society of London. 1961. Vol.
 A262. P. 237–245.
- [279] Smyth, N.F. Soliton evolution and radiation loss for the sine–Gordon equation [Text] / N.F. Smyth, A.L. Worthy // Physical Review E. 1999.
 Vol. 60. P. 2330–2336.
- [280] Soto-Crespo, J.M. Modulated solitons in optical systems [Text] / J.M. Soto-Crespo, N. Akhmediev, K. Chiang // Physics Letters A. — 2001. — Vol. 291. — P. 115–120.
- [281] Soto-Crespo, J.M. Soliton solutions of nonlinear equations [Text] / J.M.
 Soto-Crespo, N. Akhmediev // Physical Review E. 2002. Vol. 66. —
 P. 066610.
- [282] Stewartson, K. Amplitude-Equation Formulation for Nonlinear Hydrodynamic Stability Problems [Text] / K. Stewartson, J.T. Stuart // Journal of Fluid Mechanics. — 1971. — Vol. 48. — P. 529–545.
- [283] Thacker, H.B. Quantum field theories derived from integrable lattice models [Text] / H.B. Thacker // Reviews of Modern Physics. — 1982. — Vol. 53. — P. 253–285.
- [284] Thual, O. Dissipative structures in fluid dynamics [Text] / O. Thual, S. Fauve // Journal of Physics (Paris). 1988. Vol. 49. P. 1829–1833.
- [285] Tsoy, E.N. Bifurcations from stationary to pulsating solitons in the cubicquintic complex Ginzburg-Landau equation [Text] / E.N. Tsoy, N. Akhmediev // arXiv: nlin / 0602030v1 [nlin.PS]. — 14 Feb 2006.

- [286] Utzny, C. Complex dynamics in pattern formation [Text] / C. Utzny, W. Zimmermann, M. Bär // Europhysics Letters. 2002. Vol. 57. P. 113–119.
- [287] van Saarloos, W. Pulses and fronts in the complex Ginzburg–Landau equation near a subcritical bifurcation [Text] / W. van Saarloos, P.C. Hohenberg // Physical Review Letters. 1990. Vol. 64. P. 749.
- [288] Wang, W. Dissipative solitons in fluid systems [Text] / W. Wang, X. Wang,
 J. Wang, R. Wei // Physics Letters A. 1996. Vol. 219. P. 74–80.
- [289] Wang, X. Nonlinear wave dynamics in fluid systems [Text] / X. Wang, R.
 Wei // Physical Review Letters. 1997. Vol. 78. P. 2744–2747
- Wang, X. Nonlinear wave dynamics in fluid systems [Text] / X. Wang, R.
 Wei // Physical Review E. 1998. Vol. 57. P. 2405–2412
- [291] Weiss, P. L'hypothèse du champ moléculaire [Text] / P. Weiss // Journal de Physique. — 1907. — V. 6. — P. 661–690.
- [292] Wolf, S.A. Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future
 [Text] / S.A. Wolf, et al. // Science. 2001. Vol. 294, Issue 5546. P. 1488–1495.
- [293] Yajima, N. Formation and Interaction of Sonic-Langmuir Solitons: Inverse Scattering Method [Text] / N. Yajima, M. Oikawa // Progress of Theoretical Physics. — 1976. — Vol. 56, No. 6. — P. 1719–1739.
- [294] Zakharov, V. E. What is Integrability? [Text] / Edited by V. E. Zakharov.
 Berlin: Springer-Verlag, 1991. 276 p.
- [295] Zakharov, V.E. Exact theory of two-dimensional self-focusing and onedimensional self-modulation of waves in nonlinear media [Text] / V.E.
 Zakharov, A.B. Shabat // Soviet Physics JETP. — 1972. — Vol. 34. — P. 62–69.
- [296] Zaslavsky, G.M. The simplest case of a strange attractor [Text] / G.M.
 Zaslavsky // Physics Letters A. 1978. Vol. 69A. P. 148–150.
- [297] Zaslavsky, G.M. The simplest case of a strange attractor [Text] / G.M.
 Zaslavsky // Physical Review Letters. Vol. 69 A, No. 3. P. 145–147.

