Министерство образования и науки

Республики Таджикистан

Худжандский государственный университет имени академика Б.Гафурова

УДК 517.5

На правах рукописи

Туйчиев Анваржон Махмуджонович

Решение некоторых экстремальных задач теории приближения в гильбертовых пространствах

6D060101 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени доктора
философии (PhD – доктор по специальности
6D060100 – Математика)

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор К.Тухлиев

Х У Д Ж А Н Д — 2 0 2 3

Оглавление

Обозначения **4**

Введение **5**

Общая характеристика работы **8**

ГЛАВА I. Анализ литературы и формулировка нерешённых задач по теме исследования **14**

§1.1. О наилучшем среднеквадратическом приближении функций суммами Фурье по многочленам Чебышева 14

§1.2. Наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение функций на вещественной оси с весом Чебышева – Эрмита и решения некоторых экстремальных задач 17

ГЛАВА II. Приближения суммами Фурье – Чебышёва и решения некоторых экстремальных задач в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ **21**

§2.1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения 22

§2.2. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ 27

§2.3. О неравенстве типа Джексона – Стечкина для совместных приближений функций и их промежуточных производных посредством усреднённого модуля непрерывности 37

§2.4. Поперечники некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\mu}$ . . 41

§2.5. Решение экстремальной задачи совместных приближений некоторых классов функций 49

§2.6. Об усреднённом значении совместных приближений функций в $L_{2,\mu}^{(2r)}$ 54

ГЛАВА III. Совместное приближение функций и их производных в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита и решения некоторых экстремальных задач **62**

§3.1. Определения и основные свойства полиномов Чебышева – Эрмита. История вопроса 64

§3.2. Совместное приближение функций и их производных в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита 68

§3.3. Применение $\mathscr{K}$-функционалов в теории приближения функций в пространстве $L_{2,\rho}$ 76

§3.4. Обобщение одного результата С.Б.Вакарчука 81

§3.5. Решение одной экстремальной задачи 87

§3.6. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ 90

Обсуждение результатов работы **95**

Выводы **101**

Список литературы **102**

Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел

$\mathcal{P}_n$ — подпространство алгебраических полиномов степени n

$E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{L_{2,\mu}}$ – наилучшее совместное приближение функции $f(x)$ и её последовательность производных $\mathcal{D}^s f$ алгебраическими многочленами степени не более $n-1$

$\Delta_h^m f(x)$ — разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h

$F_h f(x)$ — оператор обобщенного сдвига

$\Omega_m(f;t)_2$ — обобщённый модуль непрерывности m-го порядка в L_2

sup (inf) — точная верхняя (нижняя) грань

$a_k(f),\ b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье

$d_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (по Колмогорову) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$\delta_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (линейный) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (проекционный) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$d^n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (по Гельфанду) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

$b_n(\mathfrak{N}, L_2)$ — n-мерный поперечник (по Бернштейну) множества $\mathfrak{N}$ в L_2

Введение

Актуальность темы исследования. При решении экстремальных задач теории приближения функций в различных банаховых пространствах часто пользуются основной характеристикой гладкости функции – модулем непрерывности. Хорошо известно, что в вопросах разложения функций в ряд Фурье по тригонометрической системе существенную роль играет оператор сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ и определяемые с его помощью обычные модули непрерывности различных порядков (см., например, монографии Н.К.Бари [12], А.Зигмунда [30]). В случае приближений 2π-периодических функций, особенно при решении экстремальных задач, в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ вместо оператора сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ используется оператор Стеклова (см., например, работы В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [3], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [19], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [93]).

В диссертационной работе решены два цикла экстремальных задач теории наилучшего совместного полиномиального приближения функций:

а) требуется найти точное значений верхней грани наилучших полиномиальных совместных приближений функций и их промежуточных производных суммами Фурье – Чебышева и их соответствующими производными в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1]$ с весом Чебышева $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$;

б) найти точные значения наилучших полиномиальных приближений функций и их промежуточных производных конечными суммами Чебышева – Эрмита и их соответствующими производными в весовом гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ с весом Эрмита $\rho(x) = e^{-x^2}$ на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$.

Следует отметить, что в весовом пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1]$ обычные вопросы полиномиальных приближений функций суммами Фурье – Чебышева,

гладкостные характеристики которых определялись классическими модулями непрерывности, рассмотрены в известной монографии П.К.Суетина [64]. Однако в этой монографии нет ни одной точной оценки наилучшего приближения.

Первые точные оценки приближения найдены в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [4], посредством специального обобщённого модуля непрерывности. Полученные в указанных работах результаты были обобщены в работах М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [95], К.Тухлиева и Дж.Х.Бекназарова [73], Дж.Х.Бекназарова [13]. Вопросы совместного приближения функций и их производных суммами Фурье – Чебышева не были рассмотрены в вышеуказанных работах. Поэтому изучение вопросов совместного приближения функций указанными суммами является весьма актуальным. Аналогичным образом, вопросы совместного приближения функций и их производных на всей оси недостаточно изучены, в том смысле, что до появлении работы С.Б.Вакарчука [17] ни одного точного результата в этом направлении не было получено. Исключение составляет недавняя работа М.Ш.Шабозова и А.С.Курайши [83], где впервые рассмотрена задача совместного полиномиального приближения функций и их промежуточных производных в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Поэтому требуется подробное исследование этой экстремальной задачи. Отметим, что сформулированные экстремальные задачи совместных приближений функций досконально изучаются в данной диссертационной работе.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Задача совместного приближения функции и её последовательных производных была в неявном виде сформулирована С.Н.Бернштейном [15], и впервые совместное приближение непрерывной функции и их последовательных производных многочленами Бернштейна и их соответствующими производными исследована И.Н.Хладовским [75]. В этой работе были получены асимптотические оценки

совместных приближений функций конкретными полиномами. Затем задача о наилучшем совместном приближении периодической функции и её производных тригонометрическими полиномами была исследовано А.Л.Гаркави [26], где также были получены асимптотические оценки приближения в равномерной метрике. Полученные в [26] результаты были обобщены А.Ф.Тиманом [70] на случай совместных приближений функций и их производных на всей числовой оси, целыми функциями экспоненциального типа конечной степени. Новые точные результаты, как в вопросе совместных приближений периодических функций, так и в вопросе совместного приближения функций на всей оси для классов функций с ограниченной старшей производной, получены в работах С.Б.Вакарчука [17]. Некоторые из результатов работ [17] обобщены в недавно опубликованных статьях М.Ш.Шабозова и А.С.Курайши [83, 84].

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информатики и вычислительной математики Худжандского государственного университета им. академика Б.Гафурова на 2016-2020 гг. и на 2021-2025 гг. по теме: „Теория приближения функций”.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Цель настоящей диссертационной работы заключается в решении двух экстремальных задач, связанных с нахождением точной верхней грани наилучшего полиномиального приближения функций:

а) в весовом пространстве Фурье – Чебышева $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышева $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1,1]$;

б) в весовом пространстве Чебышева – Эрмита $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ с весовой функцией Эрмита $\rho(x) = e^{-x^2}$ на всей числовой оси $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$.

Задачи исследования. В связи с реализацией поставленной цели требуется решить следующие экстремальные задачи:

- найти точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышева в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найти точные неравенства типа Джексона – Стечкина для совместных приближений функций и их производных посредством усреднённого модуля непрерывности в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найти значение поперечников и применить к задаче нахождения верхних граней совместных приближений некоторых классов функций в $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найти значения верхних граней совместного полиномиального приближения функций и их производных на всей оси в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$;
- найти значение $\mathscr{K}$-функционалов и обобщить результат С.Б.Вакарчука в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$;
- решить экстремальную задачу совместного приближения функций и их производных для классов функций $W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$;

- определить значение n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Объект исследования. Объектом исследования являются различные экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением функций и их производных алгебраическими полиномами, как на конечном отрезке, так и на всей оси в гильбертовых пространствах.

Предмет исследования. Предметом исследования является отыскание точных значений верхних граней наилучшего совместного приближения функций и их промежуточных производных посредством обобщенных модулей непрерывности, определяемые конкретными дифференциальными операторами второго порядка.

Научная новизна исследований. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- найдены точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышева в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина для совместного приближения функций и их производных посредством усреднённых модулей непрерывности в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найдено значение поперечников, и полученный результат применен к задаче нахождения верхних граней совместных приближение некоторых классов функций в $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найдено значение верхних граней совместных полиномиальных приближений функций и их производных на всей оси в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$;

- найдено значение $\mathscr{K}$-функционалов и обобщен результат С.Б.Вакарчука в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$;
- решена экстремальная задача совместных приближений функций и их производных для классов функций $W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$;
- найдены значения n-поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в аналогичных экстремальных задачах теории наилучшего совместного полиномиального приближения функций двух переменных и их частных производных, как в прямоугольных областях, так и во всей плоскости.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о нахождении верхних граней отклонения некоторых классов функций от их частных сумм Фурье – Чебышева в $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- теоремы о нахождении точных неравенств типа Джексона – Стечкина для совместных приближений функций и их производных посредством усреднённых модулей непрерывности в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- теоремы о точных значениях поперечников и их применение к задаче совместного приближения некоторых классов функций в $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- теоремы о значениях верхних граней совместных полиномиальных приближений функций на всей оси в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$;
- теоремы о точных значениях $\mathscr{K}$-функционалов и обобщение одного результата С.Б.Вакарчука в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$;

- теоремы о совместном приближении класса функций $W_{2,\rho}^{(r)}(\omega_m)$ в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$;
- теоремы о точных значениях n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Методы исследования. В работе широко используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций в нормированных пространствах, а также современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания в функциональных пространствах.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа, указанного в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывающим также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе “Научная новизна”, получены автором лично.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры информатики и вычислительной математики Худ-

жандского государственного университета им. Б.Гафурова под руководством профессора К.Тухлиева (Худжанд, 2015 - 2022 гг.);

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016 - 2022 гг.);
- международной научной конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 13 - 14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 25 - 26 декабря 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании научного мировоззрения общества” (Худжанд, 29 - 30 октября 2021 г.);
- международной научно-практической конференции “Прикладные вопросы точных наук” (Россия, г. Армавир, 30 - 31 октября 2021 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий” (г. Душанбе, 28 мая 2021 г.).
- международной научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий” (Узбекистан, г. Бухара, 11 - 12 мая 2022 г.);

- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 25 - 26 июня 2022 г.);
- международной научной конференции “Уфимская осенняя математическая школа - 2022” (Россия, г. Уфа, 28 сентября - 1 октября 2022 г.);
- международной научно-практической конференции “Комплексный анализ и его приложения” (г. Бохтар, 19 ноября 2022 г.);

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 14 научных работах, из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 9 – в трудах международных и республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 115 наименований, занимает 117 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА I. Анализ литературы и формулировка нерешённых задач по теме исследования

В этой главе анализируется совокупность известных результатов по вычислению точных верхних граней наилучших приближений функций:

а) конечными суммами рядя Фурье – Чебышева на классе функций $L^{(r)}_{2,\mu}[-1,1] := L_2(1/\sqrt{1-x^2};[-1,1])$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышева $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$;

б) конечными суммами Чебышева – Эрмита на классе функций $L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R}) := L_2(e^{-x^2},\mathbb{R})$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ на всей оси $\mathbb{R} := (-\infty,+\infty)$ в весом Эрмита $\rho(x) = e^{-x^2}$.

По результатам анализа источников формулируются нерешённые задачи приближения.

§1.1. О наилучшем среднеквадратическом приближении функций суммами Фурье по многочленам Чебышева

Хорошо известно, что если функция $f(x)$ задана на отрезке $[-1,1]$ и ее квадрат интегрируем с весом $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ на этом же отрезке, то определяя коэффициенты Фурье – Чебышева этой функции по формулам

$$c_n(f) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

поставим в соответствие ряд Фурье по многочленам Чебышева первого рода

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)T_k(x). \tag{1.1.1}$$

Как обычно, множества таких функций обозначают $L_{2,\mu}[-1,1]$ или более коротко $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(x) : p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\} -$$

множество алгебраических полиномов степени не более n. Величина

$$E_n(f)_{2,\mu} := \inf \left\{ \|f - p_n\|_{2,\mu} : p_n \in \mathcal{P}_n \right\},$$

где

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\int_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}$$

называется наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f(x)$ множеством $\mathcal{P}_n$ в метрике пространства $L_{2,\mu}$.

В [64, с. 25-26] доказано, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{1.1.2}$$

В работе В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [4], исходя из оператора

$$F_h f(x) = \frac{1}{2} \left[f(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h) + f(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h) \right], \tag{1.1.3}$$

введена конечная разность m-го порядка

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x), \tag{1.1.4}$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k = 1, 2, \ldots, m,\ m \in \mathbb{N}$.

По введённой конечной разности (1.1.4) определен обобщённый модуль непрерывности m-го порядка

$$\Omega_m(f,t)_{2,\mu} = \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{2,\mu} : |h| \le t \right\} \tag{1.1.5}$$

и в терминах (1.1.5) доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^{2r} f)_{2,\mu}, \tag{1.1.6}$$

где $\mathcal{D} := (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка Чебышева.

Проведя более полное исследование по этой проблематике, М.Ш.Шабозов и К.Тухлиев [95] доказали, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{2} \displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m} = 1. \tag{1.1.7}$$

Так как наряду с функцией f все операторные производные вида $\mathcal{D}^s f$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, то имеет смысл найти наилучшее приближение некоторого множества $\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}$, принадлежащего множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, то есть требуется найти точное значение верхней грани

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}\big) := \sup\big\{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}\big\}. \tag{1.1.8}$$

При конкретном выборе множества $\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}$ для решения задачи (1.1.8) потребуется сначала решить следующие, естественно возникающие проблемы:

Задача I. Требуется обобщить неравенство (1.1.6) на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных. Другими словами, найти точное значение величины

$$\sup\left\{\frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} : f \in L_{2,\mu}^{(2r)}\right\}$$

и дать применение полученного результата.

Задача II. Доказать экстремальное равенство (1.1.7) на случай совместного приближения функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ и их промежуточных производных $\mathcal{D}^s f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, $(s = 0, 1, \ldots, r)$, то есть, найти значение верхней грани

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{2} \displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m}.$$

Пользуясь полученным результатом, для классов функций, следующих из решений задачи II, решить экстремальную задачу (1.1.8) и найти точное значение n-поперечников.

§1.2. Наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение функций на вещественной оси с весом Чебышева – Эрмита и решения некоторых экстремальных задач

Пусть $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ — пространство суммируемых с квадратом на вещественной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ и конечной нормой

$$\|f\|_{2,\rho} := \|f\|_{L_{2,\rho}(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Через

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\rho} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\}$$

обозначим наилучшее приближение функций $f \in L_{2,\rho}$ алгебраическими полиномами

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$

из множества полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$ степени $n-1$.

Пусть

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

— ортонормальная система, а

$$\mathscr{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n(n!)\sqrt{\pi}}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

— ортонормированная система многочленов Эрмита [62, с. 114] в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Составим ряд Фурье – Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\mathscr{H}_k(x), \tag{1.2.1}$$

где

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho(x) f(x) \mathscr{H}_k(x) dx.$$

Если обозначить через

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\mathscr{H}_k(x)$$

— частную сумму ряда (1.2.1), то хорошо известно, что

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} = \left\| f - S_{n-1}(f) \right\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{1.2.2}$$

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор обобщённого сдвига следующего вида [24, с. 557], пользуясь которым определим разности высших порядков

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) = f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k \in \mathbb{N}$.

Величину

$$\widetilde{\omega}_m(f;\delta) = \sup\left\{ \left\|\Delta_h^m(f;\cdot)\right\|_{L_{2,\rho}} : 0 < h \le \delta \right\} \tag{1.2.3}$$

будем называть обобщённым модулем непрерывности порядка m функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Обозначим через $D := \dfrac{d^2}{dx^2} - 2x\dfrac{d}{dx}$ — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева – Эрмита, $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathcal{D})$, $r \in \mathbb{N}$ — множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Перечислим известные точные результаты по этой тематике. В.А.Абилов и Ф.В.Абилов [6] доказали, что для любой функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \le \big(\gamma(n)\big)^{-m}(2n)^{-r}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2/n}} t\,\widetilde{\omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\rho}dt\right)^m, \tag{1.2.4}$$

где

$$\gamma(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)^{(n+2)/2},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ k,n \in \mathbb{N},\ n \ge 2$$

причём при каждом фиксированном $n = 2,3,\ldots$ константа в правой части (1.2.4) не может быть уменьшена.

