Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Таджикский государственный педагогический университет
имени Садриддина Айни

УДК 517.55

На правах рукописи

Усмонов Мехрджон Аминджонович

НЕКОТОРЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ РАЗЛИЧНОГО ТИПА НА КОНТУРЕ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель: доктор
физико-математических наук,
профессор Усмонов Нурулло

Д У Ш А Н Б Е - 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обозначения……...……..5

Введение…….. 6

Основная часть исследования …. ……..……..13

ГЛАВА 1. Анализ литературы по граничным задачам сопряжения аналитических функций с сингулярной точкой различного типа на контуре……..28

§ 1.1. Краткий исторический обзор по граничным задачам теории аналитических функций……...……..…….29

§ 1.2. Анализ работ по граничным задачам линейного сопряжения общего вида …… …….....…35

§ 1.3. Анализ работ по граничным задачам линейного сопряжения для *n*-пар функций……..38

ГЛАВА 2. Граничная задача типа Римана с сингулярностью модульного характера….…….41

§ 2.1. Граничная задача Римана на вещественной оси, когда коэффициент имеет сингулярность модульного характера…….42

§ 2.2. Граничная задача сопряжения с рациональными коэффициентами, имеющими сингулярность модульного характера…….....50

§ 2.3. Граничная задача Гильберта с наличием нулей и бесконечностей модульного характера на контуре……..……..56

§ 2.4. Граничная задача сопряжения с непрерывными коэффициентами с сингулярностью модульного характера на контуре……...63

ГЛАВА 3. Граничная задача линейного сопряжения общего вида с сингулярностью различного типа …..…….....75

§3.1. Общая граничная задача линейного сопряжения с наличием нулей и бесконечностей различного типа на контуре ……...76

§3.2. Сингулярные случаи общей граничной задачи сопряжения с производными первого порядка …….……..…….....82

§3.3. Сингулярные случаи одной граничной задачи теории аналитических функций с производной в граничном условии ……..91
§3.4. Сингулярные случаи общей граничной задачи теории аналитической функции для полуплоскости ……..……..98
§3.5. Граничная задача сопряжения с производными высших порядков, главный коэффициент которых имеет нули или полюсы комплексно сопряжённого вида ……...104
ГЛАВА 4. Граничная задача с разрывными коэффициентами ……..114
§4.1. Граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами...……...115
§4.2. Граничная задача теории аналитических функций для *n* пар функций с разрывными коэффициентами…….....119
§4.3. Сингулярные случаи граничной задачи Римана для *n*-пар функций, когда определитель обращается в нуль …….…126
Заключение ……...……131
Список литературы ……132

Обозначения

1) Пусть D^+ - область (односвязная или многосвязная) ограниченная простыми замкнутыми кривыми Ляпунова, совокупность которых обозначим через Γ и D^- внешняя по отношению к Γ область, т.е. дополнение D^+ до всей плоскости;

2) Через $\varphi^{\pm}(z)$ будем обозначать предельные значения на Γ аналитической в $D^{\pm}$ функций $\varphi^{\pm}(z)$, причём для функции $\varphi^-(z)$ требуется, чтобы $\varphi^-(\infty)=0$.

3) Через l будем обозначать число линейно независимых над полем вещественных чисел решений однородной граничной (краевой) задачи (или однородного особого интегрального уравнения), а через p - число условий разрешимости неоднородной задачи (неоднородного уравнения);

4) $\mathrm{H}(\Gamma)$ - класс (или пространство) функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на контуре Γ условию Гельдера; $\mathrm{H}(-\infty,\infty)$ - класс функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера всюду в интервале $(-\infty,\infty)$, включая бесконечно удаленную точку. Для больших t считается выполненным неравенство $|\varphi(t)-\varphi(\infty)|<\dfrac{A}{|T|^{\mu}}$, $\mu>0$, A- положительная постоянная.

5) $\mathrm{M}(\Gamma)-$ класс ограниченных и измеримых функций на контуре Γ.

6) Через $S_p(S_\mu)$ обозначим норму сингулярного оператора

$$S_\mu=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,\ \ t\in\Gamma,$$

в $L_p(\Gamma)$ $(\mathrm{H}(\Gamma))$. Отметим, что для окружности $S_2=1$.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В диссертации исследуются некоторые граничные задачи, коэффициенты которых имеют сингулярность различного типа.

Для аналитических функций комплексной переменной известны две граничные задачи аналитических функций:
граничная задача Римана и граничная задача Гильберта.

Постановка задачи Римана. Пусть L, простой замкнутый контур, который разделяет плоскость на внутреннюю и внешнюю области $D^{\pm}$, и функции $G(t)$, $g(t) \in \mathrm{H}(L)$, ($\varphi(t)$ - удовлетворяет на кривой условию Гельдера, если для любых двух точек этой кривой

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^{\lambda},$$

где A называется постоянной Гельдера, а λ - показателем Гельдера $0 < \lambda \le 1$, причём $G(t) \ne 0$).

Требуется найти функции: $\Phi^{\pm}(z)$ - аналитические в областях $D^{\pm}$, и удовлетворяющие на границе, следующие граничные условия:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) \text{ (однородная задача)}, \tag{0.1}$$

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t) \text{ (неоднородная задача)}. \tag{0.2}$$

Постановка задачи Гильберта. Пусть дан L - простой гладкий замкнутый контур и $a(t), b(t), c(t) \in \mathrm{H}(L)$.

Граничной задачей Гильберта будем называть следующую задачу:
найти аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в области D^{+}, которая реальная и мнимая части её удовлетворяют следующее соотношение

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s). \tag{0.3}$$

Задача (0.2) в общем виде изучена впервые Ф.Д. Гаховым [1], её разрешимость определяется индексом

$$æ = Ind_{\Gamma}\ G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)].$$

Многочисленная литература по этим вопросам изучена в монографиях Ф.Д. Гахова [1] и Н.И. Мусхелишвили [2]. Во всех названных работах требовалось, чтобы коэффициент не обратился в бесконечность или в нуль. В данной работе допускается, что коэффициент граничного условия может иметь нуль или бесконечность различного типа. Задача (0.2) с коэффициентом, вида:

$$G(t) = \prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}.\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{-p_j}\,G_1(t),$$

исследовалась впервые Ф.Д. Гаховым [1], а затем, другими методами, в работах Л.А.Чикина [121]. При

$$G(t) = \prod_{k=1}^{\mu}(t-c_k)^{r_k}\ \ln^{s_r}(t-c_k)G_1(t),$$

исследование проведено в работе Б.В. Хведелидзе [119].

Далее, в работе Ф.Д. Гахова [31], развивалась теория особых (сингулярных) случаев задачи Римана.

Отметим, что граничная задача Римана обобщалась и развивалась в различных направлениях. Одним из этих обобщений является следующая задача:

$$\varphi^{+}(t) = a(t)\varphi^{-}(t) + b(t)\overline{\varphi^{-}(t)} + c(t). \qquad (0.4)$$

В задаче (0.4), различают случаи:

1) $|a(t)| > |b(t)|$ - эллиптический,

2) $|a(t)| \equiv |b(t)|$ - параболический, (0.5)

3) $|a(t)| < |b(t)|$ - гиперболический.

Полная теория задачи (0.4), в случаях 1) и 2), даны в монографии Л.Г. Михайлова [4]. Точные результаты в эллиптическом случае $|a(t)| > |b(t)|$ получены там, при следующих условиях:

1) $a(t)$ - непрерывна и $a(t) \neq 0,\ b(t)$ - ограниченная измеримая функция, $c(t) \in L_p(\Gamma),\ \ p > 1;$

2) $a(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$, $b(t)$ и $c(t)$ - ограниченные измеримые функции. Так же исследованы случаи $|a(t)| \equiv |b(t)|$, где $a(t), b(t), c(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$.

И.Х. Сабитов $[86-87]$ исследовал эту задачу на окружности, не предполагая ни на какие условия эллиптичности, параболичности. Л.Г. Михайлов в своей монографии исследовал, следующие задачи:

$$\varphi^+(t) = a(t)\frac{d\varphi^-}{dt} + b(t)\overline{\frac{d\varphi^-}{dt}} + p(t)\varphi^-(t) + q(t)\overline{\varphi^-(t)} + c(t),\ \ \varphi^-(\infty) = 0. \quad (0.6)$$

$$\varphi^+(t) = a_n(t)\frac{d^n\varphi^-}{dt^n} + b_n(t)\overline{\frac{d^n\varphi^-}{dt^n}} + \sum_{k=0}^{n-1}\left[a_k(t)\frac{d^k\varphi^-}{dt^k} + b_k(t)\overline{\frac{d^k\varphi^-}{dt^k}} + c(t)\right], \quad (0.7)$$

$$\varphi^-(\infty) = 0.$$

Особые (сингулярные) случаи задачи Римана с особенностями сопряжённого вида, изучены в работах Н. Усмонова и М.Б. Холиковой $[95-97]$.

Для граничных задач теории аналитических функций, изучены системы уравнения эллиптического типа в работах И.Н. Векуа $[18-19]$.

Л.Г. Михайловым была изучена задача Римана в классе обобщённых аналитических функций.

В работах Н. Усмонова и С. Шавкатзода $[99-101]$ исследовались случаи, когда коэффициент имеет нуль или бесконечность.

Б.В. Хведелидзе исследовал граничную задачу Римана в случае коэффициента $G(t)$ из класса Гельдера, и свободный член принадлежал классу L_p.

И.Б. Симоненко [91-92] исследовал граничную задачу Римана в случае, когда коэффициент является непрерывной функцией. Решение этой же задачи дано В.В. Ивановым [45], но он основывается на теореме В.И. Смирнова [3], дающей оценку порядку роста особого интеграла типа Коши с непрерывной

плотностью. В абстрактном пространстве Ю.И. Черский [120] исследовал задачу Римана $\varphi^{+} = A\varphi^{-} + g$, где коэффициентом являются линейные операторы φ^{+}, φ^{-}, а свободный член - g является элементом пространства Банаха.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в разработке изучаемой проблемы внесли ведущие математики в числе которых Ф.Д.Гахов, Н.И. Мусхелешвили, И.Н. Векуа, Н.П. Векуа, И.Б.Симоненко, Б.В. Хведелидзе, Ю.И.Черский, В.С.Рогожин, И.Х.Сабитов, С.Г. Самко, Г.С.Литвинчук, Г.Ф.Манджавидзе, Н.Н.Юханонов, Н.Усмонов и другие.

Цель исследования. В данной диссертации изучается случай, когда коэффициент имеет сингулярность различного типа. Под различным типом мы понимаем, когда коэффициент задачи обращается в нуль или бесконечность целого порядка, нуль или бесконечность комплексно сопряжённого вида, нуль или бесконечность модульного характера.

Задачи исследования:

1) Нахождение явного решения:

а) для граничной задачи Римана с сингулярностью модульного характера;

б) для граничной задачи Римана с рациональными коэффициентами, когда коэффициент имеет нули и бесконечности модульного характера;

в) граничная задача Гильберта с наличием нулей и бесконечностей модульного характера.

2) Нахождение l - решений однородной задачи и p - числа условий, в котором, при его выполнении, неоднородная задача будет разрешима.

3) Нахождение l - числа решений однородной задачи и p - числа условий разрешимости, в котором, при его выполнении, неоднородная задача будет разрешима, когда коэффициент имеет особенности модульного характера.

4) нахождение метода сведения граничной задачи с $n-$ пар функциями, когда коэффициент имеет разрыв первого рода, к задачам с непрерывными коэффициентами.

Научная новизна исследования. Результаты диссертационной работы являются новыми, и заключаются в следующем:

1) для граничной задачи Римана с коэффициентами из класса Гельдера и с коэффициентом рациональной функции, в случае сингулярности, найдено явное решение и явное условие разрешимости, а также показано влияние особенности на характер разрешимости задач;

2) для граничной задачи Гильберта, в случае сингулярности, найдено решение и условие разрешимости в явном виде, исследовано влияние особенности на характер разрешимости задачи Гильберта;

3) найдены число решений однородной задачи l и число условий разрешимости неоднородной задачи p.

4) для граничной задачи с разрывными коэффициентами показана, как эта задача сводится с непрерывными коэффициентами.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательства можно применят в граничных задач теории аналитических и обобщённых аналитических функций.

Личный вклад соискателя учёной степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывающий также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисление в разделе «Научная новизна» получены лично автором.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа указанной в пункте III параграфе 3 паспорта научной специальности.

Положения, выносимые на защиту:

1) явное решение граничных задач Римана и Гильберта в случае, когда коэффициент граничной задачи имеет особенность модульного характера;

2) Результаты, определяющие число решений однородной задачи l и число условий разрешимости неоднородной задачи p.

3) Число решений однородной задачи l и число условий, в котором неоднородная задача будет разрешима p. Также задачи в случае, когда в граничном условии, наряду с искомыми функциями, участвуют производные высшего порядка, когда коэффициенты задачи имеют сингулярность различного типа.

4) Для граничных задач с $n-$пар функций с разрывными коэффициентами, показан метод сведения к задаче с непрерывными коэффициентами.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации обсуждались:

1) на международной научно-теоретической конференции «Современные задачи математики и их приложения», посвященной 70-летию образования ТНУ и 80-летию академика АН РТ, профессора Раджабова Нусрата (25-26 сентября 2018 г.), г. Душанбе;

2) на республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества», посвящённой 30-летию Государственной Независимости Республики Таджикистан (26-27 октября, 2018г.), г. Худжанд;

3) на международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы преподавания математики и естественных наук в кредитной системе обучения». Бохтарский государственный университет имени Носира Хусрава. 2018, г. Бохтар;

4) на республиканской научно-практической конференции «Подготовка современных специалистов по математике в отрасли науки и образования вузов и средних учреждений страны» (25-26 ноября 2020), г. Дангара;

5) на международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича

«Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (25-26 декабря 2020), г. Душанбе;

6) на международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова (25-26 июня 2021) – г. Душанбе

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [123А-133А], часть из которых [123А-125А] - в изданиях, входящих в действующий перечень, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерства образования и науки РФ. Из совместных работ с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, автору диссертации - доказательство основных результатов.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, общей характеристики, четырёх глав, заключения и списка литературы, состоящей из 133 наименований. В диссертации для формул и параграфов используется тройная нумерация, первый номер совпадает с номером главы, второй - с номером параграфа и третий – с номерами формул. Общий объём диссертации 146 страницы машинописного текста.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Материал и методы исследования. Материал исследования состоит из решения цикл граничных задач сопряжения аналитических функций с сингулярной точкой различного типа на контуре. В работе используется новейшие методы решения граничных задач теории аналитических функций.

Результаты исследования. Приведем краткое изложение результатов глав диссертационной работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена анализу литературных источников по теме диссертационной работы и постановку нерешенных граничных задач.

Во второй главе диссертации, которая состоит из четырёх параграфов, изучается граничная задача типа Римана с сингулярностью модульного характера.

В первом параграфе главы 2 изучается граничная задача Римана для полуплоскостей, когда коэффициент имеет нули и полюсы модульного характера.

Дана Γ - действительная ось. Задачей Римана будем называть следующую задачу: найти две аналитические функции $F^+(z)$, аналитическую в D^+ и $F^-(z)$, аналитическую вне контура, предельные значения которых на контуре, удовлетворяют граничному условию:

$$F^+(t) = \frac{\prod_{r=1}^{J} |t - a_r|^{d_r}}{\prod_{n=1}^{N} |t - b_n|^{s_n}} D_1(t) F^-(t) + c(t), \qquad (0.0.1)$$

здесь $D_1(t),\ c(t) \in \mathrm{H}(\Gamma),\ a_r,\ b_n$ - несовпадающие точки контура, $D(t) \neq 0$. Введём следующие обозначения:

$$\sum_{r=1}^{J} d_r = d, \quad \sum_{n=1}^{N} s_n = s.$$

Искомое решение задачи ищется в классе функций, имеющей особенность меньше единицы.

Так как $c(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$, поэтому $c(t) = \psi^{+}(t) - \psi^{-}(t)$, где

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{c(\tau)}{\chi^{+}(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Потребуем, чтобы $\psi^{-}(\infty) \neq 0$. По теореме об аналитическом продолжении и обобщении теоремы Лиувилля, имеем:

$$\frac{F_2^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} - \psi^{+}(t) = t^{-s} \frac{F_2^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} - \psi^{-}(t) = \frac{P_{æ-s}(t)}{(t+i)^{æ-s}} \qquad æ - s \geq 0,$$

где $P_{æ-s}(t)$ - многочлен с произвольными коэффициентами. Отсюда, получаем общее решение задачи:

$$F_2(z) = \chi(z)\left[\psi(z) + \frac{P_{æ-s}(z)}{(z+i)^{æ-s}}\right] \qquad \text{при } æ - s \geq 0,$$

$$F_2^{-}(z) = \chi(z)\left[\psi(z) + c\right] \qquad \text{при } æ - s < 0.$$

В случае $æ - s < 0$, функция $\chi(z)$ имеет особенность в точке $z = -i$ полюс порядка $-æ + s$, поэтому, для аналитического решения задачи, нужно предположить, что $c = -\psi^{-}(-i)$. Если $æ - s < -1$, то для разрешимости задачи, требуются следующие условия разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{*}{c}(\tau)}{\chi^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau + i)^{k}} = 0 \quad (k = 2,3, \ldots |æ - s|), \tag{0.0.2}$$

Теорема 2.1.1. *Пусть* $D_1(t),\ c(t) \in \mathrm{H}(\Gamma),\ a_r,\ b_n$ - *различные точки контура,* $D_1(t) \neq 0$ $\sum_{r=1}^{J} d_r = \sum_{j=1}^{J}\left(q_r^{(1)} - \zeta_r^{(1)}\right),\ \sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N}\left(q_n^{(2)} - \zeta_n^{(2)}\right),\ q_r^{(1)},\ q_n^{(2)}$ - *целая часть,* $\sum_{r=1}^{J} \zeta_r^{(1)},\ \sum_{n=1}^{N} \zeta_n^{(2)}$ - *дробная часть,* $\sum_{r=1}^{J} d_r = d,\ \sum_{n=1}^{N} s_n = s$.

Тогда, если $æ - s \geq 0$ *, то однородная граничная задача и неоднородная граничная задача сопряжения в этом случае всегда разрешимы, и в решении имеем* $æ - s + 1$ *произвольные постоянные. При* $æ - s$ *отрицательном, однородная граничная задача не имеет решения. В случае* $æ - s < 0$ *, неоднородная граничная задача, однозначно, разрешима.*

Во втором параграфе этой главы изучается граничная задача Римана с рациональными коэффициентами, имеющими особенности дробного порядка.

Дан простой гладкий замкнутый контур Γ, который разделит плоскость в области D^+ и D^-, даны многочлены $p(t)$, $q(t)$, и свободный член $g(t)$ - из класса Гельдера.

Надо найти функции $F^{\pm}(z)$ - аналитические, соответственно, в областях $D^{\pm}$, по граничным условиям:

$$F^+(t) = \frac{|t-a|^{\mu} p(t)}{|t-b|^{\gamma} q(t)} \cdot F^-(t) + g(t), \qquad (0.0.3)$$

где a и b - некоторые различные точки контура, μ, γ - положительные вещественные числа, $g(t)$ - удовлетворяет условию Гельдера, $p(t)$, $q(t)$ - многочлены.

Решение ищем в классе функций, интегрируемых на контуре.

Введём обозначения:

$\mu = \mu_1 - \mu_2$, $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$, μ_1, γ_1 - натуральные числа, μ_2, γ_2 - их дробная часть, т.е. $0 < \mu_2 < 1$, $0 < \gamma_2 < 1$.

Разложим многочлены $p(z)$, $q(z)$ через их корни, т.е.

$$p(z) = p_+(z) \cdot p_-(z), \quad q(z) = q_+(z) \cdot q_-(z).$$

Получим решение данной задачи, в виде:

$$F^{\pm}(z) = \chi^{\pm}(z) \mathrm{P}_{æ-\gamma-1}(z) + \chi^{\pm}(z) F^{\pm}(z).$$

Когда индекс отрицателен, предположим $P_{æ-\gamma-1}(z) \equiv 0$, и добавим условия разрешимости, в виде:

$$\int_{\Gamma} \frac{q_{-}(\tau)}{p_{-}(\tau)} g_1(\tau) \cdot t^{k-1} d\tau = 0, k = 1,2, \dots, -æ + \gamma.$$

Третий параграф данной главы посвящен граничной задаче Гильберта на контуре с наличием нулей и бесконечностей неаналитической структуры.

Пусть D^{+} и D^{-} - соответственно, внутренняя и внешняя части окружности $\Gamma: |t| = 1$.

Граничная задача Гильберта есть следующая задача. Требуется найти аналитическую в области D^{+} и удовлетворяющую непрерывную функцию:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

в которой действительная и мнимая части, удовлетворяют следующему граничному условию:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s),$$

если $c(s) \neq 0$, задача называется неоднородной, если $c(s) \equiv 0$, то задачу назовём однородной.

Граничная задача Гильберта в этом случае, имеет следующий вид:

$$\mathrm{Re}\left[a(s) + ib(s)\right] \cdot \left[u(s) + iv(s)\right] = c(s). \qquad (0.0.4)$$

Используя условия симметрии, запишем следующее равенство:

$$f^{-}(z) = \overline{f^{+}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{f^{+}(z)}.$$

Функция $f^{-}(z)$ будет аналитической в области D^{-}.

Функции $f^{+}(z)$ и $f^{-}(z)$, рассматриваем как одну кусочно-аналитическую функцию.

В этом случае, имеем следующее равенство:

$$f^{-}(t) = \overline{f^{+}\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)} = \overline{f^{+}(t)}.$$

Итак, функцию $\overline{f^{+}(t)}$ можно заменить на функцию $f^{-}(t)$.

Отсюда, можно показать сводимость задачи Гильберта к задаче Римана. Перепишем граничное условие (0.0.4), в виде:

$$(a-ib)f^{+}(t)+(a+ib)\overline{f^{+}(t)}=2c \tag{0.0.5}$$

Допустим, что в задаче (0.0.5), коэффициенты в некоторой точке контура имеют нуль либо бесконечность дробного порядка. В данном случае, граничное условие (0.0.5), имеет вид:

$$|t-\beta|^{\mu}(a-ib)f^{+}(t)+|t-\alpha|^{\gamma}\overline{f^{+}(t)}=2c|t-\beta|^{\mu} \tag{0.0.6}$$

На основании изложенного выше, заменяя $\overline{f^{+}(t)}$ на $f^{-}(t)$, из (0.0.6) получим, граничное условие задачи Римана:

$$f^{+}(t)=\frac{|t-\alpha|^{\gamma}A(s)}{|t-\beta|^{\mu}B(s)}f^{-}(t)+\frac{2c(s)}{a(s)-b(s)}, \tag{0.0.7}$$

где $A(s)=a(s)+ib(s)$ $B(s)=a(s)-ib(s)$ $a(s)\pm ib(s)\neq 0,$ $\gamma,\ \mu$ - любые положительные вещественные числа.

Обозначим: $G(t)=\dfrac{a+ib}{a-ib},\quad g(t)=\dfrac{2c}{a-ib}.$

Тогда (0.0.7), принимает вид:

$$f^{+}(t)=\frac{|t-\alpha|^{\gamma}}{|t-\beta|^{\mu}}G(t)f^{-}(t)+g(t). \tag{0.0.8}$$

Выделим целую и дробную части чисел $\mu=d-\nu_1,\ \gamma=p-\nu_2,$ где d и p - целые положительные числа, ν_1,ν_2 - дробная часть, т.е. $0<\nu_1<1,\ 0<\nu_2<1.$

Решение задачи ищем в классе, интегрируемой на контуре.

Теорема 2.3.1. *Пусть* Γ - *окружность* $|z|\leq 1,\ a(s),\ b(s),\ c(s)\in \mathrm{H}(\Gamma),$ $æ=Ind[a(s)+ib(s)]-$*индекс задачи.*

Тогда, если $æ - d > 0$, *то неоднородная задача имеет* $æ - d$ *решения, если потребовать дополнительные условия* $f_2^-(\infty) = 0$, *тогда полином* $P_{æ-d}(z)$ *записывается в виде:* $P_{æ-d-1}(z)$.

При $æ - d \leq 0$, *однородная задача не имеет решения, а неоднородная задача будет разрешима, если выполнение* $|æ - d|$ *условию разрешимости:*

$$\int_{\Gamma} \frac{(\tau-\alpha)^{-\nu_2}(\tau-\beta)^{-\nu_1}}{\chi^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \qquad (j = 1,2,...,|æ - p|).$$

В §4 этой главы, исследуется граничная задача Римана, коэффициент которой является непрерывной функцией.

Пусть D^+ - многосвязная область, ограниченная контуром Ляпунова $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$. Через D^- обозначим внешнюю область.

Требуется найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические, соответственно, в D^+ и D^-, предельные значения которых удовлетворяют следующему граничному условию:

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} |t - \alpha_k|^{m_k}}{\prod_{j=1}^{J} |t - \beta_j|^{p_j}} G_1(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad (0.0.9)$$

где $\alpha_k (k = 1,2,..., \mu)$, $\beta_j (j = 1,2,..., J)$ - некоторые различные точки контура; m_k, p_j - любые положительные вещественные числа; $g(t) \in L_p(\Gamma)$, $G_1(t)$ - непрерывная функция, отличная от нуля. Индекс задачи вычисляется, следующим образом:

$$æ = \sum_{k=0}^{m} æ_k, \text{ где } æ = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_{\Gamma_æ}.$$

Обозначим:

$$\sum_{k=1}^{\mu}(m_k^{(1)}-m_k^{(2)})=\sum_{k=1}^{\mu}m_k,\quad \sum_{j=1}^{\eta}(p_j^{(1)}-p_j^{(2)}),=\sum_{j=1}^{\eta}p_j\ ,$$

где $\sum_{k=1}^{\mu}m_k^{(1)}$, $\sum_{j=1}^{\eta}p_j^{(1)}$ - натуральные числа, $\sum_{k=1}^{\mu}m_k^{(2)}$, $\sum_{j=1}^{\eta}p_j^{(2)}$ - их дробная часть.

Теорема 2.4.1. Пусть $D_1(t)$ - непрерывная функция, $D_1(t)\neq 0,\ \ g(t)\in L_p$

$æ=\dfrac{1}{2\pi}\left[\arg G_1(t)\right]_{\Gamma_k}$.

Тогда: 1) если $æ-p_j^{(1)}=0$, то граничная задача сопряжения всегда разрешима и имеет единственное решение;

2) если $æ-p_j^{(1)}>0$, то задача, безусловно, разрешима и имеет $æ-p^{(1)}$ линейно независимых решений;

3) если $æ-p_j^{(1)}<0$, то задача разрешима при выполнении условия разрешимости

$$\int_{\Gamma}(t-z_0)^{-æ}R^{+}(t)\left[(t-z_0)^{-æ}g_2(t)dt=0\right].$$

В третьей главе, которая состоит из пяти параграфов, исследуется линейная граничная задача в общем виде, когда коэффициент имеет сингулярность модульного характера.

В §1 настоящей главы изучается граничная задача линейного сопряжения в общем виде с наличием нулей и бесконечностей различного типа.

Если Γ состоит из контуров Ляпунова $\Gamma_0,\Gamma_1,...,\Gamma_m$ и разделяющей плоскости комплексных переменных в областях $D^{\pm}$.

Найдём функции $\Phi^{+}(z)$ и $\Phi^{-}(z)$, аналитические в D^{+} и D^{-}, представляемые интегралом Коши, если почти всюду на Γ они имеют

граничные значения $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$, удовлетворяющие следующему соотношению:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{|t-\alpha|^{\gamma}}{|t-\beta|^{\mu}}a(t)\Phi^{-}(t)+\frac{|t-\alpha|^{\gamma}}{|t-\beta|^{\mu}}b_1(t)\overline{\Phi^{-}(t)}+c(t),\quad \varphi^{-}(\infty)=0, \quad (0.0.10)$$

здесь $\alpha,\ \beta$ - различные точки контура, $\gamma,\ \mu$ - натуральные числа.