- [298] Zemlyanaya, E.V. Oscillatory instabilities of gap solitons in periodic systems [Text] / I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya // SIAM J. Appl. Maths. 2004. Vol. 64, № 3. P. 800–817.
- [299] Zemlyanaya, E.V. Soliton interaction in a parametrically driven nonlinear Schrödinger equation [Text] / I.V. Barashenkov, E.V. Zemlyanaya // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83. — P. 2568–2571.
- [300] Zhang, W. Pattern formation in fluid systems [Text] / W. Zhang, J. Viñals
 // Physical Review Letters. 1995. Vol. 74. P. 690–693.

Б) Работы автора по теме диссертации

Монографии:

- [1-А] Мухамедова, Ш.Ф. Формирование когерентных структур в нелинейных диссипативных средах: монография / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // -Худжанд: Издательство Дабир. 2021. 182 С. ISBN 978-999-75-75-51-7
- [2-А] Мухамедова, Ш.Ф. Математическое моделирование многосолитонных решений скалярных и векторных нелинейных уравнений Шрёдингера: монография / Ш.Ф. Мухамедова, Ф.К. Рахими // Худжанд: Издательство Дабир. - 2024. – 205 С. ISBN 978-99985-66-70-5

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и при Министерстве образования и науки РФ:

- [3-А] Мухамедова, Ш. Ф. Диссипативные солитоны уравнения Свифта-Хоенберга / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58, № 12. – С. 1091-1095.
- [4-А] Мухамедова, Ш. Ф. Численное моделирование эволюции многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шредингера с потенциалом отталкивания [Текст] / Ш. Ф.

Мухамедова, Х. Х. Муминов // Учёные записки. — 2018. — № 2 (45). — С. 6–12.

- [5-А] Мухамедова, Ш. Ф. Численное моделирование эволюции двухсолитонного решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова, Х. Х. Муминов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. — 2017. — № 3 (168). — С. 44–51.
- [6-А] Мухамедова, Ш.Ф. Численное моделирование распространения сигнала в трёхуровневых системах квантовых вычислений в рамках многосолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шредингера [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова, М. Асгари-Ларими // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2017. — № 4(169). — С. 40–55.
- [7-А] Мухамедова, Ш. Ф. Численное моделирование многосолитонного решения векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом φ₁φ₂ + φ₁φ₂ [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова, Х. Х. Муминов, М. Асгари-Ларими // Известия Академии наук Республики Таджикистан. 2018. № 1 (170). С. 33–49.
- [8-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные бризеры скалярного нелинейного уравнения Шредингера с отталкивающим потенциалом [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. — 2019. — Т. 62, № 1-2. — С. 70–77.
- [9-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны бризерного типа скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физикоматематических, химических, геологических и технических наук. — 2019. — № 1(174). — С. 104–124.

- [10-А] Мухамедова, Ш.Ф. Некоторые особенности формирования и эволюции диссипативных бризеров скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2019. — № 3(176). — С. 20–31.
- [11-А] Мухамедова, Ш.Ф. О бризерах скалярного нелинейного уравнения Шредингера [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физикоматематических, химических, геологических и технических наук. — 2019. — № 4(177). — С. 49–62.
- [12-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом при наличии подкачки [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2020. — № 2(179). — С. 7–19.
- [13-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2020. — № 3(180). — С. 80–97.
- [14-А] Мухамедова, Ш.Ф. Генерация пульсации диссипативных солитонов векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным потенциалом [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2020. — № 3(180). — С. 55–79.
- [15-А] Мухамедова, Ш.Ф. Странный аттрактор в векторном нелинейном уравнении Шредингера [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова

// Ученые записки Худжандского государственного университета им.
 академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки.
 — 2021. — Т. 57, № 2. — С. 35–42.

- [16-А] Мухамедова, Ш.Ф. Математическое моделирование эволюции диссипативных бризеров в нелинейном скалярном уравнении Шрёдингера с отталкивающем потенциалом [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова // Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. — 2024. — № 3(196). — С. 51–66.
- [17-А] Мухамедова, Ш. Ф. Устойчивость диссипативных солитонов в скалярном нелинейном уравнении Шрёдингера [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. — 2024. — Т. 70, № 3. — С. 32–43.
- [18-A] Ш. Ф. Мухамедова, Когерентные структуры векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с самосогласованным потенциалом / Ш.Ф. Мухамедова, Ё.М. Мухсинов // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. — 2024. — T. 71, № 4. — C. 24–43.