Продолжая исследование в этом направлении, С.Б.Вакарчук [17] доказал, что при любых $n,m,r \in \mathbb{N}$ $(n \ge r)$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le 1$, φ — произвольная

весовая функция, справедливо равенство

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}^p_m(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r+1)/2}\right]\varphi(t)dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.2.5)$$

Следует отметить, что результат В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой (1.2.4) есть частный случай результата С.Б.Вакарчука (1.2.5), когда в (1.2.5) полагают $\varphi(t)=t$, $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$.

Сформулируем следующую задачу:

Задача III. Распространить результат С.Б.Вакарчука: а) на случай $0<p\le\infty$; б) обобщить результат (1.2.5) на случай совместного приближения функций $f(x)$ и всех её промежуточных производных $f^{(s)}(x)$ ($s=1,2,\ldots,r-1$, $r\ge 2$).

ГЛАВА II. Приближения суммами Фурье – Чебышёва и решения некоторых экстремальных задач в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$

При изучении вопроса разложения функций в рядах Фурье – Чебышёва в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ вместо обычного модуля непрерывности используется оператор обобщённого сдвига, с помощью которого определяются обобщённые модули непрерывности m-ых порядков и классы функций, которые характеризуются этими модулями непрерывности. Экстремальная задача отыскания точной оценки скорости сходимости рядов Фурье – Чебышёва на указанных классах функций сводится к исследованию величины, равной точной верхней грани уклонения частных сумм рядов Фурье – Чебышёва на рассматриваемых классах функций.

В этой главе получены неравенства типа Джексона – Стечкина, связывающие величину $E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{L_{2,\mu}}$ – наилучшее совместное приближение функции $f(x)$ алгебраическими многочленами степени не более $n-1$, с усреднённым положительным весом, обобщённым модулем непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}$, определяемого ниже, где $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – заданный дифференциальный оператор второго порядка Чебышева.

§2.1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

В данной главе мы продолжим исследования в этом направлении и докажем точные неравенства типа Джексона – Стечкина для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f с весом $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве

$$L_{2,\mu}[-1,1] := L_2\Big((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1,1]\Big)$$

с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mu(x) f^2(x) dx\right)^{1/2} := \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx\right)^{1/2}.$$

Следуя работе В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [6], в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$ рассмотрим оператор

$$F_h f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h\right) + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h\right)\right], \qquad (2.1.1)$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига,* и введём конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1(f;x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x),$$

$$\Delta_h^m(f;x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f;\cdot);x) = (F_h - E)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где $F_h^0 f(x) \equiv f(x)$, $F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x))$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $m \in \mathbb{N}$ и E – единичный оператор в пространстве L_2. По введёнными конечными разностями определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_m(f;t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{ \|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_{2,\mu}[-1,1]} : \ |h| \le t \Big\}. \tag{2.1.2}$$

Пусть далее

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x), \ k = 1, 2, \ldots \tag{2.1.3}$$

– ортонормированная система многочленов Чебышёва первого рода в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Тогда, как хорошо известно (см., напр., [64, с.91-98]),

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x) \tag{2.1.4}$$

есть ряд Фурье – Чебышёва функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, а

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} \mu(x) f(x)\, T_k(x) dx \tag{2.1.5}$$

– коэффициенты Фурье – Чебышёва. Равенство в (2.1.4) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков определим последовательно, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $(r = 2, 3, \ldots)$. Хорошо известно, что многочлены (2.1.3) удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2) T_k''(x) - x T_k'(x) + k^2 T_k(x) = 0, \tag{2.1.6}$$

а потому из (2.1.6) в силу определения оператора $\mathcal{D}$ сразу следуют равенства

$$\mathcal{D} T_k(x) = -k^2 T_k(x), \ldots, \mathcal{D}^r T_k(x) = (-1)^r k^{2r} T_k(x). \tag{2.1.7}$$

В [6] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, имеющей обобщённые производные $\mathcal{D}^r f$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$, коэффициенты Фурье-Чебышёва (2.1.5) ряда (2.1.4) удовлетворяют соотношениям

$$c_k(f) = (-1)^r\, k^{-2r}\, c_k(\mathcal{D}^r f),\ \ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.8}$$

$$c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f),\ \ k = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.9}$$

где функция $F_h f$ – определена равенством (2.1.1).

Обозначим через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1,1]$ $(r \in \mathbb{Z}_+)$, – множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1,1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\mu}[-1,1]$. Используя соотношения (2.1.7) – (2.1.9) и равенство Парсеваля, из (2.1.4) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ получаем [6]

$$\|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m} k^{4r} c_k^2(f). \tag{2.1.10}$$

В силу (2.1.10), модуль непрерывности (2.1.2) запишем в виде

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f)(1-\cos kh)^{2m} :\ |h| \le t\right\}. \tag{2.1.11}$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ множество алгебраических полиномов степени не более n.

Равенством

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf\Big\{\|f - p_{n-1}\|_{2.\mu} :\ p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\Big\} \tag{2.1.12}$$

обозначим наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ элементами множество $\mathcal{P}_{n-1}$.

П.К.Суетин [64, с.26] доказал, что среди всех элементов $p_n \in \mathcal{P}_{n-1}$ частная

сумма

$$S_{n-1}(f;x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$$

ряда (2.1.4) доставляет минимум величине (2.1.12), причём простые вычисления показывают, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}. \tag{2.1.13}$$

В принятых обозначениях имеет место следующая

Лемма 2.1.1. *Для произвольной $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ справедливо точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le n^{-2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^{2r} f)_{2,\mu}, \tag{2.1.14}$$

которая для функции $f_0(x) = T_n(x)$ обращается в равенство.

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f).$$

Пользуясь равенствами (2.1.8) и (2.1.13) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ при любом $s = 0, 1, \ldots, r$ получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^s f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} k^{-4(r-s)} k^{4r} c_k^2(f) \le n^{-4(r-s)} \sum_{k=n}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f) = n^{-4(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu},$$

откуда сразу следует неравенство (2.1.14). Знак равенства в (2.1.14) реализует

функция $f_0(x) = T_n(x)$, очевидно принадлежащая классу $L^{(2r)}_{2,\mu}[-1,1]$ и для которой

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0) = 1, \quad \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0) = n^{2r}. \tag{2.1.15}$$

Кроме того,

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0) = n^{2s} = n^{-2(r-s)} \cdot n^{2r} = n^{-2(r-s)} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0).$$

Лемма 2.1.1 доказана.

Отметим, что лемма 2.1.1 при $s = 0$ доказана в [3].

Следствие 2.1.1. *В условиях леммы 2.1.1 для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ справедливо равенство*

$$\sup\left\{\frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} : f \in L^{(2r)}_{2,\mu}[-1,1]\right\} = \frac{1}{n^{2(r-s)}}.$$

Условимся, что всюду далее в соотношениях общего характера, ради краткости, вместо $L_{2,\mu}[-1,1]$, $L^{(2r)}_{2,\mu}[-1,1]$, $\|f\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}$ сокращённо будем писать, соответственно $L_{2,\mu}$, $L^{(2r)}_{2,\mu}$, $\|f\|_{2,\mu}$. Отметим, что следствие 2.1.1 при $s = 0$ ранее доказано в диссертации Дж.Х.Бекназарова и в частном виде в работе [95].

§2.2. Точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$

Здесь найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Чебышёва на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Иными словами, в метрике пространства $L_{2,\mu}$ получены точные неравенства, которые связывают наилучшие совместные приближения дифференцируемых функций и их промежуточных производных алгебраическими полиномами с интегралами, содержащими обобщённые модули непрерывности высших порядков производных этих функций. Вычислены точные верхние грани отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}$. Справедлива следующая

Теорема 2.2.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$ $n\geq s$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;h)_{2,\mu}\cdot\sin nh dh\right)^m}=1. \tag{2.2.1}$$

Доказательство. Соотношение (2.2.1) при $s=0$ доказано в работе [73]. Сначала докажем (2.2.1) при $s=0$. С этой целью применяя неравенства Гёльдера для рядов при любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ для произвольной $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$,

из (2.1.13) с учётом равенства (2.1.10) имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\cos kh = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\cos kh =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)\, c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m}|c_k(f)|^{1/m}(1-\cos kh) \le$$

$$\le \left(\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu}\right)^{1-1/(2m)} \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}\left(\frac{k}{n}\right)^{4m} c_k^2(f)\right)^{1/(2m)} =$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1-1/(2m)} \left(\sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m} c_k^2(f)\right)^{1/(2m)} \le$$

$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \left(\sum_{k=n}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}\, k^{4r}\, c_k^2(f)\right)^{1/(2m)} =$$

$$= \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\, \|\Delta_h^m(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu}^{1/m} \le$$

$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\, \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu},$$

или что тоже, имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le$$

$$\le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m}\, \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\cos kh. \qquad (2.2.2)$$

Обе части неравенства (2.2.2) умножим на $\sin nh$ и интегрируя по аргументу h в промежутке $[0, \pi/n]$, получаем

$$\frac{2}{n}\,\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh\, dh +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \int\limits_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh \, dh. \tag{2.2.3}$$

Но так как

$$\int\limits_0^{\pi/n} \sin nh \cos kh \, dh = \begin{cases} 0, & \text{если } k = n, \\ -\dfrac{2n}{k^2 - n^2} \cdot \cos^2\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right), & \text{если } k > n, \end{cases}$$

то второе слагаемое в правой части неравенства (2.2.3) неположительно, а потому из (2.2.3) имеем

$$\frac{2}{n}\,\mathcal{E}_{n-1}^2(f)_{2,\mu} \le \Big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\Big)^{2-1/m} n^{-2r/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh \, dh,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{n-1}^{1/m}(f)_{2,\mu} \le n^{(-2r/m)+1} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh \, dh$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh \, dh \right)^m, \tag{2.2.4}$$

В полученном неравенстве сначала положим $r = 0$, а затем f заменим на $\mathcal{D}^r f$. В итоге будем иметь

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \le \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m.$$

Применив к последнему неравенству леммы 2.1.1, приходим к следующему неравенству:

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f) \le \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \le$$

$$\leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m .$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.2.1)

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \cdot \sin nh dh \right)^m} \leq 1. \tag{2.2.5}$$

Для функции $f_0(x) = T_n(x)$, для которой, кроме равенств (2.1.15), ещё имеет место равенство

$$\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu} = n^{2r/m}(1 - \cos nt),$$

$$\left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu} \cdot \sin nt dt \right)^m = n^{2r}, \tag{2.2.6}$$

запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \cdot \sin nh dh \right)^m} \geq$$

$$\geq \frac{n^{2(r-s)} n^{2s}}{\left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0; h)_{2,\mu} \cdot \sin nh dh \right)^m} = \frac{n^{2r}}{n^{2r}} = 1. \tag{2.2.7}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.5) с оценкой снизу (2.2.7), получаем требуемое равенство (2.2.1), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

Из теоремы 2.2.1 сразу вытекают ряд следствий.

Следствие 2.2.1. *В утверждении теоремы 2.2.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m. \tag{2.2.8}$$

Доказательство. В самом деле, равенство (2.2.1) можно писать в следующем виде:

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m} =$$

$$= \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m} =$$

$$= \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}(2/\pi)^m}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m} = 1,$$

откуда имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\sin nt\,dt\right)^m} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m.$$

В случае $s=0$ (2.2.1) получено в [13], а соотношение (2.2.8) является новым.

Следствие 2.2.2. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *для произвольной функции* $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq n^{2(r-s)}\, \Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu}. \tag{2.2.9}$$

В самом деле, пользуясь тем, что модуль непрерывности $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu}$ не убывает для $t \in (0, \pi/n]$, из (2.2.1) имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq n^{-2(r-s)} \left(\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu} \cdot \frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \sin ntdt \right)^m =$$

$$= n^{-2(r-s)}\, \Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu}.$$

В случае, когда $\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}$ выпукла вверх на отрезке $[0, \pi/n]$, оценка (2.2.9) может быть улучшена. В самом деле, существует линейная функция $\varphi(t) := \varphi(f, t)$ такая, для которой

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}, \quad \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \leq \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{n}.$$

Запишем интеграл в (2.2.1) в следующем виде:

$$\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin ntdt = \int\limits_0^{\pi/n} \left\{ \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} - \varphi(t) \right\} \sin ntdt +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/n} \left\{ \varphi(t) - \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu} \right\} \sin ntdt + \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu} \int\limits_0^{\pi/n} \sin ntdt.$$

Первый интеграл в правой части полученного равенства неположителен, второй, как показывает элементарное вычисление, равен нулю, а потому

$$\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin ntdt \leq$$

$$\leq \Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f;\frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}\int\limits_0^{\pi/n}\sin ntdt=\frac{2}{n}\Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f;\frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}.$$

Подставляя полученную оценку в (2.2.1), приходим к следующему неравенству:

$$E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}\leq n^{-2(r-s)}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^s flh)_{2,\mu}\cdot\sin ntdt\right)^m\leq$$

$$\leq n^{-2(r-s)}\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}\,\Omega_m^{1/m}\left(\mathcal{D}^r f;\frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}\right)^m=$$

$$=n^{-2(r-s)}\,\Omega_m\left(\mathcal{D}^r f;\frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}. \tag{2.2.10}$$

Так как для функции $f_0(x)=T_n(x)$ в силу равенств (2.1.5) и (2.2.6)

$$E_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu}=n^{2s},\quad \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0,t)_{2,\mu}=n^{2r}(1-\cos nt)^m,$$

$$\Omega_m\left(\mathcal{D}^r f_0,\frac{\pi}{2n}\right)=n^{2r}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2n}\right)^m=n^{2r},$$

то мы имеем

$$n^{-2(r-s)}\Omega_m\left(\mathcal{D}^r f_0,\frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}=n^{-2(r-s)}\cdot n^{2r}=n^{2s}=E_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0). \tag{2.2.11}$$

Таким образом, мы пришли к следующему утверждению

Следствие 2.2.3. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$. Если модуль непрерывности $\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}$ выпуклый вверх на отрезке $[0,\pi/n]$, то для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}\leq n^{-2(r-s)}\,\Omega_m\left(\mathcal{D}^r f;\frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}. \tag{2.2.12}$$

В свою очередь, из (2.2.11) вытекает

Следствие 2.2.4. *В условиях следствия 2.2.3 справедливо экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\Omega_m\big(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n)\big)_{2,\mu}} = 1. \tag{2.2.13}$$

Доказательство. Равенство (2.2.13) по существу является точной константой в неравенстве типа Джексона – Стечкина для наилучшего совместного полиномиального приближения функций f и её промежуточных производных $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$, принадлежащих классу функций $L_{2,\mu}^{(2r)}$. То, что все промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$ наравне с функциями f и $\mathcal{D}^r f$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, вытекает из неравенства типа Колмогорова следующего типа:

$$E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le \big(E_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r} \cdot \big(E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\big)^{s/r} \tag{2.2.14}$$

доказанного в работе [95].

Перейдём сейчас к доказательству равенства (2.2.13). Из неравенства (2.2.12), верного для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, сразу вытекает верхняя оценка для величины, расположенной в левой части равенства (2.2.13):

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\Omega_m\big(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n)\big)_{2,\mu}} \le 1. \tag{2.2.15}$$

С другой стороны, пользуясь равенством (2.2.11), полученном для функции $f_0(x) = T_n(x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\Omega_m\big(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n)\big)_{2,\mu}} \ge \frac{n^{2(r-s)}\, E_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu}}{\Omega_m\big(\mathcal{D}^r f_0, \pi/(2n)\big)_{2,\mu}} = \frac{n^{2r}}{n^{2r}} = 1. \tag{2.2.16}$$

Теперь требуемое равенство (2.2.13) следует из сопоставления оценки, сверху (2.2.15) с оценкой снизу (2.2.16), чем и завершаем доказательство следствия 2.2.4.

Пусть $W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ ($r \in \mathbb{Z}_+,\ W^{(0)}L_{2,\mu}(\mathcal{D}) = L_{2,\mu}(\mathcal{D})$) — класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, у которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \le 1$.

