

**ГОУ «БОХТАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ НОСИРА ХУСРАВА»**

УДК 517.95

ББК 22.161

В-15

На правах рукописи



Вализода Рузибой Сангимурод

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ
СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И
ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ
ЛИНИЯМИ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора философии (PhD)

– доктора по специальности 6D060100 – Математика (6D060102

– Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление)

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,

доцент, и.о. профессор

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич

Душанбе - 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ.....	15
1.1. Общие сведения.....	15
1.2. Положение изучения переопределенных систем с регулярными коэффициентами.....	17
1.3. Положение изучения переопределенных систем с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами.....	20
ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ	34
2.1. Интегральные представления решений для системы (1.1) при $m = n = 1$	35
2.2. Случай $m = 1, n \geq 2$	42
2.3. Случай $m \geq 2, n = 1$	45
2.4. Случай $m \geq 2, n \geq 2$	49
2.5. Постановка и решение задач с начальными данными для полученных интегральных представлений решений системы уравнений (1.1)	56
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ.....	60
3.1. Интегральные представления решений для системы (2.1) при $m = n = p = 1$	61
3.2. Интегральные представления решений для системы (2.1) при $m = n = 1, p \geq 2$	71

3.3.	Интегральные представления решений для системы (2.1) при $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$	76
3.4.	Интегральные представления решений для системы (2.1) при $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$	80
3.5.	Интегральные представления решений для системы (2.2) при $m = n = p = 1$	85
3.6.	Интегральные представления решений для системы (2.2) при $m = n = 1, p \geq 2$	90
3.7.	Интегральные представления решений для системы (2.2) при $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$	94
3.8.	Интегральные представления решений для системы (2.2) при $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$	99
3.9.	Постановка и решение задач с начальными данными для полученных интегральных представлений решений системы уравнений (2.1), (2.2)	110

ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ.....117

4.1.	Интегральные представления решений для системы (3.1) при $m = n = p = k = 1$	117
4.2.	Случай, когда $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$	132
4.3.	Случай, когда $m \geq 2, n \geq 2, p = 1, k = 1$	139
4.4.	Случай, когда $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$	154
4.5.	Постановка и решение задач с начальными данными для полученных интегральных представлений решений системы уравнений (3.1)	160

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.....165

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	168
РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	169
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	170
ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ	187

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Теория переопределённых систем уравнений в частных производных с регулярными коэффициентами является достаточно развитой областью исследования. Данная теория, связанная с именем Якоби и рядом других учёных, охватывает линейные однородные и неоднородные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией, зависящей от произвольного числа независимых переменных. Теория Фробениуса для систем в полных дифференциалах, применимая как к одной, так и к множеству неизвестных функций, представляющая собой дальнейшее развитие теории Коши-Ковалевской и охватывающая определённые классы аналитических переопределённых систем уравнений в частных производных, направлена на построение многообразий решений с регулярными и сингулярными коэффициентами. Дальнейшее развитие данной теории получено в работах П. Аппеля [108], Л.Г. Михайлова [28], [31], Н.Р. Раджабова [58], [60], Ж.Н. Тасмамбетова [81], А. Хасанова [87] и их научных последователей.

В связи с этим значительное количество научных исследований [1]–[152] посвящено изучению указанных уравнений и систем. Фундаментальные результаты в данном направлении представлены в монографиях и научных трудах таких авторов, как А.В. Бицадзе [6], М.М. Смирнов [79], А.М. Нахушев [41], В.И. Жегалов [17], К.Б. Сабитов [67], Т.Д. Джураев [16], М.С. Салахиддинов [129], Т.Ш. Кальменов [23], Л.Г. Михайлов [30], З.Д. Усманов [86], Н. Раджабов [46], [49], N. Begehr [109], А.Д. Джураев [15], А.С. Исхоков [22], Л.Н. Раджабова [61]–[62], А.М. Самойленко [72] а также их научных школ.

Простейшая переопределённая система дифференциальных уравнений в частных производных имеет вид

$$u_x = P(x, y), u_y = Q(x, y)$$

условие $P_y = Q_x$ является необходимым и достаточным для совместности данной системы.

При выполнении этого условия дифференциальная форма

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

представляет собой полный дифференциал, и функция $u(x, y)$ может быть восстановлена путём интегрирования.

Аналогичный подход применим к случаям полного дифференциала в трёхмерном и n -мерном пространствах.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Одним из актуальных направлений в теории дифференциальных уравнений с частными производными является исследование переопределённых систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами.

Отдельные классы переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами исследованы в работах П. Аппеля, Л.Г. Михайлова, Н. Раджабова, Э. Рузметова, С. Байзаева, Р. Пирова, Б. Шарипова, Д.С. Сафарова, Ф.М. Шамсудинова, Б. Шоимкулова и ряда других авторов.

Изучению переопределённых систем дифференциальных уравнений с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы Л.Г. Михайлова [28], Н. Раджабова [54], [58], Э.Р. Рузметова [66], Ж.Н. Тасмамбетова [82], Ф.М. Шамсудинова [90], [101], М.В. Коровина [25], Б.М. Шоимкулова [105] и их научных школ.

Исследование переопределённых систем первоначально проводилось на примере систем с регулярными коэффициентами, после чего внимание было уделено системам с сингулярными коэффициентами.

Монография Л.Г. Михайлова [30] посвящена изучению переопределённых систем с регулярными коэффициентами.

Монография Н. Раджабова [51] посвящена исследованию краевых задач для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка, а также некоторых линейных переопределённых систем первого и второго порядка с одной или двумя сверхсингулярными линиями либо сверхсингулярными точками. В данной работе также рассматриваются некоторые многомерные линейные системы первого порядка с сингулярными и сверхсингулярными точками, а также со сверхсингулярными областями.

В монографии Э. Рузметова [66] представлены интегральные представления множества решений ряда переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка с сингулярными точками, а также с сингулярными линиями и плоскостями.

Монография Н. Раджабова и М.Э. Абдель-Аал-Гхани Гхареба [58] посвящена исследованию линейных переопределённых систем дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями.

В монографии казахского математика Ж.Н. Тасмамбетова [82] представлены нормальные и нормально-регулярные решения переопределённых (специальных) систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, преимущественно с полиномиальными коэффициентами двух переменных. Основным методом построения решений является обобщённый автором метод Фробениуса - Латышевой, основанный на использовании понятий ранга и антиранга. Эти понятия применяются для классификации видов нормальных и нормально-регулярных решений рассматриваемых систем, а также для доказательства их сходимости.

Вопросы, связанные с исследованием переопределённых систем дифференциальных уравнений, особенно в случаях наличия сингулярных

коэффициентов и внутренних сингулярных линий, остаются актуальными и до настоящего времени. Несмотря на наличие значительного числа работ, посвящённых различным аспектам таких систем, проблема описания поведения решений в окрестности внутренних сингулярностей остаётся недостаточно изученной.