Статьи, опубликованные в других изданиях:

- [19-А] Мухамедова, Ш.Ф. Многосолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова и др.
 // Фундаментальная и прикладная наука: состояние и тенденции развития: монография. Петрозаводск: МЦНП «Новая наука», 2023. С. 299-313.: ил. Коллектив авторов. ISBN 978-5-00174-887-8
- [20-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны бризерного типа скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова и др. // Цифровизация как драйвер роста науки и образования: монография. Петрозаводск:

МЦНП «Новая наука», 2020. — С. 242–262.: ил. — Коллектив авторов. DOI 10.46916/18012021-2-978-5-00174-089-6

- [21-А] Мухамедова, Ш. Ф. Формирование когерентных структур комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова, Х. Х. Муминов // Х Международная научнопрактическая интернет-конференция «Проблемы и перспективы развития науки в начале третьего тысячелетия в странах СНГ». — 2013. — С. 159–161.
- [22-А] Мухамедова, Ш.Ф. Формирование когерентных структур в комплексном уравнении Свифта-Хоенберга [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов, Москва, 17–19 мая 2016 года / Российский университет дружбы народов. – Москва: Российский университет дружбы народов (РУДН), 2016. – С. 52-55.
- [23-А] Мухамедова, Ш.Ф. Численное моделирование эволюции двухсолитонного решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова, М. Асгари-Ларими // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: материалы конференции, Москва, 14–18 мая 2018 года / Российский университет дружбы народов. — Москва: Российский университет дружбы народов (РУДН), 2018. — С. 67–70.
- [24-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны бризерного типа скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Материалы XI международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 70-летию доктора физико-математических наук,

профессора Юнуси Махмадюсуф Камарзод. — Душанбе, 27–28 декабря 2018 г. — С. 180–185.

- [25-А] Мухамедова, Ш.Ф. О распространении сигнала в трёхуровневых системах квантовых вычислений [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Материалы VI Международной конференции «Современные проблемы физики», посвящённой 110-летию академика Академии наук Республики Таджикистан С.У. Умарова и 90-летию академика Академии наук Республики Таджикистан А.А. Адхамова. - Душанбе, «Эр-граф». – 2018. - С.62-66. ISBN 978-99975-67-83-3.
- [26-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны бризерного типа скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова // Материалы Республиканская научно-практическая конференция на тему «Математическое и компьютерное моделирование физических процессов». – Душанбе. - 25 октября 2019г. - С. 86-90.
- [27-A] Мухамедова, Ш.Ф. Численное моделирование двухсолитонного скалярного нелинейного уравнения Шредингера с решения притягивающим потенциалом [Текст] / Ш. Ф. Мухамедова // Сборник статей республиканской научно-практической конференции на тему «Современные пути защиты информации в процессе развития информационно-коммуникационных технологий», посвященной годам 2020–2040 — «Десятилетие изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования Республики Таджикистан». – Душанбе. - 24-25 апреля 2020 года. - С. 23-29.
- [28-А] Мухамедова, Ш.Ф. Бризерная динамика многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шредингера с конденсатными граничными условиями [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Материалы LVI Всероссийской конференция по проблемам

динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Российский университет дружбы народов. — Москва. - 18-22 мая 2020 г. С. 126-130 ISBN 978-5-209-10695-1.

- [29-А] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны векторного нелинейного уравнения Шрёдингера с самосогласованным потенциалом φ1φ2+φ1φ2 при наличии подкачки [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Материалы VII Международной конференции «Современные проблемы физики». Душанбе: изд-во «Дониш». – 2020. - С. 308-312
- [30-A] Мухамедова, Ш.Ф. Пульсирующие солитоны векторного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова, Х.Х. Муминов // потенциалом Материалы международной научно-практической конференции, посвященной «Десятилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования». — Худжанд, 18 мая 2021 года. — С. 151–156.
- [31-A] Мухамедова, Ш.Ф. Диссипативные солитоны скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера [Текст] / Х. Х. Муминов, Ш. Ф. Мухамедова // Материалы LVII Всероссийской конференции по динамики, физики проблемам частиц. физики плазмы И оптоэлектроники. Москва. – РУДН. - 17–21 мая 2021 г. – С. 23-28.
- [32-А] Мухамедова, Ш.Ф. Формирование странного аттрактора в векторном нелинейном уравнении Шрёдингера [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // IV Международная научнопрактическая конференция «Scientific community: interdisciplinary research» — Busse Verlag GmbH (Гамбург, Германия), 18–19 мая 2021.
- [33-А] Мухамедова, Ш.Ф. Формирование странного аттрактора в векторном нелинейном уравнении Шрёдингера [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // LVIII Всероссийская конференция по

проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники Россия, г. Москва, РУДН. 23-27 мая 2022 г.

- [34-А] Мухамедова, Ш.Ф. Странный аттрактор в векторном нелинейном уравнении Шрёдингера [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова // Международный научно-практический журнал ENDLESS LIGHT in SCIENCE. — 17 Декабря 2022. Алматы, Казахстан — № 17. – С. 258-264. ISSN: 2709-1201
- [35-А] Мухамедова, Ш.Ф. Бифуркация диссипативных солитонов в векторном нелинейном уравнении Шредингера [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова // Материалы LIX Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. — Москва: Российский университет дружбы народов, 2022. — С. 145–152.
- [36-А] Мухамедова, Ш.Ф. Численное моделирование эволюции двухсолитонного решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Ш.Ф. Мухамедова // Материалы международной научно-практической конференции «Математика в современном мире». — Худжанд: ТГУПБП. - 2024. — С. 112–118.
- [37-A] Mukhamedova, Sh.F. Chaotic dynamics of solitons in classical Heisenberg antiferromagnet model [Text] / Sh.F. Mukhamedova, Kh.Kh. Muminov // Mathematical Modeling and Computational Physics 2013, Joint Institute for Nuclear Research, Laboratory of Information Technologies, Dubna, Moscow Region, Russia. — July 8–12, 2013. — P. 134-142

Свидетельства о государственной регистрации разработанных комплексов компьютерных программ

[38-А] Мухамедова, Ш. Ф. Пакет компьютерных программ для численного моделирования формирования когерентных структур в двумерном комплексном уравнении Гинзбурга–Ландау [Текст] / Х.Х. Муминов,

Ш.Ф. Мухамедова // Свидетельство о регистрации информационного ресурса. Национальный патентно-информационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 4271300257. — 15.03.2013.

- [39-A] Мухамедова, Ш. Φ. База данных программ численного моделирования комплексного уравнения Свифта-Хоенберга [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // Свидетельство о регистрации информационного pecypca. Национальный патентноинформационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 4291600330. — 27.01.2016.
- Ш. [40-A] Ф. База Мухамедова, данных ДЛЯ моделирования распространения локализованного лазерного пучка в фотонных [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // кристаллах Свидетельство 0 регистрации информационного pecypca. Национальный патентно-информационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 4201700360. — 18.12.2017.
- [41-А] Мухамедова, Ш. Ф. База данных для моделирования поведения Бозе-Эйнштейновского конденсата [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // Свидетельство о регистрации информационного ресурса. Национальный патентно-информационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 4201700362. — 18.12.2017.
- [42-А] Мухамедова, Ш. Ф. База данных для численного моделирования эволюции многосолитонных решений скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с потенциалом отталкивания [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // Свидетельство о регистрации информационного ресурса. Национальный патентноинформационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 1202000471. — 26.02.2021.

- [43-А] Мухамедова, Ш. Ф. База данных для численного моделирования эволюции двухсолитонного решения скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера с притягивающим потенциалом [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова // Свидетельство о регистрации информационного ресурса. Национальный патентноинформационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 1202000472. — 26.02.2021.
- [44-А] Мухамедова, Ш. Ф. База данных для численного моделирования распространения сигнала в трёхуровневых системах квантовых вычислений в рамках многосолитонных решений векторного нелинейного уравнения Шрёдингера [Текст] / Х.Х. Муминов, Ш.Ф. Мухамедова, Х.М. Содикова // Свидетельство о регистрации информационного ресурса. Национальный патентноинформационный центр Министерства экономического развития и торговли Республики Таджикистан. — № 1202000473. — 26.02.2021.

Приложение 1.