Справедлива следующая

Теорема 2.2.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ имеет место равенство*

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} = 1. \tag{2.2.17}$$

Доказательство. В силу определения класса $W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \le \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \le 1,$$

а потому из неравенства типа Колмогорова (2.2.14) для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ следует, что

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le \big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r} \cdot \big(\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\big)^{s/r} \le$$

$$\le \big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r},$$

откуда получаем

$$\frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} \le 1.$$

Переходя к верхней грани по всем функциям $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})$ в последнем неравенстве приходим к следующей оценке сверху:

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_{2,\mu}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} \le 1. \tag{2.2.18}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}}\, T_n(x).$$

Так как

$$\mathcal{D}^r f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}}\, \mathcal{D}^r T_n(x) = \frac{1}{n^{2r}} \cdot (-1)^r n^{2r} T_n(x) = (-1)^r T_n(x)$$

$$\|\mathcal{D}^r f_1\|_{2,\mu} = \|(-1)^r\, T_n(x)\|_{2,\mu} = 1,$$

то функция $f_1 \in W^{(r)} L_{2,\mu}(\mathcal{D})$.

С другой стороны, при всех $s = 0, 1, \ldots, r$

$$\mathcal{D}^s f_1(x) = \frac{(-1)^s}{n^{2(r-s)}}\, T_n(x),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2(r-s)}} \quad (s = 0, 1, \ldots, r),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2r}}.$$

Учитывая эти равенства, запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in W^{(r)} L_{2,\mu}(\mathcal{D})} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} \geq \frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{n-1}(f_1)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} =$$

$$= \frac{n^{-2(r-s)}}{\big(n^{-2r}\big)^{1-s/r}} = \frac{n^{-2(r-s)}}{n^{-2(r-s)}} = 1. \tag{2.2.19}$$

Требуемое равенство (2.2.17) сразу следует из сравнения неравенств (2.2.18) и (2.2.19), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.2.

§2.3. О неравенстве типа Джексона – Стечкина для совместных приближений функций и их промежуточных производных посредством усреднённого модуля непрерывности

Всюду далее в этом параграфе введем обозначение

$$\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} := \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} dh \right)^m . \tag{2.3.1}$$

Сразу отметим, что таким образом введённый усреднённый модуль непрерывности обладает всеми свойствами модуля непрерывности. Так, например,

$$\lim_{t\to 0+} \widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} = \omega_m(\mathcal{D}^r f, 0)_{2,\mu} = 0. \tag{2.3.2}$$

В самом деле, равенство (2.3.2) вытекает из равенства

$$\lim_{t\to 0+} \widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} = \lim_{t\to 0+} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} dh \right)^m =$$

$$= \lim_{t\to 0+} \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} = \Omega_m(\mathcal{D}^r f, 0)_{2,\mu} = 0.$$

Остальные свойства $\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$ проверяются по схеме рассуждений, приведенной в работе [86]. Поэтому имеет смысл изучать неравенства типа Джексона – Стечкина между наилучшими полиномиальными приближениями $\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}$ и усреднённого модуля непрерывности, а также между наилучшими совместными полиномиальными приближениями функций и их производных $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ и $\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}$.

Сначала докажем следующее утверждение.

Теорема 2.3.1. *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любых $t \in [0, \pi/n]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L^{(2r)}_{2,\mu}} \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}} = \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \tag{2.3.3}$$

и, в частности, при $t = \pi/(2n)$ имеет место следующее равенство для точной константы Джексона – Стечкина:

$$\sup_{f \in L^{(2r)}_{2,\mu}} \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m\big(\mathcal{D}^r f, \pi/(2n)\big)_{2,\mu}} = \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \right\}^m . \tag{2.3.4}$$

Доказательство. В работе [13] для произвольной функции $f \in L^{(2r)}_{2,\mu}$ доказано неравенство

$$\mathcal{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{2-1/m} \cdot n^{-2r/m} \cdot \frac{1}{t} \int\limits_0^t \Omega^{1/m}_m(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} dh +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} c^2_k(f)\, \frac{\sin kt}{kt},$$

которое в наших обозначениях приобретает вид

$$\mathcal{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{2-1/m} \cdot n^{-2r/m}\, \widetilde{\omega}^{1/m}_m(\mathcal{D}^r f, h) +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} c^2_k(f)\, \frac{\sin kt}{kt}. \tag{2.3.5}$$

Заметив, что в силу доказанного в [66], равенства

$$\max_{u \ge nt} \left| \frac{\sin u}{u} \right| = \frac{\sin nt}{nt}, \quad 0 < nt < \pi/2, \tag{2.3.6}$$

из неравенства (2.3.5) следует, что

$$\mathcal{E}^2_{n-1}(f)_{2,\mu} \cdot \left\{ \frac{nt - \sin nt}{nt} \right\} \le$$

$$\leq \left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{2-1/m} \cdot n^{-2r/m} \cdot \widetilde{\omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu},$$

откуда

$$\left(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1/m} \cdot \left\{\frac{nt - \sin nt}{nt}\right\} \leq n^{-2r/m} \cdot \widetilde{\omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}.$$

Возведя обе стороны полученного неравенства в степень m, получаем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \cdot \left\{\frac{nt - \sin nt}{nt}\right\}^m \leq n^{-2r}\, \widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu},$$

или что тоже

$$\frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}} \leq \left\{\frac{nt - \sin nt}{nt}\right\}^m.$$

Переходя по всем функциям $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ к верхней грани, получим оценку сверху

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}} \leq \left\{\frac{nt}{nt - \sin nt}\right\}^m \tag{2.3.7}$$

С другой стороны, для функции

$$f_0(x) = T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos nt$$

имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu} \equiv 1, \quad \widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} = n^{2r} \left\{\frac{nt - \sin nt}{nt}\right\}^m. \tag{2.3.8}$$

Учитывая равенства (2.3.8), запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}} \geq \frac{n^{2r}\, \mathcal{E}_{n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f_0, t)_{2,\mu}} =$$

$$= \frac{n^{2r} \cdot 1}{n^{2r} \cdot \left\{\dfrac{nt - \sin nt}{nt}\right\}^m} = \left\{\frac{nt}{nt - \sin nt}\right\}^m. \tag{2.3.9}$$

Теперь требуемое равенство (2.3.3) получаем сопоставлением оценок сверху (2.3.7) и снизу (2.3.9), а равенство (2.3.4) получаем непосредственным вычислением.

Для случая совместного полиномиального приближения функций класса $L_{2,\mu}^{(2r)}$ имеет место следующее утверждение, являющееся одновременно обобщением теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *При любом* $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и любых* $t \in [0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}} = \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m . \tag{2.3.10}$$

Доказательство. В самом деле, если в левой части доказываемого равенства (2.3.10) полагать $\mathcal{D}^s f = g$, то применяя оператор $\mathcal{D}^{r-s}$ к обеим частям этого равенства, будем иметь $\mathcal{D}^{r-s}(\mathcal{D}^s f) = \mathcal{D}^{r-s}\, g$ или, что тоже, $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^{r-s}\, g$. Отсюда в силу равенства включения $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, следует, что $g \in L_{2,\mu}^{2(r-s)}$. Поэтому учитывая равенство (2.3.3), будем иметь

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}} = \sup_{g \in L_{2,\mu}^{(2(r-s))}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(g)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m\big(\mathcal{D}^{2(r-s)} g, t\big)_{2,\mu}}. \tag{2.3.11}$$

Но последнее равенство в силу теоремы 2.3.1 равно правой части равенства (2.3.3):

$$\sup_{g \in L_{2,\mu}^{(2(r-s))}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(g)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m\big(\mathcal{D}^{2(r-s)} g, t\big)_{2,\mu}} = \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m . \tag{2.3.12}$$

Сравнивая равенства (2.3.11) и (2.3.12), получаем требуемое равенство (2.3.10), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.2.

§2.4. Поперечники некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\mu}$

Прежде чем сформулировать результаты этого параграфа, напомним необходимые понятия и определения. Пусть $\mathcal{B}$ – единичный шар в пространстве L_2; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2, $\Lambda_n \subset L_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathcal{L} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, проводящий элементы пространства L_2 в Λ_n; $\mathcal{L}^\perp : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования L_2 на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) := \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon\mathcal{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \mathcal{L}(f)\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^\perp(f)\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками.* Так как L_2 является гильбертовым пространством, справедливы следующие соотношения между перечисленными величинами (см., например, [59, 71]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \le d^n(\mathfrak{M}, L_2) \le d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \qquad (2.4.1)$$

Всюду далее под $\Phi(t)$, $0 \le t < \infty$, понимаем непрерывную монотонно возрастающую функцию, обращающуюся в нуль в точке $t = 0$, $\Phi(0) = 0$. Рассмотрим классы

$$\widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi, \mathcal{D})_{2,\mu} := \left\{ f \in L_{2,\mu}^{(2r)} : \widetilde{\omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \le \Phi(t), \quad t > 0 \right\},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Л.В.Тайков [66] показал, что если выполнены ограничения

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \ge \frac{2}{\pi - 2} \begin{cases} nt - \sin nt, & \text{если } 0 < t \le \pi/n, \\ 2nt - \pi, & \text{если } t \ge \pi/n, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

то справедливы равенства

$$d_{n-1}(\widetilde{W}_1^{(r)}(\Phi), L_2) = n^{-r} \left\{ \frac{n}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^{1/2} \tag{2.4.3}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, где L_2 — обычное гильбертово пространство периодических функций $f \in L_2$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f^2(x) dx \right).$$

Функция $\Phi_*(t) = t^{\pi/(\pi-2)}$ является примером мажоранты, удовлетворяющей условиям (2.4.2).

В данном параграфе обобщим результат (2.4.3) на усреднённое значение модулей непрерывности m-го порядка.

Теорема 2.4.1. *Если мажоранта $\Phi(t)$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \ge \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin nt}{nt}, & \textit{если } 0 < t \le \pi/n, \\ 2 - \dfrac{\pi}{nt}, & \textit{если } t \ge \pi/n, \end{cases} \tag{2.4.4}$$

то для любых натуральных чисел $n, m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место следующие равенства:

$$\lambda_n\big(\widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi, \mathcal{D}); L_{2,\mu}\big) = n^{-2r} \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^m, \tag{2.4.5}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников. Существует мажоранта $\Phi(u)$, для которой ограничения (2.4.4) *выполняются.*

Доказательство. Приводимое ниже доказательство опирается на теорему Ролля. В самом деле, из равенства (2.4.5) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ следует неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \cdot \widetilde{\omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu}. \tag{2.4.6}$$

Полагая в (2.4.6) $t = \pi/(2n)$, имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^m,$$

откуда и следует оценка сверху, если использовать соотношения между n-поперечниками (2.4.1):

$$\lambda_n(\widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi); L_{2,\mu}) \le \mathcal{E}_{n-1}(\widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi))_{L_{2,\mu}} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left\{ \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right\}^m, \tag{2.4.7}$$

где

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\mu} := \sup\big\{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}\big\},$$

$\mathfrak{M}$ — произвольный класс функций из $L_{2,\mu}$.

Для получения оценок снизу вышеперечисленных n-поперечников рассмотрим $(n+1)$-мерный шар

$$B_{n+1} := \left\{ p_n(x) \in \mathcal{P}_{n+1} : \|p_n\| \le n^{-2r} \left(\frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \right)^m \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_m^{(r)}(\Phi)$. Для этого нам понадобится неравенство

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r p_n, u)_{2,\mu} \le n^{2r} (1 - \cos nu)_*^m \cdot \|p_n\|, \tag{2.4.8}$$

вытекающее из неравенства (2.1.11), где

$$(1 - \cos nu)_* := \big\{ 1 - \cos nu, \quad \text{если} \quad 0 < nu \le \pi; \quad 2, \quad \text{если} \quad nu \ge \pi \big\},$$

а $p_n(x)$ — произвольный алгебраический полином из $\mathcal{P}_n$.

Пусть сначала $0 < t \le \pi/n$. Тогда используя определение класса $W_m^{(r)}(\Phi)$, первое неравенство из (2.4.4) и соотношение (2.4.1), для любого полинома $p_n(x) \in B_{n+1}$ получаем

$$\widetilde{\omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r p_n, t)_{2,\mu} :=$$

$$:= \frac{1}{t} \int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r p_n, \tau)_{2,\mu} d\tau \le n^{2r} \|p_n\|_{2,\mu} \cdot \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \cos nu) du \le$$

$$\le n^{2r} \cdot n^{-2r} \cdot \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \frac{nt - \sin nt}{nt} =$$

$$= \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{nt - \sin nt}{nt} \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \le \Phi(t). \tag{2.4.9}$$

Если же $nt \ge \pi$, то используя определение класса и второе неравенство из

условий (2.4.4), получаем

$$\widetilde{\omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, p_n) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r p_n, u)_{2,\mu} du \leq$$

$$\leq n^{2r}\|p_n\|_{2,\mu} \cdot \frac{1}{t}\int\limits_0^t (1-\cos nu)_* du =$$

$$= n^{2r}\cdot n^{-2r}\cdot \frac{\pi}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{t}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos nu)du + \int\limits_{\pi/n}^t 2du\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{1}{t}\left\{\frac{\pi}{n}+2t+\frac{2\pi}{n}\right\} =$$

$$\frac{\pi}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(2-\frac{\pi}{nt}\right) \leq \Phi(t). \tag{2.4.10}$$

Из неравенств (2.4.9) и (2.4.10) сразу следует включение $B_{n+1} \subset \widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi, \mathcal{D})$. Теперь в силу соотношения (2.4.1) между n-поперечниками и определения бернштейновского n-поперечника получаем требуемую оценку снизу

$$\lambda_n(\widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi, \mathcal{D}), L_{2,\mu}) \geq b_n(\widetilde{W}_m^{(r)}(\Phi, \mathcal{D}), L_{2,\mu}) \geq$$

$$\geq b_n(B_{n+1}, L_{2,\mu}) = \frac{1}{n^{2r}}\cdot\left\{\frac{\pi}{\pi-2}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}^m. \tag{2.4.11}$$

Сравнивая между собой оценки (2.4.10) и (2.4.11), получаем соотношение (2.4.5). Теперь докажем существование конкретной мажоранты, для которой выполняются условия (2.4.1). С этой целью введём в рассмотрение функцию

$$\Phi_*(u) := u^\beta, \quad \beta = \frac{2}{\pi-2}, \ 1.45 < \beta < 1.46.$$

Подставляя функцию $\Phi_*(u)$ в условие (2.4.4), получаем

$$\left(\frac{u}{\pi/(2n)}\right)^{\beta} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}\dfrac{nu-\sin nu}{nu}, & \text{если } \ 0<nu\leq\pi,\\[2ex] \dfrac{2nu-\pi}{nu}, & \text{если } \ nu\geq\pi.\end{cases}$$

Полученные неравенства запишем в более удобном виде:

$$\left(\frac{2nu}{\pi}\right)^{\beta} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}1-\dfrac{\sin nu}{nu}, & \text{если } \ 0<nu\leq\pi,\\[2ex] 2-\pi/(nu), & \text{если } \ nu\geq\pi.\end{cases} \tag{2.4.12}$$

Если обозначить $(2nu/\pi)=v$, то неравенство (2.4.12) приобретает следующий вид:

$$v^{\beta} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}1-(2/\pi v)\sin(2/\pi v), & \text{если } 0<v\leq 2,\\[2ex] 2-(2/v), & \text{если } v\geq 2.\end{cases} \tag{2.4.13}$$

Обе части неравенства (2.4.13) умножая на v, запишем

$$v^{\beta+1} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}v-\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi v}{2}, & \text{если } 0<v\leq 2,\\[2ex] 2(v-1), & \text{если } v\geq 2.\end{cases} \tag{2.4.14}$$

Полученные неравенства (2.4.14) ещё надо доказать. Для этого на отрезке $[0,2]$ вводим вспомогательную функцию

$$F(v)=v^{\beta+1}-\frac{\pi}{\pi-2}\big(v-(2/\pi)\sin v(\pi/2)\big).$$

Если теперь мы докажем, что функция $F(v)\geq 0$ при всех $v\in[0,2]$, то первая часть неравенства (2.4.14) будет доказана. Сначала установим этот факт на отрезке $[0,1]$, прибегая к теории малых величин. Очевидно, что при $u\to 0{+}0$

$$F(v)v^{\beta+1}-\frac{\pi}{\pi-2}\left[v-(2/\pi)\left(v(\pi/2)-\frac{1}{3!}\big(v(\pi/2)\big)^3+O(v^5)\right)\right]=$$

$$= v^{\beta+1}\left[1 - \frac{\pi^3}{24(\pi-2)} \cdot O\big(v^{2-\beta}\big)\right],$$

и в силу этого в достаточно малой окрестности нуля функция $F(v) > 0$. Если бы функция $F(v)$ в некоторой точке $\eta \in [0,1]$ поменяла знак, то в силу равенства

$$F(0) = F(1) = 0,$$

мы сделали правильный вывод о том, что производная первого порядка

$$F'(v) = (\beta+1)v^{\beta} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(1 - \cos\frac{\pi v}{2}\right) =$$

$$= (\beta+1)\left[v^{\beta} - 1 + \cos\frac{\pi v}{2}\right]$$

имеет на интервале $(0,1)$ два различных нуля и ещё $F'(0) = F'(1) = 0$, а потому отсюда следует, что производная второго порядка

$$F''(v) = (\beta+1)\left[\beta u^{\beta-1} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi v}{2}\right]$$

на интервале $(0,1)$ имеет не менее трёх нулей, кроме $F''(0) = 0$, так как

$$\beta - 1 = \frac{2}{\pi-2} - 1 = \frac{4-\pi}{\pi-2} > 0.$$

Таким образом, из этих рассуждений следует существование трёх различных нулей на интервале $(0,1)$ третьей производной

$$F'''(u) = (\beta+1)\left[\beta(\beta-1)u^{\beta-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi v}{2}\right],$$

которая представляет собой разность двух функций, одна из которых является выпуклой вниз, а другая – выпуклой вверх. Из геометрических соображений ясно, что функция $F'''(u)$ не может иметь более двух нулей, а потому в случае

$u \in [0,1]$ первое неравенство в (2.4.14) выполняется. Далее, если $u \in (1,2]$, то из равенств $F(1) = F'(1) = 0$ и $F'' > 0$ следует, что при всех $1 < u \leq 2$, $F(u) > 0$ и следовательно, для значений $u \in (1,]$ первое неравенство в (2.4.13) выполняется.