Разделим целую и дробную части чисел $\mu=d-\nu_1,\ \gamma=p-\nu_2,$ где p и d - целые положительные числа, $\nu_1,\ \nu_2$ - дробная часть, т.е. $0<\nu_1<1,\ 0<\nu_2<1.$

Теорема 3.1.1. *Допустим, что функции* $a_1(t),\ b_1(t),\ c(t)$ *из класса Гельдера. Пусть выполняется следующее неравенство:*

$$\sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b_4(t)}{a_4(t)}\right|<\frac{2}{1+S_p},\ \left(\sup_{t\in\Gamma}\left|\frac{b_1(t)}{a_1(t)}\right|<\frac{2}{1+S_p}\right)$$

здесь S_p *- норма оператора.* $S_\mu\equiv\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau-t}d\tau.$ $æ=\mathrm{Ind}_{\Gamma}a_4(t)$.

Если $æ>0$, *то неоднородная задача, безусловно, разрешима, а однородная имеет* $2æ$ *решения. При* $æ=0$ *, задача имеет единственное решение. При* $æ<0$, *однородная задача имеет только нулевое решение, а для того чтобы неоднородная задача была разрешима, требуется следующее условие:*

$$\int_{\Gamma}t^{-æ}Q[c_2(t)]dt=0,\qquad k=0,1,...,|æ|-1,$$

здесь Q *- линейный оператор.*

В §2 настоящей главы исследуется общая граничная задача сопряжения с производными первого порядка в сингулярном случае.

Пусть D^{+} - внутренняя область, ограниченная контуром Γ, где Γ состоит внутри контуров Ляпунова $\Gamma_0,\Gamma_1,...,\Gamma_m$, здесь Γ_0 содержит внутри себя все остальные. Внешнюю область обозначим через D^{-}.

Рассмотрим следующую задачу.

Требуется найти $F^{+}(z)$ и $F^{-}(z)$, аналитические функции в областях $D^{\pm}$, по граничному условию:

$$F^{+}(t)=\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}a_1(t)\frac{dF^{-}}{dt}+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}b_1(t)\overline{\frac{dF^{-}}{dt}}+$$

$$+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}p_1(t)F^{-}(t)+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}q_1(t)\overline{F^{-}(t)}+c(t),\quad F^{-}(\infty)=0,\quad (0.0.11)$$

где $a_1(t),\ b_1(t),\ p_1(t),\ q_1(t),\ \ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$, $\alpha,\ \beta$ - различные точки контура, $d,\ p$ - целые положительные числа.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $A_1(t),\ B_1(t),\ p_1(t),\ q_1(t),\ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$ *и*

$$\left\{\max_t\left|\frac{b_2(t)}{a_2(t)}(t-\beta)^{2p}\cdot t^{-2p-1}\right|+\max_t\left|\frac{p_2(t)t^{2p+1}}{\chi^{-}(t)a_2(t)}\right|+\max_t\left|\frac{q_2(t)t^{2p+1}}{\chi^{-}(t)a_2(t)}\right|\cdot\right\}\cdot$$

$$\cdot\left\|\tilde{V}_1\right\|_{L_2}\cdot\frac{1+S_2}{2}<1,$$

S_2 - *норма в* L_2 *сингулярного оператора* $S_\mu\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau,$

$$\chi^{+}(t)=t^{-æ}\prod a_2(t)\chi^{-}(t),\ \ \prod(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{æ_k},\ \ z_k\in D_k^{-};$$

$$æ=Ind_{\Gamma_k}a_1(t),\qquad æ=\sum_{k=0}^{m}æ_k.$$

Тогда: если $æ-2p-1\geq 0$, *то неоднородная задача, безусловно, разрешима, а однородная задача (0.0.11), имеет* $2(æ-2p-1)$ *решения;*

если $æ - 2p - 1 < 0$, *то однородная задача имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи, требуется следующее условие разрешимости:*

$$\int_{\Gamma} t^{-k} Q[c(t)]dt = 0, \qquad k = 0,1,...,|æ\text{-}2p\text{-}1|,$$

здесь Q *- линейный оператор.*

В третьем параграфе этой главы исследуется граничная задача аналитических функций с производными в сингулярном случае.

Пусть Γ - простой гладкий замкнутый контур, который делит плоскость на внутреннюю и внешнюю области $D^{\pm}$, по граничному условию:

$$\Phi^{+}(\mathrm{t}) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu}|t-\alpha_k|^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}|t-\beta_j|^{p_j}} A_1(t)\cdot t^2 \frac{d\Phi^{-}}{dt} + \frac{\prod_{k=1}^{\mu}|t-\alpha_k|^{m_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}|t-\beta_j|^{p_j}} A_1(t)\cdot t\Phi^{-}(t) + c(t), \qquad (0.0.12)$$

где $\alpha_k (k = 1,2,..., \mu)$, $\beta_j (j = 1,2,..., \nu)$ - различные точки контура, m_k, p_j - натуральные числа, $a_1(t)$, $c(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$, $a_1(t) \neq 0$.

Обозначим: $\sum_{k=1}^{\mu} m_k = m$, $\sum_{j=1}^{\nu} p_j = p$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $A_1(t)$, $c(t)$ *- функции, удовлетворяющие условию Гельдера. Если* $æ - p < 0$ *, тогда в решении задачи, надо предположить* $\mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z) \equiv 0$ *и потребовать* $|æ - p|$, *условий разрешимости:*

$$\int_{\Gamma} \frac{c_1(\tau)}{\chi^{+}(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \qquad k = 1,2,...,|æ - p|.$$

Если $æ - p \geq 0$, *то неоднородная задача имеет* $|æ - p|$ *решения. Если* $æ - p < 0$, *то число условий разрешимости задачи равна* $|æ - p|$, *заметим, что здесь при* $æ - p = 0$, *неоднородная задача, имеет единственное решение.*

В четвертом параграфе третьей главы исследуется общая граничная задача линейного сопряжения в общем виде для полуплоскости в особом случае.

Пусть Γ - есть действительная ось. Найдём аналитические функции в верхней и нижней полуплоскостях функций $F^{+}(z), F^{-}(z),$ представимые интегралом типа Коши, по граничному условию:

$$F^{+}(t)=\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}A_1(t)F^{-}(t)+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}B_1(t)\overline{F^{-}(t)}+c(t),$$
$$-\infty<t<\infty,\ F^{+}(\infty)=F^{-}(\infty)=c(\infty)=0, \qquad (0.0.13)$$

$A_1(t),\ B_1(t),\ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$. $\alpha,\ \beta$ - несовпадающие точки Γ, $d,\ p$ - натуральные числа.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $A_3(t)\in H(-\infty,\infty),\quad A_3(t)\neq 0$, $b(t)$ - *ограниченная и измеримая функция,* $c_2(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ *и* $F^{\pm}(t)\in L_2(-\infty,\infty)$.

$$æ=Ind_{\Gamma}A_3(t)=\frac{1}{2\pi i}\{\ln A_3(t)\}_{-\infty}^{\infty},\ \sup_{-\infty<t<\infty}\left|\frac{B_3(t)}{A_3(t)}\right|<1,\quad \left(\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\right|<1\right).$$

Тогда:

1) при $æ-2p>0,\ l=2(æ-p)$ *и* $p=0;$

2) при $æ-2p<0,\ l=0,\ p=|æ-2p|$. *(*l *- число решений однородной задачи,* p *−число условий разрешимости неоднородной задачи).*

Для разрешимости неоднородной задачи требуются, следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-i)^{-k}Q[c_2(t)]dt=0,\quad k=1,2,\ldots,-æ+2p\ ,$$

здесь Q *- линейный оператор.*

В пятом параграфе этой главы исследуется сингулярная граничная задача с производными высших порядков, главный коэффициент которой имеет нули и полюсы комплексно сопряженного вида.

Пусть Г - многосвязная область и разбивает плоскость на области $D^{\pm}$. Рассмотрим следующую задачу:

$$E^{+}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}\overline{(t-\alpha_k)}^{\delta_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}\overline{(t-\beta_j)}^{s_j}}A_n^*(t)\frac{d^nE^-}{dt^n}+\prod_{k=1}^{\mu}\overline{(t-\alpha_k)}^{\delta_k}B_n^*(t)\overline{\frac{d^nE^-}{dt^n}}+$$
$$+\prod_{k=1}^{\mu}\overline{(t-\alpha_k)}^{\delta_k}\sum_{k=0}^{n-1}\left[A_k^*(t)\frac{d^kE^-}{dt^k}+B_k^*(t)\frac{d^kE^-}{dt^k}\right]+c(t), \qquad (0.0.14)$$

где $A_n^*(t)$ - непрерывны, $A_n^*(t)\neq 0$ и все $A_k^*(t)$, $B_k^*(t)$ ограничены и измеримы, $E^{+}(t)$, $\frac{d^nE^+}{dt}$ и $c(t)\in L_p(\Gamma)$.

Здесь $\alpha_k(k=1,2,...,\mu)$, $\beta_j(j=1,2,...,\nu)$ - различные точки контура, δ_k, s_j - натуральные числа.

Заметим, что аналитическая функция $E^{-}(z)$ через производную n-го порядка, выражается следующим образом:

$$E^{-}(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi_n^-}{\tau^n}(\tau-z)^{n-1}\ln(1-\frac{\tau}{z})d\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k z^k=V(\psi_n^-).$$

$$\frac{d^kE^-}{dz^k}=\frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\psi_n^-}{\tau^{n-k}}(\tau-z)^{n-k-1}\ln(1-\frac{\tau}{z})d\tau+\sum_{j=0}^{n-k-2}a_jz^j=V_{n-k}(\psi_n).$$

Теорема 3.5.1. *Пусть* $D^{\pm}$ - *внутренняя и внешняя области,* A_n^*, B_n^*, $c(t)$ *и все* $B_k(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$.

Кроме того, пусть выполнено условие:

$$\left\{\max_t\left|\frac{b_n(t)}{a_n^*(t)}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\max_t\left|t^{s+n}\frac{a_k(t)}{\chi^-(t)a_n^*(t)}\right|+\right.\right.$$

$$\left.+\max_t\left|t^{s+n}\frac{b_k(t)}{\chi^-(t)a_n^*(t)}\right|\right]\left\|\tilde{V}_{n-k}\right\|_{L_2}\frac{1+\|S\|_{L_2}}{2}<1.$$

Тогда: если $æ-s-n\geq 0$, *то однородная задача имеет* $2(æ-s-n)$ *решений над полем вещественных чисел, а для неоднородной задачи условие разрешимости не требуется;*

если $æ-s-n<0$, *то однородная задача имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной требуется выполнение* $2|æ-s-n|$ *вещественных или* $|æ-s-n|$ *комплексных условий:*

$$\int_{\Gamma} t^{-k}R[c(t)]dt=0, k=0,1,\dots,|æ-s-d|-1,$$

здесь R - вполне определённый оператор.

В четвертой главе, которая состоит из трёх параграфов, изучается граничная задача для $n-$пар функций с разрывными коэффициентами.

В первом параграфе настоящей главы изучается граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами.

Пусть γ - контур, состоящий из нескольких чисел $\nu+1$ простых замкнутых гладких контуров $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_\nu$, в котором ограничивается область D^+. Через D^- обозначим внешнюю область.

Задача. Требуется найти $f^{\pm}(z)$, соответственно, аналитическую функцию в областях $D^{\pm}$ по граничному условию:

$$f^+(t)=A(t)f^-(t)+g(t).$$

Функцию $A(t)$ будем называть коэффициентом задачи, и $g(t)$ - её свободным членом.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $A(t)$ *и* $q(t)$ *из класса Гельдера.* $A(t)$ *в конечной число точек контура имеет разрыв первого рода и* $æ = IndA(t)$.

Тогда, при $æ \geq 0$ *неоднородная задача имеет* $æ$ *решения, а при* $æ < 0$, *требуется* $|æ|$ *условие разрешимости. При* $æ = 0$, *неоднородная задача имеет единственное решение.*

В §2 этой главы изучается граничная задача теории аналитических функций для *n* пар функций с разрывными коэффициентами.

Дан L - контур, состоящий из некоторого числа $\nu + 1$ замкнутых гладких кривых $L_0, L_1, ..., L_\nu$, в котором ограничивается область D^+. Через D^- обозначим внешнюю часть области.

Требуется определить *n* пар функций

$$\varphi_i^+(z),\ \varphi_i^-(z)\ \ (i = 1,2,...,n)$$

голоморфных в областях D^+, D^-, предельные значения которых на контуре L непрерывны и удовлетворяют следующим линейным соотношениям:

$$\varphi_i^+(t) = a_{i1}(t)\varphi_1^-(t) + ... + a_{in}(t)\varphi_n^-(t) + b_i(t),$$

где $a_{ij}(t),\ b_i(t) \in \mathrm{H}(L)$.

Обозначая матрицу коэффициентов $\|a_{ij}\|$ через $A(t)$, а вектор с составляющими $b_i(t)$ через $b(t)$, запишем граничное условие, в следующем виде:

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t).$$

В §3 этой главы изучаются сингулярные случаи граничной задачи Римана для *n* - пар функций, когда определитель обращается в нуль.

Граничная задача сопряжения для *n* пар функций запишется в векторной форме:

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t)$$

здесь определитель $A(t)$ может иметь нуль в конечных числах точек.

Решение задачи даётся в явном виде:

$$\varphi^{+}(z) = \chi_1^{+}(z)\left[P(z) + \Phi^{+}(z)\right],$$

$$\varphi^{-}(z) = R^{-1}\chi_1^{-}(z)\left[P(z) + \Phi^{-}(z)\right],$$

где $P(z)$ вектор из полиномов с произвольными коэффициентами, $\varphi^{\pm}(t)$ аналитические функции в областях $D^{\pm}$.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ ПО ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ СОПРЯЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ РАЗЛИЧНОГО ТИПА НА КОНТУРЕ

В этой главе излагается анализ изученной литературы по теме диссертационной работы, приводятся основы теоретико-методологического исследования, анализ существующих проблем и полученных результатов, анализ нерешённых задач по теме диссертационной работы.

Предметом настоящей диссертации является теория граничных (краевых) задач аналитических функций и её приложения к решению особых (сингулярных) интегральных уравнений с ядром Коши и Гильберта. Мы ограничиваемся линейными задачами для одной неизвестной функции.

Излагаемые теории зарождались в XX столетии в трудах классиков - математиков, среди которых, в первую очередь, следует назвать: Ф.Д. Гахова [22-30], Н.И. Мусхелешвили [2] (монография), Л.Г. Михалова [4] (монография), И.Н. Векуа [15-19], Н.П. Векуа [20], Д.А. Квеселава [48-52], В.Д. Купрадзе [55-56], Г.Ф. Манджавидзе [69-70], М.В. Кельдиша [53-54], Б.В. Хведелидзе [119], Ю.А. Черского [120], Г.С. Литвинчука [57-68], А.И. Маркушевич [71], И.И. Привалова [76], И.Б. Симоненко [91-92], В.И. Смирнова [3] (монография), В.А. Батырева [8], И.Х. Сабитова [86-87], Н.Усмонова, М.Б. Холиковой [94-97] и многих других.

Анализ этих и некоторых других работ дан во второй и в третьей главах.

§ 1.1. Краткий исторический обзор по граничным задачам теории аналитических функций

Полное решение задачи Римана для односвязной области дано Ф.Д. Гаховым в 1936 году.

Задача Римана для односвязной области дана в следующей постановке.

Постановка задачи. Даны простой гладкий замкнутый контур L, делящий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю область D^-, и две функции точек контура $G(t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие на контуре L условию Гельдера, причём $G(t)$ не обращается в нуль.

Задача Римана. Надо найти две функции: $\Phi^+(z)$- аналитическую в области D^+ и $\Phi^-(z)$ –аналитическую в области D^-, включая $z=\infty$, удовлетворяющие на контуре L линейному соотношению:

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{(однородная задача)}$$

или

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{(неоднородная задача).}$$

Функцию $G(t)$ будем называть коэффициентом задачи Римана, а функцию $g(t)$ –её свободным членом.

Теорема 1 (Ф.Д. Гахова [1]). *Если индекс* æ *граничной (краевой) задачи Римана неотрицателен, то однородная задача имеет* $æ+1$ *линейно независимых решений:*

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi_k^-(z) = z^{k-æ} e^{\Gamma^-(z)} \qquad (k = 0,1,\ldots,æ)$$

Общее решение содержит $æ+1$ *- произвольных постоянных. При отрицательном индексе задача неразрешима.*

Теорема 2 (Ф.Д. Гахова [1]). *В случае* $æ \geq 0$, *неоднородная задача Римана разрешима при любом свободном члене и её общее решение даётся формулой*

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \chi(z) P_{æ}(z),$$

где $\chi(z)$- *каноническая функция и* $P_{æ}(z)$ *−полином степени* $æ$ *с произвольными комплексными коэффициентами. Если* $æ = -1$, *то неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение.*

В случае $æ < -1$ *неоднородная задача, вообще говоря, неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял* $-æ-1$ *условий.*

Также исключительные (сингулярные) случаи задачи Римана изучены Ф.Д. Гаховым [1], другим методом изучал Л.А. Чикин [121]. В постановке граничной (краевой) задачи Римана требовалось, чтобы коэффициент $G(t)$ удовлетворял условию Гельдера, что исключала возможность обращения его в бесконечность, и нигде не обращался бы в нуль. В сингулярном (исключительном) случае, допускается, что функция $G(t)$, в отдельных точках контура, обращается в нуль или бесконечность целых порядков.

Задача Римана с коэффициентом, имеющим нуль и бесконечности комплексно сопряжённого вида, изучена в работе Н. Усмонова, М.Б. Холиковой [96].

Теорема (Н.Усмонов, М.Б. Холикова [96]). *Пусть* L *состоит из простых замкнутых гладких контуров* $L_0, L_1, ..., L_m$ *и ограничивает конечную часть* D^+. *Через* D^- *обозначим дополнение* $D^+ + L$ *до полной плоскости;* $G_1(t) \neq 0 -$

удовлетворяет условию Гельдера и $g(t)$ *в точках* α_k *дифференцируема* d *раз,* $æ = IndG_1(t)$. *Тогда:*

В случае $æ - d \geq 0$, *неоднородная задача разрешима при любом свободном члене. Если* $æ - d = -1$, *то неоднородная задача также разрешима и имеет единственное решение.*

В случае $æ - d < -1$, *неоднородная задача неразрешима. Для того чтобы она была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы свободный член задачи удовлетворял* $-æ + d - 1$ *условиям:*

$$\int_L \frac{q_1(\tau)}{\chi^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \qquad (k = 1,2,...,- æ + d - 1).$$

При написании истории этого вопроса и анализа существующих работ по данной тематике, автор использовал работу Ф.Д. Гахова [1] (монография).

Более поздние работы по граничной (краевой) задаче Римана направлены, главным образом, на расширение класса заданных и искомых функций. Здесь мы изложим основные, из полученных в этом направлении, результаты.

1⁰. Б.В. Хведелидзе [119] исследовал задачу Римана в предположении, что $G(t)$, как обычно, удовлетворяет условию Гельдера, а $g(t) \in L_p$ (интегрируемая функция в степени p по Лебегу). На основе теории интеграла типа Коши, в соответствующем классе, получено полное решение граничной (краевой) задачи. Полученные результаты (и в качественном отношении - подсчёт числа решений и условий разрешимости, в зависимости от индекса, и алгоритмический вид формул, дающие решение в замкнутой форме) - такие же, как и в случае $g(t)$, удовлетворяют условию Гельдера.

Теперь мы приведём решение И.Б. Симоненко [91].

В основе лежит следующая простая идея. В случае $G(t) \equiv 1$ имеем задачу о скачке, которая, безусловно и однозначно, разрешима в классе L_p. Оказывается,

что малые отклонения коэффициента не меняют характера решения. Переход к общему случаю производится путём приближения непрерывной функции функциями, удовлетворяющими условию Гельдера.

Пусть в качестве условия задачи Римана:

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t)$$

$G(t)$ есть непрерывная функция, а $g(t) \in L_p$. Решение схематически можно разбить на четыре этапа.

1. На основе результатов Б.В. Хведелидзе для интеграла типа Коши в классе L_p, выводится оценка:

$$\left\|\Phi^{\pm}(t)\right\| = \left\|\pm\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}S_{\varphi}\right\| \le \frac{1+\mathrm{M}_p}{2}\left\|\varphi\right\|,$$

где $\mathrm{M}_p -$норма оператора $S\left(S_{\varphi} = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\right)$.

2. Опираясь на принцип сжатых отображений (метод последовательных приближений), автор доказывает, что задача Римана, коэффициент которой есть измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$\left|G(t) - 1\right| < \frac{2}{1+\mathrm{M}_p},$$

имеет единственное решение.

3. В случае нулевого индекса, доказывается однозначная разрешимость задачи следующим образом. Берётся функция $G_1(t)$, удовлетворяющая условию Гельдера, не обращающаяся нигде в нуль и достаточно близкая к $G(t)$:

$$\left|G(t)G_1^{-}(t) - 1\right| < \frac{2}{1+\mathrm{M}_p};$$

для неё осуществляется каноническое представление:

$$G_1(t) = \chi_1^+(t)(\chi_1^-(t))^{-1}$$

и вводятся новые неизвестные функции: $\Phi_1^{\pm}(t) = \Phi^{\pm}(t)(\chi_1^{\pm}(t))^{-1}$.

Задача при переходе к этим неизвестным, преобразуется к задаче с коэффициентом $G(t) \cdot G_1^{-1}(t)$.

4. Случай любого индекса исследуется сведением его к нулевому. Полученные результаты совершено те же, что и у Б.В. Хведелидзе, для $G(t)$, удовлетворяющего условию Гельдера.

2⁰. Ю.И. Черский [120] рассмотрел краевую задачу Римана в абстрактном пространстве, считая, что в краевом условии:

$$\varphi^+ = A\varphi^- + g$$

A - есть линейный оператор, а φ^+, φ^-, g – элементы пространства Банаха. Аксиоматически определяется сингулярный оператор S. Основным определяющим свойством является $S^2 = 1$ [1-единичный оператор] при условии $S \neq \pm 1$. Элементы $\varphi^{\pm}$ образуются из произвольного элемента φ по формуле:

$$\varphi^{\pm} = \frac{1}{2}(\pm\varphi + S_{\varphi}).$$

Индекс определяется через некоторый оператор. Дано полное решение задачи в такой постановке.

3⁰. Вопрос приближения краевой задачи Римана рассматривался в работе А.В. Батырёва [8]. Здесь коэффициент $G(t)$ приближается функцией:

$$r_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k t^k .$$

Краевая задача сопряжения с непрерывными коэффициентами в сингулярном случае исследована Н. Усмоновым, М.Б. Холиковой.

Теорема (Н. Усмонов, М.Б. Холикова [97]). *Пусть* $\Gamma-$ *контур, состоящий из* $m+1$ *простых замкнутых контуров типа Ляпунова* $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$, *ограничивает конечную область* D^+. *Через* D^- *обозначим* $D^+ + \Gamma$ *до полной плоскости.* D *состоит из конечных частей* D_k, $k = 1,2,...,m$ *и бесконечной* D_0; $G_1(t) \neq 0-$ *непрерывная функция,* $g(t) \in L_p(\Gamma)$ *и в точках* α_k *дифференцируема* $m-1$ *раз;* $æ = IndG_1(t)$.

Тогда:

а) в случае $æ - p = 0$, *краевая задача сопряжения, безусловно, разрешима и имеет единственное решение.*

б) в случае $æ - p > 0$, *задача также, безусловно, разрешима и имеет* $æ - p$ *линейно независимых составляющих общего решения.*

в) в случае $æ - p < 0$, *задача разрешима лишь при выполнении* $|æ - p|$ *условий разрешимости* $S_k g(t) = 0$, *где* $S_k -$*линейно независимые функционалы. При выполнении условий разрешимости, решение существует и единственно.*

§ 1.2. Анализ работ по граничным задачам линейного сопряжения общего вида

Общая граничная задача линейного сопряжения аналитических функций, является:

$$\Phi^{+}(t) = a(t)\Phi^{-}(t) + b(t)\overline{\Phi^{-}(t)} + c(t). \qquad \text{(A)}$$

Задача составлена А.И. Маркушевичем [71] в 1946 г. и исследовалась им при $a \equiv c \equiv 0,\ b \equiv 1.$ В 1952г. Н.П. Векуа [20] привёл её к сингулярному интегральному уравнению, получил условие нормальной разрешимости $a(t) \neq 0$ и доказал её разрешимость в классе мероморфных функций. Важное значение приобрела задача (А) в работах И.Н. Векуа [15] по изгибаниям склеенных поверхностей. В связи с этим, её исследовал в 1959г. Б.В. Боярский [14], указав на существенное значение условия $|a(t)| > |b(t)|$.

При написании истории этого вопроси и анализе существующих работ по данной тематике, автор использовал работу Л.Г. Михайлова [4] (монографию).

Полная теория задачи (А) при весьма общих условиях: $a(t)$ непрерывна, $b(t)$ измерима и ограничена, $c(t) \in L_p,\ \ p > 1.$

В задаче (А) следует различать случаи:

1) $|a(t)| > |b(t)|,$ 2) $|a(t)| \equiv |b(t)|,$ 3) $|a(t)| < |b(t)|,$ которые соответственно называют эллиптический, параболический, гиперболический.

Теорема 1 (Л.Г. Михайлов [4]). *Пусть* $a(t)$ *непрерывна,* $a(t) \neq 0,$ $æ = Ind_{\Gamma} a(t),\ b(t)$ *ограничена и измерима, и* $c(t) \in L_p,\ \ p > 1.$ *Рассматриваются решения, представимые интегралом Коши и* $\varphi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma).$ *Пусть*

$$\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b(t)}{a(t)} \right| < \frac{2}{1 + S_p},$$

где S_p *– норма в* L_p *сингулярного оператора*

$$S_\mu \equiv \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau.$$

Тогда при $æ > 0$, *однородная задача имеет* $2æ$ *- линейно независимых решений, а неоднородная, безусловно, разрешима. При* $æ = 0$, *задача имеет, и притом, единственное решение, нулевое для однородной задачи. При* $æ < 0$, *однородная задача не имеет решений, отличных от нулевых, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно* $2|æ|$ *вещественных или* $|æ|$ *комплексных условий*

$$\int_\Gamma t^{-k}\cdot Q[c(t)]dt = 0, \qquad k = 0,1,\ldots, |æ| - 1,$$

где Q *– линейный оператор.*

Теорема 2 (Л.Г. Михайлов [4]). *Пусть в задаче (А)* $|a(t)| \equiv |b(t)| > 0$, $a(t),\ b(t),\ c(t)$ *удовлетворяют условию Гельдера,*

$$\lambda = Ind_\Gamma a(t) + Ind_\Gamma b(t),\ \ \mu = Ind_\Gamma a(t) - Ind_\Gamma b(t),$$

$$æ = Ind_\Gamma a(t),\ \ \lambda + \mu = 2æ,$$

l *– число решений однородной задачи и* p *– число условий разрешимости неоднородной.*

Рассматриваются решения, ограниченные на бесконечности и исключается случай, когда область многосвязная.

