

Отзыв

официального оппонента на диссертацию Шокира Фархода, выполненную по теме «Математическое моделирование динамических и топологических локализованных решений нелинейных эволюционных уравнений» и представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

1. Актуальность темы диссертации, степень новизны полученных результатов и научных положений, представленных к защите.

В рецензируемой диссертации проведены исследования по решению научных задач, которых можно разделить на два класса:

1). Численное и аналитическое исследование локализованных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, а именно, уравнений синус-Гордона и $O(3)$ нелинейной сигма-модели (НСМ) в $(2+1)$ -мерном пространстве-времени.

2). Численное и аналитическое исследование вопросов разработки методов математического моделирования спиновых кантовых систем в рамках \mathbb{R}^{D+1} , $D \geq 3$.

С физической точки зрения, в первом классе задач объект исследования функционирует в рамках так называемых базовых фермионных систем, обладающих спиновым числом равным $S = 1/2$. В теории поля системы со спином $1/2$ являются типичными двухуровневыми квантовыми структурами и имеют важные теоретические следствия и практические приложения. Вектор Блоха данных систем можно визуализировать на двумерной сфере S^2 (сфере Блоха), где полюса соответствуют двум основным состояниям ($|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$) изотопического спина, точнее его проекции: $\pm 1/2$. В работе использованы также свойства стереографической проекции, осуществляющей гомеоморфизм комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ на сферу S^2 (таргет пространство). Таким образом, в диссертационной работе, вычисление

значений плотности энергии поля локализованных структур, описываемых соответствующими решениями уравнений синус-Гордона и $O(3)$ НСМ, осуществлена сопоставлением каждой точке области компьютерного моделирования (в данном случае \mathbb{R}^2) сферы S^2 . Иначе говоря, вычисления проведены в расслоенном пространстве.

Следует также отметить, что одним из ключевых моментов диссертации при построении новых численных решений $O(3)$ НСМ является добавление возмущения в известные или новые, найденные автором решения уравнения синус-Гордона. Данный метод является обоснованным, так как в физике, эффективными моделями теории поля являются, в частности, нелинейная сигма-модель, модель синус-Гордона, а также φ^4 -модель. Последняя является моделью фазового перехода, которую часто называют моделью Гинзбурга-Ландау. Нелинейные сигма-модели появляются в различных областях физики, в том числе являются эффективной моделью квантовой хромодинамики, моделью ферромагнитных и антиферромагнитных материалов, а также данная модель демонстрирует важное свойство, как асимптотическая свобода. Модель синус-Гордона также обладает универсальностью. Двумерное уравнение синус-Гордона, в частности, описывает известный в физике топологический фазовый переход – переход Березинского-Костерлица-Таулеса в 2D классической XY-модели. При этом модели синус-Гордона, НСМ, а также φ^4 -модель имеют схожую структуру, для которых плотность лагранжиана можно представить в следующем виде: $L = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi)$.

Таким образом, для первого класса задач, учитывая вышеуказанные методы и свойства теоретико-полевых моделей (синус-Гордона и НСМ) в диссертационной работе автором получены ряд новых результатов, которые приведены в главах 3 и 4. В том числе, получены численные модели осциллирующих топологических вихрей, доменных стенок и взаимодействующих топологических решений $O(3)$ НСМ. Аналитическим методом получено новое бризерное решение уравнения синус-Гордона. Выявлены и описаны новые свойства полученных моделей. Также в данной

серии экспериментов, применением операции обращения времени, численным компьютерным моделированием построены динамические модели, которые показывают и подтверждают свойство инвариантности во времени $O(3)$ НСМ.

Исследованные в рецензируемой диссертационной работе локализованные структуры, можно определить как квазичастицы с изотопическим спином $1/2$. Известно, что реальные частицы со спином $1/2$ играют важную роль в квантовой механике, поскольку они являются фундаментальными строительными блоками материи и имеют важные приложения в различных областях, таких как квантовые вычисления и магнитно-резонансная томография. Поэтому можно утверждать, что результаты, полученные автором диссертации в этом направлении, являются актуальными и дают определенные базовые сведения для практических экспериментов.