Пусть теперь $u \in (2,+\infty]$. В этом случае, исходя из второго неравенства, в (2.4.13) введём в рассмотрение вспомогательную функцию вида

$$F_1(u) = u^{\beta+1} - \frac{2\pi}{\pi-2}(v-1)$$

и докажем, что при всех $v \in (2,+\infty]$ всегда $F_1(v) > 0$. Поскольку

$$\beta + 1 = \frac{2}{\pi-2} + 1 = \frac{\pi}{\pi-2},$$

то для первой производной функции $F_1(u)$ имеем

$$F_1'(u) = (\beta+1)u^{\beta} - \frac{2\pi}{\pi-2} = (\beta+1)(u^{\beta}-2) > 0.$$

Кроме того, так как

$$F_1(2) = 2^{\beta+1} - \frac{2\pi}{\pi-2} = 2\left(2^{\beta} - \frac{\pi}{\pi-2}\right) > 0,$$

то $F_1(u) > 0$, при любом $u \in (2,+\infty]$. Этим доказано, что второе неравенство в (2.4.13) в области $[+2,\infty)$ всегда выполняется, чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

§2.5. Решение экстремальной задачи совместных приближений некоторых классов функций

Во втором параграфе 2.2 мы установили, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}^2(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{4s}\, c_k^2(f). \tag{2.5.1}$$

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ наравне с функцией f и её производной $\mathcal{D}^r f$ пространству $L_{2,\mu}$ принадлежат также все промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1)$. Поэтому несомненный интерес представляет изучение поведения наилучших совместных приближений $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$ на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_{2,\mu}^{(2r)}$ или на самом классе $L_{2,\mu}^{(2r)}$. Другими словами, требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f) : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\Big\}. \tag{2.5.2}$$

С целью решения экстремальной задачи (2.5.2) введём следующие классы функций.

Пусть $\Phi(t)$ — произвольная непрерывная неубывающая на полуоси $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$, $W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ — класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_{2,\mu}^{(0)} = L_{2,\mu})$, для которых при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \le \pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin\frac{\pi}{h}\, t dt \le \Phi(h).$$

Аналогичным образом, пусть $W^{(r)}_{m,h}(\mathcal{D},\Phi)$ — класс функций $f \in L^{(2r)}_{2,\mu}$, для которых при любых $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \le \pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega^{1/m}_m(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu}d\tau \le \Phi(h).$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 2.5.1. *Пусть $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. Если мажоранта Φ при любых $\mu > 0$ и любом $u \in (0,2\pi]$ удовлетворяет условию*

$$\Phi^2\Big(\frac{u}{\mu}\Big)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos t)_*\cdot\sin\frac{t}{\mu}\,dt \le 2\mu\,\Phi^2(u), \tag{2.5.3}$$

где

$$(1-\cos t)_* := \Big\{1-\cos t,\ \text{если } 0 < t \le \pi;\quad 2,\quad \text{если } t \ge \pi\Big\},$$

то справедливо равенство

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(W^{(r)}_m(\mathcal{D},\Phi))_{2,\mu} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m\cdot\frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot\Phi^m\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.5.4}$$

Доказательство. В самом деле, из (2.2.1) для произвольной функции $f \in L^{(2r)}_{2,\mu}$ получаем

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le \frac{1}{n^{2(r-s)}}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega^{1/m}_m(\mathcal{D}^r f;h)_{2,\mu}\sin nh dh\right)^m.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W^{(r)}_m(\mathcal{D},\Phi)$, запишем оценку сверху

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(W^{(r)}(\mathcal{D},\Phi))_{2,\mu} := \sup\Big\{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f) : f \in W^{(r)}_m(\mathcal{D},\Phi)\Big\} \le$$

$$\le \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^m\cdot\frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot\Phi^m\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.5.5}$$

В [13] доказано, что множество алгебраических полиномов $p_n \in \mathcal{P}_{n+1}$, удовлетворяющих неравенству

$$\|p_n\|_{2,\mu} \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot n^{-2r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

принадлежит классу $W^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, при условии, что функция Φ удовлетворяет ограничению (2.5.3). Исходя из этого, предположим, что мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (2.5.3) и введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) T_n(x) =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x).$$

Так как для этой функции

$$\|f_1\|_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

то функция $f_1 \in W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$. Кроме того,

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s, f_1)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

а потому пользуясь этим равенством, запишем оценку снизу величины, расположенной в левой части равенства (2.5.4):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi))_{2,\mu} \geq \mathcal{E}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.5.6}$$

Сравнивая оценки сверху (2.5.5) с оценками снизу (2.5.6), получаем требуемое равенство (2.5.4), чем и завершаем доказательство теоремы 2.5.1.

Теорема 2.5.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Если мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases} 1-\dfrac{\sin nh}{nh}, & \textit{если } 0<nh\leq\pi, \\ 2-\dfrac{\pi}{nh}, & \textit{если } nh\geq\pi, \end{cases} \tag{2.5.7}$$

то при указанных $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $r, s \in \mathbb{Z}_+$ *имеют места равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi))_{2,\mu} = \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big). \tag{2.5.8}$$

Доказательство. Полагая в равенстве (2.2.1) $h = \pi/(2n)$, запишем оценку сверху для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$:

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s, f)_{2,\mu} \leq \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} dh\right)^m. \tag{2.5.9}$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)$, запишем оценку сверху экстремальной величины, стоящей в левой части равенства (2.5.8)

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi))_{2,\mu} \leq \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big). \tag{2.5.10}$$

С целью получения оценки снизу указанной величины в множестве $\mathcal{P}_n \cap L_{2,\mu}$ вводим в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{2,\mu} \leq \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \subset W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)$. Для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ из равенства (2.1.11) получаем

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r(p_n); t)_{2,\mu} = \sup\left\{\sum_{k=1}^m k^{4r}\, c_k^2(p_n)(1-\cos kh)^{2m} : |h| \leq t\right\} \leq$$

$$\leq n^{4r}(1-\cos nh)_*^{2m} \sum_{k=1}^n c_k^2(p_n) = n^{4r}(1-\cos nh)_*^{2m} \cdot \|p_n\|_{2,\mu}^2 \leq$$

$$\leq \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot (1-\cos nt)_*^{2m} \cdot \Phi^{2m}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big).$$

Отсюда с учётом первого из ограничений (2.5.7), будем иметь

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}dt \leq \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-\cos nt)_* dt =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)\cdot\frac{1}{h}\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos nt)dt + \int\limits_{\pi/n}^h 2dt\right\} =$$

$$= \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)\Big(2-\frac{\pi}{nh}\Big)\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big) \leq \Phi(h),$$

откуда и следует, что шар $S_{n+1} \subset W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)$. Поэтому рассмотрим функцию

$$f_2(x) = \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)T_n(x)$$

для которой

$$\|f_2(x)\| = \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big),$$

которая показывает, что функция $f_1 \in W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi)$. Кроме этого

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathcal{D}^s f_2) = \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big),$$

пользуясь этим, запишем оценку снизу указанной величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Phi))_{2,\mu} \geq \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \Big(\frac{\pi}{\pi-2}\Big)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot\Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big). \qquad (2.5.11)$$

Из сравнений неравенств (2.5.10) и (2.5.11) следует требуемое равенство (2.5.8).

Теорема 2.5.2 доказана.

§2.6. Об усреднённом значении совместных приближений функций в $L_{2,\mu}^{(2r)}$

В работе [95] с целью обобщения точных равенств

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r-m}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\sin nt dt\right)^m} = \frac{1}{2^m},$$

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^{h} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu} dt\right)^m} = \left\{\frac{nh}{nh-\sin nh}\right\}^m$$

введена в рассмотрение следующая экстремальная аппроксимационная характеристика:

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi,h) = \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^{h} \Omega_m^{p}(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\varphi(t) dt\right)^{1/p}},$$

где $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $p\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le\pi$, $\varphi(t)\ge 0$ – суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция. Доказано, что если при всех $t\in[0,h]$ и $p\in[1/(2r),2]$, $r\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$(2rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\ge 0, \tag{2.6.1}$$

то

$$\inf_{n\le k<\infty}\left(k^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(n^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}. \tag{2.6.2}$$

При этом имеет место соотношение

$$\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi,h)=\frac{1}{\left(n^{2rp}\int\limits_0^h(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Здесь рассматривается более общая аппроксимационная характеристика для наилучших совместных приближений $E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$ $(s=0,1,\ldots,r)$, где

$$\mathcal{D}:=(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-x\frac{d}{dx}$$

— дифференциальный оператор второго порядка первого рода Чебышева:

$$\mathcal{A}_{n,m,r,p,s}(\varphi;h)=\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.6.3}$$

Очевидно, что при $s=0$ из характеристики (2.6.3) получаем характеристики $\mathcal{M}_{n,m,r,p}(\varphi,h)$.

Имеет место следующая общая теорема.

Теорема 2.6.1. *Пусть весовая функция $\varphi(t)$, заданная на отрезке $[0,h]$, является неотрицательной и непрерывно дифференцируема. Если при всех $t\in[0,h]$, $1/(2r)<p\le 2$, $r\in\mathbb{N}$ функция $\varphi(t)$ удовлетворяет дифференциальное неравенство*

$$(2rp-1)\varphi(t)-t\varphi'(t)\ge 0, \tag{2.6.4}$$

то выполняется соотношение

$$\inf_{n\le k<\infty}\left(k^{2(r-s)p}\int\limits_0^h(1-\cos kt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}=$$

$$= \left(n^{2(r-s)p} \int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}, \tag{2.6.5}$$

и при этом

$$\mathcal{A}_{n,m,r,p,s}(\varphi, h) = \frac{1}{\left(n^{2rp} \int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \tag{2.6.6}$$

Доказательство этой теоремы фактически повторяет схему рассуждений соответствующих теорем 2.1 и следствия 2.1 работы [[95], с. 295-297], и по этой причины здесь не приводится.

Заметим, что из неравенства типа Колмогорова [11, с. 300]

$$\mathcal{E}_{n-1}\big(\mathcal{D}^s f\big)_{2,\mu} \le \big(\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r} \cdot \big(\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}\big)^{s/r}$$

следует, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ все производные $\mathcal{D}^s f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ имеет смысл найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{N})_{L_{2,\mu}} := \sup \big\{ E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{N} \big\}. \tag{2.6.7}$$

Величина (2.6.3) называется наилучшим совместным приближением функций f и её последовательное (промежуточное) обобщённых производных $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1,\ r \ge 2,\ r \in \mathbb{N})$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Через $W_{m,p,\mu}^{(r)}(\Phi; \varphi, h)$ обозначим множество функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, которые удовлетворяют условия

$$\left(\frac{1}{h} \int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \le \Phi(h),$$

для любых $h \in [0, \pi]$, $1/(2r) < p \leq 2$, $m, r \in \mathbb{N}$ и любой весовой функции φ, удовлетворяющей дифференциальному неравенству (2.6.4), а через $W^{(r)}_{m,p,\mu}(1; \varphi, h)$, аналогичный класс функций, удовлетворяющий условию

$$\left(\int\limits_0^h \Omega^p_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Имеют место следующее утверждение.

Теорема 2.6.2. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_{m,p,\mu}(1; \varphi, h)\big) = \sup\big\{E_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W^{(r)}_{m,p,\mu}(1; \varphi, h)\big\} =$$

$$= \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \tag{2.6.8}$$

Доказательство. В самом деле, из равенства (2.6.6) для любой функции $f \in L^{(r)}_{2,\mu}$ следует неравенство

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \Omega^p_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \tag{2.6.9}$$

Если же в (2.6.9) предполагать функцию $f \in W^{(r)}_{m,p,\mu}(1; \varphi, h)$, то из (2.6.9) сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.6.8):

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_{m,p,\mu}(1; \varphi, h)\big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.6.10}$$

Для получения такой же оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$f_0(x) = \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{T_n(x)}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

где $T_n(x)$ — многочлен n-го порядка. Так как

$$\mathcal{D}^s f_0(x) = \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{(-1)^s\, T_n(x)}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}, \quad s = 1, 2, \ldots, r-1,$$

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0, t)_{2,\mu} = \frac{(1-\cos nt)^m}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0; t)_{2,\mu}\varphi(t)dt\right)^{1/p} = 1, \tag{2.6.11}$$

то из (2.6.11) следует, что функция $f_0 \in W^{(r)}_{m,p,\mu}(1;\varphi,h)$ и поскольку

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \tag{2.6.12}$$

то учитывая равенство (2.6.12), получаем

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_{m,p,\mu}(1;\varphi,h)\big) \geq \mathcal{E}_{n-1}\big(\mathcal{D}^s f_0)\big)_{2,\mu} =$$

$$= \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos nt)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}. \tag{2.6.13}$$

Теперь утверждение теоремы 2.6.2 – равенство (2.6.8) получаем из сравнения неравенств (2.6.10) и (2.6.13) и этим завершаем доказательство.

Теорема 2.6.3. *Если мажоранта* Φ *при любых натуральных* m, n, r, $1/(2r) < p \leq 2$ *и* $h \in \mathfrak{R}_+$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^p(t) \cdot \int\limits_0^\pi (1-\cos t)^{mp} dt \geq \frac{\pi}{nh} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \int\limits_0^{nh} \big(1-\cos t\big)_*^{mp} dt, \tag{2.6.14}$$

то при любом $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,p,h}^{(r)}(\Phi; 1, h)\big) = \frac{\Phi(\pi/n)}{n^{2(r-s)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1-\cos t)^{mp} dt \right\}^{1/p}}. \tag{2.6.15}$$

Доказательство. В самом деле, из равенства (2.6.6) при $h = \pi/n$ и $\varphi(t) = 1$ для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ находим оценку сверху для величины наилучшего совместного приближения:

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{2(r-s)}} \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (1-\cos t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \left(\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt \right)^{1/p}$$

и в силу определения класса функций $W_{m,p,\mu}^{(r)}(\Phi; 1, h)$ отсюда имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,p,h}^{(r)}(\Phi; 1, h)\big) = \sup\left\{ \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s)_{2,\mu} : f \in W_{m,p,h}^{(r)}(\Phi; 1, h) \right\} \leq$$

$$\leq \frac{\Phi(\pi/n)}{n^{2(r-s)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{1/p}}. \tag{2.6.16}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{2r}} \cdot \frac{\Phi(\pi/n)\, T_n(x)}{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{h}(1-\cos nt)^{mp}dt\right)^{1/p}},$$

для которой при всех $s = 0, 1, \ldots, r$

$$\mathcal{D}^s f_1(x) = \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{(-1)^s\, T_n(x)\, \Phi(\pi/n)}{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{h}(1-\cos nt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}},$$

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_1; t)_{2,\mu} = \frac{(1-\cos nt)^m\, \Phi(\pi/n)}{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{h}(1-\cos nt)^{mp}dt\right)^{1/p}},$$

$$\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_1; t)_{2,\mu}dt\right)^{1/p} = \Phi(\pi/n). \tag{2.6.17}$$

Равенство (2.6.17) означает, что функция $f_1(x)$ принадлежит классу $W^{(r)}_{m,p,h}(\Phi; 1, h)$ и так как

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{\Phi(\pi/n)}{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{h}(1-\cos nt)^{mp}dt\right)^{1/p}}, \tag{2.6.18}$$

то пользуясь равенством (2.6.18), получаем нужную оценку снизу

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}_{m,p,h}(\Phi; 1, h)\big) \geq \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} =$$

$$= \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{\Phi(\pi/n)}{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos t)^{mp}dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.6.19)$$

Требуемое равенство (2.6.15) получаем из сопоставление оценки сверху (2.6.16) и оценки снизу (2.6.19). Теорема 2.6.3 доказана.