% программный код для решения задач СНУШ% T=0; J=0; a=1; b=1; JAN=1000; JP=50; % JP - число шагов вывода данных на печать; ТВР=0; % ТВР - время с которого начинается вывод данных; XL=-100; % левая граница; XR=100; % правая граница; M=5000; N=M+1; % число точек; MI=500; NI=MI+1; X(1)=XL;HX=(XR-XL)/М; % шаг по координате; НТ=.0002; % шаг по времени; HX2=HX^2; HT2=HT^2; HX2I=1/HX2; % обратный квадрат шага по координате HXDI=1/(2*HX);HTDI=1/(2*HT); X=XL:HX:XR; MMM=1:10:5001; XI=X(MMM); K1=0.05; d=0.5; H1=0.019+i*0.096; H1S=0.019-i*0.096; H2=1-i*0.01; H2S=1+i*0.01; ALF1=real(H1); ALF2=real(H2); BET1=imag(H1); BET2=imag(H2); GAM1=1.45; GAM1S=conj(GAM1);

```
GAM2=1.472;
GAM2S=conj(GAM2);
LAMB=1;
C11=-LAMB*(GAM1S*GAM1/(H1S-H1));
C22=-LAMB*(GAM2S*GAM2/(H2S-H2));
C12=-LAMB*(GAM1S*GAM2/(H1S-H2));
C21=-LAMB*(GAM2S*GAM1/(H2S-H1));
H11=H1-H1S;
H22=H2-H2S;
H12=H1-H2S;
H21=H2-H1S;
H11S=H1S-H1;
H22S=H2S-H2;
H21S=H2S-H1;
H12S=H1S-H2;
H12SM2=H12S*H12;
H12M2=H12*H12S;
BETP=BET1+BET2;
BETM=BET2-BET1;
VM=2*(ALF2*BET2-ALF1*BET1)/(BET2+BET1);
VP=2*(ALF2*BET2+ALF1*BET1)/(BET1+BET2);
D1=H21S/(H12*H22*(K1-H1));
D2=H12S/(H21*H11*(K1-H2));
D3=C11*C22/((K1-H1)*(K1-H2));
D4=C11*C22/H11*H22;
D5=C11*C22*H12M2/H12SM2*H11*H22:
D6=C22*(K1-H2)/(C11*(K1-H1));
D7=C11*H11/C22*H22;
D8=H12M2/C11*C22*H11*H22*H12SM2;
B1=sqrt(D5);
B2=sqrt(D4);
B3=sqrt(D3);
B4=(-1)*sqrt(D1+D2);
h1 = -0.5 * \log(abs(D8));
h2=0.5*log(abs(D7));
h3=-0.5*\log(abs(D6));
  for I=1:М+1 %ввод данных;
      FO1=B3*cos(BETM*(X(I)-h3));
      FO2=B4*exp(BETP*X(I));
```

```
FO3=B1*cosh(BETP*(X(I)-h1));
FO4=B2*cosh(BETM*(X(I)+h2));
FO=(1+(FO1+FO2)/(FO3+FO4));
PO(I)=d*FO*exp(i*K1*(X(I)));
```

```
F1=B3*cos(BETM*(X(I)+VM*HT)-h3);
F2=B4*exp(BETP*(X(I)+VP*HT));
F3=B1*cosh(BETP*(X(I)+VP*HT)-h1);
F4=B2*cosh(BETM*(X(I)+VM*HT)+h2);
F=(1+(F1+F2)/(F3+F4));
```