В главе 5 диссертации приведены результаты по исследованию следующего класса задач по разработке методов математического моделирования квантовых систем, обладающих спиновым числом $S > 1/2$. Данная задача в принципе не является новой и существует достаточное количество исследований, посвященных этому направлению. Однако проблема непосредственного геометрического представления квантовых состояний более высокого уровня, все еще является нерешенной и актуальной научной темой, которая сопряжена с определенными сложностями, связанными с увеличением размерности гильбертова пространства. Для рассмотрения данной задачи в диссертационной работе использован метод Майораны, который представляет квантовое чистое состояние систем со спиновым числом $S > 1/2$ в терминах $2S$ состояний систем со спином $1/2$ и, таким образом, обобщает геометрический подход существующий для базовых систем со спином $1/2$ на большие спиновые состояния или многоуровневые системы. То есть, если эволюция произвольного двухуровневого состояния ($|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$) в точности может быть представлена траекторией точки на сфере Блоха, метод Майораны расширяет данный механизм увеличением ($2S$)

количество репрезентативных точек на сфере S^2 . Таким образом, становится возможным оставаясь в реальном пространстве \mathbb{R}^3 разработать точную геометрическую интерпретацию многомерных квантовых состояний в гильбертовом пространстве. Автором диссертации выведены аналитические выражения, описывающие вероятность согласования так называемых ориентированных квантовых состояний с различными спиновыми числами $S > 1/2$.

Исследование свойств и закономерностей квантовых состояний с высоким значением спина, имеет огромный потенциал внедрения особенно в области квантовых вычислений, в том числе в разработке многоуровневых квантовых процессоров, оперирующих так называемыми кутритами или куквадрами – элементарными единицами квантовых операторов с тремя и четырьмя уровнями соответственно.

На основе вышесказанного считаю, что тема диссертации безусловно является актуальной, а полученные результаты и выводимые на защиту положения содержат научную новизну.

2. Обоснованность и достоверность выводов и рекомендаций, указанных в диссертации.

Научные результаты диссертационной работы получены на основе известных апробированных методов. Численные модели построены на основе метода конечных разностных схем, где приближение осуществляется заменой производных (содержащихся в дифференциальных уравнениях синус-Гордона и $O(3)$ НСМ), аппроксимациями этих производных в виде разностных уравнений. Далее, методом итераций решается полученный набор алгебраических уравнений для создания базы данных значений $F(x_n^h, y_n^h, t_n^\tau)$, $\frac{\tau}{h} < 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что данный метод конечных разностей применяется непосредственно к дифференциальному уравнению и представляет собой дифференциальную форму решения. В главе 2 приведены достаточно подробные сведения о разработанных методах и алгоритмах численного моделирования, в том числе, образцы разработанных численных

схем и компьютерных кодов приведены в параграфе 2.3 и в приложении диссертации в виде расширенной блок-схемы.

Полученные эволюционные модели подробно описывают процесс взаимодействия исследованных локализованных решений с достаточно хорошим сохранением их структурной устойчивости. По разработанным алгоритмам и компьютерным кодам получены свидетельства о государственной регистрации. В главе 4 (параграф 4.1) и в приложении (В) диссертации приведено подробное описание процесса вывода аналитического вида класса бризерных решений $(2+1)$ -мерного уравнения синус-Гордона. Численное моделирование эволюции данного бризерного решения показывает её устойчивость в движущемся и взаимодействующем состояниях. Заметим, что бризерное решение, полученное в рецензируемой диссертационной работе, обобщает аналогичные результаты зарубежных авторов (литература [12], стр. 271).

Достоверность выражений для вероятностных функций ориентированных квантовых систем с различными спиновыми числами, полученных в главе 5 показана в том числе графическими иллюстрациями (рис. 5.3.3).

Исходя из выше указанных фактов и сведений, считаю, что выводы и рекомендаций, указанных в диссертации по отношению к полученным результатам, являются достоверными и обоснованными.

3. Научная, практическая, экономическая и социальная значимость результатов диссертации и рекомендации по их использованию.

Топологические вихри, исследованные в главе 3 диссертации, по сути являются точечными топологическими дефектами, которые могут быть обнаружены, например, теории сверхпроводимости. Например, в некоторых нанокompозитных материалах вида «сверхпроводник-ферромагнетик» данные вихри взаимодействуют с топологическими дефектами в ферромагнетике, такими как доменные стенки. В частности, исследование процессов

взаимодействия топологических вихрей с нееловскими и блоховскими доменными стенками (параграфы 3.2–3.4), выявление и анализ их свойств при различных параметрах и пространственных конфигурациях являются важными научными задачами в области наноразмерных функциональных материалов, в том числе для использования в сложной оксидной наноэлектронике и спинтронике.