Основные результаты, приведённые в этой главе, опубликованы в работах [2-A; 4-A; 5-A], а также в тезисах международных и республиканских конференций [7-A; 8-A; 9-A, 10-A; 13-A; 14-A].

ГЛАВА III. Совместное приближение функций и их производных в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита и решения некоторых экстремальных задач

Известно, что в вопросах наилучшего приближения периодических функций тригонометрическими полиномами основную роль играет классический модуль непрерывности различных порядков, базирующихся на операторе сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$. В то же время в вопросах, связанных с приближениями непериодических функций алгебраическими полиномами, аналогичную роль играют операторы обобщенного сдвига и порождающиеся ими обобщённые модули непрерывности. Указанные модули непрерывности широко применяются при решении различных экстремальных задач приближения непериодических функций как одной, так и многих переменных. В данной работе операторы обобщённого сдвига применяются в вопросах среднеквадратичного приближения функций суммами Фурье – Эрмита и даются точные решения экстремальных задач совместных приближений функций и их промежуточных производных на различных классах функций.

Отметим, что различные аспекты приближения функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева – Эрмита ρ в разное время исследовались в работах Рафальсона [60], Фройда [76], Абилова [1], Федорова [77], Алексеева [7], Mhaskar [52], Ditzian и Totik [28] и многих других.

Данная глава продолжает указанную тематику в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ и посвящена получению точных неравенств типа Джексона – Стечкина, а также вычислению точных значений n-поперечников некоторых классов функций.

Следует подчеркнуть, что экстремальные задачи совместного приближения функций и их промежуточных производных впервые начали изучать С.Б.Вакарчук [17], М.Ш.Шабозов и А.С.Курайши [84].

§3.1. Определения и основные свойства полиномов Чебышева – Эрмита. История вопроса

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ — множество натуральных, целых неотрицательных, целых, положительных и действительных чисел.

Многочлены Чебышева – Эрмита ортогональны на всей числовой оси $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < +\infty\}$ с весовой функцией $\rho(x) := e^{-x^2}$ и определяются формулой:

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2}\Big). \tag{3.1.1}$$

Положим $\varphi(x) = e^{-x^2}$. Тогда $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$. Вычисление производной проводит к неравенству

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^n \Big[-2xH_n(x) + H_n'(x) \Big] e^{-x^2}$$

и так как

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\, e^{-x^2}\, H_{n+1}(x),$$

то

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x). \tag{3.1.2}$$

Из формулы (3.1.2) и равенства $H_0(x) = 1$ с помощью метода математической индукции, легко получаем, что $H_n(x)$ есть многочлен степени n вида

$$H_n(x) = 2^n\, x^n + \dots\,. \tag{3.1.3}$$

Для многочленов $H_n(x)$ верны равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, \text{ если } m \neq m; \\ 2^n \sqrt{\pi}\, n!, \text{ если } m = n \end{cases}$$

из которых видно, что многочлены $H_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ образуют на всей оси $\mathbb{R}$ ортогональную систему по весу e^{-x^2}. Действительно, если $m \le n$, то интеграл

$$J_{n,m} := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n)}(x) H_m(x) dx =$$

$$= (-1)^n \varphi^{n-1}(x) H_m(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)}(x) H'_m(x) dx =$$

$$= (-1)^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)}(x) H'_m(x) dx = \ldots = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) H_m^{(n)}(x) dx.$$

Отсюда, если $m < n$, то $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$, а значит интеграл $J_{m,n} = 0$. Если же $m = n$, то имеем

$$J_{n,n} = 2^n n! \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n\, n! \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, ортонормальную систему многочленов Чебышева – Эрмита образуют многочлены

$$J'_{m,n} := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \ne n; \\ 2^n \sqrt{\pi}\, n!, & \text{если } m = n \end{cases}. \tag{3.1.4}$$

Для этих многочленов справедливы равенства

$$\mathscr{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n\,(n!)\sqrt{\pi}}}. \tag{3.1.5}$$

Старший коэффициент многочленов (3.1.5) равен

$$A_n := 2^{n/2} \cdot (n!)^{-1/2} \cdot (\pi)^{-1/4}.$$

Таким образом, ортонормированный многочлен Чебышева – Эрмита в силу (3.1.5) имеет вид

$$\mathscr{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n\,(n!)\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

С другой стороны, в силу равенства (3.1.3) многочлен Чебышева – Эрмита с единичным старшим коэффициентом определяется формулой

$$\widetilde{\mathscr{H}_n}(x) = \frac{1}{2^n} H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot e^{x^2}\left(e^{x^2}\right)^{(n)}. \tag{3.1.6}$$

Хорошо известно [64, с. 173], что все многочлены $H_n(x)$, $\mathscr{H}_n(x)$ и $\widetilde{\mathscr{H}_n}(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$Y'' - 2xY' + 2nY = 0 \tag{3.1.7}$$

поскольку указанные многочлены отличаются только постоянными множителями.

В некоторых вопросах математического анализа, например, приближенного вычисления интеграла на всей оси требуется явный вид многочлена Чебышева-Эрмита вида (см., [64, с. 174]).

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\, n!}{k!(n-2k)!} \cdot (2x)^{n-2k}. \tag{3.1.8}$$

Здесь $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$, причём при чётных $n = 2m$ из (3.1.8) вытекает, что

$$H_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\,(2m!)}{k!(2m-2k)!} \cdot (2x)^{2m-2k}, \tag{3.1.9}$$

а при нечетных $n = 2m + 1$ имеем

$$H_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\,(2m+1)!}{k!(2m+1-2k)!} \cdot (2x)^{2m+1-2k}\,. \tag{3.1.10}$$

С помощью формул (3.1.9) и (3.1.10) нетрудно вычислить значения многочленов Чебышева-Эрмита и их производных в точке $x = 0$:

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \cdot 2^m (2m-1)!!, \quad H_{2m+1}(0) = 0,$$

$$H'_{2m}(0) = 0, \quad H'_{2m+1}(0) = (-1)^m (2m+1)! \cdot 2/(m!).$$

§3.2. Совместное приближение функций и их производных в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита

Пусть $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ — вещественная ось, $L_2(\mathbb{R})$ — пространство измеримых действительных функций, суммируемых на $\mathbb{R}$ с квадратом модуля, $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, $\rho(x) := \exp(-x^2)$ — множество функций f, для которых $\rho^{1/2} \cdot f \in L_2(\mathbb{R})$, то есть

$$\|f\|_{2,\rho} := \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty.$$

Вопросы приближения функций алгебраическими полиномами в среднем на всей оси $\mathbb{R}$ с весом Чебышева – Эрмита в разное время рассматривались в работах С.З.Рафальсона [60], Г.Фройда [76], В.А.Абилова [1], В.М.Фёдорова [77], Д.В.Алексеева [7], H.N.Mashkar [52], Z.Ditzian, V.Totik [28, 29] и многих других. Сразу отметим, что в цитированных работах, нет ни одного точного результата, то есть не решено ни одной экстремальной задачи приближения на всей оси $\mathbb{R}$. В этом параграфе мы в основном продолжим исследование С.Б.Вакарчука [17], впервые решившего экстремальные задачи теории полиномиального приближения в среднем на всей оси, получив точные неравенства типа Джексона – Стечкина, также он вычислил точные значения n-поперечников некоторых классов функций.

Следует также отметить, что впервые точные результаты в прямых теоремах теории приближения функций одной переменной в периодическом случае были получены в работах Н.П.Корнейчука [35–40], Н.И.Черныха [79],

Л.В.Тайкова [66], А.А.Лигуна [46–49], В.А.Юдина [99]. В дальнейшем результаты перечисленных авторов получили развитие в работах А.Г.Бабенко [10], В.И.Иванова и О.И.Смирнова [33], В.В.Арестова и В.Ю.Попова [9], С.Б.Вакарчука [17], М.Ш.Шабозова с учениками [87–95] и многих других.

В этом параграфе мы продолжим указанную тематику и рассмотрим более общую задачу совместного приближения функций и их последовательных производных в среднем на всей числовой оси $\mathbb{R}$ алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита $\rho(x) := \exp(-x^2)$.

Приводим необходимые понятия и определения нужные нам в дальнейшем.

Пусть $\mathscr{P}_n$ — множество алгебраических полиномов вида

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

степени не более n.

Равенством

$$E_n(f)_{2,\rho} := \inf \left\{ \left\| f - p_n \right\|_{2,\rho} : p_n \in \mathscr{P}_n \right\}$$

обозначим величину наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами $p_n(x)$ множества $\mathscr{P}_n$.

Хорошо известно [64, с 190], что произвольную функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ можно разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита $\mathscr{H}_k(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \mathscr{H}_k(x), \tag{3.2.1}$$

где знак равенства в соотношении (3.2.1) понимается в смысле сходимости в

пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$,

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \rho(t) f(t) \mathscr{H}_k(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

— коэффициенты Фурье – Эрмита функции f.

Символом $S_n(f,x)$ обозначим частную сумму n-го порядка ряда Фурье – Эрмита $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$:

$$S_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} c_k(f) \mathscr{H}_k(x).$$

При этом простыми вычислениями легко убедиться, что

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} := \Big\| f - S_{n-1}(f) \Big\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{3.2.2}$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ С.З.Рафальсон [60] ввёл в рассмотрении следующий оператор усреднения:

$$\mathcal{F}_t f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f\Big(x\sqrt{1-t^2} + ty\Big) \cdot e^{-y^2} dy, \tag{3.2.3}$$

где $|t| \le 1$. В частности, в [60] доказано равенство

$$\mathcal{F}_t \mathscr{H}_n(x) = \Big(1 - t^2\Big)^{n/2} \mathscr{H}_n(x),$$

а также доказано, что для любой $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ оператор (3.2.3) разлагается в ряд

$$\mathcal{F}_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \Big(1 - t^2\Big)^{k/2} \mathscr{H}_k(x). \tag{3.2.4}$$

Следуя работам В.А.Абилова [1] и С.Б.Вакарчука [17], как и в классическом случае, построим аналоги конечных разностей первого и высших порядков

$$\Delta_t^1 f(x) := \mathcal{F}_t f(x) - f(x) = (\mathcal{F}_t - \mathbb{E}) f(x), \tag{3.2.5}$$

$$\Delta_t^m f(x) := \Delta_t^1\big(\Delta_t^{m-1} f(x)\big) = \big(\mathcal{F}_t - \mathbb{E}\big)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \mathcal{F}_t^k f(x), \quad m \in \mathbb{N},\ m \geq 2, \tag{3.2.6}$$

где $\mathbb{E}$ — единичный оператор пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}_t^k := \mathcal{F}_t^1(\mathcal{F}_t^{k-1})$, $\mathcal{F}_t^1 := \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t^0 = \mathbb{E}$. Учитывая равенства (3.2.1) и (3.2.4), из (3.2.5) в смысле сходимости в пространстве $L_{2,\rho}$ получаем

$$\Delta_t^1 f(x) := -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\Big(1 - \big(1-t^2\big)^{k/2}\Big)\mathscr{H}_k(x). \tag{3.2.7}$$

Пользуясь равенством (3.2.7), из (3.2.6) методом математической индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_t^m f(x) = (-1)^m \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\Big(1 - \big(1-t^2\big)^{k/2}\Big)^m \mathscr{H}_k(x).$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\big\|\Delta_t^m f(\cdot)\big\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\Big(1 - \big(1-t^2\big)^{k/2}\Big)^{2m}. \tag{3.2.8}$$

Определим обощённый модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ равенством

$$\widetilde{\omega}_m(f,\tau)_{2,\rho} := \sup\Big\{\big\|\Delta_t^m f(\cdot)\big\| : |t| \leq \tau\Big\} =$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\Big(1 - \big(1-\tau^2\big)^{k/2}\Big)^{2m}\right\}^{1/2}, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \tag{3.2.9}$$

Пусть $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_{2,\rho}^{(0)}(\mathbb{R}) \equiv L_{2,\rho}(\mathbb{R})$) — множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Условимся при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ подразумевать, что $f \notin \mathscr{P}_r$, и считать, что $0/0$ есть 0.

В [60] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ имеет место следующее разложение r-й производной $f^{(r)}$ в ряд Фурье – Эрмита:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)\,\sqrt{2^r\,\alpha_{k,r}} \cdot \mathscr{H}_{k-r}(x), \tag{3.2.10}$$

где ради краткости, положено

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1),\ k \geq r,\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \alpha_{k,0} \equiv 1,\ \alpha_{k,1} = k,$$

и знак равенства в (3.2.10) понимается в смысле сходимости в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Исходя из равенств (3.2.2) и (3.2.10), запишем значение величины наилучшего приближения производной $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами $p_{n-r}(x)$ из множества полиномов $\mathscr{P}_{n-r}$:

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} := \inf\left\{\left\|f^{(r)} - p_{n-1}^{(r)}\right\|_{2,\rho} : p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\right\} =$$

$$= \inf\left\{\left\|f^{(r)} - p_{n-r}\right\|_{2,\rho} : p_{n-r-1} \in \mathscr{P}_{n-r-1}\right\} =$$

$$= \left\|f^{(r)} - S_{n-r}(f^{(r)})\right\|_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} 2^r\,\alpha_{k,r}\,c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{3.2.11}$$

Аналогичным образом пользуясь равенством (3.2.10), для модуля непрерывности m-го порядка производной r-го порядка $f^{(r)}$ из (3.2.9) получаем

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)},\tau)_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=r}^{\infty} 2^r\,\alpha_{k,r}\,c_k^2(f)\Big(1 - \big(1-\tau^2\big)^{k/2}\Big)^{2m}\right\}^{1/2}, \tag{3.2.12}$$

где $0 \leq \tau \leq 1$.

Нам далее понадобится следующее утверждение, доказанное в работе [17].

Лемма 3.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$. Тогда справедливо неулучшаемое неравенство*

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho} \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-s}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}\,, \tag{3.2.13}$$

которое для функции $f_0(x) = \mathscr{H}_n(x)$ обращается в равенство.

Имеет место следующая

Теорема 3.2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{-m}. \tag{3.2.14}$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем $n \in \mathbb{N}$, $n > r$, имеем

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{f \in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2^{r-\nu} \cdot \alpha_{n,r}}{\alpha_{n,\nu}}} =$$

$$= \left(1 - e^{-1}\right)^{-m} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^{m}. \tag{3.2.15}$$

Доказательство. В работе [17] доказано, что при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, таких что $n > r \geq \nu$, для наилучшее совместного приближения произвольной функции $f \in L^{(r)}_{2,\rho}$ имеет место следующее неравенство типа Джексона –

Стечкина вида

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \Big(1 - \big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m} \cdot \widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}\,, \tag{3.2.16}$$

которое является точным в том смысле, что для функции $f_0(x) = \mathscr{H} \in L^{(r)}_{2,\rho}$ обращается в равенство.

Следовательно, из (3.2.16) следует, что

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, t\right)_{2,\rho}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}\right\}^{1/2} \cdot \Big(1 - \big(1-t^2\big)^{(n-r)/2}\Big)^{-m}. \tag{3.2.17}$$

Полагая в обеих частях (3.2.17) $t = \sqrt{2/(n-r)}$, будем иметь

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}\right\}^{1/2} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{-m}. \tag{3.2.18}$$

Переходя в равенстве

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2^{r-\nu} \cdot \alpha_{n,r}}{\alpha_{n,\nu}}} =$$

$$= \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{-m}.$$

к верхней грани по всем натуральным числам $n > r$, приходим к равенству (3.2.15), чем и завершаем доказательство теоремы 3.2.1.