Тогда картина разрешимости, имеет вид:

1. если $\lambda < 0,\ \mu < 0,$ *то* $l = 0,\ \ p = 2|æ| - 2;$

2. если $\lambda < 0,\ \ \mu \ge 0,$ *то* $l = \mu + 1,\ \ p = |\lambda| - 1;$

3. если $\lambda \geq$, $\mu < 0$, *то разрешимость определяется из системы* $|\mu| - 1$ *уравнений с* $\lambda + 1$ *неизвестными.*

Различаются два случая: 1) $æ \geq -1$, тогда $p = 0$ и, вообще говоря, $l = 2(æ + 1)$, но в некоторых специальных случаях, когда имеются определённые скалярные зависимости между $a(t)$ и $b(t)$; $l -$ может быть больше, любых из неравенств

$$2æ + 2 \leq l \leq \lambda + 1;$$

2) $æ < -1$, тогда, в общем случае, $l = 0$, $p = -2æ - 2$, но в указанных специальных случаях l и p могут быть больше любых из неравенств

$$0 \leq l \leq \lambda + 1, \text{ и } -2æ - 2 \leq p \leq |\mu| - 1.$$

Замечание. Если ищутся решения с $\varphi^{-}(\infty) = 0$, то всюду нужно μ заменит на $\mu - 2$.

§ 1.3. Анализ работ по граничным задачам линейного сопряжения для n-пар функций

Вопрос о решении задачи Римана с разрывными коэффициентами возник одновременно с постановкой самой задачи Римана. Задача с самого начала была поставлена как задача с разрывными коэффициентами.

Полное решение задачи Римана с разомкнутыми контурами было дано в 1941г. независимо двумя авторами: Н.И. Мусхелишвили [2] и Ф.Д. Гаховым [1]. В этой же работе Ф.Д. Гахов дал также решение задачи с разрывными коэффициентами. Методом Н.И. Мусхелишвили она была решена несколько позже Д.А. Квеселава [49].

Характерным является то, что Н.И. Мусхелишвили, Ф.Д. Гахов и Д.А. Квеселава решили задачи с разрывными коэффициентами и разомкнутыми контурами сразу, сводя одну к другой, когда как ранее, каждая из этих задач решалась самостоятельно своими собственными методами, причём работы, в которых давались решения этих задач, отделены промежутком в 15 лет.

Ф.Д. Гахов [1] в дальнейшем применил свой метод в теории краевой задачи Римана со многими неизвестными функциями.

Фундаментальные функции, устраняющие разрыв, удалось записать в том же виде, что и в случае одной неизвестной функции, с тем лишь различием, что показателем λ здесь является матрица. Тем же методом Л.И. Чибрикова дала решение обобщённой задачи Римана с разрывными коэффициентами и для разомкнутых контуров.

Метод Н.И. Мусхелишвили нашёл применение при решении задачи Римана для сложных контуров. Д.А. Квеселава предложила каноническое решение задачи в виде произведения канонических решений для простых составляющих контуров, что внесло значительное упрощение в решении. Однако все ещё оставались сложности из-за различия способов образования канонических решений для замкнутых и разомкнутых контуров.

Ф.Д. Гахов предложил для получения канонического решения в случае замкнутого контура применить тот же метод, что и при решении задачи для разомкнутого контура и дело свелось к решению задачи с разрывными коэффициентами. Применение этого приёма окончательно упростило решение задачи в случае сложного контура, и оно приняло тот же вид, что и решение для многосвязной области.

Теорема (Ф.Д. Гахов [1]). *Если индекс* æ *задачи Римана в заданном классе положителен, то общее решение неоднородной задачи линейно зависит от* æ + 1 - *произвольных постоянных и определяется формулой:*

$$\Phi^{+}(z)=\prod_{k=1}^{l}(z-t_k)^{\nu_k}\,\chi_1^{+}(z)\left[\psi^{+}(z)+P_{æ}(z)\right],$$

$$\Phi^{-}(z)=\prod_{k=1}^{l}\left(\frac{z-t_k}{z-z_0}\right)^{\nu_k}\chi_1^{-}(z)\left[\psi^{-}(z)+P_{æ}(z)\right],$$

где

$$\chi_1^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)},$$

$$\chi_1^{-}(z)=(z-z_0)^{-æ}e^{\Gamma^{-}(z)},$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(\tau-z_0)^{-æ}\prod_{k=1}^{l}(\tau-z_0)^{-\gamma_k}G(\tau)}{\tau-z_0}\,d\tau,$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{k=1}^{l}(\tau-t_k)^{-\gamma_k}g(\tau)}{\chi_1^{+}(\tau)(\tau-z_0)}\,d\tau,$$

и при дополнительном условии $\Phi^{-}(\infty)=0$, $P_{æ}$ *следует заменить на* $P_{æ-1}$.

При $æ \leq 0$, *однородная задача в заданном классе неразрешима, а неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняются* $-æ$ *условий:*

$$\int_L \frac{\prod_{k=1}^{l}(t-t_k)^{-\gamma_k}\, g(\tau)}{\chi_1^{+}(\tau)}\tau^{j-1}d\tau = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,-æ).$$

Если эти условия выполнены, то неоднородная задача имеет единственное решение, которое получается при $P_{æ}(z) \equiv 0$.

ГЛАВА 2. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ МОДУЛЬНОГО ХАРАКТЕРА

В настоящей главе изучаются: граничная задача Римана на вещественной оси, когда коэффициент имеет сингулярность модульного характера, т.е. когда коэффициент обращается в конечном числе точек в нуль и бесконечность модулного характера. Найдено решение задач в явном виде; граничная задача сопряжения с рациональными коэффициентами, имеющая сингулярность модульного характера, т.е. когда коэффициент обращается в нуль и бесконечность модулного харктера. Решение задачи и условия разрешимости найдены в явном виде; граничная задача Гильберта с наличием нулей и бесконечностей модульного характера на контуре, т.е. рассматриваются задачи Гильберта с нулей и бесконечностей модулного характера. Решение задачи найдено в явном виде; граничная задача сопряжения с непрерывными коэффициентами с сингулярностью модульного характера на контуре, т.е. расматриваются задача сопряжения с непрерывными коэффициентам в случае, когда коэффициент в конечном числе точек обращается в нуль и бесконечность модулного характера. Найдены число решение однородной задачи и число условий разрешимости неоднородной задачи.

§ 2.1. Граничная задача Римана на вещественной оси, когда коэффициент имеет сингулярность модульного характера

Дан контур Γ, где Γ - есть действительная ось, задача линейного сопряжения заключается в том, чтобы найти $F^{+}(z), F^{-}(z)$ аналитические, соответственно, в областях D^{+} и D^{-}, где D^{+} и D^{-}, соответственно, в верхних и нижних полуплоскостях, граничные значения которых на контуре, удовлетворяют следующему равенству:

$$F^{+}(t)=\prod_{r=1}^{J}|t-a_r|^{d_r}\prod_{n=1}^{N}|t-b_n|^{-s_n}\cdot D_1(t)F^{-}(t)+c(t), \qquad (2.1.1)$$

здесь $D_1(t),\ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma),\ a_r,\ b_n$- различные точки контура, $D_1(t)\neq 0$.

Решение поставленной задачи ищем в классе функций, имеющих особенность меньше единицы.

Введем обозначения:

$$\sum_{r=1}^{J}d_r=\sum_{j=1}^{J}\left(q_r^{(1)}-\zeta_r^{(1)}\right),\ \ \sum_{n=1}^{N}s_n=\sum_{n=1}^{N}\left(q_n^{(2)}-\zeta_n^{(2)}\right),$$

где целые части обозначим через $\sum_{r=1}^{J}q_r^{(1)},\ \sum_{n=1}^{N}q_n^{(2)}$, а дробные части через $\sum_{r=1}^{J}\zeta_r^{(1)},\ \sum_{n=1}^{N}\zeta_n^{(2)}$, т.е.

$$0<\zeta_r^{(1)}<1,\ 0<\zeta_n^{(2)}<1,\ \sum_{r=1}^{J}d_r=d,\ \ \sum_{n=1}^{N}s_n=s.$$

Нам необходимы равенства:

$$\prod_{r=1}^{J}|t-a_r|^{d_r} = \prod_{r=1}^{J}(t-a_r)^{d_r} \cdot \exp\left(-i\sum_{r=1}^{J}\theta_r^{(1)}d_r\right),$$

$$\prod_{n=1}^{N}|t-b_n|^{s_n} = \prod_{n=1}^{N}(t-b_n)^{s_n} \cdot \exp\left(-i\sum_{n=1}^{N}\theta_n^{(2)}s_n\right). \qquad (2.1.2)$$

где $\theta_r^{(1)} = \arg(t-a_r),\ \theta_n^{(2)} = \arg(t-b_n)$.

Используя равенства (2.1.2), граничные условия (2.1.1) перепишем в следующем виде:

$$F^{+}(t) = \prod_{r=1}^{J}(t-a_r)^{d_r} \cdot \prod_{n=1}^{N}(t-b_n)^{-s_n} \cdot \exp\left(i\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\theta_n^{(2)}s_n - i\sum_{r=1}^{J}\theta_r^{(1)}d_r\right) \cdot D_1(t)F^{-}(t) + c(t)$$

,

или

$$F^{+}(t) = \prod_{r=1}^{J}(t-a_r)^{d_r} \cdot \prod_{n=1}^{N}(t-b_n)^{-s_n} \cdot D_2(t) \cdot F^{-}(t) + c(t), \qquad (2.1.3)$$

здесь

$$D_2(t) = \prod_{r=1}^{J}(t-a_r)^{\zeta_r^{(1)}} \prod_{n=1}^{N}(t-b_n)^{-\zeta_n^{(2)}} \exp\left(i\sum_{n=1}^{N}\theta_n^{(2)}s_n - i\sum_{r=1}^{J}\theta_r^{(1)}d_r\right).$$

Так как представленная функция $D_2(t)$ имеет множитель с дробными показателями, поэтому, она будет многозначной.

В силу ограниченности $F^{\pm}(t)$ на контуре, $F^{-}(z)$ будет представима в следующем виде:

$$F^{-}(z)=\prod_{n=1}^{N}\left(z-b_n\right)^{s_n}\cdot z^{-s}F_1^{-}(z) \qquad (2.1.4)$$

В результате, имеем:

$$F^{+}(t)=\prod_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{d_r}\cdot t^{-s}D_2(t)F_1^{-}(t)+c(t). \qquad (2.1.5)$$

Дальнейшее исследование требует, чтобы функция $c(t)$ в особых точках была дифференцируема, поэтому требуем дифференцируемость функции $c(t)$.

Допустим, что интерполяционный многочлен $T(t)$, удовлетворяет следующее равенство:

$$c^{(v)}(\tau_r)=T^{(v)}(\tau_r);\quad (v=0,1,...,d_{r-1};\ r=1,2,...,J) \qquad (2.1.6)$$

Используя (2.1.6), граничное условие (2.1.5) преобразуем следующим образом:

$$F^{+}(t)-T(t)=\prod_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{d_r}\cdot t^{-s}D_2(t)F_1^{-}(t)+c(t)-T(t).$$

В силу (2.1.6), имеем:

$$F^{+}(t)-T(t)=\prod_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{d_r}\cdot t^{-s}D_2(t)F_1^{-}(t)+\prod_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{d_r}\cdot c_1(t),$$

$$\frac{F^{+}(t)-T(t)}{\prod_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{d_r}}=t^{-s}D_2(t)F_1^{-}(t)+c_1(t),$$

$$F_1^{+}(t)=t^{-s}D_2(t)F_1^{-}(t)+c_1(t), \qquad (2.1.7)$$

здесь

$$F_1^+(t)=\frac{F_1^+(t)-T(t)}{\prod\limits_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{d_r}}.$$

В граничном условии (2.1.7), функция $D_2(t)$ имеет разрыв первого рода в точках $t=a_r$, $t=b_n$. Очевидно, что решение данной задачи существует, но в классе интегрируемых функций. Теперь нам следует данную задачу свести к задачам с непрерывными коэффициентами. Для этого достаточно построить функции, которые в точках $t=a_r$, $t=b_n$ имеют такие разрывы.

Для данной цели, введем новые функции, в которых имеются разрывы такого рода:

$$F_1^+(z)=\prod_{r=1}^{J}\left(z-a_r\right)^{\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}\left(z-b_n\right)^{-\zeta_n^{(2)}}F_2^+(z),$$

$$F_1^-(z)=\prod_{r=1}^{J}\left(\frac{z-a_r}{z-z_0}\right)^{\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{z-b_n}{z-z_0}\right)^{-\zeta_n^{(2)}}F_2^-(z), \qquad (2.1.8)$$

здесь z_0 - точка, принадлежащая области D^+, a_r, b_n - являются точками границы.

Подставляя (2.1.8) в (2.1.7), получим:

$$\prod_{r=1}^{J}\left(t-a_r\right)^{\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}\left(t-b_n\right)^{-\zeta_n^{(2)}}F_2^+(t)=$$

$$=\prod_{r=1}^{J}\left(\frac{t-a_r}{t-z_0}\right)^{\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{t-b_n}{t-z_0}\right)^{-\zeta_n^{(2)}}D_2(t)F_2^-(t)+c_1(t)$$

или

$$F_2^+(t)=\prod_{r=1}^{J}(t-z_0)^{-\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}(t-z_0)^{\zeta_n^{(2)}}D_2(t)F_2^-(t)+$$

$$+c_1(t)\cdot\prod_{r=1}^{J}(t-a_r)^{-\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}(t-b_n)^{\zeta_n^{(2)}}.$$

$$F_2^+(t)=t^{-s}D^*{}_2(t)F_2^-(t)+c_1^*(t), \qquad (2.1.9)$$

где

$$D_2^*(t)=\prod_{r=1}^{J}(t-z_0)^{-\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}(t-z_0)^{\zeta_n^{(2)}}\cdot D_1(t),$$

$$c_1^*(t)=c_1(t)\prod_{r=1}^{J}(t-a_r)^{-\zeta_r^{(1)}}\prod_{n=1}^{N}(t-b_n)^{\zeta_n^{(2)}}$$

Задача (2.1.9) есть задача с непрерывными коэффициентами (см. [1] стр. 432).

Решение задачи ищем по схеме конечного контура. Здесь, в отличие от конечного контура, начало координат и бесконечно удаленная точка находятся на контуре. Нам следует найти функцию, при помощи которой необходимо данную задачу свести к нулевому индексу. Для этой цели, возьмём функцию $\frac{t-i}{t+i}$, где

$$\arg\frac{t-i}{t+i}=\arg\frac{(t-i)^2}{t^2+1}=2\arg(t-i).$$

Итак,

$$Ind\frac{t-i}{t+i}=1.$$

Так как $IndD^*(t)=$ æ, то данная функция

$$D_2^*(t)\cdot\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ}$$

имеет нулевой индекс.

Решение однородной задачи построим при помощи следующих функций:

$$\chi^+(z)=e^{\Gamma^+(z)},\quad \chi^-(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ}\cdot e^{\Gamma^-(z)},$$

здесь

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-æ}\right]$$

используя верхние функции, граничные условия перепишем в следующем виде:

$$\frac{F_2^+(t)}{\chi^+(t)}=\frac{F_2^-(t)}{\chi^-(t)}+\frac{c_i^*(t)}{\chi^+(t)}.$$

Введем аналитическую функцию:

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c^*(\tau)}{\chi^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}. \qquad (2.1.10)$$

При помощи ее, граничные условия принимают следующий вид:

$$\frac{F_2^+(t)}{\chi^+(t)}-\psi^+(t)=\frac{F_2^-(t)}{\chi^-(t)}-\psi^-(t).$$

Здесь $\psi^-(\infty)\neq 0$. На основании теоремы об аналитическом продолжении и обобщенной теореме Лиувилля, имеем:

$$\frac{F_2^+(t)}{\chi^+(t)}-\psi^+(t)=t^{-s}\,\frac{F_2^-(t)}{\chi^-(t)}-\psi^-(t)=\frac{P_{æ-s}(t)}{(t+i)^{æ-s}}, \qquad æ-s\geq 0,$$

здесь $P_{æ-s}(t)$ - полином степени не выше $æ-s$ с произвольными комплексными коэффициентами.

Итак, получим решение данной задачи:

$$F_2^+(z)=\chi(z)\left[\psi(z)+\frac{P_{æ-s}(z)}{(z+i)^{æ-s}}\right], æ-s\geq 0,$$

$$F_2^-(z)=\chi(z)\left[\psi(z)+c\right], æ-s<0.$$

Если $æ-s<0$, то функция $\chi(z)$ имеет в точке $z=-i$ полюс порядка $-æ+s$. В данном случае, условия разрешимости задачи, имеют вид: $c=-\psi^-(-i)$.

Если $æ-s<-1$, то требуется выполнение условия разрешимости:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c^*(\tau)}{\chi^+(\tau)}\frac{d\tau}{(\tau+i)^k}=0 \quad (k=2,3,\ldots,|æ-s|), \tag{2.1.11}$$

Полученные результаты оформим, в виде теоремы.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $D_1(t),\ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma),\ a_r,\ b_n$ *- различные точки контура,* $D_1(t)\neq 0$,

$$\sum_{r=1}^{J}d_r=\sum_{j=1}^{J}\left(q_r^{(1)}-\zeta_r^{(1)}\right),\ \sum_{n=1}^{N}s_n=\sum_{n=1}^{N}\left(q_n^{(2)}-\zeta_n^{(2)}\right),$$

$q_r^{(1)},\ q_n^{(2)}$ *-целые част,* $\sum_{r=1}^{J}\zeta_r^{(1)},\ \sum_{n=1}^{N}\zeta_n^{(2)}$ *- дробные части,* $\sum_{r=1}^{J}d_r=d,\ \sum_{n=1}^{N}s_n=s$.

Тогда, если $æ - s \geq 0$ *, то однородная граничная задача и неоднородная граничная задача сопряжения в этом случае всегда разрешимы, и в решении имеем* $æ - s + 1$ *произвольные постоянные. При* $æ - s$ *отрицательном, однородная граничная задача не имеет решения. В случае* $æ - s < 0$ *, неоднородная граничная задача, однозначно, разрешима.*

§ 2.2. Граничная задача сопряжения с рациональными коэффициентами, имеющими сингулярность модульного характера

Допустим, что Γ - контур типа Ляпунова, который разделяет плоскость на две области D^+ и D^-. А также даны многочлены $p(t)$, $q(t)$ и функция $g(t) \in \mathrm{H}(\Gamma)$.

Требуется найти две функции: $F^+(z)$ и $F^-(z)$ аналитические, соответственно, в областях D^+ и D^-, включая $z = \infty$, удовлетворяющие на границе Γ, следующее граничное условие:

$$F^+(t) = \frac{|t-\alpha|^{\mu} p(t)}{|t-\beta|^{\gamma} q(t)} F^-(t) + g(t), \tag{2.2.1}$$

здесь α и β - некоторые различные точки контура, μ, γ - положительные вещественные числа, $g(t) \in H(\Gamma)$, $p(t)$, $q(t)$ - многочлены.

Решение задачи ищем в классе функций, имеющие особенность на контуре меньше единицы.

Воспользуемся известными равенствами:

$$\begin{aligned} |t-a|^{\mu} &= (t-a)^{\mu} \cdot \exp(-2i\theta_1\mu), \qquad \theta_1 = \arg(t-a) \\ |t-b|^{\gamma} &= (t-b)^{\gamma} \cdot \exp(-2i\theta_2\gamma), \qquad \theta_2 = \arg(t-b). \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Используя равенства (2.2.2) в граничном условие (2.2.1), получим:

$$F^+(t) = \frac{(t-a)^{\mu} \exp(-2i\theta_1\mu)}{(t-b)^{\gamma} \exp(-2i\theta_2\gamma)} \cdot \frac{p(t)}{q(t)} F^-(t) + g(t),$$

$$F^{+}(t)=\frac{(t-a)^{\mu}}{(t-b)^{\gamma}}\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\cdot\frac{p(t)}{q(t)}F^{-}(t)+g(t). \qquad (2.2.3)$$

Обозначим: $\mu=\mu_1-\mu_2$, $\gamma=\gamma_1-\gamma_2$, μ_1,γ_1 - натуральные числа, $0<\mu_2<1$, $0<\gamma_2<1$.

Граничные условия (2.2.3), принимают вид:

$$F^{+}(t)=\frac{(t-a)^{\mu_1}}{(t-b)^{\gamma_1}}\cdot\frac{(t-a)^{-\mu_2}}{(t-b)^{-\gamma_2}}\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\cdot\frac{p(t)}{q(t)}F^{-}(t)+g(t),$$

$$(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}F^{+}(t)=\frac{(t-a)^{\mu_1}}{(t-b)^{\gamma_1}}\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\cdot\frac{p(t)}{q(t)}F^{-}(t)+$$

$$+(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}g(t). \qquad (2.2.4)$$

Интегрируемую функцию

$$(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}g(t),$$

можем записать

$$(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}g(t)=\psi^{+}(t)-\psi^{-}(t),$$

здесь

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\tau-a)^{\mu_2}(\tau-b)^{-\gamma_2}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z},$$

и граничная задача принимает следующий вид:

$$(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}\varphi^+(t)-\psi^+(t)=$$

$$=\frac{(t-a)^{\mu_1}}{(t-b)^{\gamma_1}}\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\frac{p(t)}{q(t)}\varphi^-(t)-\psi^-(t). \tag{2.2.5}$$

Функцию $F^-(z)$ представим, в виде:

$$F^-(z)=(z-b)^{\gamma_1}\cdot z^{-\gamma_1}F_1^-(z)$$

и получим:

$$(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}\varphi^+(t)-\psi^+(t)=$$

$$=(t-a)^{\mu_1}\cdot t^{-\gamma_1}\cdot\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\frac{p(t)}{q(t)}F_1^-(t)-\psi(t).$$

Построим полином $\mathrm{T}(t)$, удовлетворяющий, следующему условию:

$$\psi^{-(l)}(a)=\mathrm{T}^{(l)}(a),\ l=0,1,\ldots,\mu_1-1. \tag{2.2.6}$$

Из обеих частей равенства (2.2.6), вычитаем полином $T(t)$, разделим на $(t-a)^{\mu_1}$, получим:

$$\frac{(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}F^+(t)-\psi^+(t)-\mathrm{T}(t)}{(t-a)^{\mu_1}}=$$

$$=t^{-\gamma_1}\frac{p(t)}{q(t)}\cdot\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\cdot F_1^-(t)+\psi_1^-(t),$$

$$F_1^+(t)=t^{-\gamma_1}\frac{p(t)}{q(t)}\cdot\exp[2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)]\cdot F_1^-(t)+\psi_1^-(t).$$

Данные многочлены $p(z)$, $q(z)$ можно записать, в виде произведения

$$p(z) = p_+(z) \cdot p_-(z), \quad q(z) = q_+(z) \cdot q_-(z),$$

здесь $p_+(z)$, $q_+(z)$ - полином, с нулями в D^+, $p_-(z)$, $q_-(z)$ - полином с нулями в D^-. По свойствам индекса, получим $æ = m_+ - n_+$, здесь m_+, n_+ - число нулей многочленов $p_+(z)$, $q_+(z)$.

$$F_1^+(t) = t^{-\gamma_1} \frac{p_+(t) \cdot p_-(t)}{q_+(t) \cdot q_-(t)} \cdot \exp[2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)] \cdot F_1^-(t) + \psi_1^-(t),$$

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)} F_1^+(t) - \frac{p_+(t)}{q_+(t)} \exp[2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)] F_1^-(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)} \psi_1^-(t),$$

$$F_2^+(t) = D(t) F_1^-(t) + g_1(t),$$

здесь

$$F_2^+(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)} F_1^+(t), \quad D(t) = \frac{p_+(t)}{q_+(t)} \exp[2i(\theta_2\gamma - \theta_1\mu)],$$

$$g_1(t) = \frac{q_-(t)}{p_-(t)} \psi_1^-(t).$$

Функция $D(t)$ в сингулярных точках $t = a$, $t = b$, имеет разрыв первого рода. Вводя новые функции:

$$F_2^+(z) = (z-a)^{\mu_2} (z-b)^{\gamma_2} F_3^+(z),$$

$$F_1^-(z)=\left(\frac{z-a}{z-z_0}\right)^{\mu_2}\left(\frac{z-b}{z-z_0}\right)^{\gamma_2}F_2^-(z),$$

$$(t-a)^{\mu_2}(t-b)^{\gamma_2}F_3^+(t)=D(t)\cdot\left(\frac{t-a}{t-z_0}\right)^{\mu_2}\left(\frac{t-b}{t-z_0}\right)^{\gamma_2}F_2^-(t)+g_1(t).$$

$$F_3^+(t)=D(t)(t-z_0)^{-\mu_2}(t-z_0)^{-\gamma_2}F_2^-(t)+(t-a)^{-\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}g_1(t). \quad (2.2.8)$$

приведём граничное условие (2.2.8), к задаче с непрерывным коэффициентом:

$$F_3^+(t)=(t-z_0)^{-\mu_2-\gamma_2}\cdot t^{æ+\mu-\gamma}\left[t^{-æ-\mu+\gamma}\cdot D(t)\cdot e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}\right]F_2^-(t)+$$

$$+(t-a)^{-\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}g_1(t).$$

Данный коэффициент представим в виде аналитических функций:

$$t^{-æ-\mu+\gamma}D(t)\cdot e^{2i(\theta_2\gamma-\theta_1\mu)}=\frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$$

и получим:

$$\frac{F_3^+(t)}{\chi^+(t)}=t^{-\gamma_1}\frac{t^{-æ+\mu+\gamma}}{\chi^-(t)}\cdot F_2^-(t)+\frac{1}{\chi^+(t)}\cdot(t-a)^{-\mu_2}(t-b)^{-\gamma_2}g_1(t).$$

Так как свободный член граничного условия принадлежит к классу Гельдера, поэтому её представим в виде разности двух аналитических функций:

$$\frac{F_3^+(t)}{\chi^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{t^{æ\text{-}\gamma}}{\chi^-(t)} F_2^-(t) - \psi^-(t),$$

здесь

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\tau - a)^{-\mu_2} (\tau - b)^{-\gamma_2}}{\chi^+(\tau)} \cdot \frac{d\tau}{\tau - z}$$

Используя теорему об аналитическом продолжении и обобщённую теорему Лиувилля, имеем:

$$F_3^+(z) = \chi^+(z) \left[\mathrm{P}_{æ\text{-}\gamma\text{-}1}(z) + \psi^+(z) \right]$$

$$F_2^-(z) = \chi^-(z) \left[\mathrm{P}_{æ\text{-}\gamma\text{-}1}(z) + \psi^-(z) \right].$$

В случае отрицательного индекса, нужно предположить $\mathrm{P}_{æ\text{-}\gamma\text{-}1}(z) \equiv 0$ и добавить условия разрешимости:

$$\int_\Gamma \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)} g_1(\tau) \cdot \tau^{k-1} d\tau = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, -æ + \gamma).$$

§ 2.3. Граничная задача Гильберта с наличием нулей и бесконечностей модульного характера на контуре

Пусть D^+ - внутренняя и D^- - внешняя части окружности $\Gamma: |t| = 1$.

Граничной задачей Гильберта назовём следующую задачу: Найти непрерывную на контуре, аналитическую функцию:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

в области D^+ и на границе, имеем:

$$a(s) \cdot u(s) + b(s) \cdot v(s) = c(s).$$

Граничное условие задачи Гильберта, запишем в виде:

$$\mathrm{Re}\left[a(s) + ib(s)\right] \cdot \left[u(s) + iv(s)\right] = c(s). \qquad (2.3.1)$$

Используя принцип симметрии, имеем:

$$f^-(z) = \overline{f^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{f^+(z)}.$$

Здесь функция $f^-(z)$ будет аналитической в области D^-.

Вместо $f^+(z)$ и $f^-(z)$, можно рассматривать одну кусочно-аналитическую функцию.

Следовательно, имеем:

$$f^-(t) = \overline{f^+\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)} = \overline{f^+(t)}.$$

Теперь выясняется, что задачу Гильберта на единичной окружности, можно свести к задаче Римана.

