

ОТЗЫВ

научного руководителя доктора физико-математических наук, и.о. профессора кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава, Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич на диссертационную работу Валиева Рузибоя Сангимуродовича «Об исследовании одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями», представленную на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Теория переопределённых систем уравнений в частных производных с регулярными коэффициентами является достаточно развитой областью исследования. Данная теория, связанная с именем Якоби и рядом других учёных, охватывает линейные однородные и неоднородные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией, зависящей от произвольного числа независимых переменных. Теория Фробениуса для систем в полных дифференциалах, применяемая как к одной, так и к множеству неизвестных функций, представляющая собой дальнейшее развитие теории Коши–Ковалевской и охватывающая определённые классы аналитических переопределённых систем уравнений в частных производных, направлена на построение многообразий решений с регулярными и сингулярными коэффициентами.

Дальнейшее развитие данной теории получено в работах П. Аппеля, Л.Г. Михайлова, Н.Р. Раджабова, Ж.Н. Тасмамбетова, А. Хасанова и их научных последователей.

Отдельные классы переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами исследованы в работах П. Аппеля, Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, Э. Рузметова, С. Байзаева, Р. Пирова, Б. Шарипова, Д.С. Сафарова, Ф.М. Шамсудинова, Б. Шоимкулова и ряда других авторов.

Тем не менее, дифференциальные уравнения второго порядка и переопределённые системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами остаются мало изученными. В этой связи особенно актуальным является развитие теории таких уравнений и систем с двумя внутренними сингулярными линиями.

Пусть D обозначает прямоугольную область, заданную следующим образом:

$$D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < a\},$$

$$\Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\}.$$

Далее, обозначим

$$\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \leq x \leq a\}, \quad \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \leq x \leq 0\}.$$

В области D исследуются следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $a(x, y), b(x, y), f_j(x, y), j = \overline{1, 2}$ — заданные функции в области $D, m = \text{const}, n = \text{const}, u(x, y)$ — искомая функция;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} u = \frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где $a_i(x, y), b_i(x, y), c_1(x, y), f_j(x, y), i = \overline{1, 2}, j = \overline{1, 3}$ – заданные функции в области $D, m = \text{const}, n = \text{const}, u(x, y)$ – искомая функция.

Постановка задачи. Пусть заданы переопределённые системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.1), (2.2) и (3.1). Требуется найти явный вид решений указанных систем при помощи произвольных постоянных, изучить поведение полученных решений в окрестности внутренних сингулярных линий и рассмотреть задачи с начальными данными.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, обсуждение полученных результатов, заключение и списка литературы, включающего 156 источников. Объем диссертации составляет 192 страниц компьютерного набора.

Во введении соискатель обосновывал актуальность задач, рассматриваемых в диссертационной работе, приводил историю вопроса и обзор литературных источников, формулировал цель исследований и кратко излагал основное содержание работы.

Данное исследование выполнено в рамках изучения переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.

В ходе диссертационного исследования автор получил следующие новые и важные результаты:

- для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними особенностями - сингулярной и сверхсингулярной линиями - в прямоугольной области получено описание многообразия её решений. Исследовано поведение решений в их окрестности, а также решены задачи с начальными условиями;

- получены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассматриваются два случая: когда исходным является первое уравнение и когда - второе.

Исследованы свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий. Также сформулированы и решены задачи с начальными условиями;

- построены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из трёх дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассмотрены различные случаи, когда основным (базовым) уравнением выступает первое, второе или третье. Проанализированы свойства решений в окрестностях сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными условиями.

В первой главе проведён анализ литературы, связанных с исследованием некоторых уравнений с регулярными и сингулярными коэффициентами, переопределённых систем с сингулярной точкой, а также с сингулярными и сверхсингулярными линиями.

Во второй главе в области D рассматривается система дифференциальных уравнений (1.1).

В данной главе соискатель основное внимание уделяет получению представления о многообразии решений одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей две внутренние сингулярные линии.

В результате проведённого анализа рассматриваемой системы уравнений, при условии определённой взаимосвязи между коэффициентами, получено явное представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной. Исследованы свойства данных решений. Кроме того, для полученных интегральных представлений решений рассматриваемой системы сформулированы и решены задачи с начальными данными $K_2^1 - K_2^8$.

Основной целью главы 3 является исследование переопределённых систем дифференциальных уравнений второго порядка видов (2.1) и (2.2). Автору удалось получить представления о многообразии решений указанных переопределённых систем из двух дифференциальных уравнений, включающих гиперболическое уравнение второго порядка, с помощью одной произвольной постоянной в явном виде, когда в одном случае исходным является первое уравнение, а в другом — второе. Изучены свойства полученных решений вблизи сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными данными $K_3^1 - K_3^{16}$.

В главе 4 исследуется система из трёх дифференциальных уравнений (3.1), включающая одно линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями и два дифференциальных уравнения первого порядка, также содержащих две внутренние сингулярные линии.

Соискатель с использованием методов решения преопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами, получил представления многообразия решений в следующих случаях: $m = n = p = k = 1$; $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$; $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$; $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$ (где m, n, p, k — натуральные числа). В конце для полученных интегральных представлений решений переопределённой системы (3.1) ставится и решается задач с начальными данными.

Подводя итоги отметим, что все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и их достоверность обоснована строгими математическими доказательствами. Результаты, полученные диссертантом, имеют важное значение для развития теории переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами.

На основании вышеизложенного считаем, что диссертационная работа Р.С. Валиева «Об исследовании одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями», представленную на соискание ученой степени доктора философии (Ph.D) — доктора по специальности 6D060100 — Математика: 6D060102 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, является законченной научной работой, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора философии (Ph.D) — доктора по специальности 6D060100 — Математика: 6D060102 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
и.о. профессора кафедры математического
анализа и дифференциальных уравнений
Бохтарский государственный университет
имени Носира Хусрава



Шамсудинов Ф.М.

Место работы: 735140, г. Бохтар, ул. Айни 67,
Тел.: (+992) 918 66 70 65,
E-mail: faizullo100@yahoo.com

Подпись Ф.М. Шамсудинова заверяю.

Начальник ОК и СЧ БГУ
имени Носира Хусрава



Исозода Т.И.

20.08.25.