Отметим, что из равенства (3.2.14) следует асимптотическое равенство

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} \sim \left(1-e^{-1}\right)^{-m} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}}. \tag{3.2.19}$$

Повторяя ход рассуждений при доказательстве теоремы 3.2.1, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.2.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}} \sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, 1/\sqrt{n-r}\right)_{2,\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2^{r-\nu}\cdot\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,\nu}}} = \frac{1}{\left(1-1/\sqrt{e}\right)^m}. \tag{3.2.20}$$

Из равенства (3.2.20) при $\nu = 0$, $f^{(0)} = f$ вытекает результат С.Б.Вакарчука [17, теорема 1]:

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}} \sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, 1/\sqrt{n-r}\right)_{2,\rho}} = \frac{1}{\left(1-1/\sqrt{e}\right)^m} \tag{3.2.21}$$

откуда при $n \to \infty$ вытекает асимптотическое равенство

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, 1/\sqrt{n-r}\right)_{2,\rho}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} \cdot \frac{1}{\left(1-1/\sqrt{e}\right)^m}. \tag{3.2.22}$$

§3.3. Применение $\mathscr{K}$-функционалов в теории приближения функций в пространстве $L_{2,\rho}$

В теории приближения как функций действительного, так и функций комплексного переменного основная идея заключается в замене произвольной функции сложной природы f достаточно гладкой функцией g. Одна из наиболее эффективных реализаций этой идеи основана на методе $\mathscr{K}$-функционала Петре в теории интерполяционных пространств [16]. В последнее время $\mathscr{K}$-функционалы исследуются при решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций (см., например, [16], [17], [89]).

Следуя работе Z.Ditzian и V.Totika [28], запишем в рассматриваемом нами случае, выражение $\mathscr{K}$-функционала по двум пространством $L_{2,\rho}$ и $L_{2,\rho}^{(m)}$ в следующем виде:

$$\mathscr{K}_m(f,t^m) := \mathscr{K}\left(f;t^m,L_{2,\rho},L_{2,\rho}^{(m)}\right) =$$

$$= \inf\left\{\|f-g\|_{2,\rho} + t^m\|g^{(m)}\|_{2,\rho} : g \in L_{2,\rho}^{(m)}\right\}, \tag{3.3.1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$. Известно [29], что $\mathscr{K}$-функционал (3.3.1) и модуль непрерывности m-го порядка (3.2.9) должны быть слабо эквивалентными, то есть существуют абсолютные константы c_1 и c_2, такие, что

$$c_1\,\widetilde{\omega}_m(f,t)_{2,\rho} \le \mathscr{K}_m(f,t^m)_{2,\rho} \le c_2\,\widetilde{\omega}_m(f,t)_{2,\rho} \quad 0 < t \le 1. \tag{3.3.2}$$

С нашей точки зрения, определённый интерес представляет задача нахождения точных значений экстремальных характеристик, подобных левой части (3.2.14), где вместо модуля непрерывности m-го порядка (3.2.12) фигурирует

$\mathscr{K}$-функционал (3.3.1) вида $\mathscr{K}(f^{(r)}, t^m)_{2,\rho}$. Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 3.3.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r + m$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^{r-\nu}\, \alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu}} \cdot E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \dfrac{1}{\sqrt{2^m\, \alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} = 1. \tag{3.3.3}$$

Доказательство. В случай $\nu = 0$ С.Б.Вакарчуком [17] доказано равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^{r}\, \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \dfrac{1}{\sqrt{2^m\, \alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} = 1. \tag{3.3.4}$$

Из равенства (3.3.4) следует, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ имеет место следующее неравенство:

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r\, \alpha_{n,r}}} \cdot \mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m\, \alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}. \tag{3.3.5}$$

Сначала в неравенстве полагаем $r = 0$, $f^{(0)} \equiv f$. Тогда, имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \mathscr{K}_m\left(f; \frac{1}{\sqrt{2^m\, \alpha_{n,m}}}\right)_{2,\rho}.$$

Если в полученном неравенстве n заменить на $n - r$ и функцию f на производной $f^{(r)}$, то будем иметь

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq \mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m\, \alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}. \tag{3.3.6}$$

Применив неравенство (3.2.13) вида

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho} \leq \sqrt{\frac{\alpha_{n,\nu}}{2^{r-\nu}\, \alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}\,, \tag{3.3.7}$$

из леммы 3.2.1 к неравенству (3.3.6) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho} \le \sqrt{\frac{\alpha_{n,\nu}}{2^{r-\nu}\,\alpha_{n,r}}} \cdot \mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}, \tag{3.3.8}$$

где $n > r \ge \nu$ и $n \ge r+m$. Поскольку (3.3.8) верно для любой функции $f \in L^{(r)}_{2,\rho}$, то из него следует оценка сверху экстремальной величины расположенной в левой части равенства (3.3.3)

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}} \frac{\sqrt{2^{r-\nu}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu}} \cdot E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \dfrac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} \le 1. \tag{3.3.9}$$

С целью получения оценки снизу воспользуемся неравенством, доказанном С.Б.Вакарчуком [16]:

$$\mathscr{K}_m(p_n; t^m)_{2,\rho} \le \min\left\{\|p_n\|_{2,\rho} : t^m\|p_n^{(m)}\|_{2,\rho}\right\}, \tag{3.3.10}$$

где p_n — произвольный многочлен n-й степени из $\mathscr{P}_n$.

Поскольку для функции $f_0(x) := \mathscr{H}_n(x)$,

$$f_0^{(\nu)}(x) := \sqrt{2^\nu \cdot \alpha_{n,r}} \cdot \mathscr{H}_{n-\nu}(x), \quad E_{n-\nu-1}(f_0^{(\nu)})_{2,\rho} = \sqrt{2^\nu \cdot \alpha_{n,\nu}},$$

$$f_0^{(r+m)}(x) := \sqrt{2^{r+m} \cdot \alpha_{n,r+m}} \cdot \mathscr{H}_{n-r-m}(x),$$

то в силу неравенства (3.3.10) и ортонормированности полиномов Эрмита на $\mathbb{R}$ с весом $\rho(x) = \exp(-x^2)$ запишем

$$\mathscr{K}_m\left(f_0^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho} \le \frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}} \cdot \left\|f_0^{(r+m)}\right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}} \cdot \sqrt{2^{r+m} \cdot \alpha_{n,r+m}}\,. \tag{3.3.11}$$

Но так как

$$\alpha_{n,r+m} := n(n-1)\cdots\big[n-(r+m)+1\big] =$$

$$= \underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\,\underbrace{(n-r)(n-r-1)\cdots\big[(n-r)-m+1\big]} =$$

$$= \alpha_{n,r}\cdot\alpha_{n-r,m}, \tag{3.3.12}$$

подставляя равенство (3.3.12), в правой части неравенства (3.3.11) получаем

$$\mathscr{K}_m\left(f_0^{(r)};\frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\cdot\sqrt{2^{r+m}\cdot\alpha_{n,r}\cdot\alpha_{n-r,m}} = \sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}\,. \tag{3.3.13}$$

Используя неравенство (3.3.13), имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{\sqrt{2^{r-\nu}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu}}\cdot E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)};\dfrac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} \ge$$

$$\ge \frac{\sqrt{2^{r-\nu}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu}}\cdot E_{n-\nu-1}(f_0^{(\nu)})_{2,\rho}}{\mathscr{K}_m\left(f_0^{(r)};\dfrac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^{r-\nu}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu}}\cdot\sqrt{2^{\nu}\cdot\alpha_{n,\nu}}}{\mathscr{K}_m\left(f_0^{(r)};\dfrac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^{r}\cdot\alpha_{n,r}}}{\mathscr{K}_m\left(f_0^{(r)};\dfrac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} \ge 1\,. \tag{3.3.14}$$

Так как функция $f_0(x)\in L_{2,\rho}^{(r)}$ и $f_0\notin\mathscr{P}_n$, то из сопоставлений неравенств (3.3.9)

и (3.3.14) получаем требуемое равенство (3.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 3.3.1.

В завершении этого параграфа отметим, что из утверждений теорем 3.2.2 и 3.3.1 вытекает, что при любом фиксированном $r \in \mathbb{Z}_+$ и $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n-r}}\right)_{2,\rho} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{-m} \simeq \mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}. \qquad (3.3.15)$$

Из соотношения (3.3.15) следует, что существуют абсолютные константы c_1 и c_2 такие, что

$$c_1\,\omega_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \le \mathscr{K}_m(f^{(r)}, t^m)_{2,\rho} \le c_2\,\omega_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho}\,.$$

§3.4. Обобщение одного результата С.Б.Вакарчука

Всюду далее условимся под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, не эквивалентную нулю на этом же отрезке.

С.Б.Вакарчук [17] доказал следующую теорему.

Теорема 3.4.1. *(С.Б.Вакарчук, [17, с. 671]). Пусть $n,m,r\in\mathbb{N}$, $n\geq r$, $0<p\leq 2$, $h\in(0,1]$, φ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})}\frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h\widetilde{\omega}^p_m(f^{(r)};t)_{2,\rho}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h\left[1-\left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{3.4.1}$$

Заметим, что доказательство теоремы 3.4.1 основано на упрощённом варианте неравенства Минковского, приведенного в монографии А.Пинкуса [59, с. 104] следующего вида:

$$\left\{\int\limits_0^h\left(\sum_{k=l}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)dt\right\}^{1/p}\geq\left\{\sum_{k=l}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p\right)^{2/p}dt\right\}^{1/2}, \tag{3.4.2}$$

где $0<p\leq 2$ и $h\in\mathbb{R}_+$.

В силу того, что неравенство (3.4.2), верно только для значении $0<p\leq 2$, то этим путём далее для значений $p\geq 2$ нельзя обобщать теорему 3.4.1 для всех значений $0<p\leq\infty$. Мы здесь приводим обобщение теоремы 3.4.1 для

всех значений $0 < p \le \infty$ простым методом сразу и для всех $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$.

Сформулируем и докажем обобщение теоремы 3.4.1.

Теорема 3.4.2. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \ge r$, $0 < p \le \infty$, $h \in (0, 1]$, q — весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^r\, \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}; \tau)_{2,\rho}\, q(\tau) d\tau \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1 - \left(1 - \tau^2\right)^{(n-r)/2} \right]^{mp} q(\tau) d\tau \right)^{1/p}}. \tag{3.4.3}$$

Доказательство. В предыдущем параграфе 2.2 (формула (3.2.12)) мы доказали, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ обобщённый модуль непрерывности m-го порядка производной r-го порядка определяется формулой

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)}; \tau)_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=r}^{\infty} 2^r\, \alpha_{k,r}\, c_k^2(f) \left[1 - \left(1 - \tau^2\right)^{(k-r)/2} \right]^{2m} \right\}^{1/2}. \tag{3.4.4}$$

Очевидно, что при любом $\tau \in (0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, и $r \in \mathbb{Z}_+$ при любом $k \ge n > r$ выполняются равенства

$$\min_{k \ge n} \left[1 - \left(1 - \tau^2\right)^{(k-r)/2} \right]^{2m} = \left[1 - \left(1 - \tau^2\right)^{(n-r)/2} \right]^{2m},$$

$$\min \left\{ \alpha_{k,n} : k \ge n \right\} = \alpha_{n,r},$$

а потому с учётом этих равенств из (3.4.4) получаем

$$\widetilde{\omega}_m^2(f^{(r)}; \tau)_{2,\rho} = \sum_{k=r}^{\infty} 2^r\, \alpha_{k,r}\, c_k^2(f) \left[1 - \left(1 - \tau^2\right)^{(k-r)/2} \right]^{2m} \ge$$

$$\geq \sum_{k=n}^{\infty} 2^r\, \alpha_{k,r}\, c_k^2(f) \Big[1 - \big(1-\tau^2\big)^{(k-r)/2}\Big]^{2m} \geq$$

$$\geq 2^r \big[\min_{k\geq n} \alpha_{k,r}\big] \cdot \min_{k\geq n} \Big[1 - \big(1-\tau^2\big)^{(k-r)/2}\Big]^{2m} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) =$$

$$= 2^r \cdot \alpha_{n,r} \cdot \Big[1 - \big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{2m} \cdot E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\,,$$

откуда

$$\widetilde{\omega}_m(f^{(r)};\tau)_{2,\rho} \geq \sqrt{2^r\, \alpha_{n,r}} \cdot \Big[1 - \big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{m} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}\,. \tag{3.4.5}$$

Обе стороны неравенства (3.4.5) возведём в степень p $(0 < p \leq \infty)$ и умножим на весовую функцию $q(t)$, затем полученное вновь неравенство вида

$$\widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)};\tau)_{2,\rho} \geq \big(\sqrt{2^r\, \alpha_{n,r}}\,\big)^p \cdot \Big[1 - \big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp} \cdot E_{n-1}^p(f)_{2,\rho}\,,$$

интегрируем по отрезку $[0,h]$ и результат возведём в степени $1/p$. В итоге приходим к следующему неравенству:

$$\left(\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)};\tau)_{2,\rho}\, q(\tau) d\tau\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \sqrt{2^r\, \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho} \left(\int_0^h \Big[1 - \big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp} d\tau\right)^{1/p}. \tag{3.4.6}$$

Неравенство (3.4.6) справедливо для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, а потому из (3.4.6) вытекает оценка сверху для экстремальной характеристики, расположенной в левой части равенства (3.4.3):

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^r\, \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)};\tau)_{2,\rho}\, q(\tau) d\tau\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} q(\tau)d\tau\right)^{1/p}}. \tag{3.4.7}$$

Соответствующую оценку снизу указанной экстремальной характеристики получаем для функции $g_0(\tau) := \mathscr{H}_n(\tau) \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$, для которой в силу равенств (3.2.2) и (3.4.4)

$$E_{n-1}(g_0)_{2,\rho} = 1, \qquad \widetilde{\omega}_m(g_0^{(r)};\tau)_{2,\rho} = \sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\Big[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\Big]^m. \tag{3.4.8}$$

Пользуясь равенствами (3.4.8), запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}^p_m(f^{(r)};\tau)_{2,\rho}\, q(\tau)d\tau\right)^{1/p}} \geq \frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(g_0)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\omega}^p_m(g_0^{(r)};\tau)_{2,\rho}\, q(\tau)d\tau\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} q(\tau)d\tau\right)^{1/p}}. \tag{3.4.9}$$

Из сравнений оценки сверху (3.4.7) с оценкой снизу (3.4.9) получаем требуемое равенство (3.4.3). Теорема 3.4.2 доказана.

Заметим, что из доказанной теоремы 3.4.2, в частности, вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.4.2. Тогда, при весовой функции* $q_*(t) := (n-r)\tau(1-\tau^2)^{(n-r)/2-1}$, $n-r>2$, $\tau\in[0,h]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^h \widetilde{\omega}^p_m(f^{(r)};\tau)_{2,\rho}\,\tau\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2-1}d\tau\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{\Big[1-\big(1-h^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \qquad (3.4.10)$$

В свою очередь, из (3.4.10), *при* $p=1/m$, $m\in\mathbb{N}$ *и* $h=\sqrt{2/(n-r)}$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *следует равенство*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})} \frac{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \widetilde{\omega}^{1/m}_m(f^{(r)};\tau)_{2,\rho}\,\tau\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2-1}d\tau\right)^{m}} =$$

$$= \left\{\frac{2}{\left[1-\left(1-\dfrac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^2}\right\}^m \sim \Big\{2(1-e^{-1})^{-1}\Big\}^m,\ n\to\infty. \qquad (3.4.11)$$

Доказательство. Равенство (3.4.10) вытекает из следующего соотношения:

$$\int\limits_0^h \Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp} q_*(\tau)d\tau =$$

$$= (n-r)\int\limits_0^h \Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp}\cdot\tau\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2-1}d\tau =$$

$$= \int\limits_0^h \Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp}\cdot d\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big] =$$

$$= \frac{\left[1-\left(1-h^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}{mp+1}.$$

Отсюда, имеем

$$\left\{\int\limits_0^h \left[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} q_*(\tau)d\tau\right\}^{-1/p} =$$

$$= \left\{\frac{\left[1-\left(1-h^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}{mp+1}\right\}^{-1/p}. \qquad (3.4.12)$$

Полагая в (3.4.12) $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $h = \sqrt{2/(n-r)}$, получаем

$$\left\{(n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \left[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} \cdot \tau\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2-1} d\tau\right\}^{-1/p} =$$

$$= \left\{\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \left[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} \cdot d\left[1-\left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]\right\}^{-m} =$$

$$= \left\{\frac{2}{\left[1-\left(1-\dfrac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^2}\right\}^m \sim \left\{2(1-e^{-1})^{-1}\right\}^m, \quad n \to \infty,$$

откуда и вытекает утверждение следствие 3.4.1.