end:

```
P(I)=d*F*exp(i*K1*(X(I)+HT));
while (J<=JAN);
      for I=2:M % Simulation
           D2PDX2=P(I+1)-2*P(I)+P(I-1);
           D2PDX2=D2PDX2*HX2I;
           %PC=conj(P(I));
           PM2=P(I)*conj(P(I));
           %PNC=conj(PN(I));
           PNM2=PN(I)*conj(PN(I));
           DPDX=PN(I)-PN(I-1);
           DPDX=DPDX*HXDI;
           %DPDXC=PNC(I)-PNC(I-1);
           %DPDXC=DPDXC*HXDI;
           %DPDXM=DPDX*DPDXC;
           DPDXM=abs(DPDX);
           DPDXM2=DPDXM*DPDXM;
           IO(I)=sqrt(PNM2);
           I1(I)=PNM2;
           I2(I)=DPDXM2-(PNM2-d^2)^2;
      end
    PN(1)=PN(2);
    PN(N)=PN(N-1);
    %PN(3)=PN(N-2);
```

```
IO(1)=IO(2);
```

```
IO(N)=IO(N-1);
```

```
%I0(3)=I0(N-2);
```

```
I1(1)=I1(2);
```

```
I1(N)=I1(N-1);
```

```
%I1(3)=I1(N-2);
  I2(1)=I2(2);
  I2(N)=I2(N-1);
  %I2(3)=I2(N-2);
if (J==0)|(J==JP)
  II0=HX*trapz(I0);
  II1=HX*trapz(I1);
  II2=HX*trapz(I2);
  OUT1(a,1)=100*T;
  OUT1(a,2)=II2;
  OUT1(a,3)=I1(2501);
  OUT1(a,4)=I0(2501);
  a=a+1;
  JP=JP+50;
       for I=1:NI;
           MMM=M/MI*(I-1)+1;
           XI(I)=X(MMM);
           IOI(I)=I0(MMM);
           I1I(I)=I1(MMM);
           I2I(I)=I2(MMM);
               if (T>=TBP)
                  OUT2(b,1)=T;
                  OUT2(b,2)=XI(I);
                  OUT2(b,3)=I0I(I);
                  OUT2(b,4)=I1I(I);
                  OUT2(b,5)=I2I(I);
                  b=b+1;
               end
         end
   end
  T=T+HT;
  J=J+1;
       for I=2:M
           PO(I)=P(I);
           P(I)=PN(I);
         end
```

end

Приложение 2.

% Программный код для решения задач ВНУШ %

T=0; J=0: a=1; b=1; JAN=1000; JP=10; % JP - число шагов вывода данных на печать; ТВР=0; % ТВР - время с которого начинается вывод данных; XL=-100; % левая граница; XR=100; M=5000; N=M+1; % число точек; MI=500; NI=MI+1; X(1)=XL;HX=(XR-XL)/М; % шаг по координате; НТ=.00002; % шаг по времени; HX2=HX^2; HT2=HT 2 ; HX2I=1/HX2; % обратный квадрат шага по координате HXDI=1/(2*HX);HTDI=1/(2*HT); X=XL:HX:XR; MMM=1:10:5001; XI=X(MMM); H1=0.49+i*0.086; H1S=conj(H1); H2=0.9-i*0.087; H2S=conj(H2); ALF1=real(H1); ALF2=real(H2); BET1=imag(H1); BET2=imag(H2); % ALF1=0.5; % ALF2=0.6; % BET1=0.4; % BET=0.7; BET1S=conj(BET1); BET2S=conj(BET2);

```
GAM1=1.7;
GAM1S=conj(GAM1);
GAM2=1.8;
GAM2S=conj(GAM2);
LAMB=1;
EPS=1:
K1=1;
d=1;
DELTA=0.000;
MU=0.0;
d2=d*d:
V1=2*ALF1;
V2=2*ALF2;
q1=8*ALF1;
q2=8*ALF2;
q=(ALF2-ALF1);
H11=H1-H1S;
H22=H2-H2S:
H12=H1-H2S:
H21=H2-H1S;
H11S=H1S-H1:
H22S=H2S-H2;
H21S=H2S-H1;
H12S=H1S-H2;
H12SM2=H12S*H12;
H12M2=H12*H12S:
w=(ALF2*ALF2-ALF1*ALF1)+(BET2*BET2-BET1*BET1);
w1=10*(ALF1*ALF1-BET1*BET1);
w2=10*(ALF2*ALF2-BET2*BET2);
BETP=BET1+BET2;
BETM=BET2-BET1:
VM=(ALF2*BET2-ALF1*BET1)/(BET2+-BET1);
VP=(ALF2*BET2+ALF1*BET1)/(BET1+BET2);
C11=-LAMB*GAM1S*GAM1/((H1S-H1)*(1-EPS*d2/((H1S-K1)*(H1-K1))));
C22=-LAMB*GAM1S*GAM2/(H2S-H2)*(1-EPS*d2/((H2S-K1)*(H2-K1)));
C12=-LAMB*GAM2S*GAM1/(H1S-H2)*(1-EPS*d2/((H1S-K1)*(H2-K1)));
C21=-LAMB*GAM2S*GAM2/(H2S-H1)*(1-EPS*d2/((H2S-K1)*(H1-K1)));
C12M2=C12*conj(C12);
C21M2=C21*conj(C21);
h1=0.5*log(abs(H21/(H12*H22*C22)));
h2=0.5*log(abs(C11*H11/C22*H22));
h3=0.5*log(abs(C12*C21-C11*C22)*H12M2*H21*H22)/H12M2;
```

```
w01=i*05*log(C12*H12S/(C21*H21S));
wO2=i*0.5*log(C12*(K1-H1)/(C21*(K1-H2)));
A1=-sqrt(GAM2*H12S*(GAM1*C12-GAM2*C11)/H21*H11);
A2=-sqrt(BET2S*H12S*(BET1S*C12-BET2S*C11)/(H21*H11));
B1=-sqrt(GAM1*H21S*(GAM2*C21-GAM1*C22)/(H11*H22));
B2=-sqrt(BET1S*H21S*(BET2S*C21-BET1S*C22)/(H11*H22));
B3=sqrt(C11*C22/((K1-H1)*(K1-H2)));
```

```
b1=0.5*log(GAM2*H12S/(H12S*H11*(GAM1*C12-GAM2*C11)));
b2=0.5*log(BET2S*H12S/(H21*H22*(BET1S*C12-BET2S*C22)));
```

```
a1=0.5*log(GAM1*H21S/(H12*H22*(GAM2*C21-GAM1*C22)));
```

```
a2=0.5*log(BET1S*H21S/(H12*H22*(BET2S*C21-BET1S*C22)));
```

```
for I=1:М+1 %ввод данных;
```