Определённые результаты при исследовании переопределённых систем дифференциальных уравнений с двумя внутренними сингулярными линиями были получены автором. Эти результаты опубликованы в научных статьях автора [1-М] – [26-М], где представлены как аналитические подходы к описанию решений, так и примеры с начальными условиями типа Коши.

Связь работы с научными программами (проектами), темами.

Настоящее диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений факультета математики Бохтарского государственного университета имени Носира Хусрава на 2021–2025 годы по теме «Исследование переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Основная цель данной работы заключается в исследовании одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка, содержащих две внутренние сингулярные линии.

Задачи исследования в диссертационной работе являются:

- исследование одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями;
- изучение переопределённых систем второго порядка, состоящих из двух и трёх уравнений, с двумя внутренними сингулярными линиями;

- нахождение интегральные представления многообразия решений для исследуемых систем;
- изучение свойств найденных решений;
- исследование задачи типа Коши для найденных интегральных представлении решений рассматриваемых систем.

Отмечается, что указанные системы изучаются впервые.

Объект исследования. Объектом исследования являются переопределенные системы дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями.

Предмет исследования. Предметом исследования являлось поведение решений изучаемых систем в окрестности внутренних сингулярных линий.

Методы исследования. В диссертационной работе применены современные методы, разработанные для переопределённых систем сингулярных и сверхсингулярных дифференциальных уравнений в частных производных, включая общие методы теории дифференциальных уравнений, метод факторизации и метод решения интегральных уравнений. Особое внимание уделено использованию методов, разработанных Н. Раджабовым.

Научная новизна исследований. Диссертационная работа содержит результаты, обладающие научной новизной, полученные автором самостоятельно. Содержание этих результатов заключается в следующем:

- для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями в прямоугольной области получено описание многообразия её решений. Исследовано поведение решений в их окрестности, а также решены задачи с начальными условиями;
- получены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений,

одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассматриваются два случая: когда исходным является первое уравнение и когда - второе. Исследованы свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий. Также сформулированы и решены задачи с начальными условиями;

- исследована переопределённая система, состоящая из трёх дифференциальных уравнений, одно из которых является гиперболическим уравнением второго порядка. Построены явные представления многообразия её решений. Полученные решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассмотрены различные случаи, когда в качестве основного уравнения выступает первое, второе или третье. Проанализированы свойства решений в окрестностях сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными условиями.

Положения, выносимые на защиту:

- доказательство теорем о нахождении интегрального представления многообразия решений для переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями;

- теоремы о нахождении интегрального представления многообразия решений для переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями;

- изучение свойства полученных интегральных представлений решений в окрестности внутренних сингулярных линий;

- доказательства теорем о разрешимости задач с начальными условиями типа Коши для переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка, содержащих две внутренние сингулярные линии.

Теоретическая и практическая работы. Материалы диссертации в значительной степени имеют теоретический характер. Разработанные методы

и полученные результаты могут быть применены в различных задачах теории дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами, проективной дифференциальной геометрии, а также в прикладных областях, таких как электродинамика, механика, математическая физика и другие.

Результаты, представленные в работе, могут быть использованы при преподавании специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов (PhD) высших учебных заведений, обучающихся по направлениям математика, прикладная математика и физика.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов, представленных в диссертационной работе, обеспечивается обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, основанными на методах теории переопределенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060100 – Математика: 6D060102 – «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» и полностью соответствует её формуле (обыкновенные дифференциальные уравнения), а также трём основным направлениям области исследования: 1) общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2) начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 3) теория дифференциально-операторных уравнений. Указанные направления относятся к разделу «Дифференциальные уравнения», предусмотренному в пункте III, параграфе 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные научные работы. В совместных публикациях с Ф. М. Шамсудиновым [1-А], [3-А], [4-А], [5-А], [7-А] соавтору принадлежит

обсуждение полученных результатов. Все результаты, представленные в диссертации, получены автором самостоятельно.

Апробация результаты диссертации. Основные результаты диссертации неоднократно представлялись и обсуждались на:

- семинары кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Бох. ГУ им. Носира Хусрава под руководством д.ф.-м.н., профессора Сафарова Д. С. (Бохтар, 2021-2025 г.);
- международной конференции «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры» (г. Актобе, 24-28 мая 2022 г.);
- международной конференции «Теории оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений» (г. Бишкек, 23-25 июня 2022г.);
- международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2022» (г. Уфа, 28 сентября -1 октября 2022г.);
- международной научно-практической конференции, посвящённой 20-летию развития естественных, точных и математических наук 2020-2040 годы, ТНУ (Душанбе, 20-21 октября 2022 г.);
- международной научно-практической конференции, «Комплексный анализ и его приложения» БГУ им. Н. Хусрав (Бохтар, 19 ноября 2022 г.);
- международной конференции, посвящённой 50-летию Института математики им. А. Джуроева НАНТ (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.);
- XVI – ой международной Казанской школа-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 22 – 27 августа 2023 г.);
- международной научно - практической конференции «Междисциплинарное синхронное и асинхронное использование инновационных образовательных технологий в контексте развития креативной активности учащихся и студентов» (Денау, 29-30 сентября 2023 г.);

- международной научной конференции, посвященной 75-летию ТНУ, 20-летию развития точных, естественных и математических наук 2020-2040 годы, 85-летию академика НАН Таджикистана Раджабов Нусрат (Душанбе, 5 - октября 2023 г.);
- международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2023» (г. Уфа, 4 - 8 октября 2023г.);
- международной научно-практической конференции, «Активные вопросы преподавания технических, точных и математических наук» БГУ им. Н. Хусрав (Бохтар, 17 - 18 мая 2024 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения» ТНУ (Душанбе, 18 - мая 2024 г.);
- международной конференции “Современные проблемы математики и её приложения” НАНТ Институт математики им. А. Джуроева (Душанбе, 30-31 мая 2024 г.);
- республиканской конференции “Интегративный подход к развитию креативной деятельности учащихся соединяя синхронно и асинхронно общеобразовательные дисциплины” (Ташкент, 25-26 октября 2024 г.);
- международной научно – практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования» (22–23 ноября 2024 г.);
- Всероссийской школа-конференции «Лобачевские чтения» (Казань, 27 ноября – 2 декабря 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 26 печатных работах автора, список которых приведён в конце автореферата. Из них 9 статей опубликованы в изданиях, включённых в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, остальные - в материалах международных и республиканских конференций.

Структура и объём работы. Работа включает введение, четырёх глав, обсуждение полученных результатов, заключение и список использованной литературы, содержащий 156 наименования. Общий объём диссертации составляет 192 страниц машинописного текста, оформленного с использованием текстового редактора Microsoft Word. Для удобства восприятия в работе применена сквозная нумерация теорем, следствий и формул, реализованная тройной системой: первая цифра соответствует номеру главы, вторая - номеру параграфа, третья - порядковому номеру теоремы, замечания, следствия или формулы в пределах данного параграфа.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ИССЛЕДУЕМОЙ ТЕМЕ

В данной главе излагаются исходные сведения, относящиеся к общей теории переопределённых систем дифференциальных уравнений, представляющих собой класс систем, в которых число уравнений превышает число искомых функций.