Равенство (2.3.1), запишем в виде:

$$(a\text{-}ib)\, f^{+}(\mathrm{t}) + (a+ib)\,\overline{f^{+}(t)} = 2c. \qquad (2.3.2)$$

Допуская, что коэффициенты граничной задачи имеют нули и бесконечность модульной структуры, можно граничную задачу записать, в виде

$$|t-\beta|^{\mu}(a-ib)\, f^{+}(t) + |t-\alpha|^{\gamma}(a+ib)\,\overline{f^{+}(t)} = 2c|t-\beta|^{\mu}. \qquad (2.3.3)$$

После чего, граничное условие задачи Римана преобразуется, в виде:

$$f^{+}(t) = \frac{|t-\alpha|^{\gamma}\left[a(s)+ib(s)\right]}{|t-\beta|^{\mu}\left[a(s)-ib(s)\right]} f^{-}(t) + \frac{2c(s)}{a(s)-b(s)}, \qquad (2.3.4)$$

здесь $a(s)+ib(s)\neq 0,\quad a(s)-ib(s)\neq 0,\ \gamma,\mu$ - любые положительные вещественные числа.

Граничное условие (2.3.4), запишется в виде:

$$f^{+}(t) = \frac{|t-\alpha|^{\gamma}}{|t-\beta|^{\mu}} D(t)\, f^{-}(t) + g(t), \qquad (2.3.5)$$

где

$$D(t) = \frac{a+ib}{a-ib}, \quad g(t) = \frac{2c}{a-ib}.$$

Допустим $\mu = d - \nu_1,\ \gamma = p - \nu_2,$ здесь d и p - натуральные числа, $0 < \nu_1 < 1,\ 0 < \nu_2 < 1.$

Решение задачи (2.3.5), ищем в классе интегрируемых функций.

Используем известные равенства:

$$|t-\alpha|^{\gamma} = (t-\alpha)^{\gamma} \cdot e^{-2i\theta_1\gamma}, \quad \theta_1 = \arg(t-\alpha),$$
$$|t-\beta|^{\mu} = (t-\beta)^{\mu} \cdot e^{-2i\theta_2\mu}, \quad \theta_2 = \arg(t-\beta). \tag{2.3.6}$$

При помощи равенства (2.3.6), задача (2.3.5) преобразуется, в следующем виде:

$$f^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{\gamma}}{(t-\beta)^{\mu}} \cdot e^{2i(\theta_2\mu - \theta_1\gamma)} \cdot D(t) f^{-}(t) + g(t),$$

$$f^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{d-\nu_1}}{(t-\beta)^{p-\nu_2}} \cdot e^{2i(\theta_2\mu - \theta_1\gamma)} \cdot D(t) f^{-}(t) + g(t). \tag{2.3.7}$$

Граничное условие (2.3.7), принимает вид:

$$f^{+}(t) = \frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}} \cdot D_1(t) f^{-}(t) + g(t),$$

здесь

$$D_1(t) = (t-\beta)^{\nu_2} (t-\alpha)^{-\nu_1} e^{2i(Q_2\mu - Q_1\gamma)} \cdot D(t).$$

Пусть функция $g(t)$ в окрестности точки $t = \alpha$, имеет производные любого порядка.

Интерполяционный полином $\mathrm{T}(t)$ построим, по следующему условию:

$$\mathrm{T}^{(i)}(\alpha) = g^{(i)}(\alpha),\ i = 0,1,\ldots, p-1. \qquad (2.3.8)$$

Используя равенства (2.3.8) и (2.3.7), получим:

$$f^{+}(t) - \mathrm{T}(t) = \frac{(t-\alpha)^d}{(t-\beta)^p} \cdot D_1(t) f^{-}(t) + g(t) - \mathrm{T}(t),$$

$$f^{+}(t) - \mathrm{T}(t) = \frac{(t-\alpha)^d}{(t-\beta)^p} D_1(t) f^{-}(t) + (t-\alpha)^d g_1(t). \qquad (2.3.9)$$

После разделения граничного условия (2.3.9) на $(t-\alpha)^d$, будем иметь:

$$\frac{f^{+}(t) - \mathrm{T}(t)}{(t-\alpha)^d} = \frac{D_1(t)}{(t-\beta)^p} f^{-}(t) + g_1(t),$$

$$f_1^{+}(t) = \frac{D_1(t)}{(t-\beta)^p} f^{-}(t) + g_1(t), \qquad (2.3.10)$$

здесь $f_1^{+}(t) = \dfrac{f^{+}(t) - \mathrm{T}(t)}{(t-\alpha)^d}$.

Предположим в (2.3.10):

$$f^{-}(z) = (z-\beta)^p \cdot z^{-p} f_1^{-}(z),$$

и получим:

$$f_1^{+}(t) = t^{-p} D_1(t) f_1^{-}(t) + g_1(t). \qquad (2.3.11)$$

Коэффициент $D_1(t)$ имеет разрыв первого рода в особых точках.

Следующими подстановками, вводя новые функции $f_2^+(z)$ и $f_1^-(z)$:

$$f_1^+(z) = (z-\alpha)^{\nu_2}(z-\beta)^{\nu_1} f_2^+(z),$$

$$f_1^-(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\left(\frac{z-\beta}{z-z_0}\right)^{\nu_1} f_2^-(z)$$

придём к граничному условию:

$$(t-\alpha)^{\nu_2}(t-\beta)^{\nu_1} f_2^+(t) = t^{-d} D_1(t)\left(\frac{t-\alpha}{t-z_0}\right)^{\nu_2}\left(\frac{t-\beta}{t-z_0}\right)^{\nu_1} f_2^-(t) + g_1(t),$$

$$f_2^+(t) = t^{-d} D_1(t)(t-z_0)^{-\nu_2}(t-z_0)^{-\nu_1} f_2^-(t) + (t-\alpha)^{-\nu_2}(t-\beta)^{-\nu_1} g_1(t).$$

Коэффициент граничной задачи $(t-z_0)^{-\nu_2}(t-z_0)^{-\nu_1} D_1(t)$ - есть непрерывная функция, поэтому её представим в виде отношения двух аналитических функций:

$$(t-z_0)^{-\nu_2}(t-z_0)^{-\nu_1} D_1(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}. \qquad (2.3.12)$$

Используя равенство (2.3.12), граничные условия запишем, в следующем виде:

$$\frac{f_2^+(t)}{\chi^+(t)} - t^{-d}\frac{f_2^-(t)}{\chi^-(t)} = \frac{(t-\alpha)^{-\nu_2}(t-\beta)^{-\nu_1} g_1(t)}{\chi^+(t)}.$$

Итак, граничную задачу с разрывом первого рода, мы привели к задаче, в которой коэффициент - есть непрерывная функция.

Данная задача имеет, следующее решение:

$$\frac{f_2^+(z)}{\chi^+(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\tau-\alpha)^{-\nu_2}(\tau-\beta)^{-\nu_1} g(\tau)}{\chi^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + \mathrm{P}_{æ-d}(z).$$

При $æ - d < 0$, предположим $\mathrm{P}_{æ-d}(z) \equiv 0.$

Отсюда, можно записать решение данной задачи:

$$f_2^+(z) = (z-\alpha)^{-\nu_2}(z-\beta)^{-\nu_1}\chi^+(z)\left[\psi^+(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-d}}(z)\right],$$

$$\chi^-(z)\left[\psi^-(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-d}}(z)\right] \qquad f_2^-(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\left(\frac{z-\beta}{z-z_0}\right)^{\nu_1},$$

где

$$\chi^-(z) = (z-z_0)^{-æ} e^{\Gamma^-(z)}, \qquad \chi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln(\tau - z_0)^{-æ}(\tau-z_0)^{-\nu_1}(\tau-z_0)^{-\nu_2} D(\tau)}{\chi^+(\tau - z)} d\tau$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(\tau-\alpha)^{-\nu_2}(\tau-\beta)^{-\nu_1}}{\chi^+(\tau - z)} g_1(\tau) d\tau.$$

Полученные результаты сформулируем, в виде теоремы.

Теорема 2.3.1. *Пусть* Γ *- окружность* $|z| \le 1,\ a(s),\ b(s),\ c(s) \in \mathrm{H}(\Gamma)$, $æ = Ind[a(s) + ib(s)]$ *– индекс задачи.*

Тогда, если $æ - d > 0$, *то неоднородная задача имеет* $æ - d$ *решения, если потребовать дополнительное условие* $f_2^-(\infty) = 0$, *тогда полином* $P_{æ-d}(z)$ *записывается в виде:* $P_{æ-d-1}(z)$.

При $æ - d \leq 0$, *однородная задача не имеет решения, а неоднородная задача будет разрешима, если выполнены* $|æ - d|$ *условий разрешимости:*

$$\int_{\Gamma} \frac{(\tau-\alpha)^{-\nu_2}(\tau-\beta)^{-\nu_1}}{\chi^+(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, |æ - d|).$$

§ 2.4. Граничная задача сопряжения с непрерывными коэффициентами с сингулярностью модульного характера на контуре

Через D^+ и D^- обозначим многосвязную область, ограниченную гладким замкнутым контуром Γ.

Требуется найти функции $\Phi^{\pm}(z)$, аналитические, соответственно, в областях $D^{\pm}$ и удовлетворяющие на Γ, условию сопряжения:

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod_{k=1}^{\mu} |t-\alpha_k|^{m_k}}{\prod_{j=1}^{J} |t-\beta_j|^{p_j}} D_1(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad (2.4.1)$$

здесь $\alpha_k (k=1,2,...,\mu)$, $\beta_j (j=1,2,...,J)$ - некоторые несовпадающие точки контура; m_k, p_j - целые положительные числа; $g(t) \in L_p(\Gamma)$, $D_1(t) \neq 0$ и непрерывная функция. Индексом задачи назовём целое число:

$$æ = \sum_{k=0}^{m} æ_k,$$

здесь $æ = \frac{1}{2\pi}[argG(t)]_{\Gamma_k}$.

Известно, что

$$\prod_{k=1}^{\mu} |t-\alpha_k|^{m_k} = \prod_{k=1}^{\mu} (t-\alpha_k)^{m_k} \cdot \exp\left(-\sum_{r=1}^{\omega} i\theta_1 m_k\right), \quad \theta_1 = \arg(t-\alpha_k),$$

$$\prod_{j=1}^{J} |t-\beta_j|^{p_j} = \prod_{j=1}^{J} (t-\beta_j)^{p_j} \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^{J} i\theta_2 p_j\right), \quad \theta_2 = \arg(t-\beta_j). \qquad (2.4.2)$$

Подставляя (2.4.2) в граничное условие (2.4.1), имеем

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}\left|t-\alpha_k\right|^{m_k}}{\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j}}\cdot\exp\left(i\cdot\left(\sum_{j=1}^{J}\theta_2 p_j-\sum_{k=1}^{\mu}\theta_1 m_k\right)\right)\cdot D_1(t)\cdot\Phi^{-}(t)+g(t). \quad (2.4.3)$$

Обозначим:

$$\sum_{k=1}^{\mu}m_k=\sum_{k=1}^{\mu}(m_k^{(1)}-m_k^{(2)}),\ \sum_{j=1}^{J}p_j=\sum_{j=1}^{J}(p_j^{(1)}-p_j^{(2)}),$$

где $\sum_{k=1}^{\mu}m_k^{(1)},\ \sum_{j=1}^{J}p_j^{(1)}$ - целые положительные числа, $\sum_{k=1}^{\mu}m_k^{(2)},\ \sum_{j=1}^{J}p_j^{(2)}$ - их дробные части, т.е. $0<m_k^{(2)}<1,\ \ 0<p_j^{(2)}<1.$

Граничное условие (2.4.3), можно преобразовать, в следующем виде:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}D_2(t)\Phi_1^{-}(t)+g(t), \quad (2.4.4)$$

здесь $D_2(t)=D_1(t)\cdot e^{i\cdot\left(\sum_{j=1}^{J}\theta_2 p_j-\sum_{k=1}^{\mu}\theta_1 m_k\right)}\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-m_k^{(2)}}\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(2)}}$.

Коэффициент $D_2(t)$ - есть многозначная функция.

Теперь задача (2.4.4) сводится к задаче с непрерывными коэффициентами.

Новые функции ищем, в виде:

$$\Phi^{+}(z)=\prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{m_k^{(2)}}\cdot\prod_{j=1}^{J}(z-\beta_j)^{p_j^{(2)}}\Phi_1{}^{+}(z),$$

$$\Phi^{-}(z)=\prod_{k=1}^{\mu}\left(\frac{z-\alpha_k}{z-z_0}\right)^{m_k^{(2)}}\cdot\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{z-\beta_j}{z-z_0}\right)^{p_j^{(2)}}\cdot\Phi_1^{-}(z). \qquad (2.4.5)$$

Подставляя (2.4.5) в (2.4.4), имеем:

$$\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(2)}}\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(2)}}\cdot\Phi_1^{+}(t)=$$

$$=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}\cdot D_2(t)\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{t-\alpha_k}{t-z_0}\right)^{m_k^{(2)}}\cdot\cdot\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{t-\beta_j}{t-z_0}\right)^{p_j^{(2)}}\cdot\Phi_1^{-}(t)+g(t)$$

или

$$\Phi_1^{+}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}D_2(t)\prod_{m=1}^{\mu}(t-z_0)^{-m_k^{(2)}}\prod_{j=1}^{J}(t-z_0)^{-p_j^{(2)}}\cdot\Phi_1^{-}(t)+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-m_k^{(2)}}\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{-p_j^{(2)}}\cdot g(t). \qquad (2.4.6)$$

Вводя обозначения:

$$D_3(t)=D_2(t)\prod_{k=1}^{\mu}(z-z_0)^{-m_k^{(2)}}\prod_{j=1}^{J}(z-z_0)^{-p_j^{(2)}},$$

$$g_1(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-m_k^{(2)}}\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{-p_j^{(2)}}\cdot g(t)$$

перепишем (2.4.6), в следующем виде:

$$\Phi_1^+(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}D_3(t)\cdot\Phi_1^-(t)+g_1(t). \qquad (2.4.7)$$

Далее, потребуем, чтобы функция $g_1(t)$ была дифференцируема. Построим интерполяционный полином $\mathrm{T}(t)$, следующим образом:

$$\mathrm{T}^{(i)}(\alpha_k)=g_1^{(i)}(\alpha_k) \quad (i=0,1,\ldots,m_k;\ k=0,1,\ldots,\mu). \qquad (2.4.8)$$

При помощи $T(t)$, граничное условие перепишем в следующем виде:

$$\Phi_1^+(t)-\mathrm{T}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}D_3(t)\cdot\Phi_1^-(t)+g_1(t)-\mathrm{T}(t). \qquad (2.4.9)$$

Используя равенство (2.4.8), и разделяя граничное условие на $\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}$, получим

$$\frac{\Phi_1^+(t)-\mathrm{T}(t)}{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}=\frac{D_3(t)}{\prod\limits_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}\Phi_1^-(t)+g_2(t),$$

$$\Phi_2^+(t)=\frac{D_3(t)}{\prod\limits_{j=1}^{J}(t-\beta_j)^{p_j^{(1)}}}\Phi_1^-(t)+g_2(t), \qquad (2.4.10)$$

здесь $\Phi_2^+(t)=\dfrac{\Phi_1^+(t)-\mathrm{T}(t)}{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k^{(1)}}}$.

Предположим в (2.4.10):

$$\Phi_1^-(z)=\prod_{j=1}^{J}(z-\beta_j)^{p_j^{(1)}}\cdot z^{-p_j^{(1)}}\cdot\Phi_2^-(z), \qquad (2.4.11)$$

получим:

$$\Phi_2^+(t)=t^{-p_j^{(1)}}D_3(t)\Phi_2^-(t)+g_2(t). \qquad (2.4.12)$$

Известно, что каждую суммируемую функцию, можно представить, как разность двух функций:

$$\Phi_2(t)=\Phi_2^+(t)-\Phi_2^-(t), \qquad (2.4.13)$$

здесь $\Phi^{\pm}(t)$ являются почти всюду предельными угловыми значениями аналитических функций $\Phi^{\pm}(z)$ в $D^{\pm}$. Равенство (2.4.13) единственно, если

$$\Phi_2^{\pm}(t)\in L_p(\Gamma),\quad p>0 \text{ и } \Phi^-(\infty)=0.$$

Используя формулы Сохоцкого, имеем

$$\Phi_2^+(t) = \frac{1}{2}\Phi_2(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$\Phi_2^-(t) = -\frac{1}{2}\Phi_2(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau. \qquad (2.4.14)$$

Сингулярный оператор:

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

в норме пространства $L_p(\tau),\ (p>1)$ - ограниченный оператор, то есть

$$\left(\int_\Gamma \left|\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi_2(\tau)}{\tau - t}d\tau\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le M_p\left(\int_\Gamma |\Phi_2(t)|^p ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

где M_p - постоянная, не зависящая от $\Phi_2(t)$.

Отсюда следует, что

$$\left\|\Phi_2^\pm\right\|_{L_p} \le \frac{1}{2}\|\Phi_2\|_{L_p} + \frac{M_p}{2}\|\Phi_2\|_{L_p} = \frac{M_{p+1}}{2}\|\Phi_2\|_{L_p},$$

здесь $\|\Phi_2\|_{L_p} = M_p \left(\int\limits_{\Gamma} \|\Phi_2(t)\|^p ds \right)^{\frac{1}{p}}$.

Подытоживая формулировку задачи, отметим, что нужно найти функцию $\Phi_2(t)$ из класса $L_p(\Gamma)$, удовлетворяющая граничному условию (2.4.12), здесь $\varphi_2^+(t)$ и $\Phi_2^-(t)$ означают операторы, заданные равенствами (2.4.14) .

Если $D_3(t) = 1$, то данная задача обращается к задаче о скачке, и разрешима, безусловно, и однозначно, в классе $L_p(\Gamma)$.

Рассмотрим случай задачи сопряжения, когда $D_3(t)$ измеримая функция, для которой выполняется условие:

$$|D_3(t) - 1| \le g_2 < \frac{2}{1 + M_p}, \quad g_2(t) \in L_p(\Gamma) \quad (p > 1).$$

Вычитая из обеих частей (2.4.12) $\Phi_2^-(t)$, получим:

$$\Phi_2^+(t) = [D_3(t) - 1]\Phi_2^-(t) + g_2(t). \tag{2.4.15}$$

Оператор $[D_3(t) - 1]\Phi_2^-(t)$ принадлежит пространству $L_p(\Gamma)$. В самом деле:

$$\|[D_3(t) - 1]\Phi_2^-(t)\|_{L_p} = \left(\int\limits_{\Gamma} |D_3(t) - 1|^p |\Phi_2^-|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le g_2 \left(\int\limits_{\Gamma} |\Phi_2^-|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = g_2 \frac{1 + M_p}{2} \|\Phi_2\|_{L_p}.$$

Применяя принцип сжатых отображений, получим, что задача (2.4.15), безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

Случай $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0.$

В этом случае $\ln D_3(t)$ приблизим к функции f, удовлетворяющая условию Гельдера, так, чтобы выполнялось:

$$\left| e^{(\ln D_3 - f)} - 1 \right| \le g_2 < \frac{2}{1+\mu_p}.$$

Далее

$$D_3(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)},$$

где $\chi^{\pm}(t)$ - канонические функции в областях $D^{\pm}$.

Подставляя значение $D_3(t)$ в (2.4.12), получим:

$$\Phi_2^+(t) = t^{-p_j^{(2)}} \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)} \Phi_2^-(t) + g_2(t),$$

$$\frac{\Phi_2^+(t)}{\chi^+(t)} = t^{-p_j^{(2)}} \frac{1}{\chi^-(t)} \Phi_2^-(t) + \frac{g_2(t)}{\chi^+(t)}, \qquad (2.4.16)$$

задача в случае $æ_0 = æ_1 = ... = æ_m = 0$, имеет единственное решение.

Теперь задачу исследуем в общем виде:

а) $æ - p_j^{(1)} = 0.$

Введём новые неизвестные функции:

$$\overset{*}{\Phi}{}_2^+(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{æ_k}\,\Phi_2^+(z),\quad z_k\in D_k^-,$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_2^+\,\overline{(z)}=\Phi_2^-(z),$$

придём к задаче

$$\overset{*}{\Phi}{}_2^+(t)=t^{-p_j^{(1)}}D_3(t)\,\overset{*}{\Phi}{}_2^-(t)+\overset{*}{g}_2(t) \qquad (2.4.17)$$

где $\overset{*}{D}_3(t)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{æ_k}D_3(t),$

$$\overset{*}{g}_2(t)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{æ_k}g_2(t).$$

Отметим, что $\overset{*}{æ}=\dfrac{1}{2\pi}\left[\arg\overset{*}{D}_3(t)\right]_{\Gamma_*}=æ=0,\quad k=1,2,\ldots,m,$

$$\overset{*}{æ}_k=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\overset{*}{D}_3(t)\right]_{\Gamma_0}=æ=0.$$

Задача (2.4.17), в случае $æ=0$, безусловно, разрешима и имеет единственное решение.

б) $æ-p_j^{(1)}>0$.

Перепишем задачу, в следующем виде:

$$(t-z_0)^{-æ}\Phi_2^+(t)-(t-z_0)^{-æ}\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}(t)=(t-z_0)^{æ}D_3(t)\Phi_2^-(t)+$$

$$+(t-z_0)^{-æ+p_j^{(1)}} g_2(t)-(t-z_0)^{-æ}\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}(t),$$

где $z_0 \in D^+$; $\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}(t)$ многочлен степени не выше $æ - p_j^{(1)} - 1$, подстроим так, чтобы функция

$$(z-z_0)^{-æ}\left[\Phi_2^+(z)-\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}\right]$$

была аналитической функцией. Заметим, что

$$Ind(t-z_0)^{-æ}\cdot D_3(t)=0$$

и обозначим через $R^{\pm}$ оператор, обрашающий задачу сопряжения с коэффициентом $(t-z_0)^{-æ}D_3(t)$.

Поэтому, имеем:

$$(t-z_0)^{-æ}\left[\Phi_2^+(t)-\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}(t)\right]=R^+(t)\left[g_2(t)-(t-z_0)^{-æ}\mathrm{P}_{æ-p-1}(t)\right],$$

$$\Phi_2^-(t)=R^-(t)\left[g_2(t)-(t-z_0)^{-æ}\mathrm{P}_{æ-p-1}(t)\right] \qquad (2.4.18)$$

Найдем $\Phi_2^+(t)$:

$$\Phi_2^+(t)=\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}(t)+(t-z_0)^{æ}R^+(t)\left[g_2(t)-(t-z_0)^{-æ}\mathrm{P}_{æ-p_j^{(1)}-1}(t)\right] \qquad (2.4.19)$$

Формулы (2.4.18), (2.4.19), дают общие решения задачи.

в) $æ - p_j^{(1)} < 0$

Граничное условие запишем, в виде:

$$(t-z_0)^{-æ}\Phi_2^+(t)=(t-z_0)^{-æ}D_3(t)\Phi_2^-(t)-(t-z_0)^{-æ}g_2(t)$$

$$Ind(t-z_0)^{-æ}D_3(t)=0,\ (t-z_0)^{-æ}\Phi_2^-(t)$$

аналитическая в D^-.

Через $R^{\pm}$- обозначим оператор, обращающий задачу сопряжения с коэффициентом $(t-z_0)^{-æ}D_3(t)$.

В этом случае, получим:

$$\begin{aligned}\Phi_2^+(t)&=(t-z_0)^{æ}R^+(t)\left[(t-z_0)^{æ}g_2(t)\right],\\ \Phi_2^-(t)&=(t-z_0)^{æ}R^-(t)\left[(t-z_0)^{-æ}g_2(t)\right].\end{aligned}\qquad(2.4.20)$$

Для решения данной задачи должно выполняться $\left|æ-p_j^{(1)}\right|$ условий разрешимости вида:

$$\int_\Gamma (t-z_0)^{-æ}R^+(t)\left[(t-z_0)^{-æ}g_2(t)\right]dt=0. \qquad (2.4.21)$$

Если выполнены условия (2.4.21), тогда существует единственное решение. Итак, имеет место теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $D_1(t)$ *- непрерывная функция,* $D_1(t)\neq 0,\ \ g(t)\in L_p$

$æ=\dfrac{1}{2\pi}\left[\arg G_1(t)\right]_{\Gamma_k}$.

Тогда: 1) если $æ-p_j^{(1)}=0$, *то граничная задача сопряжения всегда разрешима и имеет единственное решение;*

2) если $æ - p_j^{(1)} > 0$, *то задача, безусловно, разрешима и имеет* $æ - p^{(1)}$ *линейно независимых решений;*

3) если $æ - p_j^{(1)} < 0$, *то задача разрешима при выполнении условия разрешимости (2.4.21).*

ГЛАВА 3. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

Настоящая глава посвящена исследованию: общей граничной задачи линейного сопряжения с наличием нулей и бесконечностей различного типа на контуре; сингулярных случаев общей граничной задачи сопряжения с производными первого порядка, т.е. расматриваются случаи когда коэффициенты краевых условий имеют нули и бесконечность модулного характера. Решение задачи ищется в классе функций, имеющих особенность меньше единеице; сингулярных случаев одной граничной задачи теории аналитических функций с производной в граничном условии, т.е. расматриваются случаи, когда в краевом условии коэффициенты в конечном числе точек имеют нули и бесконечность модулного характера. Решение задачи найдено в явном виде; сингулярных случаев общей граничной задачи теории аналитических функций для полуплоскости, т.е. расматривается граничная задача для полуплоскости, когда коэффициенты имеют нули и бесконечности модулного характера. Доказана теорема, определяющая число линейно независимых решений однородной задачи и число условый разрешимости неоднородной задачи; граничной задачи сопряжения с производными высших порядков, главный коэффициент которых имеет нули или полюсы комплексно-сопряженного вида, т.е. расматривается граничная задача с производными высших порядков, главный коэффициент (первый коэффициент) имеет нули и полюсы комплексно-сопряжённого вида, и определены число решений однородной задачи и число условый разрешимости неоднородной задачи.

§ 3.1. Общая граничная задача линейного сопряжения с наличием нулей и бесконечностей различного типа на контуре

Пусть L состоит из гладких замкнутых контуров $L_0, L_1, ..., L_m$, ограничивающих область D^+ и D^- - внешнюю часть данной области.

Требуется найти функции $E^+(z)$ и $E^-(z)$, аналитические в D^+ и D^-, представляемые интегралом Коши, если почти всюду на L они имеют граничные значения $E^+(t)$, $E^-(t)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$E^+(t) = \frac{|t-\alpha|^\gamma}{|t-\beta|^\mu} a_1(t) E^-(t) + \frac{|t-\alpha|^\gamma}{|t-\beta|^\mu} b_1(t) \overline{E^-(t)} + c(t), \quad E^-(\infty) = 0, \qquad (3.1.1)$$

здесь α, β - различные точки контура, γ, μ - целые положительные числа.

Пусть $\mu = d - \nu_1$, $\gamma = p - \nu_2$, где p и d - целые положительные числа, а ν_1, ν_2 - дробные части, т. е $0 < \nu_1 < 1$, $0 < \nu_2 < 1$.