% нулевой слой

- $\label{eq:FIO11=A1*cosh(BET1*X(I)+b1)*exp(i*q1*X(I))+B1*cosh(BET2*X(I)+a1)*exp(i*q2*X(I));$
- $\label{eq:FIO12=B1*cosh(BETP*X(I)+h1)+B2*cosh(BETM*X(I)+h2)+B3*cos(q*X(I)+w0) \\ 1);$

FIO1(I)=FIO11/FIO12;

- $$\label{eq:FIO21} \begin{split} FIO21 = &A2*cosh(BET1*X(I)+b1)*exp(i*q1*X(I))+B2*cosh(BET2*X(I)+a2)*exp(i*q2*X(I)); \end{split}$$
- $\label{eq:FIO22=B1*cosh(BETP*X(I)+h1)+B2*cosh(BETM*X(I)+h2)+B3*cos(q*X(I)+w0 1);$

```
FIO2(I)=FIO21/FIO22;
```

% первый слой

- $$\label{eq:FI11} \begin{split} FI11 = &A1*cosh(BET1*(X(I)+V1*HT)+b1)*exp(i*(q1*X(I)+w1*HT))+B1*cosh(BET2*(X(I)+V2*HT)+a1)*exp(i*(q2*X(I)+w2*HT)); \end{split}$$
- $\label{eq:FI12=B1*cosh(BETP*(X(I)+VP*HT)+h1)+B2*cosh(BETM*(X(I)+VM*HT)+h2)\\+B3*cos(q*X(I)+w*HT+w01);$
- $$\label{eq:FI21} \begin{split} FI21 = &A2*cosh(BET1*(X(I)+V1*HT)+b1)*exp(i*(q1*X(I)+w2*HT))+B2*cosh(BET2*(X(I)+V2*HT)+a2)*exp(i*(q2*X(I)+w2*HT)); \end{split}$$
- $\label{eq:FI22=B1*cosh(BETP*(X(I)+VP*HT)+h1)+B2*cosh(BETM*(X(I)+VM*HT)+h2)\\+B3*cos(q*X(I)+w*HT+w01);$

end;

while (J<=JAN);

```
for I=2:M % Simulation %
FI1S(I)=conj(FI1(I));
FI2S(I)=conj(FI2(I));
U=FI1S(I)*FI2(I)+FI1(I)*FI2S(I);
%FI1
D2FI1DX2=FI1(I+1)-2*FI1(I)+FI1(I-1);
```