1.1. Общие сведения

Переопределённые системы часто возникают в задачах математической физики, геометрии и механики, где накладываются дополнительные ограничения или условия согласованности.

Особое внимание в главе уделено двум ключевым направлениям исследования:

1. **Анализ переопределённых систем с регулярными коэффициентами** - рассматриваются системы, в которых коэффициенты обладают достаточной степенью гладкости и не содержат особенностей. Даются формулировка условий формальной совместности и методов приведения таких систем к эквивалентной системе уравнений, решение которой можно построить.
2. **Исследование систем с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами** - излагаются подходы к анализу систем, в которых коэффициенты либо обладают слабой особенностью (сингулярность), либо содержат выражение особенности, значительно осложняющие аналитическое и численное исследование (сверхсингулярное). Вводятся классификации типов сингулярностей и обсуждаются методы локального анализа поведения решений в окрестностях особых точек и линий.

Таким образом, в этой главе формируется теоретическая база, необходимая для дальнейшего углублённого изучения структурных и

аналитических свойств переопределённых дифференциальных систем, включая как классические методы, так и современные геометрические и алгебраические подходы.

Переопределённые системы дифференциальных уравнений в частных производных были известны ещё с прошлого века — времени становления ключевых понятий гидродинамики, теории упругости и электромагнетизма. Так, например, развитие понятия потенциала поля привело к созданию математической теории полного дифференциала. Соответствующую переопределённую систему уравнений в частных производных обычно называют системой в полных дифференциалах.

Термин «Переопределённая» формально означает, что число уравнений превышает количество неизвестных функций. Однако давно известно, что множество решений таких систем может по-прежнему содержать произвольные функции. Это особенно наглядно демонстрируется система Коши–Римана, описывающая аналитические функции нескольких комплексных переменных. Ещё одним примером служит обратная задача общей теории поля: восстановление векторного поля по заданным вихревому полю и дивергенции. В двумерном случае задача сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями, тогда как в трёхмерном пространстве она описывается системой из четырёх уравнений с тремя неизвестными. Таким образом, становится очевидно, что использование термина «Переопределённая» не является строго обязательным и применяется нами, главным образом, для более точного обозначения рассматриваемого класса задач. В то же время, для таких систем существует специфическая особенность, которая называется условием совместности или скобки Пуассона.

На практике условия совместности чаще всего выявляются после применения операции перекрёстного дифференцирования - для уравнений, разрешённых относительно производных, либо через операцию

коммутирования - в случае более общих уравнений. Тем не менее, в ряде случаев установление даже необходимых условий совместности, не говоря уже о необходимых и достаточных, может представлять значительные трудности. К таким примерам относятся, в частности, некоторые системы из трёх уравнений на плоскости, а также обобщённая система Коши–Римана в многомерном пространстве (см., например, моног. Л.Г. Михайлова [30]).

1.2. Положение изучения переопределённых систем с регулярными коэффициентами

История переопределённых систем с регулярными коэффициентами тесно связана с развитием теории дифференциальных уравнений и её применением к различным областям науки и техники.

Одним из первых значимых вкладов в теорию переопределённых систем с регулярными коэффициентами был сделан в конце XIX века французскими математиками, такими как Жан-Батист Лиувиль [117], Эмиль Пикар [111]. Они начали исследовать уравнения с более чем одним независимым переменным и обнаружили, что решение таких систем может требовать специальных методов, отличных от классических методов для уравнений с одной независимой переменной.

В XX веке теория переопределённых систем с регулярными коэффициентами значительно развилась. Наибольшие достижения были связаны с решением таких систем в контексте теории аналитических функций и гипергеометрических уравнений. Математики начали разрабатывать методы, которые позволяли решить переопределённые системы с регулярными коэффициентами, используя такие подходы, как метод Фробениуса для решения линейных дифференциальных уравнений, метод интегрирования через вариации постоянных, а также методы, основанные на теории рядов.

Современные исследования в этой области направлены на решение более сложных переопределённых систем с регулярными коэффициентами. В

этих исследованиях активно используется компьютерное моделирование и численные методы, которые позволяют решать системы, которые сложно анализировать вручную. Кроме того, развитие теории дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными точками и их связь с переопределёнными системами остаётся важной частью современной математической науки.

В настоящее время теорема о существовании и единственности решения переопределённых систем с регулярными коэффициентами является одним из важнейших элементов теории дифференциальных уравнений.

Анализ литературных источников позволяет заключить, что переопределённые системы дифференциальных уравнений с регулярными коэффициентами привлекали внимание многих выдающихся математиков. В их исследованиях использовались различные аналитические и численные методы. Ниже приведены некоторые из этих подходов.

Монография Л.Г. Михайлова [30] посвящена исследованию ряда систем уравнений в частных производных, преимущественно с двумя вещественными неизвестными функциями (что в некоторых случаях эквивалентно одной комплексной), зависящими от произвольного числа независимых переменных. Представление о типах рассматриваемых систем можно получить из подробного оглавления с заголовками разделов. Основное внимание уделено разработке и систематизации методов конкретного и эффективного решения таких систем, а также получению явных формул для описания множеств решений. Эти цели удалось реализовать для широкого класса уравнений и систем, содержащих линейные дифференциальные операторы в левой части и общие линейные выражения - в правой.

В работе Ж.Н. Тасмамбетова [81] рассмотрена неоднородная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Нормально регулярное решение для линейных обыкновенных

дифференциальных уравнений было введено К.Я. Латышевой [26] и связано с особенностью в начале координат. Используя введенное ею понятие антиранга, она установила необходимые и достаточные условия существования таких решений. С помощью метода Фробениуса - Латышевой были исследованы вопросы решения неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе [26] с помощью метода Фробениуса - Латышевой построены нормально регулярные решения неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Диссертационная работа Р. Пирова [44] посвящена исследованию широкого спектра переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядков - линейных, квазилинейных и нелинейных, как вещественных, так и комплексных, с одной, двумя и тремя неизвестными функциями при регулярных коэффициентах.

Развивая работы Л. Г. Михайлова, Р. Пиров обобщил постановку задач и методы анализа переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных различного порядка. В ходе исследования: были установлены условия совместности для широкого класса переопределённых систем, а также доказана теорема существования и единственности решений для отдельных типов линейных и квазилинейных уравнений; выполнено обобщение классических результатов Фробениуса относительно совместности систем в полных дифференциалах; проведён анализ поведения интегральных представлений решений в окрестности особых точек как на плоскости, так и в трёхмерном пространстве; показана применимость полученных теоретических результатов к ряду задач механики, в частности, задачам, связанным с деформацией твёрдого тела.

1.3. Положение изучения переопределенных систем с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами

Исследование переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными линиями развивалось как значимое направление в теории дифференциальных уравнений в частных производных, особенно во второй половине XX века.