Решение задачи ищем в классе функций, имеющих особенность меньше единицы.

$$\begin{aligned} |t-\alpha|^\gamma &= (t-\alpha)^\gamma e^{-2i\theta_1\gamma}, \qquad \theta_1 = \arg(t-\alpha), \\ |t-\beta|^\mu &= (t-\beta)^\mu e^{-2i\theta_2\mu}, \qquad \theta_2 = \arg(t-\beta). \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

Используя равенства (3.1.2), граничное условие (3.1.1) преобразуем в следующем виде:

$$E^{+}(t)=\frac{(t-\alpha)^{\gamma}}{(t-\beta)^{\mu}}\cdot\exp\big(2i(\theta_2\mu-\theta_1\gamma)\big)\cdot a_1(t)\cdot E^{-}(t)+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{\gamma}}{(t-\beta)^{\mu}}\cdot\exp\big(2i(\theta_2\mu-\theta_1\gamma)\big)\cdot b_1(t)\overline{E^{-}(t)}+c(t)$$

или

$$E^{+}(t)=\frac{(t-\alpha)^{d-\nu_1}}{(t-\beta)^{p-\nu_2}}\cdot e^{2i(\theta_2\mu-\theta_1\gamma)}\cdot a_1(t)\cdot E^{-}(t)+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{\gamma}}{(t-\beta)^{\mu}}\cdot e^{2i(\theta_2\mu-\theta_1\gamma)}\cdot b_1(t)\overline{E^{-}(t)}+c(t). \qquad (3.1.3)$$

Граничную задачу (3.1.3) упростим, следующим образом:

$$E^{+}(t)=\frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}}\cdot a_2(t)E^{-}(t)+\frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}}\cdot b_2(t)\overline{E^{-}(t)}+c(t), \qquad (3.1.4)$$

где

$$a_2(t)=(t-\beta)^{\nu_2}(t-\alpha)^{-\nu_1}e^{2i(\theta_2\mu-\theta_1\gamma)}.a_1(t),$$

$$b_2(t)=\big(t-\beta\big)^{\nu_2}(t-\alpha)^{-\nu_1}\cdot e^{2i\left(\theta_2\mu-\theta_1\gamma s\right)}\cdot G_1(t)$$

Пусть функция $C(t)$, имеет производные любого порядка.

Многочлен $T(z)$ построим, следующим образом:

$$c^{(i)}(\alpha)=T^{(i)}(\alpha) \qquad (i=0,1,\ldots,d-1). \qquad (3.1.5)$$

где $c^{(i)}(\alpha)$ - производные i-го порядка.

Используя формулу (3.1.5), в граничном условии (3.1.4), получим

$$E^{+}(t)-T(t)=\frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}}a_{2}(t)E^{-}(t)+\frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}}b_{2}(t)\overline{E^{-}(t)}+c(t)-T(t).$$

откуда

$$E^{+}(t)-T(t)=\frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}}a_{2}(t)E^{-}(t)+\frac{(t-\alpha)^{d}}{(t-\beta)^{p}}b_{2}(t)\overline{E^{-}(t)}+(t-\alpha)^{d}c_{1}(t).$$

Граничное условие разделим на $(t-\alpha)^{d}$ и получим, следующее равенство:

$$\frac{E^{+}(t)-T(t)}{(t-\alpha)^{d}}=\frac{a_{2}(t)}{(t-\beta)^{p}}E^{-}(t)+\frac{b_{2}(t)}{(t-\beta)^{p}}\overline{E^{-}(t)}+c_{1}(t),$$

$$E_{1}^{+}(t)=\frac{a_{2}(t)}{(t-\beta)^{p}}E^{-}(t)+\frac{b_{2}(t)}{(t-\beta)^{p}}\overline{E^{-}(t)}+c_{1}(t). \qquad (3.1.6)$$

здесь $E_{1}^{+}(t)=\dfrac{E^{+}(t)-T(t)}{(t-\alpha)^{d}}$.

В граничном условии (3.1.6):

$$E^{-}(z)=(z-\beta)^{p}\cdot z^{-p}E_{1}^{-}(z) \qquad (3.1.7)$$

$$\overline{E^{-}(z)}=\overline{(z-\beta)}^{p}\cdot\overline{z^{-p}}\,\overline{E_{1}^{-}(z)}=(z-\beta)^{p}\cdot e^{-2i\theta p}\cdot\overline{z^{-p}}\,\overline{E_{1}^{-}(z)},$$

здесь $\theta=\arg(t-\beta)$, и имеем:

$$E_1^+(t) = t^{-p} a_2(t) E_1^-(t) + b_2(t) \cdot e^{-2i\theta p} \cdot \overline{t^{-p}}\, \overline{E_1^-(t)} + c_1(t),$$

$$E_1^+(t) = a_3(t) E_1^-(t) + b_3(t) \overline{E_1^-(t)} + c_1(t), \qquad (3.1.8)$$

здесь

$$a_3(t) = t^{-p} a_2(t), \quad b_3(t) = b_2(t) \cdot e^{-2i\theta p} \cdot \overline{t^{-p}},$$

$a_3(t),\ b_3(t)$ - многозначные функции.

Задачу (3.1.8) приведём к регулярным коэффициентам. Чтобы добиться данной цели, построим функции, имеющие такие особенности, какие имеют коэффициенты граничного условия.

Введем новые функции, в результате, получим задачу с непрерывными коэффициентами.

Для того чтобы построить такие функции, многозначную функцию рассмотрим, как однозначную, имеющая точку разрыва.

Построим аналитические функции:

$$(z - z_0)^{\nu_1},\ (z - z_0)^{\nu_2},\quad (z - z_\alpha)^{\nu_1},\ (z - z_\beta)^{\nu_2},$$

где здесь z_0 - некоторая точка, принадлежащая области D^+. Для данной функции точками разветвления будут, соответственно, $z_0,\ \infty,\ \alpha,\ \infty,\ \beta,\ \infty$. Для этой цели, проведём разрез в плоскости z и точке z_0 через особые точки до бесконечности. В результате, мы получим однозначные функции:

$$E_1^+(z) = (z - \alpha)^{\nu_1} (z - \beta)^{\nu_2} E_2^+(z),$$

$$(3.1.9)$$

$$E_1^-(z) = \left(\frac{z - \alpha}{z - z_0}\right)^{\nu_1} \left(\frac{z - \beta}{z - z_0}\right)^{\nu_2} \cdot E_2^-(z).$$

Подставляя (3.1.9) в (3.1.8), получим

$$(t-\alpha)^{\nu_1}(t-\beta)^{\nu_2}E_2^+(t)=a_3(t)\left(\frac{t-\alpha}{t-z_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{t-\beta}{t-z_0}\right)^{\nu_2}E_2^-(t)+$$

$$+b_3(t)\cdot\overline{\left(\frac{t-\alpha}{t-z_0}\right)}^{\nu_1}\overline{\left(\frac{t-\beta}{t-z_0}\right)}^{\nu_2}\cdot\overline{E^-(t)}+c_1(t)$$

$$\overline{(t-\alpha)}^{\nu_1}=(t-\alpha)^{\nu_1}\cdot e^{-2i\theta_1\nu_1},\ \overline{(t-\beta)}^{\nu_2}=(t-\beta)^{\nu_2}\cdot e^{-2i\theta_2\nu_2}$$

$$(t-\alpha)^{\nu_1}(t-\beta)^{\nu_2}E_2^+(t)=a_3(t-\alpha)^{\nu_1}\cdot(t-z_0)^{-\nu_1}(t-\beta)^{\nu_2}\cdot(t-z_0)^{-\nu_2}E_2^-(t)+$$

$$+b_3\overline{(t-\alpha)}^{\nu_1}\overline{(t-z_0)}^{-\nu_1}(t-\beta)^{\nu_2}\cdot(t-z_0)^{-\nu_2}\overline{E_2^-(t)}+c_1(t)$$

или

$$(t-\alpha)^{\nu_1}(t-\beta_1)^{\nu_2}E_2^+(t)=a_3(t-\alpha)^{\nu_1}(t-z_0)^{-\nu_1}(t-\beta)^{\nu_2}\cdot(t-z_0)^{-\nu_2}E_2^-(t)+$$

$$+b_3\cdot(t-\alpha)^{\nu_1}\cdot e^{-2i\theta_1\nu_1}\overline{(t-z_0)}^{-\nu_1}\cdot(t-\beta)^{\nu_2}\cdot e^{-2i\theta_2\nu_2}\cdot\overline{(t-z_0)}^{-\nu_2}\cdot\overline{E_2^-(t)}+c_1(t).$$

Отсюда:

$$E_2^+(t)=a_3(t)\cdot(t-z_0)^{-\nu_1-\nu_2}E_2^-(t)+$$

$$+b_3(t)e^{-2i(\theta_1\nu_1-\theta_2\nu_2)}\overline{(t-z_0)}^{-\nu_1-\nu_2}\cdot\overline{E_2^-(t)}+c_1(t)$$

$$E_2^+(t)=a_4(t)E_2^-(t)+b_4\overline{E_2^-(t)}+c_2(t), \qquad (3.1.10)$$

где

$$a_4(t) = a_3(t) \cdot (t - z_0)^{-\nu_1 - \nu_2},$$

$$b_4(t) = b_3(t) \cdot \overline{(t - z_0)}^{-\nu_1 - \nu_2} \cdot e^{-2i(\theta_1 \nu_1 - \theta_2 \nu_2)},$$

$$c_2(t) = c_1(t) \cdot (t - \alpha)^{-\nu_1} (t - \beta)^{-\nu_2}.$$

В результате, мы получили задачу с непрерывными коэффициентами. Итак, справедлива следующая теорема [4].

Теорема 3.1.1. *Допустим, что функции* $a_1(t),\ b_1(t),\ c(t)$ *из класса Гельдера. Пусть выполняется следующее неравенство:*

$$\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b_4(t)}{a_4(t)} \right| < \frac{2}{1 + S_p}, \ \left(\sup_{t \in \Gamma} \left| \frac{b_1(t)}{a_1(t)} \right| < \frac{2}{1 + S_p} \right)$$

здесь S_p *- норма оператора.* $S_\mu \equiv \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - t} d\tau,\ æ = \mathrm{Ind}_\Gamma a_4(t).$

Если $æ > 0,$ *то неоднородная задача, безусловно, разрешима, а однородная имеет* $2æ$ *решения. При* $æ = 0$ *, задача имеет единственное решение. При* $æ < 0,$ *однородная задача имеет только нулевое решение, а для того чтобы неоднородная задача была разрешима, требуются следующие условия:*

$$\int_\Gamma t^{-æ} Q[c_2(t)] dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, |æ| - 1,$$

здесь Q *- линейный оператор.*

§ 3.2. Сингулярные случаи общей граничной задачи сопряжения с производными первого порядка

Через D^+ - обозначим многосвязную область, ограниченную контуром L, состоящую из непересекающихся контуров $L_0, L, ..., L_m$, и точка $z=0$ принадлежит D^+. Через D^- обозначим внешнюю область.

Рассмотрим граничную задачу, следующего вида:

Найдём функции $F^{\pm}(z)$, аналитические, соответственно, в областях $D^{\pm}$, удовлетворяющие на L, следующему условию:

$$F^+(t)=\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}A_1(t)\frac{dF^-}{dt}+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}B_1(t)\overline{\frac{dF^-}{dt}}+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}p_1(t)F^-(t)+$$

$$+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}q_1(t)\overline{F^-(t)}+c(t),\quad \varphi^-(\infty)=0, \qquad (3.2.1)$$

здесь $A_1(t),\ B_1(t),\ p_1(t),\ q_1(t),\ c(t)$ - принадлежат классу H , $\alpha,\ \beta$ - несовпадающие точки контура, $d,\ p$ - целые положительные числа.

Используя известные равенства:

$$|t-\alpha|^{2d}=(t-\alpha)^d\overline{(t-\alpha)}^d=(t-\alpha)^d\cdot(t-\alpha)^d\cdot e^{-2i\theta_1 d}=(t-\alpha)^{2d}\cdot e^{-2\theta_1 d},$$

$$\theta_1=\arg(t-\alpha), \qquad (3.2.2)$$

$$|t-\beta|^{2p}=(t-\beta)^p\overline{(t-\beta)}^p=(t-\beta)^p(t-\beta)^p\cdot e^{-2i\theta_2 p}=(t-\beta)^{2p}\cdot e^{-2i\theta_2 p},$$

$$\theta_2=\arg(t-\beta).$$

и подставляя в (3.2.1), получим:

$$F^{+}(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\exp\big(2i(\theta_2 p-\theta_1 d)\big)\cdot A_1(t)\frac{dF^{-}}{dt}+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\exp\big(2i(\theta_2 p-\theta_1 d)\big)B_1(t)\overline{\frac{dF^{-}}{dt}}+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\cdot\exp\big(2i(\theta_2 p-\theta_1 d)\big)p_1(t)F^{-}(t)+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\cdot\exp\big(2i(\theta_2 p-\theta_1 d)\big)q_1(t)\cdot\overline{F^{-}(t)}+c(t).$$

$$F^{+}(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}A_2(t)\frac{dF^{-}}{dt}+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}B_2(t)\overline{\frac{dF^{-}}{dt}}+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\cdot p_2(t)F^{-}(t)+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}q_2(t)\overline{F^{-}(t)}+c(t), \qquad (3.2.3)$$

здесь $A_2(t)=A_1(t)\cdot e^{2i(\theta_2 p-\theta_1 d)}, B_2(t)=B_1(t)\cdot e^{2i(\theta_2 p-\theta_1 q)}$,

$$p_2(t)=p_1(t)\cdot e^{2i(\theta_2 p-\theta_1 q)},\ q_2(t)=q_1(t)\cdot e^{2i(\theta_2 p-\theta_1 d)}.$$

Потребуем, чтобы функция $C(t)$ в точке $t=\alpha$, имела производные любого порядка.

Многочлен $T(t)$ построим, следующим образом:

$$T^{(l)}(\alpha)=C^{(l)}(\alpha),\quad l=0,1,\ldots,2d-1, \qquad (3.2.4)$$

где $C^{(l)}$ - значения производного l-го порядка.

Используя равенство (3.2.4), граничную задачу (3.2.3) приведем к следующей задаче:

$$F^{+}(t)-T(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}A_2(t)\frac{dF^{-}}{dt}+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}B_2(t)\overline{\frac{dF^{-}}{dt}}+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}p_2(t)F^{-}(t)+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}q_2(t)\overline{F^{-}(t)}+(t-\alpha)^{2d}c_1(t). \qquad (3.2.5)$$

Граничное условие (3.2.5), разделим на $(t-\alpha)^{2d}$:

$$\frac{F^{+}(t)-T(t)}{(t-\alpha)^{2d}}=\frac{A_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\frac{dF^{-}}{dt}+\frac{B_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\overline{\frac{dF^{-}}{dt}}+$$

$$+\frac{p_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}F^{-}(t)+\frac{q_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\overline{F^{-}(t)}+c_1(t)$$

или

$$F_1^{+}(t)=\frac{A_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\frac{dF^{-}}{dt}+\frac{B_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\overline{\frac{dF^{-}}{dt}}+\frac{p_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}F^{-}(t)+$$

$$+\frac{q_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\overline{F^{-}(t)}+c_1(t), \qquad (3.2.6)$$

здесь

$$F_1^-(t)=\frac{F^+(t)-T(t)}{(t-\alpha)^{2d}}.$$

В граничной задаче (3.2.6), предположим

$$\frac{dF^-}{dz}=(z-\beta)^{2p}\cdot z^{-2p-1}\psi^-(z). \qquad (*)$$

Так как

$$F^-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\tau-\beta)^{2p}\cdot\tau^{-2d-1}\psi^-(\tau)\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau\equiv V_1(\psi^-),$$

тогда граничная задача (3.2.6), принимает следующий вид:

$$F^+(t)=t^{-2p-1}A_2(t)\psi^-(t)+B_2(t)\overline{t^{-2p-1}(t-\alpha)^{2p}\psi^-(t)}+p_2(t)V_1(\psi^-)+$$

$$+q_2(t)\overline{V_1(\psi^-)}+c_1(t),\ \psi^-(\infty)=0. \qquad (3.2.7)$$

При всех наших заменах, класс решений не изменится, и из непрерывности $F^+(t),\ \dfrac{dF^-}{dt}$ и $F^-(t)$ видно, что $\dfrac{dF^-}{dt}$ имеет в точке $t=\beta$ нуль порядка $2p$.

Используя известные равенства из монографии Л.Г. Михайлова [4 стр.148], имеем

$$F^+(z)=z^{æ\text{-}2p\text{-}1}\Pi^{-1}(z)f^+(z)+\mathrm{P}_{æ\text{-}2p\text{-}1}(z), \qquad (3.2.8)$$

здесь

$$\Pi(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{æ_k},\ z_k\in D_k^-,\ æ_k=Ind_{\Gamma_k}A_2(t),\ æ=\sum_{k=0}^{m}æ_k$$

Используя равенства (3.2.8) в (3.2.7), граничное условие преобразуем в следующем виде:

$$f^{+}(t)=t^{-æ}\Pi(t)A_2(t)\psi^{-}(t)+t^{æ+2p+1}\Pi(t)B_2(t)\overline{t^{-2p-1}(t-\beta)^{2d}\psi^{-}(t)}+$$

$$+t^{-æ+2p+1}\Pi(t)p_2(t)v_1(\psi^{-})+t^{-æ+2p+1}\Pi(t)q_2(t)\overline{v_1(\psi^{-})}+$$

$$+\left[c_1(t)-\mathrm{P}_{æ-2p-2}(t)\right]t^{-æ+2p+1},\ \psi^{-}(\infty)=0. \qquad (3.2.9)$$

Так как

$$Ind_{\Gamma_i}t^{-æ+2p+1}\Pi(t)A_2(t)=0,\ \ i=0,1,...,m,$$

то

$$\chi^{+}(t)=t^{-æ+2p+1}\Pi(t)A_2(t)\chi^{-}(t), \qquad (3.2.10)$$

$\chi(z)$- есть каноническая функция, отличная от нуля всюду, включая $z=\infty$, где $\chi(\infty)=1$. Допуская:

$$f^{+}(z)=\omega^{+}(z)\chi^{+}(z),\quad f^{-}(z)=\omega^{-}(z)\chi^{-}(z), \qquad (3.2.11)$$

получим:

$$\omega^{+}=\omega^{-}+\frac{t^{-æ+2p+1}\Pi(t)B_2(t)}{\chi^{+}(t)}\overline{t^{-p-1}(t-\beta)^{2p}\omega^{-}(t)\chi^{-}(t)}+$$

$$+\frac{t^{-æ+2p+1}\Pi(t)p(t)}{\chi^{+}(t)}V_1(\omega^{-}\chi^{-})+\frac{t^{-æ+2p+1}\Pi(t)q(t)}{\chi^{+}(t)}\overline{V_1(\omega^{-}\chi^{-})}+$$

$$+\frac{t^{-æ+2p+1}\Pi(t)}{\chi^{+}(t)}\left[c(t)-P_{æ-2p-2}(t)\right]$$

или

$$\omega^{+}=\omega^{-}+\frac{t^{p+1}B_2(t)}{A_2(t)}\frac{\overline{\chi^{-}(t)}}{\chi^{-}(t)}\overline{t^{-p-1}(t-\beta)^{2p}\,\omega^{-}(t)}+\frac{t^{p+1}p(t)}{\chi^{-}(t)A_1(t)}V_1(\chi^{-}\omega^{-})+$$

$$+\frac{t^{p+1}q_2(t)}{\chi^{-}(t)A_2(t)}\overline{V_1(\chi^{-}\omega^{-})}+\frac{t^{2p-æ+1}\Pi(t)}{\chi^{+}(t)}\left[c(t)-P_{æ+2p-2}(t)\right]. \qquad (3.2.12)$$

С помощью:

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau, \qquad (3.2.13)$$

получим:

$$\mu(t)=\frac{B_2(t)}{A_2(t)}t^{2p+1}\frac{\overline{\chi^{-}(t)}}{\chi^{-}(t)}\overline{t^{-p-1}(t-\beta)^{2p}\,\frac{1}{2}(-\mu+S_{\mu})}+$$

$$+\frac{t^{d+1}p_2(t)}{\chi^{-}(t)A_2(t)}V_1\left[\frac{\chi^{-}}{2}(-\mu+S_{\mu})\right]+\frac{t^{p+1}q_2(t)}{\chi^{-}A_2(t)}\overline{V_1\left[\frac{\chi^{-}}{2}(-\mu+S_{\mu})\right]}+$$

$$+\frac{t^{-æ+2p+1}\Pi(t)}{\chi^{+}(t)}\left[c(t)-P_{æ-2p-2}(t)\right]. \qquad (3.2.14)$$

В правой части (3.2.14), оценим норму оператора:

$$\left\{\int_{\Gamma}\left|\frac{t^{2p+1}B_2(t)}{A_1(t)}\frac{\overline{\chi^{-}(t)}}{\chi^{-}(t)}\overline{t^{-d-1}(t-\beta)^{2p}\,\frac{1}{2}(-\mu+S_{\mu})}+\right.\right.$$

$$+\frac{t^{2p+1}p(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}V_1\left[\frac{\chi^-}{2}(-\mu+S_\mu)\right]+\frac{t^{p+1}q_2(t)}{\chi^- A_2(t)}\overline{V_1\left[\frac{\chi^-}{2}(-\mu+S_\mu)\right]}\Bigg|^2 dt\Bigg\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq \max_t\left|\frac{B_2(t)}{A_2(t)}(t-\beta)^{2p}\right|\frac{1}{2}\left\{\|\mu\|+\|S_\mu\|\right\}+$$

$$+\left\{\max_t\left|\frac{t^{2p+1}p_2(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}\right|\right\}\|\tilde{V}_1\|_{L_2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\|\mu\|+\|S_\mu\|\right\}+$$

$$+\left\{\max_t\left|\frac{t^{2p+1}q_2(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}\right|\right\}\cdot\frac{1}{2}\left\{\|\mu\|+\|S_\mu\|\right\}\leq$$

$$\leq\left\{\max_t\left|\frac{B_2(t)}{A_2(t)}(t-\beta)^{2p}\right|+\left|\max_t\left|\frac{t^{2p+1}p_2(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}\right|+\max_t\left|\frac{t^{2p+1}q_2(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}\right|\right]\cdot\|\tilde{V}_1\|L_2\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1+S_2}{2}\cdot\|\mu\|.$$

Если выполнено условие:

$$\left\{\max_t\left|\frac{B_2(t)}{A_2(t)}(t-\beta)^{2p}\right|+\left[\max_t\left|\frac{t^{2p+1}p_2(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}\right|+\max_t\left|\frac{t^{2p+1}q_2(t)}{\chi^-(t)A_2(t)}\right|\right]\|\tilde{V}_1\|_{L_2}\right\}\frac{1+S_2}{2}<1,$$

где

$$\tilde{V}_1(\psi^-)=v_1(\chi^-\psi^-),\qquad V_1(\psi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{(\tau-\beta)^{2p}\psi^-(\tau)}{\tau^{2p+1}}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau,$$

ветвь логарифма фиксирована условием $\left[\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)\right]_{z=\infty}=0$, то интегральное уравнение (3.2.14), в силу принципа сжатых отображений, имеет в L_2 единственное решение.

Так как все коэффициенты (3.2.14) из класса Гельдера, то всякое решение из L_2 будет также из класса H. Используя связь $F^-(t)$ и $F^+(t)$ с ω^+ и ω^- можно утверждать, что полученное решение будет из класса Гельдера.

Имеются следующие случаи:

1) Если $æ-2p-1\geq 0$, то $c(t)=0$ и $\mathrm{P}_{æ\text{-}2p\text{-}1}(t)$ равны последовательно

$$1, i,\ t, it, ..., t^{æ\text{-}2p\text{-}1},\quad it^{æ\text{-}2p\text{-}1},$$

и наконец, в результате, получим несколько задач (3.2.9); из решения задачи (3.2.9), и затем (3.2.3), выписываем частные решения задачи (3.2.1). Полагая $\mathrm{P}_{æ-2p-1}(t)\equiv 0$, но $c(t)\neq 0$, строим частное решение.

2) При $æ-2p-1<0$, то полученное решение имеет полюс в точке $z=0$.

Для получения регулярного решения, требуется дополнительное условие следующего вида:

$$\int_{\Gamma} t^{-k} Q[c(t)]dt=0,\qquad k=0,1,...,|æ\text{-}2p\text{-}1|,$$

где Q-линейный оператор.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $A_1(t),\ B_1(t),\ p_1(t),\ q_1(t),\ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$ *и*

$$\left\{\max_t\left|\frac{b_2(t)}{a_2(t)}(t-\beta)^{2p}\cdot t^{-2p-1}\right|+\max_t\left|\frac{p_2(t)t^{2p+1}}{\chi^-(t)a_2(t)}\right|+\max_t\left|\frac{q_2(t)t^{2p+1}}{\chi^-(t)a_2(t)}\right|\right\}\times$$

$$\times \left\| \tilde{V}_1 \right\|_{L_2} \cdot \frac{1+S_2}{2} < 1,$$

S_2 - *норма в* L_2 *сингулярного оператора* $S_\mu \equiv \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\mu(\tau)}{\tau - z} d\tau,$

$$\chi^+(t) = t^{-æ} \prod(t) a_2(t) \chi^-(t),$$

$$\prod(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(z - z_k\right)^{æ_k}, \ \ z_k \in D_k^-;$$

$$æ = Ind_{\Gamma_k} a_1(t), \qquad æ = \sum_{k=0}^{m} æ_k.$$

Тогда: если $æ - 2p - 1 \geq 0$, *то неоднородная задача, безусловно, разрешима, а однородная задача (0.0.11), имеет* $2(æ - 2p - 1)$ *решения;*

если $æ - 2p - 1 < 0$, *то однородная задача имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной задачи, требуется следующее условие разрешимости:*

$$\int_\Gamma t^{-k} Q[c(t)] dt = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,|æ\text{-}2p\text{-}1|,$$

здесь Q - *линейный оператор.*

§ 3.3. Сингулярные случаи одной граничной задачи теории аналитических функций с производной в граничном условии

Допустим, что L - контур типа Ляпунова, разделяющий плоскость на области $D^{\pm}$, $a(t),\ c(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$. Надо найти функции $\Phi^{+}(z),\ \Phi^{-}(z)$, соответственно, аналитических в областях $D^{\pm}$, по граничному условию:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}\left|t-\alpha_k\right|^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}\left|t-\beta_j\right|^{p_j}}A_1(t)t^2\cdot\frac{d\Phi^{-}}{dt}+\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}\left|t-\alpha_k\right|^{m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}\left|t-\beta_j\right|^{p_j}}A_1(t)t\Phi^{-}(t)+c(t), \quad (3.3.1)$$

где $\alpha_k(k=1,2,...,\mu),\ \beta_j(j=1,2,...,\nu)$ - различные точки контура, $m_k,\ p_j$ - произвольные действительные числа, $A_1(t),\ c(t)$ - функции из класса H, $A_1(t)\neq 0$.

Воспользуемся обозначениями: $\sum\limits_{k=1}^{\mu}m_k=m,\quad \sum\limits_{j=1}^{\nu}p_j=p$.

$$\prod_{k=1}^{\mu}\left|t-\alpha_k\right|^{m_k}=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{m_k}\cdot\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}m_k\right),$$

$$\prod_{j=1}^{\nu}\left|t-\beta_j\right|^{p_j}=\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}\cdot\exp\left(-2i\sum_{j=1}^{\nu}\theta_k^{(2)}p_j\right), \quad (3.3.2)$$

$$\theta_k^{(1)}=\arg(t-\alpha_k),\ \theta_j^{(2)}=\arg(t-\beta_j).$$

$m_k = d - \nu_1,\ p_j = p - \nu_2$, где d и p - натуральные числа. ν_1 и ν_2 , $0 < \nu_1 < 1,\ 0 < \nu_2 < 1.$

Функции $e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)} m_k}$ и $e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\nu}\theta_k^{(2)} p_j}$ непрерывны на L и имеют индексы, соответственно, $-m,\ -p$.