D2FI1DX2=D2FI1DX2*HX2I; DFI1DX=FI1(I)-FI1(I-1); DFI1DX=DFI1DX*HXDI; FI1M2=FI1(I)*FI1S(I); FI1M4=FI1M2*FI1M2; FI1N(I)=FIO1(I)-i*2*HT*(D2FI1DX2-U*FI1(I))+i*DELTA*DFI1DX+MU*FI1M4*FI1(I); %FI2 D2FI2DX2=FI2(I+1)-2*FI2(I)+FI2(I-1); D2FI2DX2=D2FI2DX2*HX2I; DFI2DX=FI2(I)-FI2(I-1); DFI2DX=DFI2DX*HXDI; FI2M2=FI2(I)*FI2S(I); FI1M4=FI2M2*FI2M2: FI2N(I)=FIO2(I)-i*2*HT*(D2FI2DX2-U*FI2(I))+i*DELTA*DFI2DX+MU*FI1M4*FI2(I); % Интегралы движения % нулевой интеграл (модулья фи) FI1NM2=FI1N(I)*conj(FI1N(I)); FI2NM2=FI2N(I)*conj(FI2N(I)); I0(I)=sqrt(FI1NM2)+sqrt(FI2NM2); % первый интеграл I1(I)=FI1NM2+FI2NM2; % второй интеграл DFI1DT=FI1N(I)-FIO1(I); DFI1DT=DFI1DT*HTDI; DFI1DTM=abs(DFI1DT); DFI1DTM2=DFI1DTM*DFI1DTM; DFI2DT=FI2N(I)-FIO2(I); DFI2DT=DFI2DT*HTDI; DFI2DTM=abs(DFI2DT): DFI2DTM2=DFI2DTM*DFI2DTM; I2(I)=FI1NM2+FI2NM2+DFI1DTM2+DFI2DTM2; % 3 интеграл DFI1DX=FI1N(I)-FI1N(I-1); DFI1DX=DFI1DX*HXDI; DFI1DXM=abs(DFI1DX); DFI1DXM2=DFI1DXM*DFI1DXM; DFI2DX=FI2N(I)-FI2N(I-1); DFI2DX=DFI2DX*HXDI; DFI2DXM=abs(DFI2DX); DFI2DXM2=DFI2DXM*DFI2DXM;

```
I3(I)=DFI1DXM2+DFI2DXM2;
             % 4 интеграл
             I4(I)=I1(I)+I3(I);
        end
FI1(1)=FI1(2);
FI1(N)=FI1(N-1);
FI2(1)=FI2(2);
FI2(N)=FI2(N-1);
IO(1)=IO(2);
IO(N)=IO(N-1);
I1(1)=I1(2);
I1(N)=I1(N-1);
I2(1)=I2(2);
I2(N)=I2(N-1);
I3(1)=I3(2);
I3(N)=I3(N-1);
I4(1)=I4(2);
I4(N)=I4(N-1);
          if (J==0)|(J==JP)
            II01=HX*trapz(I0);
            II11=HX*trapz(I1);
            II21=HX*trapz(I2);
            II31=HX*trapz(I3);
            II41=HX*trapz(I4);
            OUT1(a,1)=1000*T;
            OUT1(a,2)=II01;
            OUT1(a,3)=II11;
            OUT1(a,4)=II21;
            OUT1(a,5)=II31;
            OUT1(a,6)=II41;
            a=a+1;
            JP=JP+10;
                 for I=1:NI;
                      MMM=M/MI*(I-1)+1;
                      XI(I)=X(MMM);
                      IOI(I)=IO(MMM);
                     I1I(I)=I1(MMM);
                     I2I(I)=I2(MMM);
                     I3I(I)=I3(MMM);
                      I4I(I)=I4(MMM);
```

if (T>=TBP) OUT2(b,1)=T; OUT2(b,2)=XI(I); OUT2(b,3)=I0I(I); OUT2(b,4)=I1I(I); OUT2(b,5)=I2I(I); OUT2(b,6)=I3I(I); OUT2(b,7)=I4I(I);

```
b=b+1;
```

end

end

end T=T+HT; J=J+1;

> for I=2:M FIO1(I)=FI1(I); FI1(I)=FI1N(I); FIO2(I)=FI2(I); FI2(I)=FI2N(I); end

end