Первые исследования подобных систем проводились без строгой классификации и отмечены в работах С. Льопеса де Формигера, Ж. Даламбера, О. Лапласа и Г. Дарбу. В XX веке, особенно в связи с развитием теории уравнений гиперболического, эллиптического и смешанного типов, интерес к изучению данных систем значительно возрос.

С конца XX века отдельные учёные начали рассматривать частные случаи переопределённых систем с сингулярными линиями, особенно когда коэффициенты системы имели полиномиальный характер или дробно-рациональные особенности.

В нашей стране общая теория переопределённых систем дифференциальных уравнений с различными типами особенностей разрабатывалась рядом известных математиков, среди которых следует отметить имена А.Д. Джураева [15], Л.Г. Михайлова [28], [33], Н. Раджабова [54]–[58], С. Байзаева [5], Д.С. Сафарова [76]–[77], Ф.М. Шамсудинова [90]–[101], а также их учеников.

Среди работ других авторов, посвящённых решению переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярной точкой, а также с сингулярными и сверхсингулярными линиями, следует отметить исследования Г.Э. Гришанина [11], R.C. Gilbert [115], Д. Иззатуллоева [20], Н.Х. Мирзоева [39], Аль-Саида Абдель-Ааля Абдель-Гхани Гхареба Мухамеда [40], А.Г. Олими [42], А.Б. Расулова [63]–[64] и их учеников.

Анализ литературы позволяет сделать вывод, что многие известные математики исследовали дифференциальные уравнения и связанных с ним

переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами при помощи различных методов.

Ниже приведем некоторые из них.

В монографии Н. Раджабова [49] рассматривается:

- обыкновенные дифференциальные уравнения с n –сингулярной точкой на отрезке $\Gamma = \{x: a \leq x \leq b\}$ вида:

$$y'(x) + \frac{P(x)}{\prod_{j=1}^n (x - b_j)} y(x) = \frac{Q(x)}{\prod_{j=1}^n (x - b_j)}, \quad (1.3.1)$$

где $b_j, j = \overline{1, n}$ –известные постоянные числа, $P(x), Q(x)$ –заданные функции;

- система дифференциальных уравнений с сингулярными точками вида:

$$y'_k(x) + \sum_{e=1}^m \frac{a_{ke}(x)y_e(x)}{\prod_{j=1}^n (x - b_j)} = \frac{f_k(x)}{\prod_{j=1}^n (x - b_j)}, \quad 1 \leq k \leq m, \quad (1.3.2)$$

где $a_{ke}(x), f_k(x)$ –известные функции, $y_k(x)$ –искомые функции на Γ ;

- общее гиперболическое уравнение второго порядка вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1.3.3)$$

где $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y)$ –заданные функции в области $D = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$;

- в области D системы вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial y} + \sum_{j=1}^n \left[a_{js}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_{js}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + c_j(x, y)u_j \right] = \\ = f_s(x, y), \quad 1 \leq s \leq n, \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

где $a_{js}(x, y), b_{js}(x, y), c_j(x, y)$ –заданные функции в области $D = \{(x, y): 0 < x < \alpha, 0 < y < \beta\}$, $u(x, y)$ –искомая функция.

Интегральные представления, полученные в ходе исследования, применяются для уточнения постановки ряда краевых задач типа Дарбу.

В работе А.Б. Расулова [64] исследуется линейная эллиптическая система дифференциальных уравнений второго порядка, включающая внутреннюю сверхсингулярную точку. Автор предложил интегральные представления решений такой системы, что позволяет обобщить классические методы построения решений в случаях, когда стандартные подходы оказываются неприменимыми из-за наличия особых (сверхсингулярных) характеристик в структуре уравнения.

Исследование опирается на модификацию методов теории сингулярных интегральных уравнений, а также на анализ особенностей поведения решений в окрестности сверхсингулярной точки. Полученные результаты способствуют дальнейшему развитию теории эллиптических систем с особыми особенностями и находят применение в задачах математической физики, в частности, при моделировании процессов с точечными источниками или разрывами в коэффициентах.

Л.Г. Михайлов [28] инициировал изучение ряда переопределённых систем в полных дифференциалах с сингулярными точками первого порядка. Он исследовал вопросы однозначности (многозначности) и непрерывности (или сингулярности) первообразной. Для двумерного и трёхмерного случаев были установлены точные границы применимости регулярной теории. Особое значение при этом имеет требование интегрируемости правых частей. Если же правые части неинтегрируемые, то в случае $n = 2$ первообразная может оказаться не только сингулярной, но и многозначной, тогда как в трёхмерном случае сингулярная точка не порождает многозначности первообразной.

Монография Н. Раджабова [51] посвящена получению многообразия решений и исследованию краевых задач для линейных дифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка, и некоторых линейных

систем первого и второго порядка с одной и двумя сверхсингулярными линиями и сверхсингулярными точками видов

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{xa(x,y)}{r^\alpha} u = \frac{f_1(x,y)}{r^\alpha}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{yb(x,y)}{r^\beta} u = \frac{f_2(x,y)}{r^\beta}, \end{cases} \quad (1.3.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a(x,y)}{y^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b(x,y)}{x^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c(x,y)}{x^\beta y^\alpha} u = \frac{f(x,y)}{x^\beta y^\alpha}, \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{ya(x,y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{xb(x,y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \quad (1.3.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x,y)}{y^\beta} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x,y)}{x^\alpha y^\beta} u = \frac{f_1(x,y)}{x^\alpha y^\beta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_2(x,y)}{x^\alpha} u = \frac{f_2(x,y)}{x^\alpha}, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{ya_1(x,y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{xb_1(x,y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{yb_2(x,y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \end{cases} \quad (1.3.9)$$

где $a(x,y), b_i(x,y), c_1(x,y), r^2 = x^2 + y^2, f_i(x,y), i = \overline{1,2}$ – заданные функции своей области, $u(x,y)$ – искомая функция.

Для названных систем и уравнений в зависимости от различных условий и возможных случаев найдены общие решения через произвольные постоянные числа. В конце для исследованных систем и уравнений выяснены и решены корректные постановки ряда граничных задач.