Подставляя (3.3.2) в (3.3.1), имеем

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^d \prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-\nu_1} \cdot e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)} m_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^p \prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{-\nu_2} e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\nu}\theta_k^{(2)} p_j}} A_1(t)\cdot t^2 \frac{d\Phi^-}{dt} +$$

$$+ \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^d \prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-\nu_1} \cdot e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)} d}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^p \prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{-\nu_2} e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\nu}\theta_k^{(2)} p}} A_1(t)\Phi^-(t) + c(t) \qquad (3.3.3)$$

или

$$\Phi^+(t) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^d \prod\limits_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-\nu_1}}{\prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^p \prod\limits_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{-\nu_2}} A_1(t) e^{2i\left(\sum\limits_{j=1}^{\nu}\theta_j^{(2)} p - \sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)} d\right)} \times$$

$$\times \left[t^2 \frac{d\Phi^-(t)}{dt} + t\Phi^-(t) \right] + c(t),$$

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{p_j}}\cdot G_1(t)\Phi_1^{-}(t)+c(t), \qquad (3.3.4)$$

где

$$t^2\frac{d\Phi^{-}(t)}{dt}+t\Phi^{-}(t)=\Phi_1^{-}(t),$$

$$G_1(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{-\nu_1}}{\prod_{j=1}^{\nu}(t-\beta_j)^{-\nu_2}}\cdot A_1(t)e^{2i\left(\sum_{j=1}^{\nu}\theta_j^{(2)}\cdot p-\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(2)}d\right)}.$$

Положим в (3.3.4):

$$\Phi_1^{-}(z)=\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot z^{-p}\Phi_2^{-}(z). \qquad (3.3.5)$$

Используя (3.3.5), граничное условие (3.3.4) преобразуется в следующем виде:

$$\Phi^{+}(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}\cdot t^{-p}G_1(t)\Phi_2^{-}(t)+c(t). \qquad (3.3.6)$$

Пусть функция $c(t)$ имеет производные любого порядка. Построим интерполяционный полином $T(t)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$c^{(u)}(\alpha_k)=T^{(u)}(\alpha_k)\ \ (u=0,1,\ldots,m_k-1). \qquad (3.3.7)$$

Используя (3.3.7), граничное условие (3.3.6) можно преобразить в следующий вид:

$$\Phi^{+}(t)-T(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}\cdot t^{-p}G_1(t)\Phi_2^{-}(t)+\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}c_1(t).$$

Граничное условие делим на $\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}$, получим:

$$\frac{\Phi^{+}(t)-T(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}}=t^{-p}G_1(t)\Phi_2^{-}(t)+c_1(t),$$

$$\Phi_1^{+}(t)=t^{-p}G_1(t)\Phi_2^{-}(t)+c_1(t), \qquad (3.3.8)$$

здесь $\Phi_1^{+}(t)=\dfrac{\Phi^{+}(t)-T(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{d_k}}$.

В граничном условии (3.3.8), $G_1(t)$ - многозначная функция.

Для решения задачи (3.3.8), построим новые функции:

$$\Phi_1^{+}(z)=(z-\alpha_k)^{\nu_1}(z-\beta_j)^{\nu_2}\Phi_2^{+}(z),$$

$$\Phi_2^{-}(z)=\left(\frac{z-\alpha_k}{z-z_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{z-\beta_j}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\Phi_3^{-}(z).$$

Подставляя новые функции в граничное условие (3.3.8), имеем

$$(t-\alpha_k)^{\nu_1}(t-\beta_j)^{\nu_2}\Phi_2^+(t)=t^{-p}G_1(t)\cdot\left(\frac{t-\alpha_k}{z-z_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{t-\beta_j}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\Phi_3^-(t)+c_1(t)$$

или

$$\Phi_2^+(t)=t^{-p}G_1(t)\cdot(t-z_0)^{-\nu_1}(t-z_0)^{-\nu_2}\Phi_3^-(t)+(t-\alpha_k)^{-\nu_1}(t-\beta_j)^{-\nu_2}c_1(t),$$

$$\Phi_2^+(t)=t^{-p}G_2(t)\Phi_3^-(t)+c_2(t). \qquad (3.3.9)$$

В граничном условии (3.3.9), $G_2(t)$ - непрерывная функция, $c_2(t)$ - интегрируемая функция и

$$G_2(t)=\frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}.$$

Подставляя значение $G_2(t)$ в (3.3.9), имеем:

$$\frac{\Phi_2^+(t)}{\chi^+(t)}=t^{-p}\frac{\Phi_3^-(t)}{\chi^-(t)}+\frac{c_2(t)}{\chi^+(t)}. \qquad (3.3.10)$$

Интегрируемую функцию $\dfrac{c_2(t)}{\chi^+(t)}$ - можно представить, в виде:

$$\frac{c_2(t)}{\chi^+(t)}=\psi^+(t)-\psi^-(t),$$

где $\psi^{\pm}(z)$ - аналитические функции в областях $D^{\pm}$,

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{c_2(\tau)}{\chi^+(\tau)}\cdot\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

После чего, граничное условие преобразуется, следующим образом:

$$\frac{\Phi_2^+(t)}{\chi^+(t)} - \psi^+(t) = t^{-p}\,\frac{\Phi_3^-(t)}{\chi^-(t)} - \psi^-(t).$$

На основании теоремы об аналитическом продолжении и обобщенной теоремы Лиувилля, получим:

$$\frac{\Phi_2^+(z)}{\chi^+(z)} - \psi^+(z) = \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z), \quad \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z) = z^{-p}\,\frac{\Phi_3^-(z)}{\chi^-(z)} - \psi^-(z)$$

Откуда:

$$\Phi_2^+(z) = \left[\psi^+(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z)\right]\chi^+(z),$$

$$\Phi_3^-(z) = \left[\psi^-(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z)\right]\chi^-(z).$$

$$\Phi_1^+(z) = (z-\alpha_k)^{\nu_1}(z-\beta_j)^{\nu_2}\cdot\chi^+(z)\left[\psi^+(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z)\right],$$

$$\Phi_1^-(z) = \left(\frac{z-\alpha_k}{z-z_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{z-\beta_j}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\chi^-(z)\left[\psi^-(z) + \mathrm{P}_{æ-p}(z)\right]\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot z^{-p}.$$

$$\Phi^+(z) = \prod_{k=1}^{\mu}(z-\alpha_k)^{d_k}\cdot(z-\alpha_k)^{\nu_1}(z-\beta_j)^{\nu_2}\,\chi^+(z)\left[\psi^+(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z)\right]$$

$$\Phi^-(z) = e^{-\ln z}\Big[c +$$

$$+\int e^{\ln z}\cdot\left(\frac{z-\alpha_k}{z-z_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{z-\beta_j}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\chi^-(z)\left[\psi^-(z) + \mathrm{P}_{æ\text{-}p}(z)\right]\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\,z^{-p}dz\Bigg] =$$

$$=\frac{1}{z}\left[c+\int z\cdot\left(\frac{z-\alpha_k}{z-z_0}\right)^{\nu_1}\left(\frac{z-\beta_j}{z-z_0}\right)^{\nu_2}\chi^-(z)\left[\psi^-(z)+\mathrm{P}_{æ-p}(z)\right]\prod_{j=1}^{\nu}(z-\beta_j)^{p_j}\cdot z^{-p}dz\right].$$

Итак, имеет место теорема:

Теорема 3.3.1. *Пусть* $A_1(t)$, $c(t)$ - *функции, удовлетворяющие условию Гельдера. Если* $æ-p<0$ *, тогда в решении задачи, надо предположить* $\mathrm{P}_{æ-p}(z)\equiv 0$ *и потребовать* $|æ-p|$ *условий разрешимости:*

$$\int_{\Gamma}\frac{c_1(\tau)}{\chi^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0,\qquad k=1,2,\ldots,|æ-p|.$$

Если $æ-p\geq 0$, *то неоднородная задача имеет* $|æ-p|$ *решения. Если* $æ-p<0$, *то число условий разрешимости задачи равно* $|æ-p|$ *и при* $æ-p=0$ *неоднородная задача, имеет единственное решение.*

§ 3.4. Сингулярные случаи общей граничной задачи теории аналитической функции для полуплоскости

Допустим, что L - контур и L - есть действительная ось. Требуется найти аналитические функции $F^{\pm}(z)$ в $D^{\pm}$ соответственно, по следующим граничным условиям:

$$F^{+}(t)=\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}A_1(t)F^{-}(t)+\frac{|t-\alpha|^{2d}}{|t-\beta|^{2p}}B_1(t)\overline{F^{-}(t)}+c(t), \qquad (3.4.1)$$

$$-\infty<t<\infty,\ F^{+}(\infty)=F^{-}(\infty)=c(\infty)=0.$$

$A_1(t),\ B_1(t),\ c(t)$ - функции из класса H, $\alpha,\ \beta$ - несовпадающие точки контура, $d,\ p$ - целые положительные числа:

$$|t-\alpha|^{2d}=(t-\alpha)^{d}\overline{(t-\alpha)^{d}}=(t-\alpha)^{d}(t-\alpha)^{d}e^{-2i\theta_1 d}=$$

$$=(t-\alpha)^{2d}e^{-2i\theta_1 d},\quad \theta_1=\arg(t-\alpha),$$

$$|t-\beta|^{2p}=(t-\beta)^{p}\overline{(t-\beta)^{p}}=(t-\beta)^{p}(t-\beta)^{p}e^{-2i\theta_2 p}= \qquad (3.4.2)$$

$$=(t-\beta)^{2p}e^{-2i\theta_2 p},\ \theta_2=\arg(t-\beta).$$

Учитывая (3.4.2), граничное условие (3.4.1) можно перевести в следующий вид:

$$F^{+}(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\cdot\exp\big(2i(\theta_2 p-\theta_1 d)\big)A_1(t)F^{-}(t)+$$

$$+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}\cdot\exp\big(2i(\theta_2 p-\theta_1 d)\big)B_1(t)\overline{F^-(t)}+c(t),$$

$$F^+(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}A_2(t)F^-(t)+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}B_2(t)\overline{F^-(t)}+c(t), \qquad (3.4.3)$$

здесь

$$A_2(t)=A_1(t)e^{2i(\theta_2 p-\theta_1 d)},\ B_2(t)=B_1(t)\cdot e^{2i(\theta_2 p-\theta_1 d)}.$$

Потребуем от функции $c(t)$, чтобы в точке $t=\alpha$ была дифференцируема $2d-1$ - раз. Порядок требуемой высшей производной определяется в дальнейшем.

Построим интерполяционный полином $T(z)$ так, чтобы он удовлетворял условию:

$$c^{(l)}(\alpha)=T^{(l)}(\alpha) \qquad (l=0,1,2,...,2d-1), \qquad (3.4.4)$$

здесь $c^{(l)}(\alpha)$ - значения производных l-го порядка.

Используя (3.4.4), граничное условие (3.4.3) перепишем в следующем виде:

$$F^+(t)-T(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}A_2(t)F^-(t)+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}B_2(t)\overline{F^-(t)}+c(t)-T(t)$$

или

$$F^+(t)-T(t)=\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}A_2(t)F^-(t)+\frac{(t-\alpha)^{2d}}{(t-\beta)^{2p}}B_2(t)\overline{F^-(t)}+(t-\alpha)^{2d}c_1(t).$$

Граничное условие разделим на $(t-\alpha)^{2d}$, получим:

$$F_1^+(t)=\frac{A_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}F^-(t)+\frac{B_2(t)}{(t-\beta)^{2p}}\overline{F^-(t)}+c_1(t), \qquad (3.4.5)$$

здесь $F_1^+(t)=\dfrac{F^+(t)-T(t)}{(t-\alpha)^{2d}}$.

Полагая в (3.4.5):

$$F^-(z)=(z-\beta)^{2p}\cdot z^{-2p}\cdot F_1^-(z). \qquad (3.4.6)$$

и подставляя (3.4.6) в (3.4.5), имеем:

$$F_1^+(t)=t^{-2p}A_2(t)F_1^-(t)+B_2(t)\cdot\overline{t^{-2p}}\,\overline{F_1^-(t)}+c_1(t),$$

$$F_1^+(t)=A_3(t)F_1^-(t)+B_3(t)\overline{F_1^-(t)}+c_1(t), \qquad (3.4.7)$$

где $A_3(t)=t^{-2p}A_2(t),\ \ B_3(t)=\overline{t^{-2p}}B_2(t)$.

1. Пусть в (3.4.7) $æ-2p\geq 0,\ \ (æ=IndA_2(t))$ и положим

$$\psi^+(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ+2p}\left[F_1^+(z)-\mathrm{P}_{æ-2p-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\right],$$

и здесь полином

$$\mathrm{P}_{æ-2p-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

выбираем так, чтобы функция $\psi^+(z)$ была непрерывной.

В этом случае, задача (3.4.7), принимает вид:

$$\Psi^+(t)=A_3(t)\psi^-(t)+B_3(t)\overline{\Psi^-(t)}+c_2(t), \qquad (3.4.8)$$

где

$$A_3(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ+2p}A_2(t),\quad B_3(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ+2p}B_2(t),$$

$$c_2(t)=\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-æ+2p}\left[c_1(t)-\mathrm{P}_{æ-2p-1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\right].$$

Индекс граничной задачи (3.4.8) $Ind_\Gamma A_3(t)=0,$ и $A_3(t)$ можно представить в виде отношения:

$$A_3(t)=\frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)},$$

где

$$\chi^+(z)=e^{\Gamma(z)},\ \chi^-(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-æ+2p}e^{\Gamma(z)},$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left[\left(\frac{t_1-i}{t_1+i}\right)^{-æ+2p}A_3(t)\right]\frac{dt_1}{t_1-z}.$$

С помощью последних выражений, граничную задачу (3.4.8), преобразуем в виде:

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\frac{B_3(t)}{A_3(t)}\frac{\overline{\chi^-(t)}}{\chi^-(t)}\cdot\overline{\Psi^-(t)}+\frac{c_1(t)}{\chi^+(t)},\qquad(3.4.9)$$

здесь $\Psi^+(z)=\dfrac{\psi^+(z)}{\chi^+(z)},\qquad \Psi^-(z)=\dfrac{\psi^-(z)}{\chi^-(z)}.$

Решение задачи (3.4.9), ищем в виде интеграла типа Коши, т.е.

$$\Psi^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(t_1)}{t_1-z}dt_1.$$

Используя формулы Сохоцкого-Племелля, получим следующие интегральные уравнения:

$$\mu(t)=\frac{B_3(t)}{A_3(t)}\frac{\overline{\chi^{-}(t)}}{\chi^{-}(t)}\cdot\frac{1}{2}\overline{(-\mu+s_\mu)}+\left[c_1(t)-\mathrm{P}_{æ-2p-1}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)\right]\frac{1}{\chi^{+}(t)},\qquad(3.4.10)$$

которые эквивалентны граничной задаче (3.4.7).

По принципу сжатых отображений, уравнение (3.4.9), имеет единственное решение при каждом свободном члене (отметим, что s_μ - норма оператора: $s_\mu=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(t_1)}{t_1-t}dt_1$ в $L_2(-\infty,\ \infty)$).

Полагая $c(t)$ и $\mathrm{P}_{æ-2p-1}(t)$ равным последовательно:

$$1,\ i,\ \left(\frac{t-i}{t+i}\right),\ i\left(\frac{t-i}{t+i}\right),\ldots,\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{æ-2p-1},\ i\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{æ-2p-1},$$

затем получим серию задач (3.2.8), из которых можно найти решение данной задачи.

Допустим $\mathrm{P}_{æ-2p+1}(t)\equiv 0$ и $c_1(t)\neq 0$, в этом случае, находим частное решение данной задачи.

2. Если $æ-2p<0$, то в данном случае:

$$F^{+}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{æ}\Psi^{+}(z)+\mathrm{P}_{æ-2p-1}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$$

имеет полюс в точке $z = i$. Для аналитических решений требуются, следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-i)^{-k} Q|c_2(t)|dt = 0, \qquad k = 0,1,...,-æ + 2p$$

здесь Q - линейный оператор.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $A_3(t) \in H(-\infty,\infty), \quad A_3(t) \neq 0$,

$$æ = Ind_{\Gamma} A_3(t) = \frac{1}{2\pi i}\{\ln A_3(t)\}_{-\infty}^{\infty},$$

$b(t)$ - *ограниченная и измеримая функция,* $c_2(t) \in L_2(-\infty,\infty)$ *и* $F^{\pm}(t) \in L_2(-\infty,\infty)$.

Пусть

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\frac{B_3(t)}{A_3(t)}\right| < 1, \quad \left(\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\frac{B_1(t)}{A_1(t)}\right| < 1\right).$$

Тогда:

1) при $æ - 2p > 0$, $l = 2(æ - p)$ *и* $p = 0$;

2) при $æ - 2p < 0$, $l = 0$, $p = |æ - 2p|$. *(*l *- число решений однородной задачи,* p *−число условий разрешимости неоднородной задачи).*

Для разрешимости неоднородной задачи требуются, следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t-i)^{-k} Q[c_2(t)]dt = 0, \qquad k = 1,2,...,-æ + 2p\ ,$$

здесь Q*- линейный оператор.*

§ 3.5. Граничная задача сопряжения с производными высших порядков, главный коэффициент которых имеет нули или полюсы комплексно - сопряжённого вида

Пусть L - есть многосвязная область. Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$E^{+}(t)=\frac{\prod_{k=1}^{\mu}\overline{(t-\alpha_k)}^{\delta_k}}{\prod_{j=1}^{\gamma}\overline{(t-\beta_j)}^{s_j}}A_n^*(t)\frac{d^nE^-}{dt^n}+\prod_{k=1}^{\mu}\overline{(t-\alpha_k)}^{\delta_k}B_n^*(t)\overline{\frac{d^nE^-}{dt^n}}+$$

$$+\prod_{k}^{\mu}\overline{(t-\alpha_k)}^{\delta_k}\sum_{k=0}^{n-1}\left[A_n^*(t)\frac{d^kE^-}{dt^k}+B_k^*\frac{d^kE^-}{dt^k}\right]+c(t), \qquad (3.5.1)$$

здесь $A_n^*(t)$ - есть непрерывная функция, $A_n^*(t)\neq 0$ и все $A_k^*(t)$, $B_k^*(t)$ - ограниченные и измеримые функции. $E^{+}(t)$, $\frac{d^nE^-}{dt^n}$ и $c(t)\in L_p(\Gamma)$, где $\alpha_k=1,2,...,\mu$, β_j $(j=1,2,...,\nu)$ - несовпадающие точки контура; δ_k, s_j - целые положительные числа.

Воспользуемся обозначениями:

$$IndA_n^*(t)=æ,\ \sum_{j=1}^{\gamma}s_i=s,\ \sum_{k=1}^{\mu}\delta_k=\delta.$$

Решение поставленной задачи ищем в классе функций, имеющих особенность меньше единицы.

Аналитическую функцию $E^{-}(z)$, представим через производную n -го порядка:

$$E^{-}(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2\pi!}\int_L\frac{\psi_n^-}{\tau^n}(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_kz^k=V_n(\psi_n^-), \qquad (3.5.2)$$

здесь $\dfrac{dE_n^-}{d\tau^n} = \dfrac{\psi_n^-}{z^n}$,

$$\left[\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)\right]_{z=\infty} = 0, \quad \alpha_k = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\cdot\frac{\beta_k}{2\pi i}\int_\Gamma \psi_n^-(\tau)\cdot\tau^{-k-1}d\tau$$

$$(k = 0,1,\ldots,n-2), \quad \beta_k = \sum_{j=k+1}^{n-1}\frac{(-1)^j c_{n-1}^j}{j-k}.$$

Производная k-го порядка через производную n-го порядка, даётся по формуле:

$$\frac{d^k\varphi^-}{dz^k} = \frac{(-1)^{n-k}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi_n^-}{\tau^{n-k}}(\tau-z)^{n-k-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau +$$

$$+\sum_{j=0}^{n-k-2}\alpha_j z^j = V_{n-k}(\psi_n). \qquad (3.5.3)$$

Поскольку

$$\prod_{k=1}^{\mu}(\overline{t-\alpha_k})^{\delta_k} = \prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}\cdot e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k},$$

$$\prod_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\beta_j})^{s_j} = \prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}s_j},$$

здесь $\theta_k^{(1)} = \arg(t-\alpha_k)$, $\theta_j^{(2)} = \arg(t-\beta_j)$.

Отметим, что функции $e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k}$ и $e^{-2i\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}s_j}$ - непрерывные и имеют индексы, равные, соответственно, $-\delta$, $-s$.

Используя эти выражения в (3.5.1), получим:

$$E^{+}(t)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{\mu}(\overline{t-\alpha_k})^{\delta_k}}{\prod\limits_{j=1}^{\gamma}(\overline{t-\beta_j})^{s_j}}e^{2i(\sum\limits_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}s_j-\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k)}\cdot A_n^{*}(t)\frac{d^nE^{-}}{dt^n}+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(\overline{t-\alpha_k})^{\delta_k}e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k}B_n^{*}(t)\overline{\frac{d^nE^{-}}{dt^n}}+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)e^{-2i\sum\limits_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left[A_k^{*}(t)\frac{d^kE^{-}}{dt^k}+B_k^{*}(t)\overline{\frac{d^kE^{-}}{dt^k}}\right]+c(t). \qquad (3.5.4)$$

В последней задаче, предположим:

$$\frac{d^nE^{-}}{dz^n}=\frac{\Psi_n^{-}(z)}{z^n}=\prod_{j=1}^{\gamma}\left(z-\beta_j\right)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^{-}(z),$$

$$\overline{\frac{d^nE^{-}}{dz^n}}=\overline{\prod_{j=1}^{\gamma}(z-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^{-}(z)}, \qquad (3.5.5)$$

получим следующую граничную задачу:

$$E^{+}(t)=\prod_{k=1}^{\mu}\left(t-\alpha_k\right)^{\delta_k}\cdot z^{-s-n}\exp\left(2i(\sum_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}s_j-\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k)\right)\cdot A_n^{*}(t)\Phi^{-}(t)+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(\overline{t-\alpha_k})^{\delta_k}\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\overline{\prod_{j=1}^{\gamma}\left(z-\beta_j\right)^{s_j}\cdot z^{-s-n}}B_n^{*}(t)\overline{\Phi^{-}(t)}+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(\overline{t-\alpha_k})^{\delta_k}\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^*(t)\cdot v_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^-(t)\right]+\right.$$

$$\left.+B_k^*(t)\overline{V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^-(t)\right]}\right\}+c(t)\,. \qquad (3.5.6)$$

Отметим, что при замене (3.5.5), класс решений остаётся без изменения, так как из граничного условия (3.5.1) и непрерывности $E^+(t)$ и $\dfrac{d^kE^-}{dt^k}$ $(k=0,1,2,...,n)$ видно, что $\dfrac{d^nE^-}{dz^n}$ имеет в точках $t=\beta_j$ $(j=1,...,\gamma)$ нуль порядка s.

Пусть функция $c(t)$ имеет производные любого порядка.

Интерполяционный полином $T(t)$ построим, следующим образом:

$$c^{(u)}(\alpha_k)=T^{(u)}(u=0,1,2,...,\delta_k;\ k=0,1,2,...,\mu) \qquad (3.5.7)$$

При помощи (3.5.7), граничное условие запишется, в следующем виде:

$$E^+(t)-T(t)=\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}\cdot t^{-s-n}\exp\left(2i(\sum_{j=1}^{\gamma}\theta_j^{(2)}s_j-\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k)\right)\cdot A_n^*(t)\Phi^-(t)+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\overline{\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}B_n^*(t)\overline{\Phi^-(t)}}+$$

$$+\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^*(t)\cdot V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^-(t)\right]+\right.$$

$$+B_k^*(t)\overline{V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^-(t)\right]}\Bigg\}+\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}c_1(t) \qquad (3.5.8)$$

или

$$\frac{E^+(t)-T(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}}=A_n^{**}(t)\Phi^-(t)+B_n^{**}(t)\overline{\Phi^-(t)}+$$

$$+\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{A_k^*(t)v_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^-(t)\right]+$$

$$+B_k^*(t)\overline{v_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot z^{-s-n}\Phi^-(t)\right]}+c_1(t),$$

$$\Phi^+(t)=\frac{E^+(t)-T(t)}{\prod_{k=1}^{\mu}(t-\alpha_k)^{\delta_k}}.$$

$$\Phi^+(t)=A_n^{**}(t)\Phi^-(t)+B_n^{**}\overline{\Phi^-(t)}+$$

$$+\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\sum_{k=0}^{n-1}\Bigg\{A_k^*(t)V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot t^{-s-n}\Phi^-(t)\right]+$$

$$+B_k^*\overline{V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot t^{-s-n}\Phi^-(t)\right]}+c_1(t). \qquad (3.5.9)$$

Воспользуемся равенством:

$$\Phi^{+}(z)=z^{æ-\delta-n}\prod{}^{-1}(z)\,f^{+}(z)+\mathrm{P}_{æ-\delta-n}(z) \qquad (*)$$

где

$$\prod(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z)^{æ_k},\ z_k=D_k^{-},\quad æ_k=ind_{\Gamma_k}a_n^{*}(t),\quad æ=\sum_{k=1}^{m}\chi_k,$$

$\mathrm{P}_{æ\text{-}\delta\text{-}n\text{-}1}(z)$ - полином с произвольными коэффициентами при $æ-\delta-n-1\geq 0$ и $\mathrm{P}_{æ\text{-}\delta\text{-}n\text{-}1}(z)\equiv 0$ при $æ-\delta-n-1<0$ и после подстановки в (3.5.9), получим:

$$f^{+}(t)=t^{\text{-}æ+\delta+n}A_n^{**}(t)\Pi(t)\Phi^{-}(t)+t^{\text{-}æ+\delta+n}\Pi(t)B_n^{**}(t)\overline{\varphi^{-}(t)}+$$

$$+t^{\text{-}æ+\delta+n}\Pi(t)e^{-2i\sum_{k=0}^{\mu}\theta_k\delta_k}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^{*}(t)\cdot V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\beta_j\right)^{s_j}\cdot t^{-s-n}\Phi^{-}(t)\right]+\right.$$

$$\left.+B_k^{*}(t)\overline{V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\cdot t^{-s-n}\Phi^{-}(t)\right]}\right\}+\left[c_1(t)-\mathrm{P}_{æ-\delta-n-1}(t)\right]. \qquad (**)$$

Так как $Ind_{\Gamma_j}t^{\text{-}æ+\delta+n}\Pi(t)A_n^{**}(t)=0,\quad j=0,1,\ldots,m,$ то эту функцию можно представить, в виде: $\dfrac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)}$.