Локализованные, периодические во времени состояния – бризерные решения, рассмотренные в главе 4, остаются предметом широкого исследовательского интереса в различных аспектах современной физики и нелинейной механики и имеют довольно широкий спектр приложений, включая конденсаты Бозе-Эйнштейна, наномеханические системы, углеродные нанотрубки, а также фазовые переходы в сверхпроводниках.

Задача исследования методов математического моделирования высокоспиновых систем, рассмотренная в главе 5 направлена в том числе на определение механизмов квантовых вычислений, которые имеют большой потенциал для применения не только в фундаментальных разработках квантовых вычислительных устройств и процессоров, но и в различных научно-прикладных и инженерных задачах, требующих близких к оптимальным решений за минимальное время вычислений.

4. Публикация результатов диссертации в рецензируемых научных журналах и соответствие оформления диссертации требованиям.

По результатам диссертационного исследования опубликовано более 20 статей (21) в рецензируемых научных журналах, изданы 3 монографии в соавторстве с научным консультантом, а также получены 12 свидетельств о регистрации разработанных комплексов программ (алгоритмы, численные схемы и компьютерные коды расчета научных задач). Кроме того, опубликованы более 90 статей и тезисов в других научных журналах и сборниках материалов конференций. Сведения о полученных результатах

доложены в более 50 республиканских и международных конференциях, семинарах и симпозиумах.

Диссертация состоит из 353 страниц машинописного текста, введения, 6 глав, заключения, списка литератур и приложения. Список литератур содержит ссылки на 311 использованных источников. В списке публикаций автора (129 наименований) не включены работы, опубликованные для защиты его кандидатской диссертации.

Считаю, что с точки зрения оформления, структуры, логического построения и содержания элементов научной новизны диссертационная работа Шокира Ф. полностью соответствуют соответствующим требованиям Порядка присуждения ученых степеней (в редакции постановления Правительства Республики Таджикистан от 26.06.2023, №295), в том числе требованиям пунктов главы 3 «Критерии подготовки диссертации» и Инструкции о порядке оформления диссертаций и автореферата диссертаций, утвержденной решением Президиума Высшей аттестационной комиссии при Президенте Республики Таджикистан. Автореферат диссертации полностью отражает ее содержание и отвечает всем требованиям пунктов вышеуказанной Инструкции.

5. Замечания и недостатки.

1. Несмотря на то, что исследования диссертации посвящены изучению физических процессов (нелинейных явлений, локализованных магнитных структур, квантовых спиновых систем), тем не менее, следовало бы привести более подробное описание и анализ полученных результатов и выявленных свойств с математической точки зрения, в том числе топологии. Так как исторически, исследованные в диссертации нелинейные сигма-модели были одними из первых моделей рассмотрения определенных свойств квантовой теории поля, где значения последней были ограничены многообразием.

2. В главе 4 диссертации аналитическим методом (усреднения лагранжиана) получено выражение для новых бризерных (осциллирующих) решений, описывающие периодические по времени динамические

локализованные структуры. Устойчивость полученных решений показана путем разработки численной модели их эволюции в стационарном, движущемся и взаимодействующих состояниях. При этом не приведены результаты аналитического исследования устойчивости полученных решений.

В то же время заметим, что указанные замечание никоим образом не снижают ценность представленного научного труда и не влияют на оценку полученных результатов.

Таким образом, можно с полной уверенностью утверждать, что диссертационная работа «Математическое моделирование динамических и топологических локализованных решений нелинейных эволюционных уравнений» отвечает всем требованиям, представляемым к докторским диссертациям, а её автор Шокир Фарход, достоин присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент,

доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный,
комплексный и функциональный анализ, профессор,
член-корреспондент Национальной
академии наук Таджикистана

С.А. Исхоков

«11» сентября 2024 г.

Место работы, подразделение, должность: Институт математики им. А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана, отдел теории функций и функционального анализа, заведующий.

Почтовый адрес: 734063, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Айни, 299/4. Телефон: +992918649489. Адрес электронной почты: sulaimon@mail.ru.

Web-сайт организации: <https://www.mitas.tj>

Подпись д.ф.-м.н. С.А. Исхокова удостоверено.

Начальник отдела кадров



М. Маллаева