В монографии Э. Рузметова [66], исследованы некоторые классы переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка с особенностями в виде сингулярных линий, плоскостей и точки. Получены интегральные представления многообразия решений системы:

- с одной сингулярной линией вида:

$$u_x = \frac{a(x, y)}{(x - x_0)^\gamma}, \quad u_y = \frac{b(x, y)}{(x - x_0)^\gamma}, \quad (1.3.10)$$

$$u_x = \frac{a(x, y)}{(x - x_0)^\gamma} u + \frac{c(x, y)}{(x - x_0)^\gamma}, \quad u_y = \frac{b(x, y)}{(x - x_0)^\gamma} u + \frac{d(x, y)}{(x - x_0)^\gamma}, \quad (1.3.11)$$

$$\begin{cases} u_{xy} = \frac{a_1(x, y)}{x} u_x + \frac{b_1(x, y)}{x} u_y + \frac{c_1(x, y)}{x} u + \frac{f_1(x, y)}{x}, \\ u_{xx} = \frac{a_2(x, y)}{x} u_x + \frac{b_2(x, y)}{x} u_y + \frac{c_2(x, y)}{x} u + \frac{f_2(x, y)}{x}; \end{cases} \quad (1.3.12)$$

- при $\gamma = 1, \gamma > 1$ в прямоугольнике $D = \{0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ с двумя сингулярными линиями вида:

$$u_x = \frac{a(x, y)}{(x - x_0)^\gamma} u + \frac{c(x, y)}{(x - x_0)^\gamma}, \quad u_y = \frac{b(x, y)}{(y - y_0)^\gamma} u + \frac{d(x, y)}{(y - y_0)^\gamma}; \quad (1.3.13)$$

- при $\gamma = 1, \gamma > 1$ в прямоугольнике $D = \{0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$ с одной сингулярной точкой вида:

$$u_x = \frac{a(x, y)}{r^m} u + \frac{c(x, y)}{r^m}, \quad u_y = \frac{b(x, y)}{r^m} u + \frac{d(x, y)}{r^m}; \quad (1.3.14)$$

- в круге $x^2 + y^2 \leq r^2$

$$\begin{cases} \rho^m u_x = a(x, y, z)u + d(x, y, z), \\ \rho^m u_y = b(x, y, z)u + c(x, y, z), \\ \rho^m u_z = c(x, y, z)u + f(x, y, z); \end{cases} \quad (1.3.15)$$

- в шаре $0 < \rho < r, \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

а также система вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\rho(r, \varphi, u)}{r^m}, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(r, \varphi)}{r^m} n(u). \end{cases} \quad (1.3.16)$$

В работе А.С. Сатторова [74] рассматриваются интегральные представления решений некоторых вырождающихся уравнений с сингулярной линией

$$U_{xy} + yU_{yy} + \frac{1 + 2\vartheta}{x} U_y + \frac{2\mu}{x} U_x - \frac{1}{U} U_x^2 - \frac{y}{U} U_y^2 = 0, \quad (1.3.17)$$

где μ, ϑ – вещественные числа.

В диссертационном исследовании Н.Х. Мирзоева [39] подробно исследуются некоторые классы переопределённых систем дифференциальных уравнений первого порядка, обладающих специфической структурой и особыми условиями согласованности следующих видов:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{x^\alpha} u(x, y) = \frac{f_1(x, y)}{x^\alpha}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{yb(x, y)}{r^\beta} u(x, y) = \frac{f_2(x, y)}{r^\beta}, \end{cases} \quad (1.3.18)$$

где $a(x, y), b(x, y), f_1(x, y), f_2(x, y)$ – заданные функции в области $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$, $u(x, y)$ – искомая функция;

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_1(x, y)}{|x|} u(x, y) = \frac{f_3(x, y)}{|x|}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_1(x, y)}{x^2 + y^2} u(x, y) = \frac{f_4(x, y)}{x^2 + y^2}, \end{cases} \quad (1.3.19)$$

$r^2 = x^2 + y^2, \alpha = \text{const} > 0, \beta = \text{const} > 0, a_1(x, y), b_1(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y)$ – заданные функции в области $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$, $u(x, y)$ – искомая функция.

В исследовании М.А. Рахимовой [65] рассмотрены вопросы существования и условий разрешимости переопределённых систем уравнений в частных производных заданного типа

$$\begin{cases} u_x = a(x, y)u + f(x, y), \\ u_y = b(x, y)u + g(x, y), \end{cases} \quad (1.3.20)$$

в пространстве $C(G)$ – состоящем из непрерывных и ограниченных функций, определённых в области G, G , где G, G – представляет собой плоскость, полуплоскость или первую координатную четверть.

Для рассматриваемой систем проведён анализ разрешимости переопределённых систем уравнений вида (1.3.20) с сингулярными коэффициентами в функциональных пространствах, состоящих из функций, определённых в первой координатной четверти и допускающих не более чем полиномиальный рост при стремлении аргумента к бесконечности. Получены необходимые и достаточные условия полной разрешимости, а также описано

множество всех возможных решений многомерных комплексных переопределённых систем уравнений в частных производных первого порядка.

В работе Ж.Н. Тасмамбетова [81] изучены возможности построения общего решения неоднородной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\begin{cases} P^{(0)}Z_{xx} + P^{(1)}Z_x + P^{(2)}Z = P^{(3)}, \\ Q^{(0)}Z_{yy} + Q^{(1)}Z_y + Q^{(2)}Z = Q^{(3)}, \end{cases} \quad (1.3.21)$$

где $P^{(i)} = P^{(i)}(x, y)$, $Q^{(i)} = Q^{(i)}(x, y)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) – многочлены одной или двух переменных.

В кандидатской диссертации Б. Шоимкулова [105], изучены переопределённые системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами. Для рассматриваемых систем изучены свойства полученных решений и рассмотрены задачи типа Коши.

Монография Н. Раджабова [58] является продолжением научных разработок, изложенных в работе Н. Раджабова [51]. Содержательное наполнение первых четырёх глав базируется на материалах кандидатской диссертации Мухамеда Аль-Саида Абдель-Аала [40], а также на результатах совместных исследований, проведённых Н. Раджабовым и М. Аль-Саидом Абдель-Аалом.

В указанных исследованиях в области $D = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассматривались системы уравнений следующих видов:

$$\begin{cases} x^\alpha y^\beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1(x, y)x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + b_1(x, y)y^\beta \frac{\partial u}{\partial y} + \\ \quad + c_1(x, y)u = f_1(x, y), \\ x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y)u = f_2(x, y), \\ y^\beta \frac{\partial u}{\partial y} + b_2(x, y)u = f_3(x, y), \end{cases} \quad (1.3.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{y^\beta} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{x^\alpha} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{x^\alpha y^\beta} u(x, y) = \frac{f_1(x, y)}{x^\alpha y^\beta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{y^\gamma} u(x, y) = \frac{f_2(x, y)}{y^\gamma}, \end{array} \right. \quad (1.3.23)$$

где $\alpha = \text{const.} > 0$, $\beta = \text{const.} > 0$, $\gamma = \text{const.} > 0$. $a_j(x, y), b_j(x, y), j = 1, 2$, $f_i(x, y) (1 \leq j \leq 3), c_1(x, y)$ – заданные функции в D , $u(x, y)$ – искомая функция;

$$\left\{ \begin{array}{l} xy \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + a_1 x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + b_1 y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \\ + d_1 u(x, y) = f_1(x, y), \\ x \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + a_2 u(x, y) = f_2(x, y), \\ y \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + b_2 u(x, y) = f_3(x, y), \end{array} \right. \quad (1.3.24)$$

a_1, b_1, a_2, b_2, d_1 – заданные постоянные, $f_j(x, y) (1 \leq j \leq 3)$ – заданные функции в области D , $u(x, y)$ – искомая функция;

$$\left\{ \begin{array}{l} x^\alpha y^\beta \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + a_1(x, y) x^\alpha \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \\ + b_1(x, y) y^\beta \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + c_1(x, y) u(x, y) = f_1(x, y), \\ x^\gamma \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + a_2(x, y) u(x, y) = f_2(x, y), \\ y^\lambda \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + b_2(x, y) u(x, y) = f_3(x, y), \end{array} \right. \quad (1.3.25)$$

где $\alpha = \text{const.} > 0$, $\beta = \text{const.} > 0$, $\gamma = \text{const.} > 0$, $\lambda = \text{const.} > 0$, $a_j(x, y), b_j(x, y), j = 1, 2, f_i(x, y) (1 \leq j \leq 3), c_1(x, y)$ – заданные функции в области D , $u(x, y)$ – искомая функция.