Вводя обозначения:

$$f^{+}(z)=\chi^{+}(z)w^{+}(z),\quad f^{-}(z)=\chi^{-}(z)w^{-}(z) \qquad (3.5.10)$$

$$\widetilde{V}_{n-k}\left(w^{-}\right)=V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}\left(t-\beta_j\right)^{s_j}t^{-s-n}\chi^{-}(z)w^{-}(z)\right],$$

получим:

$$\frac{f^{+}(t)}{\chi^{+}(t)}=\frac{\Phi^{-}(t)}{\chi^{-}(t)}+\frac{t^{-æ+\delta+n}}{\chi^{+}(t)}B_n^{(**)}(t)\overline{\Phi^{-}(t)}+\frac{t^{-æ+\delta+n}}{\chi^{+}(t)}\Pi(t)\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\cdot$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^{*}(t)V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_i)^{s_i}t^{-s-n}\Phi^{-}(t)\right]+B_k^{*}\overline{V_{n-k}\left[\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_i)^{s_i}t^{-s-n}\Phi^{-}(t)\right]}\right\}+$$

$$+[c_1(t)-\mathrm{P}_{æ-\delta-n-1}(t)].$$

$$w^{+}(t)=w^{-}(t)+\frac{B_n^{**}(t)}{A_n^{**}(t)}\overline{\chi^{-}(t)w^{-}(t)}+\frac{1}{A^{**}(t)}\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^{*}(t)\tilde{V}_{n-k}\left(w^{-}\right)+\right.$$

$$\left.+B_k^{*}(t)\tilde{V}_{n-k}(\omega^{-})\right\}+t^{æ-\delta-n}\Pi(t)\left[c(t)-\mathrm{P}_{æ-\delta-n}(t)\right],\qquad w^{-}(\infty)=0.$$

Используя формулы Сохоцкого о предельных значениях интеграла типа Коши, получим следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t)=\frac{B_n^{**}(t)}{A_n^{**}(t)}\overline{\chi^{-}(t)\frac{1}{2}\left(-\mu+S_\mu\right)}+$$

$$+\frac{1}{A^{**}(t)}\exp\left(-2i\sum_{k=1}^{\mu}\theta_k^{(1)}\delta_k\right)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^{*}(t)\tilde{V}_{n-k}\left[\frac{1}{2}\left(-\mu+S_\mu\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\overline{\tilde{V}_{n-k}\left[\frac{1}{2}\left(-\mu+S_\mu\right)\right]}+t^{æ-\delta-n}\prod(t)\left[c(t)-\mathrm{P}_{æ-\delta-n}(t)\right],\right. \qquad (3.5.11)$$

где $\quad S_\mu\equiv\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau.$

Оценим норму оператора, в правой части (3.5.11):

$$\left\{\int_{\Gamma}\left|\frac{B_n^{**}(t)}{A_n^{**}(t)}\overline{\chi^{-}\frac{1}{2}\left(-\mu+S_{\mu}\right)}+\frac{1}{A^{**}(t)}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{A_k^{*}(t)\overline{\tilde{V}_{n-k}\left[\frac{1}{2}\left(-\mu+S_{\mu}\right)\right]}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_k^{*}(t)\overline{\tilde{V}_{n-k}\left[\frac{1}{2}\left(-\mu+S_{\mu}\right)\right]^2}dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}\max\left|\frac{B_n^{**}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|\left\{\left|-\mu+S_{\mu}\right|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\max\left|\frac{A_k^{*}(t)}{A_n^{*}(t)}\right|\left\{\int_{\Gamma}\left|\tilde{V}_{n-k}\left[-\mu+S_{\mu}\right]\right|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{t}\left|\frac{B_k^{*}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|\left\{\int_{\Gamma}\left|\tilde{V}_{n-k}\left[-\mu+S_{\mu}\right]\right|^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\max_{t}\left|\frac{B_n^{**}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|\left\{\|\mu\|+\|S_{\mu}\|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{t}\left|\frac{A_k^{*}(t)}{A_n^{*}(t)}\right|\cdot\left\{\left\|\tilde{V}_{n-k}\right\|_{L_2}\left[\|\mu\|+\|S_{\mu}\|\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\max_{t}\left|\frac{B_k^{*}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|\cdot\cdot\left\{\left\|\tilde{V}_{n-k}\right\|_{L_2}\left[\|\mu\|+\|S_{\mu}\|\right]\right\}\leq\left\{\max_{t}\left|\frac{B_n^{**}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|+\right.$$

$$\left.+\left[\sum_{k=0}^{n-1}\max_{t}\left|\frac{A_k^{*}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\max_{t}\left|\frac{B_k(t)}{A_n^{**}(t)}\right|\right]\cdot\left\|\tilde{V}_{n-k}\right\|_{L_2}\right\}\frac{1+\|S\|_2}{2}\|\mu\|_{L_2}.$$

Пусть

$$\left\{\max_t\left|\frac{B_n^*(t)}{A_n^{**}(t)}\right|+\left[\sum_{k=0}^{n-1}\max_t\left|\frac{A_k^{\times}(t)}{A_n^{**}(t)}\right|\right]\cdot\left\|\tilde{V}_{n-k}\right\|_{L_2}\right\}\frac{1+\|S\|_{L_2}}{2}<1. \qquad (3.5.12)$$

По принципу сжатых отображений, утверждаем, что (3.5.11), имеет единственное решение при каждом свободном члене. Поскольку все коэффициенты уравнения (3.5.11), удовлетворяют условию Гельдера, то это решение также будет непрерывным по Гельдеру.

Если $æ-\delta-n-1<0$, то $P_{æ\text{-}\delta\text{-}n}(z)\equiv 0$, и функция $E^+(z)$, определяемой из $(*)$, если $z=0$, то имеет полюс порядка $|æ-\delta-n|$, а для устранения полюса требуется условие вида:

$$\int_\Gamma t^{-k}R[c_1(t)]dt=0,\quad k=0,1,....,\quad |æ\text{-}\delta\text{-}n|-1, \qquad (3.5.13)$$

здесь R-вполне непрерывный оператор.

При $æ-\delta-n-1\geq 0$, полагая $c_1(t)\equiv 0$ и $P_{æ\text{-}\delta\text{-}n}(z)$ равным последовательно

$$1,i,t,it,...,t^{æ-\delta-n-1},it^{æ-\delta-n-1},$$

получим серию задач $(**)$, из которых находим линейно- независимые решения однородной задачи $(**)$ и затем (3.5.1) при $P_{æ\text{-}\delta\text{-}n}(z)\equiv 0$, по $c(t)\neq 0$, получаем частное решение неоднородной задачи.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $D^{\pm}$ *- внутренняя и внешняя области,* A_n^*, B_n^*, $c(t)$ *и все* $B_k(t)\in H(\Gamma)$.

Кроме того, пусть выполнено условие:

$$\left\{\max_t\left|\frac{b_n(t)}{a_n^*(t)}\prod_{j=1}^{\gamma}(t-\beta_j)^{s_j}\right|+\sum_{k=0}^{n-1}\left[\max_t\left|t^{s+n}\frac{a_k(t)}{\chi^-(t)a_n^*(t)}\right|+\right.\right.$$

$$+\max_{t}\left|t^{s+n}\frac{b_k(t)}{\chi^{-}(t)a_n^{*}(t)}\right|\Bigg]\left\|\tilde{V}_{n-k}\right\|_{L_2}\frac{1+\|S\|_{L_2}}{2}<1.$$

Тогда: если $æ-s-n\geq 0$, *то однородная задача имеет* $2(æ-s-n)$ *решений над полем вещественных чисел, а для неоднородной задачи условие разрешимости не требуется;*

если $æ-s-n<0$, *то однородная задача имеет только нулевое решение, а для разрешимости неоднородной требуется выполнение* $2|æ-s-n|$ *вещественных или* $|æ-s-n|$ *комплексных условий:*

$$\int_{\Gamma} t^{-k}R[c(t)]dt=0, k=0,1,\dots,|æ-s-d|-1,$$

здесь R *- вполне определённый оператор.*

ГЛАВА 4. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей главе изучается: граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами, когда коэффициент в граничном условии имеет разрыв первого рода, т.е. предел с права и с лева существуют, но они не равны между собой. Доказана теорема, определяющая число решений однородной задачи и число условый разрешимости неоднородной задачи; граничная задача теории аналитических функций для n - пар функций с разрывными коэффициентами; сингулярные случаи граничной задачи Римана для n - пар функций, когда определитель обращается в нуль. Способ исследования в этом случае заключается в следующем: разложим матрицы коэффициентов в произведение двух матриц, одна из которых имеет нормальный вид, т.е. элементы её конечны и определитель не обращается в нуль, а другая составлена из рациональных функций и следовательно, имеют аналитическое продолжение в областяя D^{+} и D^{-}.

§ 4.1. Граничная задача линейного сопряжения с разрывными коэффициентами

Пусть контур γ разделяет плоскость на внутреннюю область D^+ и внешнюю область D^-.

Задача. Надо найти функцию $f^+(z)$ - аналитическую в области D^+ и $f^-(z)$ - аналитическую в области D^-, включая $z=\infty$, удовлетворяющие на γ, линейному соотношению:

$$f^+(t) = A(t)\, f^-(t) + q(t). \tag{4.1.1}$$

Функцию $A(t)$ будем называть коэффициентом задачи, а $q(t)$ - её свободным членом.

Допустим, что коэффициент $A(t)$ в точке t_1 имеет разрыв первого рода, то есть приделы левой и правой частей существуют, но они не равны.

$$\frac{A(t_1-0)}{A(t_1+0)} = \mu, \;\; \lambda = \frac{1}{2\pi i}\cdot \lg \mu;$$

z_0 - точка, лежащая внутри контура.

Рассмотрим следующие функции:

$$\Omega^+(z) = (z-t_1)^{\lambda}, \;\; \Omega^-(z) = \left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^{\lambda},$$

аналитические, соответственно, в областях D^+ и D^-. Отношение

$$\frac{\Omega^+(t)}{\Omega^-(t)} = (t - z_0)^\lambda$$

функция, разрывная в точке t_1.

Вводим новые функции $F_1^+(z),\ F_1^-(z)$:

$$F^+(z) = (z - t_1)^\lambda F_1^+(z),$$

$$F^-(z) = \left(\frac{z - t_1}{z - z_0}\right)^\lambda F_1^-(z).$$

Эти функции $F_1^+(z),\ F_1^-(z)$ удовлетворят следующее соотношение:

$$F^+(t) = (t - z_0)^{-\lambda} A(t) F_1^+(t).$$

В результате, мы получим непрерывные коэффициенты

$$A_1(t) = (t - z_0)^{-\lambda} A(t).$$

На самом деле, после применения следующих формул:

$$\frac{\Omega(t_1 - 0)}{\Omega(t_1 + 0)} = e^{-2\pi i\mu} A(t)$$

и

$$\mu = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{A(t_1 - 0)}{A(t_1 + 0)}$$

получим:

$$\frac{A_1(t_1 - 0)}{A_1(t_1 + 0)} = \frac{\Omega(t_1 - 0) A(t_1 - 0)}{\Omega(t_1 + 0) A(t_1 + 0)} = e^{-2\pi i\mu} \frac{A(t_1 - 0)}{A(t_1 + 0)} = 1,$$

т.е. $A_1(t_1 - 0) = A_1(t_1 + 0)$. Наконец, задача с разрывными коэффициентами приведена к задаче с непрерывным коэффициентом $A_1(t)$.

Пусть теперь коэффициент задачи имеет несколько точек разрыва. Аналогично, получим:

$$F^{+}(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-t_k)^{\lambda_k}F_1^{+}(z),\ F^{-}(z)=\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{z-t_k}{z-z_0}\right)^{\lambda_k}F_1^{-}(z),$$

$$\lambda_k=\frac{1}{2\pi i}\lg\frac{A(t_k-0)}{A(t_k+0)}.$$

Подставляя $F^{+}(t),\ F^{-}(t)$ в граничное условие, получим:

$$\prod_{k=1}^{m}(z-t_k)^{\lambda_k}F_1^{+}(t)=A_1(t)\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{t-t_k}{z-z_0}\right)^{\lambda_k}F_1^{-}(t)+q(t). \qquad (4.1.2)$$

Заменяя коэффициент $A_1(t)$ граничного условия (4.1.2), отношением граничных значений канонической функции $A_1(t)=\dfrac{\chi^{+}(t)}{\chi^{-}(t)}$, приведём (4.1.2) граничное условие, к следующему виду:

$$\frac{F_1^{+}(t)}{\chi^{+}(t)}=\frac{F_1^{-}(t)}{\chi^{-}(t)}+\frac{q_1(t)}{\chi^{+}(t)}.$$

Так как свободный член удовлетворяет условию H, то данную функцию можно представить, в виде разности двух аналитических функций:

$$\psi^{+}(t)-\psi^{-}(t)=\frac{q_1(t)}{\chi^{+}(t)},$$

где

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{q_1(\tau)}{\chi^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

При помощи функций $\psi^{+}(t),\ \psi^{-}(t)$, граничное условие перепишем, в следующем виде:

$$\frac{F_1^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} = \frac{F_1^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} + \psi^{+}(t) - \psi^{-}(t).$$

В силу теоремы об аналитическом продолжении и обобщённой теоремы Лиувилля, имеем:

$\text{æ} \geq 0.\ (\text{æ} = IndA_1(t))$. Тогда:

$$\frac{F_1^{+}(t)}{\chi_1^{+}(t)} - \psi^{+}(t) = \frac{F_1^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} - \psi^{-}(t) = \mathrm{P}_{\text{æ}}(t).$$

Отсюда, имеем решение:

$$F_1(z) = \chi(z)\left[\psi(z) + \mathrm{P}_{\text{æ}}(z)\right].$$

$\text{æ} < 0$. В этом случае $\dfrac{F_1^{-}(z)}{\chi^{-}(z)}$ равно нулю на бесконечности и

$$\frac{F_1^{+}(t)}{\chi^{+}(t)} - \psi^{+}(t) = \frac{F_1^{-}(t)}{\chi^{-}(t)} - \psi^{-}(t) = 0,$$

откуда

$$F_1(z) = \chi(z)\psi(z).$$

Учитывая порядок функции в бесконечной удалённой точке, получим следующий результат.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $A(t)$ *и* $q(t)$ *из класса Гельдера.* $A(t)$ *в конечном числе точек контура имеет разрыв первого рода и* $æ = IndA(t)$.

Тогда, при $æ \geq 0$ *неоднородная задача имеет* $æ$ *решения, а при* $æ < 0$, *требуется* $|æ|$ *условий разрешимости. При* $æ = 0$, *неоднородная задача имеет единственное решение.*

§ 4.2. Граничная задача теории аналитических функций для *n*- пар функций с разрывными коэффициентами

Пусть L – многосвязная область, делящая плоскость комплексного переменного на внутреннюю и внешнюю области $D^{\pm}$.

Требуется найти *n* - пар функций

$$\varphi_i^+(z),\ \varphi_i^-(z)\ \ (i=1,2,...,n),$$

аналитических, соответственно, в областях $D^{\pm}$, предельные значения которых на контуре L непрерывны и удовлетворяют, линейному соотношению:

$$\varphi_i^+(t)=a_{i1}(t)\varphi_1^-(t)+...+a_{in}(t)\varphi_n^-(t)+b_i(t), \tag{4.2.1}$$

где $a_{ij}(t),\ b_i(t)$ - заданные функции $a_{ij}(t), b_i(t)\in \mathrm{H}(\Gamma)$.

Используя метод Н.И. Мусхелишвили, перепишем задачу в матричной форме.

Матрицу коэффициентов $\left\|a_{ij}(t)\right\|$ обозначим через $A(t)$, а вектор с составляющими $b_i(t)$ - через $b(t)$. В этом случае, задача имеет следующий вид:

$$\varphi^+(t)=A(t)\varphi^-(t)+b(t). \tag{4.2.2}$$

Для простоты, пусть имеется одна точка разрыва, тогда введём следующие обозначения:

$$\gamma=A^{-1}(t_1+0)A(t_1-0) \tag{4.2.3}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\pi i} \lg \gamma. \tag{4.2.4}$$

Характеристическое уравнение, имеет вид:

$$|\gamma - \rho E| = 0. \tag{4.2.5}$$

Вводя новые функции матриц:

$$\begin{gathered} \omega^{+}(z) = (z - t_1)^{\lambda} = e^{\lambda \lg(z - t_1)}, \\ \omega^{-}(z) = \left(\frac{z - t_1}{z - z_0} \right)^{\lambda} = e^{\lambda \lg\left(\frac{z - t_1}{z - z_0} \right)}. \end{gathered} \tag{4.2.6}$$

Допустим, что t_1 лежит на линии разреза функции $(z - z_0)^{\lambda}$, тогда, приняв, что

$$\lim_{t_1 \to t_1 + 0} (t - z_0)^{\lambda} = (t_1 - z_0)^{\lambda},$$

будем иметь:

$$\lim_{t \to t_1 - 0} (t - z_0)^{\lambda} = e^{2\pi i \lambda} (t_1 - z_0)^{\lambda} = \gamma (t_1 - z_0)^{\lambda}. \tag{4.2.7}$$

Вводя новые векторы:

$$f^{+}(z) = A(t_1+0)(z-t_1)^{\lambda} f_1^{+}(z),$$

$$f^{-}(z) = \left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^{\lambda} f_1^{-}(z)$$

граничное условие преобразуем, в следующем виде:

$$f_1^{+}(t) = (t-t_1)^{-\lambda} A^{-1}(t_1+0)A(t)\left(\frac{t-t_1}{t+z_0}\right)^{\lambda} f_1^{-}(t).$$

Матрица

$$A_1(t) = (t-t_1)^{-\lambda} A^{-1}(t_1+0)A(t)\left(\frac{t-t_1}{t-z_0}\right)^{\lambda}$$

будет непрерывна в точке t_1,

$$A_1(t_1+0) = \lim_{t\to t_1+0}\left[(t-t_1)^{-\lambda} A^{-1}(t_1+0)A(t)\left(\frac{t-t_1}{t-z_0}\right)^{\lambda}\right] = (t_1-z_0)^{-\lambda},$$

и используя (4.2.3) и (4.2.7), имеем

$$A_1(t_1-0) = \lim_{t\to t_1-0}\left[(t-t_1)^{-\lambda} A^{-1}(t_1+0)A(t-0)\left(\frac{t-t_1}{t-z_0}\right)^{\lambda}\right] =$$

$$= \lim_{t\to t_1-0}\left[(t-t_1)^{-\lambda}\gamma\gamma^{-1}\left(\frac{t-t_1}{t-z_0}\right)^{\lambda}\right] = (t-z_0)^{-\lambda}.$$

Итак, мы получили задачу с непрерывными коэффициентами.

Пусть теперь имеем несколько точек разрыва. В этом случае, как для одной точки разрыва, приведём задачу к непрерывным коэффициентам:

$$\gamma_k = A^{-1}(t_k + 0)A(t_k - 0),$$

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi i}\lg\gamma_k \quad (k = 1,2,...,m),$$

$$\Omega_k^+(z) = L_k A(t_k + 0)(z - t_k)^{\lambda_k}, \ \Omega_k^-(z) = M_k\left(\frac{z - t_k}{z - z_0}\right)^{\lambda_k},$$

где L_k, M_k - постоянные матрицы, определяемые формулами:

$$L = E, \ L_j = \left[\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1},$$

$$M_1 = E, \ M_j = \left[\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^-(t_j)\right]^{-1}, \ (j = 2,3,...,m),$$

$$(t - t_j)^{\lambda_j}\left(\frac{t - t_j}{t - z_0}\right)^{\lambda_j}.$$

Введя новые векторы $f_1^+(z)$, $f_1^-(z)$, подстановкой

$$f_1^+(z) = \prod_{k=1}^{m}\Omega_k^+(z)f_1^+(z),$$

$$f_1^-(z) = \prod_{k=1}^{m}\Omega_k^-(z)f_1^-(z),$$

придём к граничному условию:

$$f_1^+(t) = \left[\prod_{k=1}^{m} \Omega_k^+(t)\right]^{-1} A(t) \prod_{k=1}^{m} \Omega_k^-(t) f_1^-(t).$$

Покажем, что матрица

$$A_1(t) = \left[\prod_{k=1}^{m} \Omega_k^+(t)\right]^{-1} A(t) \prod_{k=1}^{m} \Omega_k^-(t)$$

непрерывна во всех точках $t_1,...,t_m$. Учитывая, что функции Ω_j непрерывны во всех точках $t_k (k \neq j)$, а также условие:

$$\lim_{t \to t_1 - 0} (t - z_0)^{\lambda_j} = \gamma_j (t_j - z_0)^{\lambda_j},$$

получим:

$$A_1(t_j + 0) = \lim_{t \to t_j + 0} \left[\prod_{k=j+1}^{m} \Omega_k^+(t_j)\right]^{-1} (t - t_j)^{-\lambda j} A^{-1}(t_j + 0) L_j^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\prod_{k=1}^{j-1} \Omega_k^+(t_j)\right]^{-1} A(t_j + 0) \prod_{k=1}^{j-1} \Omega_k^-(t_j) M_j \left(\frac{t - t_j}{t - z_0}\right)^{\lambda_j} \prod_{k=j+1}^{m} \Omega_k^-(t_j) =$$

$$= \left[\prod_{k=j+1}^{m} \Omega_k^+(t_j)\right]^{-1} \lim_{t \to t_j + 0} \left\{(t - t_j)^{-\lambda_j} \left(\frac{t - t_j}{t - z_0}\right)^{\lambda_j}\right\} \prod_{k=j+1}^{m} \Omega_k^-(t_j) =$$

$$=\left[\prod_{k=1}^{j+1}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t_j-z_0)^{-\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j),$$

$$A_1(t_j-0)=\lim_{t\to t_j-0}\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t-t_j)^{-\lambda_j}A^{-1}(t_j+0)L_j^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}A(t_j-0)\prod_{k=1}^{j-1}\Omega_k^-(t_j)M_j\left(\frac{t-t_j}{t-z_0}\right)^{\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j)=$$

$$=\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}\cdot\lim_{t\to t_j-0}\left\{(t-t_j)^{-\lambda}\cdot\gamma\gamma^{-1}\left(\frac{t-t_j}{t_j-z_0}\right)^{\lambda_j}\right\}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j)=$$

$$=\left[\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^+(t_j)\right]^{-1}(t_j-z_0)^{-\lambda_j}\prod_{k=j+1}^{m}\Omega_k^-(t_j),$$

т.е. $A_1(t_j+0)=A_1(t_j-0)$.

Итак, мы получили задачу с непрерывными коэффициентами.

Решение задачи даётся обычным методом.

§ 4.3. Сингулярный случаи граничной задачи Римана для n - пар функций, когда определитель обращается в нуль

В общей теории предполагается, что элементы матрицы $A(t)$ удовлетворяют условию Гельдера, причём определитель матрицы $A(t)$ нигде не обращается в нуль. В настоящем параграфе рассмотрены сингулярные случаи, когда определитель матрицы $A(t)$ может иметь нули в некотором конечном числе точек $t_1,...,t_m$ контура и элементы матрицы $A(t)$ могут обращаться в бесконечность целого порядка в конечном числе точек $t_1',...,t_p'$.

Основная цель исследования настоящего параграфа заключается в решении вопроса, как меняется число линейно независимых решений и число условий разрешимости от наличия нулей определителя и полюсов элементов.

Способ исследования заключается в разложении матрицы коэффициентов в произведение двух матриц, одна из которых имеет нормальный вид, т.е. элементы её конечны и определитель не обращается в нуль, а другая составлена из рациональных функций и, следовательно, имеют аналитическое продолжение в областях D^+ и D^-.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда элементы матрицы $A(t)$ ограничены, а определитель обращается в нуль в точках $t_1, t_2, ..., t_m$ порядков $\alpha_1,...,\alpha_m$ (α_k – целые положительные числа).

Однородная задача:

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t).$$

Пусть t_k – какой-нибудь нуль определителя матрицы $A(t)$. Предположим, что элементы матрицы дифференцируемы в этой точке столько раз, сколько требуется, чтобы обеспечить разложение элементов матрицы по формуле Тейлора. Приведём матрицу $A(t)$ в точке t_k к нормальной форме по строкам, и

пусть T_k – полиномиальные матрицы с постоянным определителем, умножение на контуре слева, равносильно приведенной матрице $A(t)$ к нормальной форме. Если $\alpha_k^{(j)}$ – порядок строк матрицы $A(t)$ после приведения её к нормальной форме

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_k^{(j)} = \alpha_k ,$$

что будем иметь:

$$A(t) = T_k^{-1} \cdot T_k A(t) = T_k^{-1} \| t - t_k \|^{\alpha_k^{(j)}} A'(t),$$

где $A'(t)$ матрица, определитель которой не обращается в нуль в точке t_k.

Поступая также со всеми остальными нулями определителя, приведём граничное условие к виду:

$$\varphi^+(t) = Q(t) A_1(t) \varphi^-(t),$$

где $Q(t)$ - полиномиальная матрица, нули определителя которой совпадают с нулями определителя матрицы $A(t)$, а $A_1(t)$ с определителем, не обращающиеся в нуль. Матрицу $A_1(t)$ назовём приведённой матрицей, а граничную задачу:

$$\varphi_1^+(t) = A(t) \varphi_1^-(t)$$

- приведенной граничной задачей.

Пусть $\chi_1(z)$ – каноническая матрица приведённой граничной задачи, так что, имеем:

$$A_1(t) = \chi_1^+(t) \left[\chi^-(t) \right]^{-1} \varphi^-(t).$$

Последнее граничное условие можно рассматривать как условие аналитической продолжимости вектора через контур на всю плоскость. Левая часть может иметь полюсы в точках $t_1,...,t_m$, но так как краевая часть в этих точках ограничена, то отсюда следует, что в точках $t_1, t_2,...,t_m$ будут устранимые особенности. Следовательно, единственной возможной особенностью аналитического во всей плоскости вектора будут полюсы в бесконечно удалённой точке. Отсюда, по обобщённой теореме Лиувилля,

$$\varphi^+(z) = Q(z)\chi_1^+(z)P(z),$$

$$\varphi^-(z) = Q(z)\chi_1^-(z)P(z),$$

$P(z)$, где вектор из полиномов с произвольными коэффициентами. Так как степень полиномиального вектора зависит лишь от порядков решений канонической матрицы $\chi_1(z)$ на бесконечности, то отсюда следует основной результат:

Число линейно независимых решений однородной краевой задачи не зависит от наличия нулей определителя матрицы коэффициентов $A(t)$ и будет таким же, как и у приведённой задачи.

Неоднородная задача:

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t).$$

В данном случае перебрасывать матрицу $Q(t)$, устраняющую нули определителя, в левую сторону нельзя, так как вектор $b(t)$ будет умножаться на матрицу $Q^{-1}(t)$, и после этого умножения будет иметь в точках $t_1,...,t_m$ особенности неинтегрируемого порядка.

Приведём матрицу $A(t)$ к нормальному виду в точках $t_1,...,t_m$ по столбцам. Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что матрицу $A(t)$ можно представить в виде произведения:

$$A(t) = A_1(t) \cdot R(t),$$

где $A_1(t)$ – приведённая матрица, определитель которой не обращается в нуль, а $R(t)$ - полиномиальная матрица, нули определителя которой совпадают с нулями определителя матрицы $A(t)$.

Вводя аналогично предыдущему $\chi_1(z)$ – каноническую матрицу приведённой задачи:

$$\varphi_1^+(t) = A_1(t)\varphi_1^-(t),$$

представим граничное условие, в виде:

$$\left[\chi_1^+(t)\right]^{-1}\varphi^+(t) = \left[\chi_1^-(t)\right]^{-1}R(t)\varphi^-(t) + \left[\chi_1^+(t)\right]^{-1}b(t).$$

Вводя кусочно-голоморфный вектор:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{[\chi_1^+(\tau)]^{-1}b(\tau)}{\tau - z}\,d\tau$$

и пользуясь формулами Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши, приведём граничное условие, к виду:

$$\left[\chi_1^+(t)\right]^{-1}\varphi^+(t) - \Phi^+(t) = \left[\chi_1^-(t)\right]^{-1}R(t)\varphi^-(t) - \Phi^-(t).$$

На основании теоремы об аналитическом продолжении и обобщённой теоремы Лиувилля, получим решение задачи:

$$\varphi^{+}(z) = \chi_1^{+}(z)\left[P(z) + \Phi^{+}(z)\right],$$

$$\varphi^{-}(z) = R^{-1}\chi_1^{-}(z)\left[P(z) + \Phi^{-}(z)\right],$$

где $P(z)$, как и ранее – полиномиальный вектор.

В последних формулах $\varphi^{-}(z)$ может обращаться в бесконечность в точках $t_1,...,t_m$. Для того чтобы решение оставалось конечным на контуре, нужно потребовать, чтобы вектор:

$$\chi_1^{-}(z)\left[P(z) + \Phi^{-}(z)\right]$$

имел нули соответствующего порядка в точках $t_1,...,t_m$ контура. Это даст новые условия разрешимости задачи.

Заключение

В диссертационной работе исследуются некоторые граничные задачи сопряжения аналитических функций с сингулярными точками, различного типа на контуре.

Основные научные результаты диссертационной работы:

1) для граничной задачи Римана с коэффициентами из класса Гельдера и с коэффициентом рациональной функции, в случае сингулярности, найдено явное решение и явное условие разрешимости, а также показано влияние особенности на характер разрешимости задач;

2) для граничной задачи Гильберта, в случае сингулярности, найдено решение и условие разрешимости в явном виде, исследовано влияние особенности на характер разрешимости задачи Гильберта;

3) найдено число решений однородной задачи l и число условий разрешимости неоднородной задачи p.

4) для граничной задачи с разрывными коэффициентами показана, как эта задача сводится с непрерывными коэффициентами.