§3.5. Решение одной экстремальной задачи

В работе [17] доказано, что для функции $f \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$ $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$ все её промежуточные производные $f^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots, r-1$, также принадлежат пространству $L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$, а потому определённый интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-1}(f^{(\nu)})$ на каком-нибудь классе $\mathfrak{M}^{(r)} \subseteq L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$ или на самом классе $L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Пусть $W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$ — класс функций $f \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$ r-я производная которых, удовлетворяет условию $\widetilde{\omega}_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \leq 1$.

Требуется найти величину совместного приближения класса функций $W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$, то есть найти

$$\mathcal{E}^{(\nu)}_{n-\nu-1}\big(W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\big) := \sup\Big\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho} : f \in W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\Big\}. \tag{3.5.1}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 3.5.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{E}^{(\nu)}_{n-\nu-1}\big(W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\big) = \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m}. \tag{3.5.2}$$

Доказательство. Из равенства (3.2.14) для произвольной функции $f \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$ при любом $\nu = \overline{0, r}$ вытекает равенство

$$E_{n-\nu-1}\big(f^{(\nu)}\big)_{2,\rho} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m} \widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}; \sqrt{\frac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}. \tag{3.5.3}$$

Если теперь предполагать, что функция $f \in L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R}) \cap W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$, то из неравенства (3.5.3) сразу получаем

$$\sup\left\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho} : f \in W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\right\} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m},$$

или что то же

$$\mathcal{E}^{(\nu)}_{n-\nu-1}\big(W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\big) \leq \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m}. \qquad (3.5.4)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$g_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m} H_n(x),$$

для которой при всех $\nu = 0, 1, \ldots, r$ имеем

$$g_1^{(\nu)}(x) = \sqrt{\frac{\alpha_{n,\nu}}{2^{r-\nu} \cdot \alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m} H_{n-\nu}(x),$$

$$E_{n-\nu-1}\big(g_1^{(\nu)}(x)\big)_{2,\rho} = \sqrt{\frac{\alpha_{n,\nu}}{2^{r-\nu} \cdot \alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m},$$

и так как

$$g_1^{(r)}(x) = \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m} H_{n-r}(x),$$

то в силу равенство (3.2.12) имеем

$$\widetilde{\omega}_m\left(g_1^{(r)}; \sqrt{\frac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho} =$$

$$= \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{m} = 1,$$

а потому функция $g_1 \in W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$.

Следовательно,

$$\mathcal{E}^{(\nu)}_{n-\nu-1}\big(W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\big) \geq E_{n-\nu-1}\big(g^{(\nu)}_1(x)\big)_{2,\rho} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m}. \qquad (3.5.5)$$

Требуемое равенство (3.5.2) получаем из сравнения неравенств (3.5.4) и (3.5.5), чем и завершаем доказательство теоремы 3.5.1.

Замечание. В силу того, что при любом фиксированном $r \in \mathbb{Z}_+$ и любом $n \in \mathbb{N}$, таком, что $n > r \geq \nu$ при $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\left[1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-m} \simeq (1 - e^{-1})^{-m}, \text{ при } n \to \infty,$$

то из результата теоремы 3.5.1 следует, что

$$\mathcal{E}^{(\nu)}_{n-\nu-1}\big(W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)\big) \simeq (1 - e^{-1})^{-m} \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} =$$

$$= \frac{(1 - e^{-1})^{-m}}{2^{(r-\nu)/2}} \cdot \frac{1}{\Big\{(n-\nu)(n-\nu-1)\cdots(n-r+1)\Big\}^{1/2}}.$$

§3.6. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L^{(r)}_{2,\rho}(\mathbb{R})$

Теорема 3.4.2, доказанная нами в параграфе 3.4, позволяет найти точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Для изложения полученных далее результатов приводим определения ряда n-поперечников множеств.

Пусть $\mathscr{B} := \{f : \|f\|_{2,\rho} \leq 1\}$ — единичный шар в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$; Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$; $\Lambda_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\rho}(\mathbb{R}) \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(Q, L_{2,\rho}(\mathbb{R})) := \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon\mathscr{B} \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\},$$

$$d_n(Q, L_{2,\rho}(\mathbb{R})) := \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_{2,\rho} : g \in \Lambda_n\right\} : f \in Q\right\} \Lambda_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\},$$

$$\delta_n(Q, L_{2,\rho}(\mathbb{R})) :=$$

$$= \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\|_{2,\rho} : f \in Q\right\} : \mathscr{L}L_{2,\rho} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\},$$

$$d^n(Q, L_{2,\rho}(\mathbb{R})) := \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\rho} : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\},$$

$$\Pi_n(Q, L_{2,\rho}(\mathbb{R})) :=$$

$$:= \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\|_{2,\rho} : f \in Q\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\rho} \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}(\mathbb{R})\right\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционными n-поперечниками* множество Q в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Так как $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ является гильбертовым пространством, то имеют

место следующие соотношения между перечисленными величинами:

$$b_n(Q, L_{2,\rho}) \le d^n(Q, L_{2,\rho}) \le d_n(Q, L_{2,\rho}) = \delta_n(Q, L_{2,\rho}) = \Pi_n(Q, L_{2,\rho}). \qquad (3.6.1)$$

Вычислению в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ точных значении различных n-поперечников классов дифференцируемых функций, определённых при помощи обобщённого модуля непрерывности m-го порядка (3.4.4), посвящены работы С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [20], К.Тухлиева и А.М.Маликова [74], А.М.Маликова [50, 51] и других (см., например, литературу в цитированных работах).

Рассмотрим следующий класс функций: пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $h \in (0, 1]$, q — весовая на $[0, h]$ функция, $0 < p \le \infty$. Символом $W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m; q, h)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(f^{(r)}, \tau)_{2,\rho} q(\tau) d\tau \le \int\limits_0^h q(\tau) d\tau.$$

Для множества $Q \in L_{2,\rho}$ положим

$$E_{n-1}(Q)_{2,\rho} := \sup \Big\{ E_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in Q \Big\}.$$

В принятых обозначениях имеет место следующая

Теорема 3.6.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 1]$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_n\Big(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m; q, h), L_{2,\rho}\Big) = E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m; q, h)\Big)_{2,\rho} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \frac{\int\limits_0^h q(t)dt}{\int\limits_0^h \left[1 - \left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} q(t)dt} \right\}^{1/p}, \qquad (3.6.2)$$

где $\lambda_k(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных k-поперечников.

Доказательство. В самом деле, из неравенства (3.4.7), соотношения (3.6.1) между n-поперечниками и определения класса $W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m; q, h)$ получаем оценку сверху

$$\lambda_n\Big(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m; q, h), L_{2,\rho}\Big) \le E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m; q, h)\Big)_{2,\rho} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \frac{\int\limits_0^h q(t)dt}{\int\limits_0^h \left[1 - \left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} q(t)dt} \right\}^{1/p}. \qquad (3.6.3)$$

Для получения аналогичной оценки снизу на множестве $\mathscr{P}_n \cap L_{2,\rho}$ введём в рассмотрение шар

$$\mathscr{B}_{n+1} :=$$

$$:= \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \|p_n\|_{2,\rho} \le \frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \frac{\int\limits_0^h q(t)dt}{\int\limits_0^h \left[1 - \left(1-\tau^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp} q(t)dt} \right\}^{1/p} \right\}.$$

Учитывая формулу (3.4.4) для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{P}_n$, такого, что $n > r$, получаем

$$\widetilde{\omega}_m(p_n^{(r)};\tau)_{2,\rho} = \sum_{k=r}^{n} 2^r\,\alpha_{k,r}\,c_k^2(p_n)\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(k-r)/2}\Big]^{2m} \le$$

$$\le 2^r\cdot\alpha_{n,r}\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{2m}\cdot\sum_{k=r}^{n} c_k^2(p_n) \le$$

$$\le 2^r\cdot\alpha_{n,r}\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{2m}\cdot\|p_n\|_{2,\rho}^2\,.$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\omega}_m(p_n^{(r)};\tau)_{2,\rho} \le \sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}\cdot\|p_n\|_{2,\rho}\cdot\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{m}.$$

Возведя обе стороны полученного неравенства в степень p $(0<p\le\infty)$, затем умножив на вес q и проинтегрировав по промежутке $[0,h]$, имеем

$$\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(p_n^{(r)};\tau)_{2,\rho}\,q(t)dt \le$$

$$\le\Big(\sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}\Big)^p\cdot\big\|p_n\big\|_{2,\rho}^p\cdot\int\limits_0^h\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp}q(t)dt. \qquad (3.6.4)$$

Если теперь воспользоваться тем, что $p_n\in\mathscr{B}_{n+1}$, то из (3.6.5) получаем, что

$$\int\limits_0^h \widetilde{\omega}_m^p(p_n^{(r)};\tau)_{2,\rho}\,q(t)dt \le$$

$$\le\frac{\Big(\sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}\Big)^p\int\limits_0^h\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp}q(t)dt}{\Big(\sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}\Big)^p\int\limits_0^h\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp}q(t)dt}\cdot\int\limits_0^h q(t)dt=\int\limits_0^h q(t)dt.$$

Полученное неравенство означает, что шар $\mathscr{B}_{n+1}$ принадлежит классу $W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m;q,h)$. Следовательно, используя определения бернштейновского n-

поперечника и соотношения (3.6.1), запишем оценки снизу всех аппроксимационных величин

$$\lambda_n\Big(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m;q,h),L_{2,\rho}\Big)\geq b_n\Big(W_p^{(r)}(\widetilde{\omega}_m;q,h),L_{2,\rho}\Big)\geq b_n(\mathscr{B}_{n+1},L_{2,\rho})\geq$$

$$\geq\frac{1}{\sqrt{2^r\,\alpha_{n,r}}}\cdot\left\{\frac{\int\limits_0^h q(t)dt}{\int\limits_0^h\Big[1-\big(1-\tau^2\big)^{(n-r)/2}\Big]^{mp}q(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (3.6.5)$$

Требуемые равенства (3.6.2) получаем путём сопоставления оценок сверху (3.6.3) с оценкой снизу (3.6.5), чем и завершаем доказательство теоремы 3.6.1.

Основные результаты, приведённые в этой главе, опубликованы в работах [1-A; 3-A;], а также в тезисах международных конференций [6-A; 11-A; 12-A].

Обсуждение результатов работы

Приближение функций на конечном отрезке суммами Фурье – Чебышева в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}$ в силу специфики этого пространства является наиболее важным в задачах численного анализа и уравнения математической физики. При этом в качестве структурной характеристики гладкости функции вместо обычного модуля непрерывности используется обобщённый модуль непрерывности, который порождается обобщённым оператором сдвига. Этим вопросам, как мы ранее отмечали, были посвящены ряд работ В.А.Абилова и Ф.В.Абилова [4], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [95], К.Тухлиева и Дж.Бекназарова [73] и других.

В первой главе диссертации результаты перечисленных авторов обобщаются на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных частными суммами Фурье и их соответствующими производными. Так, например, в основной лемме 2.1.1 доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ при всех $s = 0, 1, 2, \ldots, r$ имеет место точное неравенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq n^{-2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^{2r} f)_{2,\mu},$$

где

$$\mathcal{D} := (1 - x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx} -$$

дифференциальный оператор второго порядка Чебышева, откуда в частном случае $s = 0$, получаем известный результат В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [6]

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq n^{-2r} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^{2r} f)_{2,\mu},$$

причём оба результата являются точными, и знак равенства в них достигается для функции $f_0(x) = T_n(x)$, где $T_n(x)$ — многочлен Чебышева n-й степени.

Во втором параграфе второй главы из результата теоремы 1.2.1, где доказано, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ имеет место экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{n}{2} \displaystyle\int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m} = 1,$$

при $s = 0$ вытекает результат М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева в виде неулучшаемого неравенства

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m,$$

откуда, в свою очередь получаем неравенство типа Джексона – Стечкина для совместного приближения функций и их производных

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq n^{-2(r-s)} \Omega_m \left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{n} \right)_{2,\mu},$$

причём если модуль непрерывности Ω_m является выпуклым на отрезке $[0, \pi/n]$, то в последнем неравенстве число π/n можно заменить на $\pi/(2n)$ и оно для полинома $f_0(x) = T_n(x)$ превращается в равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\Omega_m \big(\mathcal{D}^r f; \pi/(2n) \big)_{2,\mu}} = 1.$$

Последнее равенство означает, что точная константа в неравенстве типа Джексона – Стечкина для наилучшего совместного приближения функций и их промежуточных производных класса функций $L_{2,\mu}^{(2r)}$, в точности равна единице.

Результаты третьего параграфа второй главы – теоремы 2.3.1 и 2.3.2 являются новыми и ранее не имели аналогов. Так, например, из равенства (2.3.10) в точке $t = \pi/(2n)$ получаем следующую точную константу в неравенстве Джексона – Стечкина для совместного приближения функций и их производных:

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)}\, \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\widetilde{\omega}_m\left(\mathcal{D}^r f, \dfrac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}} = \left\{\frac{\pi}{\pi - 2}\right\}^m .$$

Основным результатом четвёртого параграфа второй главы является теорема 2.4.1, в которой при выполнении некоторого ограничения относительно заданного мажоранта Φ найдено точное значение целой серии n-поперечников.

Решению общей экстремальной задачи совместного приближения некоторых классов функций посвящен пятый параграф второй главы. Здесь исходя из результатов об n-поперечниках, в четвёртом параграфе доказаны теоремы 2.5.1 и 2.5.2, из результатов которых при $s = 0$ вытекают ранее полученные результаты М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [95], К.Тухлиева и Дж.Х.Бекназарова [73], Дж.Х.Бекназарова [13]. В теореме 2.5.2 доказано, что если мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in \mathbb{R}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2n))} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \begin{cases} 1 - \dfrac{\sin nh}{nh}, & \text{если } 0 < nh \leq \pi, \\ 2 - \dfrac{\pi}{nh}, & \text{если } nh \geq \pi, \end{cases}$$

то при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $r, s \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)\big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

где $W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$ – класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любых $m, n \in \mathbb{N}$,

$r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, \pi/n]$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f;\tau)_{2,\mu} d\tau \le \Phi(h).$$

Отметим, что из полученного результата, в частности, вытекают результаты вышеупомянутых авторов.

В завершающем шестом параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача об усреднённом значении совместного приближения функций класса $L_{2,\mu}^{(2r)}$. Здесь основными являются теоремы 2.6.1 – 2.6.2. Полученные результаты данного параграфа обобщают результаты Н.И.Черныха [79], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [93], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [95].

Переходим к обсуждению результатов, полученных в третьей главы диссертации. Прежде всего, отметим, что в вопросах среднеквадратических приближении функций на всей действительной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ ряды Фурье по многочленам Чебышева – Эрмита играют существенную роль, поскольку именно частные суммы Фурье – Чебышева – Эрмита в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ ($\rho(x) = e^{-x^2}$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$) доставляют наилучшее среднеквадратическое приближение любому функцию $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Во втором параграфе третьей главы приводится достаточно подробных ссылок на учёных, которые занимались этой проблематикой, и отмечается, что в цитированных работах нет ни одного точного решения экстремальной задачи приближения функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Первые точные результаты приближения функций суммами Чебышева – Эрмита появились в работах В.А.Абилова с коллегами [1, 3–5], С.Б.Вакарчука [17].

В третьей главе данной диссертации указанные результаты обобщаются на случай совместного приближения функций и их производных. Во всех полученных результатах скорость сходимости к нулю оценки приближения оценивается обобщённым модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ следующего вида:

$$\widetilde{\omega}_m(f,\tau)_{2,\rho} := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) \left(1 - \left(1-\tau^2\right)^{k/2}\right)^{2m} \right\}^{1/2}, \ \tau \in [0,1].$$

Пусть $L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ — множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывные на любом конечном интервале, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Одним из основных результатов второго параграфа третьей главы является теорема 3.2.1, в которой утверждается, что при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq \nu$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2^{r-\nu}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right)^{-m}.$$

откуда, переходя к верхней грани по всем $n \in \mathbb{N}$, $n > r$, имеем

$$\sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > r}} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\widetilde{\omega}_m\left(f^{(r)}, \sqrt{\dfrac{2}{n-r}}\right)_{2,\rho}} \cdot \sqrt{\frac{2^{r-\nu} \cdot \alpha_{n,r}}{\alpha_{n,\nu}}} =$$

$$= \left(1 - e^{-1}\right)^{-m} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^{m}.$$

Отсюда, в частности при $\nu = 0$ вытекает результат К.Тухлиева и Дж.Х.Бекназарова [73]. Аналогичные результаты получены в теореме 3.2.2, из которой вытекают результаты С.Б.Вакарчука.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается применение $\mathscr{K}$-функционалов в теории приближения функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Здесь доказывается, что при всех $m, n \in \mathbb{N}$, $r\nu \in \mathbb{Z}_+$, $n > r + m$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^{r-\nu}\,\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu}} \cdot E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{2,\rho}}{\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}; \dfrac{1}{\sqrt{2^m\,\alpha_{n-r,m}}}\right)_{2,\rho}} = 1,$$

из которой при $\nu = 0$ вытекает результат С.Б.Вакарчука [17].