В других главах этой монографии исследованы следующие системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_x^\alpha)^2 u + a_1 D_x^\alpha u + b_1 u = f_1(x, y), \\ D_x^\alpha D_y^\beta + a_2 D_x^\alpha b_2 D_y^\beta u + c_2 u = f_2(x, y), \\ \left((D_y^\beta)^2 u + a_3 D_y^\beta u + b_3 D_y^\beta u + b_3 u = f_3(x, y), \right. \end{array} \right. \quad (1.3.26)$$

$$\begin{cases} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_1 x \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 u = f_1(x, y), \\ xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2 x \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 y \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 u = f_2(x, y), \\ y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_1 y \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 u = f_3(x, y), \end{cases} \quad (1.3.27)$$

где $D_x^\alpha = x^\alpha \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y^\beta = y^\beta \frac{\partial}{\partial y}$, a_j, b_j ($1 \leq j \leq 3$), c_2 – заданные постоянные, $f_j(x, y)$ ($1 \leq j \leq 3$) – заданные функции в области D , $u(x, y)$ – искомая функция;

$$\begin{cases} (D_{x-y}^{x,\alpha})^2 u + a_1 (D_{x-y}^{x,\alpha}) u + b_1 (D_{x-y}^{y,\alpha}) u + c_1 u = f_1(x, y), \\ (D_{x-y}^{x,\alpha}) (D_{x-y}^{x,\alpha}) u + a_2 (D_{x-y}^{x,\alpha}) u + b_2 (D_{x-y}^{y,\alpha}) u + c_2 u = f_2(x, y), \\ (D_{x-y}^{y,\alpha})^2 u + a_3 (D_{x-y}^{x,\alpha}) u + b_1 (D_{x-y}^{y,\alpha}) u + c_3 u = f_3(x, y), \end{cases} \quad (1.3.28)$$

где $D_{x-y}^{x,\alpha} = (x-y)^\alpha \frac{\partial}{\partial x}$, $D_{x-y}^{y,\beta} = (x-y)^\beta \frac{\partial}{\partial y}$, a_j, b_j, c_j ($1 \leq j \leq 3$), – заданные постоянные числа, $f_j(x, y)$ ($1 \leq j \leq 3$) – заданные функции в области $\bar{\Omega}$, $\alpha = const. \geq 1$, $u(x, y)$ – искомая функция.

Для каждого из исследованных классов систем установлены аналитические выражения общего решения, содержащие произвольные постоянные, что позволяет полно описать соответствующее многообразие решений.

В диссертационной работе Д. Иззатуллоева [20] проведён детальный анализ переопределённых линейных систем, включающих две и три дифференциальных уравнения первого порядка, обладающих сингулярными и сверхсингулярными точками различных следующих типов:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{r} \cdot U = \frac{f_1(x, y)}{r}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{b(x, y)}{r} \cdot U = \frac{f_2(x, y)}{r}, \end{cases} \quad (1.3.29)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $f_j(x, y)$, ($j = 1, 2$) – заданные функции в области $D = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$;

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a(x, y, z)}{r} \cdot U = \frac{f_1(x, y, z)}{r}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{b(x, y, z)}{r} \cdot U = \frac{f_2(x, y, z)}{r}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{c(x, y, z)}{r} \cdot U = \frac{f_3(x, y, z)}{r}, \end{cases} \quad (1.3.30)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, $f_j(x, y, z)$, $j = \overline{1, 3}$ – заданные функции в области $\Omega = \{(x, y, z), 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$;

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{r^2} \cdot U = \frac{f_1(x, y)}{r^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{b(x, y)}{r^2} \cdot U = \frac{f_2(x, y)}{r^2}, \end{cases} \quad (1.3.31)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a(x, y)$, $b(x, y)$, $f_j(x, y)$, $(j = \overline{1, 2})$ – заданные функции в области $D = \{0 < x < \alpha, 0 < y < \beta\}$;

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a(x, y, z)}{r^2} \cdot U = \frac{f_1(x, y, z)}{r^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{b(x, y, z)}{r^2} \cdot U = \frac{f_2(x, y, z)}{r^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{c(x, y, z)}{r^2} \cdot U = \frac{f_3(x, y, z)}{r^2}, \end{cases} \quad (1.3.32)$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$, $f_j(x, y, z)$, $(j = \overline{1, 3})$ – заданные функции в области $\Omega = \{0 < x < \alpha, 0 < y < \beta, 0 < z < \gamma\}$.

Для указанных систем и уравнений, в зависимости от различных условий и рассматриваемых случаев, получены общие решения, содержащие произвольные постоянные.

В диссертации Б. Шарипова [105] осуществлена систематизация и классификация классов переопределённых систем уравнений в полных дифференциалах, а также построено полное многообразие решений для систем одной функции с двумя, тремя и произвольным числом независимых переменных в декартовых, полярных и сферических координатах с выделением и учётом сингулярных линий, поверхностей и точек заданных следующих тип:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a(x, y; u)}{x^n}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = b(x, y; u), \quad (1.3.33)$$

где $a, b \in C^1(\bar{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$, $D_0 = \bar{D} - \{(x, y) | \Gamma_1: x = 0\}$, $R^1 = [0, k]$;

$$r^n \frac{\partial u}{\partial x} = p(x, y; u), \quad r^n \frac{\partial u}{\partial y} = q(x, y; u), \quad (1.3.34)$$

$$\rho^n \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_m; u), \quad (i = \overline{1, m}), \quad (1.3.35)$$

где $p, q, a_i \in C^1(\bar{D} \times R^1)$, $u \in C^2(D_0)$.