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Результаты данной диссертации можно использовать для дальнейшего развития теории аналитических функций в сингулярном случае, а также при решении важных прикладных задач теории упругости, гидродинамики и т.д.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в научных учреждениях и в вузах, в которых ведутся исследования по теории граничных задач теории аналитических функций. Например, в Московском энергетическом институте Российской Федерации, в Таджикском национальном университете, в педагогическом университете имени С. Айни, в Бохтарском, Худжандском государственных университетах и в Таджикском финансово-экономическом государственном университете.

Список литературы

А) Список использованных источников

Монографии и учебные пособия

[1]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. [текст] /Ф.Д. Гахов // Москва,1977, 640с.

[2]. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. [текст] / Н.И. Мусхелишвили // Москва, 1968, 511с.

[3]. Смирнов В.И. Курс высшей математики. [текст] /В.И.Смирнов // т.(1) ч.2. 1951. Физматгиз,1959, 289с.

[4]. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. [текст] Монография /Л.Г. Михайлов // Душанбе, 1963, 183с.

Статьи

[5]. Абдуллаев Р.Н. Об условии разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях. [текст] / Р.Н. Абдуллаев // ДАН СССР 152, №6, 1963, – С.1279-1281.

[6]. Абдуллаев Р.Н. К условиям разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях. [текст] /Р.Н. Абдуллаев // сообщ. АН Груз. ССР 35 №3, 1964, – С.519-522.

[7]. Абдуллаев Р.Н. Однородная задача Римана на замкнутых римановых поверхностях. [текст] /Р.Н. Абдуллаев // ДАН СССР 160, №5, 1965, 983-985.

[8]. Батырев А.В. 1) Приближенное решение задачи Римана-Привалова. [текст] /А.В. Батырев // УМН 11, вып.5, 1956, – С.71-76.

[9]. Башкарёв П.Г., Нечаев А.П. К теории краевых задач со сдвигами. [текст] /П.Г. Башкарёв, А.П. Нечаев. // Докл. АН УССР А, №2, 1973, – С.99-102.

[10]. Беркович Ф.Д. Интегральные уравнения типа свертки с бесконечным числом решений. [текст] /Ф.Д. Беркович // Сб. «Матем. анализ и его приложения» Изд-во Ростовск, ун-та, 1969, – С.27-33.

[11]. Беркович Ф.Д. О приложении краевых задач с бесконечным индексом к исследованию интегральных уравнений. [текст] /Ф.Д. Беркович // Материалы Всес. конфер. По краевым задачам, Изд-во Казанск. ун-та, 1970, – С.49-54.

[12]. Беркович Ф.Д., Говоров Н.В. О краевой задаче Карлемана с бесконечным индексом. [текст] /Ф.Д. Беркович, Н.В. Говоров // Сиб. матем. ж. 12, №5, 1971, – С.1001-1014.

[13]. Беркович Ф.Д., Конышкова Е.М. Об одном случае краевой задачи Римана с бесконечным индексом. [текст] /Ф.Д. Беркович, Е.М. Конышкова // Сообщ. Рост. научн. матем. об-ва, Ростов-на-Дону, 1968, – С.158-164.

[14]. Боярский Б.В. Об обобщенной граничной задаче Гилберта. [текст] /Б.В. Боярский // Сообщ. АН Груз. ССР 25, №4, 1960, – С.385-390.

[15]. Векуа И.Н. О сингулярных линейных интегральных уравнениях. [текст] /И.Н. Векуа // ДАН СССР 26, №8, 1940, – С.335-338.

[16]. Векуа И.Н. Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши. [текст] /И.Н. Векуа // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР X, 1941, – С.45-72.

[17]. Векуа И.Н. К теории сингулярных интегральных уравнений. [текст] /И.Н. Векуа // Сообщ. АН Груз. ССР III, №9, 1942, – С.869-876.

[18]. Векуа И.Н. Об одной линейной граничной задаче Римана. [текст] /И.Н. Векуа // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XI, 1942, – С.109-139.

[19]. Векуа И.Н. О некоторых свойствах решений систем уравнений эллиптического типа. [текст] /И.Н. Векуа // ДАН СССР 98, №2, 1954, – С.181-184.

[20]. Векуа Н.П. Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций. [текст] /Н.П. Векуа // Изв. АН СССР, сер. матем. 20, №3, 1956, – С.377-384.

[21]. Владимиров В.С. Задача линейного сопряжения для голоморфных функций. [текст] /В.С. Владимиров // Изв. АН СССР, сер. матем. 29, №4, 1965, – С.807-834.

[22]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. [текст] /Ф.Д. Гахов // Матем. сб. 2 (44), №4, 1937, – С.673-683.

[23]. Гахов Ф.Д. Об обратных краевых задачах. [текст] /Ф.Д. Гахов // ДАН СССР 86, №4, 1952, – С.649-652.

[24]. Гахов Ф.Д. Об обратных краевых задачах. [текст] /Ф.Д. Гахов // Уч. зап. Казанск. ун-та 113, №10, 1953, – С.9-20.

[25]. Гахов Ф.Д. Об обратной краевой задаче для многосвязной области. [текст] /Ф.Д. Гахов // Уч. зап. Ростовск. пед. ин-та 3, 1955, – С.19-27.

[26]. Гахов Ф.Д. О новых типах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме. [текст] / Ф.Д. Гахов // Сб. «Проблемы механ. сплошн. среды», Изд-во АН СССР, 1961, – С.102-114.

[27]. Гахов Ф.Д. О нелинейной краевой задаче, обобщающей краевую задачу Римана. [текст] /Ф.Д. Гахов // ДАН СССР 181, №2, 1968, – С.271-274.

[28]. Гахов Ф.Д. Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши. [текст] /Ф.Д. Гахов // Дифференц. ур-ния 2, №4, 1966, – С.533-543.

[29]. Гахов Ф.Д. О нелинейной краевой задаче с допустимыми нулями на контуре. [текст] /Ф.Д. Гахов // ДАН СССР 210, №6, 1973, – С.21-24.

[30]. Гахов Ф.Д., Зверович Э.И., Самко С.Г. Приращение аргумента, логарифмический вычет и обощенный принцип аргумента. [текст] / Ф.Д. Гахов, Э.И. Зверович, С.Г. Самко // ДАН СССР 215, №3, 1974, – С.432-435.

[31]. Гахов Ф.Д., Какичев В.А. Случаи вырождения двумерных сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши и постоянными коэффициентами. [текст] /Ф.Д. Гахов, В.А. Какичев // Сб. «Функцион. анализ и теория функций», вып. 4, Изд-во Казанск. ун-та, 1967, – С.91-96.

[32]. Гахов Ф.Д., Крикунов Ю.М. Топологические методы комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам. [текст] /Ф.Д. Гахов, Ю.М. Крикунов // Изв. АН СССР, сер. матем. 20, 1956, – С.206-240.

[33]. Гахов Ф.Д., Мельник И.М. Особые точки контура в обратной краевой задаче теории аналитических функций. [текст] /Ф.Д. Гахов, И.М. Мельник // Укр. матем. ж. 11, №1, 1959, – С.25-37.

[34]. Гахов Ф.Д., Хасабов Э.Г. О краевой задаче Гильберта для многосвязной области. [текст] /Ф.Д. Гахов, Э.Г. Хасабов // Изв. вузов, Математика, т. 2, №1, 1958, – С.12-21.

[35]. Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме. [текст] /Ф.Д. Гахов, Л.И. Чибрикова // Матем. сб. 35, №3, 1954, – С.395-436.

[36]. Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров. [текст] /Ф.Д. Гахов, Л.И. Чибрикова // Уч. зап. Казанск. ун-та 113, №10, 1953, – С.107-110.

[37]. Данилюк И.И. О задаче Гильберта с измеримыми коэффициентами. [текст] /И.И. Данилюк // Сиб. матем. ж. 1, №2, 1960, – С.171-197.

[38]. Данилюк И.И. К теории одномерных сингулярных уравнений. [текст] /И.И. Данилюк // Сб. «Пробл. механ. сплошн. среды», Изд-во АН СССР, 1961, – С.135-144.

[39]. Зверович Э.И. Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях. [текст] /Э.И. Зверович // ДАН СССР 157, №1, 1964, – С.26-29.

[40]. Зверович Э.И. Краевая задача типа задачи Карлемана для многосвязной области. [текст] /Э.И. Зверович // Матем. сб. 64 (106), №4, 1964, – С.618-627.

[41]. Зверович Э.И. Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях. [текст] /Э.И. Зверович // Сиб. матем. ж. VII, №4, 1966, – С.804-819.

[42]. Зверович Э.И. Построение в явном виде аналога ядра Коши на римановых поверхностях некоторых алгебраических функций. [текст] /Э.И. Зверович // Матем. заметки 8, №6, 1970, – С.693-701.

[43]. Зверович Э.И., Литвинчук Г.С. Односторонние краевые задачи теории аналитических функций. [текст] /Э.И. Зверович, Г.С. Литвинчук // Изв. АН СССР, сер. матем. 28, №5, 1964, – С.1003-1036.

[44]. Зверович Э.И., Чернецкий В. А. Краевая задача Карлемана на римановой поверхности с краем. [текст] /Э.И. Зверович, В.А. Чернецкий // Укр. матем. ж. 22, №5, 1970, – С.591-599.

[45]. Иванов В.В. Приближенное решение особых интегральных уравнений. [текст] /В.В. Иванов // ДАН СССР ,№1, 1956, – С.15-18с.

[46]. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Об одном новом подходе к исследованию сингулярных интегральных уравнений со сдвигом. [текст] / Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко // ДАН СССР 202, №2, 1972, – С.273-276.

[47]. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Сингулярный интегральный оператор со сдвигом на разомкнутом контуре. [текст] /Н.К. Карапетянц, С.Г. Самко // ДАН СССР 204, №3, – С.536-539.

[48]. Квеселава Д.А. Решение одной граничной задачи теории функций. [текст] /Д.А. Квеселава // ДАН СССР 53, №8, 1946, 683-686.

[49]. Квеселава Д.А. Некоторые граничные задачи теории функций. [текст] / Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XVI, 1948, – С.39-80.

[50]. Квеселава Д.А. Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров. [текст] /Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XVII, 1949, – С.1-27.

[51]. Квеселава Д.А. Задача Римана-Гильберта для многосвязной области. [текст] /Д.А. Квеселава // Сообщ. АН Груз. ССР VI, №8, 1945, – С.581-590 (на груз. яз.).

[52]. Квеселава Д.А. Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами. [текст] /Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XIII, 1944, – С.1-27 (на груз. яз. с подробным русским резюме).

[53]. Келдыш М.В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области. [текст] /М.В. Келдыш // УМН VI, 1939, – С.90-119.

[54]. Келдыш М.В., Седов Л.И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. [текст] /М.В. Келдыш // ДАН СССР 16, №1, 1937, – С.7-10.

[55]. Купрадзе В.Д. Теория интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши. [текст] /В.Д. Купрадзе // Сообщ. АН Груз. ССР II, №7, 1941, – С.587-596.

[56]. Купрадзе В.Д. О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений. [текст] /В.Д. Купрадзе // Сообщ. АН Груз. ССР II, №9, 1941, – С.793-798.

[57]. Литвинчук Г.С. Теория Нётера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карламена и комплексно - сопряженными неизвестными. [текст] /Г.С. Литвинчук // Изв. АН СССР, сер. матем. 31, №3, 1967, 563-586; 32, №6, 1968, – С.1414-1417.

[58]. Литвинчук Г.С. Об устойчивости одной краевой задачи теории аналитических функций. [текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН СССР 174, №6, 1967, – С.1268-1270.

[59]. Литвинчук Г.С. Об одной задаче, обобщающей краевую задачу Карлемана. [текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН СССР 139, №2, 1961, – С.290-293.

[60]. Литвинчук Г.С. Об одном типе особых функциональных уравнений и краевых задач со сдвигом для аналитических функций. [текст] /Г.С. Литвинчук // Изв. АН СССР, сер. матем. 25, №6, 1961, – С.871-886.

[61]. Литвинчук Г.С. К теории краевых задач со сдвигом Карлемана. [текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН УССР, сер. А, №11, 1967, – С.1019-1022.

[62]. Литвинчук Г.С. Об индексе и нормальной разрешимости одного класса функциональных уравнений. [текст] /Г.С. Литвинчук // ДАН СССР, 149, №5, 1963, 1029-1032.

[63]. Литвинчук Г.С., Нечаев А.П. К теории обобщенной краевой задачи Карлемана. [текст] /Г.С. Литвинчук, А.П. Нечаев // ДАН СССР 189, №1, 1969, – С.38-41.

[64]. Литвинчук Г.С., Нечаев А.П. Обобщенная краевая задача Карлемана. [текст] /Г.С. Литвинчук, А.П. Нечаев // Матем. сб. 82, №1, 1970, – С.30-54.

[65]. Литвинчук Г.С., Хасабов Э.Г. О краевой задаче Гильберта со сдвигом. [текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // ДАН СССР 142, №2, 1962, – С.274-277.

[66]. Литвинчук Г.С., Хасабов Э.Г. Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта. [текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // УМН 20, вып. 6, 1965, – С.124-130.

[67]. Литвинчук Г.С., Хасабов Э.Г. Об одном типе сингулярных интегральных уравнений. [текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // Сиб. матем. ж. 5, №3, 1964, – С.608-625.

[68]. Литвинчук Г.С., Хасабов Э.Г. Один класс сингулярных интегральных уравнений и обобщенная краевая задача типа задачи Карлемана. [текст] /Г.С. Литвинчук, Э.Г. Хасабов // Сиб. матем. ж. 5, №4, 1964, – С.858-880.

[69]. Манджавидзе Г.Ф., Хведелидзе Б.В. О задаче Римана-Привалова с непрерывными коэффициентами. [текст] /Г.Ф. Манджавидзе, Б.В. Хведелидзе // ДАН СССР 123, №5, 1958, – С.791-794.

[70]. Манджавидзе Г.Ф. Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами. [текст] /Г.Ф. Манжавидзе // Сообщ. АН Груз. ССР 11, №5, 1950, 269-274.

[71]. Маркушевич А.И. Об одной граничной задаче теории аналитических функций. [текст] /А.И. Маркушевич // Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, – С.20-30.

[72]. Мельник И.М. Предельные значения аналитической функции, представленной криволинейным интегралом. [текст] /И.М. Мельник // Сообщ. АН Груз. ССР XVII, №8, 1956, – С.681-688.

[73]. Мельник И.М. Исключительный случай краевой задачи Римана. [текст] /И.М. Мельник // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР 24, 1957, – С.149-162.

[74]. Михайлов Л.Г. Краевая задача типа Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа. [текст] /Л.Г. Михайлов // Уч. зап. Тадж. ун-та X, 1957, – С.32-79.

[75]. Мусхелишвили Н.И., Квеселава Д.А. Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах. [текст] /Н.И. Мусхелишвили, Д.А. Квеселава // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР XI, 1942, – С.141-172.

[76]. Привалов И.И. Об одной граничной задаче. [текст] /И.И. Привалов // Матем. сб. 41, №4, 1934, – С.519-526.

[77]. Рогожин В.С. Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения. [текст] / В.С. Рогожин // Уч. зап. Казанск. ун-та 110, №3, 1950, – С.71-94.

[78]. Рогожин В.С. Нахождение формы тела по заданному импульсивному давлению при ударе. [текст] / В.С. Рогожин // ПММ 23, вып. 3, 1959, 589-591.

[79]. Рогожин В.С. Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение. [текст] /В.С. Рогожин // ДАН СССР 135, №4, 1960, – С.791-793.

[80]. Рогожин В.С. О числе решений внешней обратной краевой задачи. [текст] /В.С. Рогожин // Уч. зап. Ростовск. ун-та 46, вып. 7, 1959, – С.155-158.

[81]. Рогожин В.С. Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач. [текст] /В.С. Рогожин // ПММ 22, вып. 6, 1958, – С.804-807.

[82]. Рогожин В.С. Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций. [текст] /В.С. Рогожин // Сиб. матем. ж. 2, №5, 1961, – С.734-745.

[83]. Рогожин В.С. Краевая задача Римана в классе обобщенных функций. [текст] /В.С. Рогожин // Изв. АН СССР, сер. матем. 28, №6, 1964, – С.1325-1344.

[84]. Рогожин В.С. Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций. [текст] /В.С. Рогожин // ДАН СССР 164, №2, 1965, – С.277-280.

[85]. Рогожина И.С. Об одной краевой задаче со смещением для кусочно - аналитических функций. [текст] /И.С. Рогожина // Изв. вузов. Математика, №2 (45), 1965, – С.139-151.

[86]. Сабитов И.Х. Об одной граничной задаче линейного сопряжения. [текст] /И.Х. Сабитов // Матем. сб. 64, (106), №2, 1964, – С.262-274.

[87]. Сабитов И.Х. Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности. [текст] /И.Х. Сабитов // Сиб. матем. ж. 5, №1, 1964, – С.124-129.

[88]. Самко С.Г. О разрешимости в замкнутой форме сингулярных интегральных уравнений. [текст] /С.Г. Самко // ДАН СССР 189, №3, 1969, – С.483-485.

[89]. Самко С.Г. Общее сингулярное уравнение в исключительном случае. [текст] /С.Г. Самко // Дифференц. ур-ния I, №8, 1965, – С.1108-1116.

[90]. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами. [текст] /И.Б. Симоненко // ДАН СССР 124, №2, 1959, – С.278-281.

[91]. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом. [текст] /И.Б. Симоненко // ДАН СССР 135, №3, 1960, – С.538-541.

[92]. Симоненко И.Б. Краевая задача Римана для n - пар функций с измеримыми коэффициентами и её применение к исследованию сингулярных интегралов в пространстве L_p с весами. [текст] /И.Б. Симоненко // Изв. АН СССР, сер. матем. 28, №2, 1964, – С.277-306.

[93]. Усманов Н.К. Граничные задачи дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа. [текст] /Н.К. Усманов // Тр. Ин-та физ. и матем. Латв. ССР, вып. 1, 1950, – С.41-100.

[94]. Усмонов Н., Холикова М.Б. Решение задачи линейного сопряжения с разрывными коэффициентами для круга. [текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Тезисы докладов республиканской научно - практической конференции «Технический прогресс и производство», посвящённый 1100-летию государства Саманидов. Душанбе 1999. – С.68-69.

[95]. Усмонов Н. Холикова М.Б. Задача сопряжения аналитических функций с сингулярными точками на контуре. [текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // ДАНР. Таджикистан, 2004, т. XLVII, №4, – С.31-36.

[96]. Усмонов Н. Холикова М.Б. Граничные задачи сопряжения аналитических функций с наличием нулей и бесконечностей сопряжённого аналитического вида коэффициентов на контуре. [текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Вестник педуниверситета, серия естественных наук. Душанбе, 2005. №4. – С.23-29.

[97]. Усмонов Н. Холикова М.Б. Об одной смешанной краевой задаче для пары кусочно-аналитических функций в многосвязной области в сингулярном случае. [текст] /Н. Усмонов, М.Б. Холикова // Известия АН Республики Таджикистан, 2007, №2 (127), – С.17-25.

[98]. Усмонов Н., Сайхуна Шавкатзода. Сингулярные граничные задачи сопряжения для системы уравнений эллиптического типа. [текст] /Н.Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // Вестник Таджикского национального университета. Душанбе «Сино», 2016. 1/1(192). – С.40-44.

[99]. Усмонов Н. Сайхуна Шавкатзода. Граничная задача с коэффициентом, имеющим нули или полярной особенностью не целого порядка и не голоморфной структуры для системы уравнений эллиптического типа. [текст] /Н. Усмонов,

Сайхуна Шавкатзода // Вестник Таджикского национального университета, Душанбе «Сино», 2016, 1/2 (196), – С.39-43.
[100]. Усмонов Н. Сайхуна Шавкатзода. Сингулярная граничная задача линейного сопряжения для системы уравнений эллиптического типа. [текст] /Н. Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // «Известия Академии наук Республики Таджикистан», №3 (164), 2016г. – С.32-43.
[101]. Усмонов Н. Сайхуна Шавкатзода. Сингулярная краевая задача Римана для системы уравнений эллиптического типа. [текст] /Н.Усмонов, Сайхуна Шавкатзода // «ДАН Республики Таджикистан», том 59, №9-10, 2016г, Душанбе, – С.373-379.
[102]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Сингулярные точки в граничном условии задачи сопряжения гармонических функций для полуплоскости. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Доклады Академии наук РТ. 2011 т.54, №12, – С.977-983.
[103]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. О задачах сопряжения гармонических функкий в сингулярном случае. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Вестник ТНУ, серия естественных наук. №1/2 (81), 2012, – С.53-53.
[104]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Некоторые задачи сопряжения гармонических функций с сингулярными точками на контуре. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. №1/1 (156), 2015, – С.58-61.
[105]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Сингулярные граничная задача сопряжения гармонических функций. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Доклады Академии наук РТ, 2015, т.58, №12, – С.1078-1083.
[106]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Задача линейного сопряжения гармонических функций для полуплоскости. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Материалы международной конференции, посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных-математиков А. Мухсинова, А.Б. Нозимова, С. Байзоева, Д. Осимовой, К. Тухлиева. Худжанд. 2014, №2 (29), ч.1. – С.254-256.
[107]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Задача сопряжения гармонических функций с сингулярными точками на контуре. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Материалы республиканской научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию

Кулябского госуниверситета им. Абуабдулло Рудаки. Куляб. 2015, ч.1. – С.184-186.

[108]. Усмонов Н., Саидов Б.Б. Задача сопряжения гармонических функций в сингулярном случае. [текст] /Н. Усмонов, Б.Б. Саидов // Материалы международной конференции, посвящённой 20-летию XVI-ой Сесии Верховного Совета РТ и 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Сафарова Д.С. Курган-Тюбе. 2012, – С.114-118.

[109]. Усмонов Н. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения. [текст] /Н. Усмонов // Мат. заметки. Якутск. 2001. т.8, выпуск №2, – С.46-47.

[110]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Сингулярная краевая задача Римана со сдвигом. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы республиканской научной конференции. Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения. Душанбе 2011, – С.120-124.

[111]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Сингулярная краевая задача линейного сопряжения в параболическом случае. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Сборник научных трудов. Украина Чернавцы. 2012, Выпуск №21 (37), – С. 316-320.

[112]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Задача Гильберта со сдвигом в сингулярном случае. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН Республика Таджикистан Михайлова Леонида Григоровича. Душанбе, 2013, – С. 137-140.

[113]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Внешняя краевая задача Карлемана в сингулярном случае. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Вестник Национального университета. Серия естественных наук, №1/1 (102). 2013, – С. 60-67.

[114]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Граничная задача линейного сопряжения со сдвигом с сингулярностью в граничном условии. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы республиканской научно-теоритической конференции

«Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа». ТНУ, Душанбе. 2016. – С.125-127.

[115]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Сингулярная граничная задача со сдвигом. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Вестник национального университета. Серия естественных наук, №1/2, 2017, – С.29-33.

[116]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Сингулярная граничная задача линейного сопряжения в эллиптическом случае. [текст] / Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Вестник национального университета, серия естественных наук, №1/5. Душанбе, 2017, – С.216-220.

[117]. Усмонов Н., Шадманов М.У. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения со сдвигом. [текст] /Н. Усмонов, М.У. Шадманов // Материалы международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций», посвященной 90-летию академика АН Республики Таджикистан, Лауреату Государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г. Михайлова. Душанбе, 2018. – С.159-162.

[118]. Усмонов Н. Сингулярные случаи общей граничной задачи линейного сопряжения. [текст] /Н. Усмонов // Тезисы III-международной конференции по математическому моделированию. Якутск. 2001. – С.52-58.

[119]. Хведелидзе Б.В. О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области. [текст] / Б.В. Хведелидзе // Сообщ.АН Груз. ССР 2, №7,1941, – С. 865-872.

[120]. Черский Ю. А. Общее сингулярное уравнение типа свёртки. [текст] / Ю.А. Черский // Матем. сб. 41, №3, 1957, – С.277-295.

[121]. Чикин Л.А. Особый случай краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений. [текст] /Л.А. Чикин // Уч. зап. Казанского ун-та, 113, №10, 1952. – С.57-105.

Диссертации и авторефераты

[122]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения. [текст] /Ф.Д. Гахов // Докторская диссертация, Тбилиси, 1941.

Б) Список публикаций соискателя ученой степени:

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[123-А]. Усмонов М.А. Задача сопряжения аналитических функций, главный коэффициент которых имеет нули или полюсы сопряжённо аналитического вида на контуре. [текст] /М.А. Усмонов //Вестник Таджикского национального университета. – 2017 – №1/3. – С. 52-57.

[124-А]. Усмонов М.А. Обобщённые краевые условия задачи сопряжения аналитических функций с производными высших порядков в сингулярном случае. [текст] /М.А. Усмонов //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2018. – №3. – С. 52-58.

[125-А]. Усмонов М.А. [соавтор: Холикова М.Б.] Общая краевая задача сопряжения с производными первого порядка в сингулярном случае. [текст] /М.А. Усмонов, М.Б. Холикова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2019. – №1(174). – С. 27-34.

2. В других изданиях:

[126-А]. Усмонов М.А. Задача сопряжения аналитических функций с первыми производными, главный коэффициент которой имеет нуль или полюс сопряжённо аналитического вида. [текст] /М.А. Усмонов // Муҳақиқ. – Душанбе. – 2016. – С. 99-103.

[127-А]. Усмонов М.А. Общая граничная задачи линейного сопряжения с нулями и полюсами сопряжённого аналитического вида на контуре. [текст] /М.А. Усмонов //Материалы международной научно-теоретической конференции «Современные задачи математики и их приложения», посвященной 70-летию образования ТНУ и 80-летию академика АН РТ, профессора Раджабова Нусрата. ТНУ, – Душанбе. – 2018. –С. 283-288.

[128-А]. Усмонов М.А. [соавторы: Усмонов Н., Холикова М.Б.] Задача сопряжения аналитических функций с сингулярностью дробного порядка. [текст] /Н.Усмонов, М.Б.Холикова, М.А. Усмонов // Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы преподавания математики и естественных наук в кредитной системе обучения» КГУ имени Н.Хусрава – Бохтар. 2018. –С. 39-42.

[129-А]. Усмонов М.А. [соавторы: Усмонов Н., Холикова М.Б.] Краевая задача Римана с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре. [текст] /Н. Усмонов, М.А. Усмонов, М.Б. Холикова //Материалы республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества. ХГУ имени академика Б. Гафурова. – Худжанд. – 2018, – С.74-80.

[130-А]. Усмонов М.А. [соавторы: Усмонов Н., Холикова М.Б.] Краевая задача Римана с рациональными коэффициентами, имеющими нули и бесконечности дробного порядка на контуре. [текст] /Н. Усмонов, М.А. Усмонов, М.Б. Холикова // Вестник Филиала МГУ имени М.В. Ломоносова. – Душанбе. 2018, – №1(2). – С.48-53..

[131-А]. Усмонов М.А. [соавтор: Холикова М.Б.] Краевая задача Гильберта на контуре с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре. [текст] /М.А. Усмонов, М.Б. Холикова //Материалы международной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика Национальной академии наук Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений». – Душанбе. – 2020, – С.359-363.

[132-А]. Усмонов М.А. [соавторы: Холикова М.Б. Надирова М.И.] Краевая задача Римана с непрерывными коэффициентами с наличием нулей и бесконечностей дробного порядка на контуре. [текст] / М.А. Усмонов, М.Б. Холикова, М.И. Надирова //Материалы республиканской научно-практической конференции «Подготовка современных специалистов по математике в отрасли науки и образования вузов и средних учреждений страны». – Дангара. – 2020, – С.26-30.

[133-А]. Усмонов М.А. [соавтор: Холикова М.Б.] Краевая задача Римана на вещественной оси, когда коэффициент имеет сингулярность не целого порядка и не голоморфной структуры. [текст] /М.А. Усмонов, М.Б. Холикова, //Материалы международной конференции «Актуальные проблемы современной математики», посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова. – Душанбе, 25-26 июня 2021. – С.259-263.