Четвёртый и пятый параграфы третьей главы посвящены обобщению известных результатов С.Б.Вакарчука [17], М.Ш.Шабозова и С.А.Курайши [83] в пространстве L_p $(0 < p \leq \infty)$. В теореме 3.4.3 один результат С.Б.Вакарчука доказанного для случая $0 < p \leq 2$, приведенного в теореме 3.4.2, обобщается на случай $0 < p \leq \infty$. Используя этот результат, в пятом параграфе третьей главы приводится решение общей экстремальной задачи сформулированного в (3.5.1) для класса $W_{2,\rho}^{(r)}(\widetilde{\omega}_m)$. В завершающем шестом параграфе третьей главы приводятся точные значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. Результаты, полученные в этом параграфе, обобщают ранее полученные результаты С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [20], К.Тухлиева и А.М.Маликова [74], А.М.Маликова [50] и других авторов.

Выводы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены точные верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышева в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найдены точные неравенства типа Джексона – Стечкина для совместного приближения функций и их производных посредством усреднённых модулей непрерывности в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найдено значение поперечников, и полученный результат применен к задаче нахождения верхних граней совместных приближений некоторых классов функций в $L_{2,\mu}[-1,1]$;
- найдено значение верхних граней совместных полиномиальных приближении функций и их производных на всей оси в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$;
- найдено значение $\mathscr{K}$-функционалов и обобщен результат С.Б.Вакарчука в метрике L_p $(0 < p \leq \infty)$;
- решена экстремальная задача совместных приближений функций и их производных для классов функций $W^{(r)}_{2,\rho}(\omega_m)$;
- найдены значения n-поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в решении экстремальных задачах теории приближения функций двух переменных в прямоугольных областях и на всей плоскости.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Абилов В.А. О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье-Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1972. – №3. – С.3–9.

[2] Абилов В.А. Оценка поперечника одного класса функций в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1992. – Т.52, – №1. – С.3–8.

[3] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения 2π-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки, 2004, т.76, №6, С.803-811.

[4] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Некоторые вопросы приближения функций суммами Фурье – Эрмита в пространстве $L_2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ // Изв. вузов. Математика. – 2006. – $\mathbb{N}$01. – С.3–12.

[5] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье на некоторых классах функций в пространстве $L_2((a,b), p(x))$ // ЖВММФ, – 2009. – Т.49, – №6. – С.966–980.

[6] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002, – Т.42, – №4, – С. 451–458.

[7] Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышева – Эрмита на действительной оси// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1997. – №6. – С.68–71.

[8] Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. – 1986. – С.3–10.

[9] Арестов В.В., Попов Ю.В. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. Математика. – 1995. – №8. – С.13–20.

[10] Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т.7, – №1. – С.30–46.

[11] Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кафанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения // Киев: Наукова думка. - 2003. - 590 С.

[12] Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961, 936 С.

[13] Бекназаров Дж.Х. Верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015. №1(158). С. 20–32.

[14] Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2016. №3(164). С. 15–25.

[15] Бернштейн С.Н.. О кратно монотонных функциях // Зап. физ.-мат. отделение. АН Украины. – 1928.–Т.3. Вып. 2. – С.40–47.

[16] Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2// Матем. заметки. – 1999. – Т.66. – №4. – С.494–499.

[17] Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2014. – Т.95. – №5. – С.666–684.

[18] Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О приближении функций алгебраическими полиномами в среднем на вещественной оси с весом Чебышева-Эрмита // Вісник Дніпропетровского университету. Серія математика. – 2011. – Т.19(6/1). – С.28–31.

[19] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86. – №3. – С.328–336.

[20] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С.497-514.

[21] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева-Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси // Збірник праць Інстітуту математики НАН Украіни. – 2013. – Т.10. – №1. – С.28–38.

[22] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. мат. журн., – 2013, – Т.65, – №12, – С.1604–1621.

[23] Владимиров В.С. Уравнение математической физики // М., Наука, – 1976.

[24] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп // М.: Наука, – 1965. – 588 С.

[25] Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – Vol.206, – №1. – PP.97–114.

[26] Гаркави А.Л. О совместном приближении периодических функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. сер. матем. – 1960. – Т.24. – №1. – С.103–128.

[27] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами // М.: Наука. – 1977.

[28] Ditzian Z., Totik V. $\mathscr{K}$ – functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory, – 1986, – V.46, – №1, – PP.38–41.

[29] Ditzian Z., Totik V. Moduli of Smoothness // Springer Ser. Comput. Math., 9 Springer, New York, – 1987, – 228 p.

[30] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2 Ч. – М.: Мир, 1965, Т.1, 616 С., Т.2, 537 С.

[31] Zygmund A. Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – V.12. – P.47–76.

[32] Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Труды ИМ и М УрО РАН, – 2010, – Т.16, – №4, – С.180–192.

[33] Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p // ТулГУ. – 1995.

[34] Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функции одной переменной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ // ЖВМ и МФ, 2016, – Т.56, – №5, – С.730–741.

[35] Корнейчук Н.П. Точная константа в неравенстве Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С.514–516.

[36] Корнейчук Н.П. О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1963. – Т.27. – С.29–44.

[37] Корнейчук Н.П. Точные значения норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. №6. – С.569–576.

[38] Корнейчук Н.П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35. №1. – С.93–124.

[39] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения // М.: Наука. – 1976.

[40] Корнейчук Н.П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. – 1982. – Т.32. – №5. – С.669–674.

[41] Корнейчук Н.П. Лигун А.А. Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничением // Киев: Наука. думка. – 1982.

[42] Козко А.И., Рождественский А.В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Матем. заметки. – 2003. – Т.73, – №5. – С.783–788.

[43] Kokilashvili V., Yildirir Y. E. On the approximation in weighted Lebesgue space // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2007. – V.143. – pp.103–113.

[44] Kokilashvili V., Samko S. A refined inverse inequality of approximation in weighted variable exponent Lebesgue space. // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2009. – V.151. – pp.134–138.

[45] Левитан Б.М. Теория операторов обобщённого сдвига. – М.: Наука. – 1973, – 312 С.

[46] Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.14. – №1. – С.21–30.

[47] Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24. – №6. – С.785–792.

[48] Лигун А.А. О константах в теореме Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.37. – №3. – С.326–336.

[49] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.38. – №5. – С.248–256.

[50] Маликов, А. М. Среднеквадратические полиномиальные приближения функций на всей оси и значения поперечников // ДАН РТ. – 2016, – т.59, – №11-12, – С.457-462.

[51] Маликов, А.М. Приближение функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15-25 августа 2016 г., – С.161-165.

[52] Mashkar H.N. Weighted polynomial approximation // J. Approx. Theory, – 1986. – V.46. – №1. – PP.100–110.

[53] Натансон И.П. Конструктивная теория функций // М.: Гостехиздат. – 1949.

[54] Олифтаев Н.Ф. Неравенства Джексона для τ-модулей гладкости и значения поперечников в L_2 // ДАН РТ. – 2015. – Т.57. – №12. – С.830–836.

[55] Палавонов К.К. О наилучшем приближении периодических функций и значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ-мат., хим., геол. и техн. н. – 2013. №2(151). – С.40–50.

[56] Пустовойтов Н.Н. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усреднённые разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сборник. – 1997. – Т.188, – №10. – С.95–108.

[57] Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем. мех., –

1998. – №3. – С.38–48.

[58] Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой // Изв. РАН, сер. мат., – 2007. – Т.71. – В.5. – С.149–196.

[59] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 P.

[60] Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье-Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1968. – №7. – С.78–84.

[61] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1994. – Т.185, – №8. – С.81–102.

[62] Сегё Г. Ортогональные многочлены // Москва, – 1962. – 500 С.

[63] Сендов Б., Попов В. Усредненные модули гладкости // М.: Мир, – 1988 г.

[64] Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука. – 1979. – 416 С.

[65] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН. СССР. сер. мат. – 1951. – Т.15. – №3. – С.219–242.

[66] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С. 433–438.

[67] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. – №2. – С.217–223.

[68] Темурбекова С.Д. Неравенство типа Джексона-Стечкина для обобщенных модулей непрерывности и поперечники некоторых функциональных классов функций в пространстве L_2 // ДАН Республики Таджикистан. – 2013. – Т.56. – №4. – С. 273–278.

[69] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного // М.: Физматиз. – 1960.

[70] Тиман А.Ф. К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. сер. матем. – 1960. – Т.24. – №3. – С.421–430.

[71] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976, 325 с.

[72] Тухлиев К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье – Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных классов.– Чебышевский сборник. – 2016. – Т.17. – №4. – С. 141–156.

[73] Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1,1]$ // ДАН РТ. 2014, т.57, №3, С. 177-183.

[74] Тухлиев К., Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышёва-Эрмита // ДАН РТ. – 2016. – Т.59. – №7-8. – С.282–289.

[75] Хлодовский И.Н. О некоторых свойствах полиномов С.Н.Бернштейна // Труды съезда математиков в Харькове. – 1930.

[76] Фройд Г. Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси // Докл. АН СССР. – 1970. – Т.191. – №2. – С.293–294.

[77] Федоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева – Эрмита // Изв. вузов. Математика. – 1984. – №6. – С.55–63.

[78] Foucart S., Kryakin Yu, Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. – 2009. – Т.29. – pp.157–179.

[79] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. – №5. – С.513–522.

[80] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С.616–623.

[81] Шабозов М.Ш. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для 2π-периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2011. – Т.63. – №10. – С.1040–1048.

[82] Шабозов М.Ш. Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Чебышевский сб. – 2019. – Т.20. – №4. – С.385–398.

[83] Шабозов М.Ш., Алаа С.К. О совместном приближении функций и ее производных в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с

весом Чебышева-Эрмита // Доклады НАН Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №5-6. – С.249–261.

[84] Шабозов М.Ш., Алаа С.К. О совместном приближении функций и ее производных в среднем на вещественной оси с весом Чебышева-Эрмита // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений*", (Душанбе, 4 декабря 2021 г.). – С.108–113.

[85] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // ДАН России – 2013. – Т.451. – №6. – С.625–628.

[86] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. вісник. – 2014. – Т.11, – №3. – С.417-441.

[87] Shabozov M.Sh. Palavonov K.K. Exact values of widths of certain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Analysis Mathematica. – 2015. – V.41. – PP.103–115.

[88] Шабозов М.Ш., Джурахонов О. Приближение в среднем некоторых классов функций двух переменных суммами Фурье-Чебышева // Труды ИМ и М УрО РАН. – 2020. – Т.26, – №4. – С.268–278.

[89] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды ИМ и М УрО РАН, – 2019, – Т.25, – №2, – С.258–272.

[90] Шабозов М.Ш., Юсупов Г. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 и их применение // Изв. АН Респ. Тадж., отдел. физ.-мат., хим., геолог. и техн. наук. – 2008. – №4. – С.7–19.

[91] Шабозов М.Ш., Юсупов Г. А. Неравенства между наилучшими приближениями и усреднениями модулей непрерывности в пространстве L_2 // ДАН России. – 2010. – Т.435. – №2. – С.178–181.

[92] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сиб. матем. журн., – 2011, – Т. 52, – № 6, – С. 1414–1427.

[93] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011, – Т.90, – №5. – С.764–775.

[94] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27. – №4. – С.239–254.

[95] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона – Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций. – Труды ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21. – №4. – С.292–308.

[96] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Некоторые точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических дифферецируемых в смысле

Вейля функций в L_2 // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №4. – С.255–264.

[97] Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка. – 1992. – 225 С.

[98] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функции, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – №1. – С.125–129.

[99] Юдин В.А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах // ДАН СССР. – 1980. – Т.1. – №251. – С.54–57.

[100] Юсупов Г.А. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина и поперечники функциональных классов в l_2 // Известия тульского государственного университета. Естественные науки. – 2012. – №2. – С.124–135.

[101] Yusupov G.A. Jackson's-Stechkin's Inequality and the values of Widths for some Classes of Functions from L_2 // Anal. Math. – 2014. – V.40:1. – PP. 69–81.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. В журналах, входящих в Перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[1-А] Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышёва – Эрмита алгебраическими полиномами [Текст] / К.Тухлиев, А.М.Туйчиев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т.26. – №2. – С.270–277.

[2-A] Туйчиев А.М. О среднеквадратическом полиномиальном приближении функций суммами Фурье – Чебышёва [Текст] / А.М.Туйчиев // ДАН РТ. – 2020. – Т.63. – №7-8. – С.416–427.

[3-A] Туйчиев А.М. О приближении в среднем функций суммами Фурье – Эрмита в $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ [Текст] / К.Тухлиев, А.М.Туйчиев // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2019. – №1 (48). – С.3–10.

[4-A] Туйчиев А.М. О совместном приближение функций и её производных частными суммами Фурье – Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1,1]$ [Текст] / К.Тухлиев, А.М.Туйчиев // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2018. – №4 (47). – С.15–21.

[5-A] Туйчиев А.М. Наилучшие среднеквадратические приближения функций суммами Фурье – Чебышёва [Текст] / А.М.Туйчиев // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2020. – №4 (55). – С.8–13.

2. В других изданиях:

[6-A] Туйчиев А.М. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева – Эрмита [Текст] /К.Тухлиев, А.М.Туйчиев // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*", посвященной 60-летию академика АН РТ, профессора З.Х.Рахмонова и члена корреспондента АН РТ, профессора

С.А.Исхокова, (Душанбе, 13 - 14 декабря 2019 г.). – С.231–234.

[7-А] Туйчиев А.М. Среднеквадратическое полиномиальное приближение функций суммами Фурье – Чебышева [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы международной конференции "*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*", посвященной 70-летию профессора К.Х.Бойматова, (Душанбе, 25 - 26 декабря 2020 г.). – С.333–336.

[8-А] Туйчиев А.М. Среднеквадратические полиномиальные приближения функций частичными суммами Фурье-Чебышёва [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы республиканской научно-практической конференции *"Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества"*, (Худжанд, 29 - 30 октября 2021) – С.68–71.

[9-А] Туйчиев А.М. Полиномиальные приближения функций суммами Фурье – Чебышёва [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы международной научно-практической конференции АМТИ. *"Прикладные вопросы точных наук"*. (Россия, г. Армавир, 30 - 31 октября 2021 г.) – С.68–71.

[10-А] Туйчиев А.М. Совместное приближение функций и их производных частными суммами Фурье – Чебышёва первого [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы республиканской научно-практической конференции *"Актуальные проблемы точных наук и информационных технологий"*, посвященной 25-летию Российско-Таджикского (Славянского) университета, (Душанбе, 28 мая 2021 г.). – С.184–188.

[11-A] Туйчиев А.М. Наилучшие приближения функций частичными суммами рядов Фурье – Чебышева [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы международной научно-практической конференции *“Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий”*, (Узбекистан, г. Бухара, 11 - 12 мая 2022 г.). – С.74–75.

[12-A] Туйчиев А.М. Среднеквадратические полиномиальные приближения функций суммами Фурье – Чебышева [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы международной научной конференции “*Современные проблемы математического анализа и теории функций*”, посвященной 70-летию академика НАНТ М.Ш.Шабозова, (Душанбе, 24 - 25 июня 2022 г.). – С. 144–147.

[13-A] Туйчиев А.М. Среднеквадратическое приближении функций суммами Фурье – Чебишева [Текст] / А.М.Туйчиев // Материалы международной научной конференции “*Уфимская осенняя математическая школа-2022*”, (Россия, г. Уфа, 28 сентября – 1 октября 2022г.). – С. 186–188.

[14-A] Туйчиев А.М. Наилучшие приближение функций рядами Фурье – Чебышева в $L_{2,\mu}$ [Текст] / К.Тухлиев, А.М.Туйчиев // Материалы международной научно-практической конференции *“Комплексный анализ и его приложения*”, посвященной 75-летию профессора И.К.Курбанова и 70-летию профессора Дж.С.Сафарова, (г. Бохтар, 19 ноября 2022 г.). – С.199–201.