В диссертационном исследовании Шамсудинова Ф. М. [101] в области $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$ исследуется класс гиперболических уравнений второго порядка и сопряжённых с ними переопределённых систем дифференциальных уравнений, характеризующихся наличием сингулярных и сверхсингулярных точек следующих типов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \quad (1.3.36)$$

где $r^\alpha = x^2 + y^2$, $a(x, y), b(x, y), c(x, y), f(x, y)$ – заданные функции в области $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$, $\alpha = \text{const} > 0, \beta = \text{const} > 0$;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{r^\gamma}, \end{cases} \quad (1.3.37)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{r^\delta} u = \frac{f_2(x, y)}{r^\delta}, \end{cases} \quad (1.3.38)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{r^\gamma}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{r^\delta} u = \frac{f_3(x, y)}{r^\delta}, \end{cases} \quad (1.3.39)$$

где функции $a_i(x, y), b_i(x, y), c_1(x, y), f_k(x, y)$ при $i = 1, 2, k = 1, 2, 3$ - заданы в $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$, $r^\alpha = x^2 + y^2$, константы $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $u(x, y)$ – искомая функция;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_2(x, y)}{r^\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_2(x, y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{r^\gamma}, \end{cases} \quad (1.3.40)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^{\alpha_1}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^{\beta_1}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha_1+\beta_1}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha_1+\beta_1}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_2(x, y)}{r^{\alpha_2}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_2(x, y)}{r^{\beta_2}} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_2(x, y)}{r^{\alpha_2+\beta_2}} u = \frac{f_2(x, y)}{r^{\alpha_2+\beta_2}}, \end{cases} \quad (1.3.41)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{r^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{r^\beta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}} u = \frac{f_1(x, y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a_2(x, y)}{r^\gamma} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_2(x, y)}{r^\gamma} u = \frac{f_2(x, y)}{r^\gamma}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{b_2(x, y)}{r^\delta} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_3(x, y)}{r^\delta} u = \frac{f_3(x, y)}{r^\delta}, \end{cases} \quad (1.3.42)$$

где функции $a_i(x, y), b_i(x, y), c_1(x, y), f_k(x, y)$ при $i = 1, 2, k = 1, 2, 3$ - заданы в $D = \{(x, y): 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$, $r^\alpha = x^2 + y^2$, константы $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $u(x, y)$ – искомая функция.

В монографии Н. Раджабова [58, с. 175–189] представлено комплексное исследование модельной линейной переопределённой системы (1.3.42) с двумя линиями вырождения и постоянными коэффициентами, включающее анализ её структурных свойств, особенностей решения и условий разрешимости.

Для указанных систем, в зависимости от значений параметров и различных возможных случаев, установлены условия на коэффициенты и правые части, при которых общее решение получено в явном виде. В ряде случаев решение определяется с использованием резольвенты одномерных и двумерных интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью в ядре.

Анализ приведённых работ показывает, что переопределённые системы видов

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} u = \frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k}, \end{cases} \quad (3.1)$$

в области $D = \{(x, y): -a < x < a, 0 < y < a\}$ мало изучены. Ввиду этого изучение таких систем является актуальным в настоящее время. Данная диссертационная работа посвящена именно исследованию таких малоизученных переопределённых систем дифференциальных уравнений.

ГЛАВА 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Настоящая глава направлена на исследование и формализацию структуры многообразия решений одной из переопределённых систем дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей две внутренние сингулярные линии. Рассматриваемая система анализируется в двух различных случаях:

- 1) первое уравнение рассматривается в качестве базового (основного);
- 2) второе уравнение принимается за базовое (исходное).

В результате проведённого анализа рассматриваемой системы уравнений, при условии определённой взаимосвязи между коэффициентами, получены явные представления многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной. В окрестности внутренних сингулярных линий изучены свойства полученных решений. Также для интегральных представления решения рассматриваемого уравнения сформулированы и решены задачи Коши с начальными условиями $K_2^1 - K_2^8$.

Пусть $D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < y < a\}$.

Далее, обозначим:

$$\Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, 0 < y < a\},$$

$$\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \leq x \leq a\}, \quad \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \leq x \leq 0\}.$$

В области D рассмотрим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $a(x, y), b(x, y), f_j(x, y), j = \overline{1, 2}$ – заданные функции в области D , $u(x, y)$ – искомая функция.

2.1. Интегральные представления решений для системы (1.1)

при $m = n = 1$

В качестве исходного примем первое уравнение системы (1.1), тогда решение этого уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left| \frac{x-y}{x+y} \right|^{-\frac{a(y, y)}{2y}} \exp[-W_a^1(x, y)] \times \\ &\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{t^2 - y^2} \left| \frac{t-y}{t+y} \right|^{\frac{a(y, y)}{2y}} \exp[W_a^1(t, y)] dt \right) \equiv \\ &\equiv T_1(\psi_1(y), f_1(x, y)), \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где

$$W_a^1(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y) - a(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

Далее, второе уравнение системы (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_b^1(x, y) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] u(x, y) \right\} &= \\ = \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_b^1(x, y) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right], \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

где

$$W_b^1(x, y) = \int_0^y \frac{b(x, s) - b(x, x)}{x^2 - s^2} ds.$$

Потребовав выполнение условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \quad \text{в } D, \quad (2.1.3)$$

а также продифференцировав равенство (2.1.2) с учетом (2.1.1), после соответствующих преобразований получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\psi_1'(y) - \frac{b(0,y)}{y^2} \psi_1(y) &= \frac{f_2(x,y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_b^1(x,y) + \frac{b(x,x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] + \\
&+ \frac{b(0,y)}{y^2} \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_a^1(t,y) + \frac{a(y,y)}{2y} \ln \left| \frac{t-y}{t+y} \right| \right] dt - \\
&- \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_a^1(t,y) + \frac{a(y,y)}{2y} \ln \left| \frac{t-y}{t+y} \right| \right] dt. \tag{2.1.4}
\end{aligned}$$

Исходя из условия независимости левой части равенства (2.1.4) от переменной x , получаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_2(x,y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_a^1(x,y) + \frac{a(y,y)}{2y} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| \right] \right\} - \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_1(x,y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_a^1(x,y) + \frac{a(y,y)}{2y} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| \right] \right\} = \\
&= - \frac{b(0,y)}{y^2} \times \frac{f_1(x,y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_a^1(x,y) + \frac{a(y,y)}{2y} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| \right]. \tag{2.1.5}
\end{aligned}$$

В результате преобразования последнего слагаемого в левой части равенства (2.1.4) с учётом условия (2.1.5) для функции $\psi_1(y)$ формулируется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\psi_1'(y) - \frac{b(0,y)}{y^2} \psi_1(y) = - \frac{f_2(0,y)}{y^2}. \tag{2.1.6}$$

Решение уравнения (2.1.6), согласно [124], представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\psi_1(y) &= \exp[W_b^1(0,y) - b(0,0)W_1(y)] \times \\
&\times \left(c_1 - \int_0^y \frac{f_2(0,s)}{s^2} \exp[-W_b^1(0,s) + b(0,0)W_1(s)] ds \right) \equiv \\
&\equiv N_1(c_1, f_2(0,y)), \tag{2.1.7}
\end{aligned}$$

где

$$W_b^1(0,y) = \int_0^y \frac{b(0,s) - b(0,0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_1 — произвольная постоянная.

В результате дифференцирования равенства (2.1.5) и последующих алгебраических преобразований получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a(x, y) f_2(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b(x, y) f_1(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Следовательно, справедлива следующая

Теорема 2.1.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (1.1) $m = n = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$;
- 2) $\frac{a(y, y)}{2y} > 0$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $\frac{a(y, y)}{2y} < 0$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $b(0, 0) < 0$;
- 3) $|a(x, y) - a(y, y)| \leq H_1 |x - y|^{\alpha_1}$, $H_1 = \text{const}$, $0 < \alpha_1 < 1$
 в окрестности Γ_1^0 ,
 $|a(x, y) - a(y, y)| \leq H_2 |x + y|^{\alpha_2}$, $H_2 = \text{const}$, $0 < \alpha_2 < 1$
 в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b(0, y) - b(0, 0)| \leq H_3 y^{\gamma_1}$, $H_3 = \text{const}$, $\gamma_1 > 1$;
- 4) а) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b(x, y) f_1(x, y)$ в D ;
- 5) $f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1})$, $\lambda_1 > -\frac{a(y, y)}{2y}$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2})$, $\lambda_2 > \frac{a(y, y)}{2y}$ в окрестности Γ_2^0 ,

$$f_1(x, 0) = o(\exp[-b(0,0)W_1(y)]y^{\lambda_3}), \quad \lambda_3 > 0.$$

Тогда всякое решение (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (2.1.1) и (2.1.7).

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[-b(0,0)W_1(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_1.$$

4°. Если предполагать, что $y \rightarrow x$, то имеем:

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x-y}{x+y}\right|^{-\frac{a(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{a(y,y)}{2y} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a(y,y)}{2y} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

5°. Если предполагать, что $y \rightarrow -x$, то имеем:

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a(y,y)}{2y} > 0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x-y}{x+y}\right|^{-\frac{a(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{a(y,y)}{2y} < 0.$$

Рассмотрим случай, при котором второе уравнение системы (1.1) принимается в качестве исходного. В указанной постановке его решение представляется в следующем виде:

$$u(x, y) = \left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}} \exp[-W_b^1(x, y)] \times$$

$$\times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{x^2 - s^2} \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{b(x, x)}{2x}} \exp[W_b^1(x, s)] ds \right) \equiv$$

$$\equiv T_2(\varphi_1(x), f_2(x, y)), \quad (2.1.9)$$

где

$$W_b^1(x, y) = \int_0^y \frac{b(x, s) - b(x, x)}{x^2 - s^2} ds.$$

Первое уравнение системы (1.1) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[W_a^1(x, y) + \frac{a(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| u(x, y) \right] \right\} =$$

$$= \frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_a^1(x, y) + \frac{a(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x-y}{x+y} \right| \right], \quad (2.1.10)$$

где

$$W_a^1(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y) - a(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

Потребовав выполнение условия совместности (2.1.3), продифференцировав выражение (2.1.10), с учётом (2.1.9) и выполнив необходимые упрощения, получаем следующее выражение:

$$\varphi_1'(x) + \frac{a(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_b^1(x, y) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] -$$

$$- \frac{a(x, 0)}{x^2} \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{x^2 - s^2} \exp \left[W_b^1(x, s) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+s}{x-s} \right| \right] ds -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{x^2 - s^2} \exp \left[W_b^1(x, s) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+s}{x-s} \right| \right] ds. \quad (2.1.11)$$

Исходя из требования независимости левой части равенства (2.1.11) от переменной y , получаем

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_b^1(x, y) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_b^1(x, y) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x + y}{x - y} \right| \right] \right\} = \\
& = \frac{a(x, 0)}{x^2} \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_b^1(x, y) + \frac{b(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x + y}{x - y} \right| \right]. \quad (2.1.12)
\end{aligned}$$

С учётом условия (2.1.12), преобразуем последнее слагаемое в равенстве (2.1.11), в результате чего получаем уравнение, предназначенное с целью определения функции $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1'(x) + \frac{a(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_1(x, 0)}{x^2}. \quad (2.1.13)$$

Решение уравнения (2.1.13) согласно [124], запишем в виде

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(x) = \exp[-W_a^2(x, 0) + a(0, 0)W_1(x)](c_2 + \\
& + \int_0^x \frac{f_1(t, 0)}{t^2} \exp[W_a^2(t, 0) - a(0, 0)W_1(t)] dt) \equiv N_2(c_2, f_1(x, 0)), \quad (2.1.14)
\end{aligned}$$

где

$$W_a^2(x, 0) = \int_0^x \frac{a(t, 0) - a(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_2 — произвольная постоянная.

Теперь, дифференцируя равенство (2.1.12), после упрощения приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b(x, y)f_1(x, y) = \\
& = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a(x, y)f_2(x, y) \text{ в } D. \quad (2.1.15)
\end{aligned}$$

Итак, доказана следующая

Теорема 2.1.2. Пусть в (1.1) $m = n = 1$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $b(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D});$
- 2) $\frac{b(x, x)}{2x} < 0$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $\frac{b(x, x)}{2x} > 0$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $a(0, 0) > 0;$
- 3) $|b(x, y) - b(x, x)| \leq H_1|x - y|^{\gamma_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \gamma_1 < 1$
 в окрестности Γ_1^0 ,
 $|b(x, y) - b(x, x)| \leq H_2|x + y|^{\gamma_1}, H_2 = \text{const}, 0 < \gamma_2 < 1$
 в окрестности Γ_2^0 ;
- 4) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b(x, y)f_1(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a(x, y)f_2(x, y)$ в D ;
- 5) $f_2(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > \frac{b(x, x)}{2x}$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > -\frac{b(x, x)}{2x}$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_1(x, 0) = o(x^{\lambda_3}), \lambda_3 > 1.$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (1.1), принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формулам (2.1.9) и (2.1.14).

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = O(\exp[a(0, 0)W_1(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0, 0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_2.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

2.2. Интегральные представления решений для системы (1.1)

при $m = 1, n \geq 2$

Пусть первое уравнение системы (1.1) является исходным. В этом случае, используя вышеприведенную схему, получим следующие утверждения.

Теорема 2.2.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (1.1) $m = 1, n \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) a(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$$

$$f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D});$$

$$2) \frac{a(y, y)}{2y} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a(y, y)}{2y} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b(0, 0) > 0;$$

$$3) |a(x, y) - a(y, y)| \leq H_1 |x - y|^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \alpha_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a(x, y) - a(y, y)| \leq H_2 |x + y|^{\alpha_2}, H_2 = \text{const}, 0 < \alpha_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b(0, y) - b(0, 0)| \leq H_3 y^{\gamma_1}, H_3 = \text{const}, \gamma_1 > 2k - 1;$$

$$4) a) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) \quad \text{в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a(x, y) f_2(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b(x, y) f_1(x, y) \quad \text{в } D;$$

$$5) f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > -\frac{a(y, y)}{2y} \quad \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > \frac{a(y, y)}{2y} \quad \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(0, y) = o(y^{\lambda_3}), \quad \lambda_3 > 4k - 1.$$

Тогда всякое решение (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (2.1.1).

При этом

$$\psi_1(y) = \exp[-W_b^{4k}(0, y) + b(0, 0)W_{4k-1}(y)] \times \\ \times \left(c_3 + \int_0^y \frac{f_2(0, s)}{s^{4k}} \exp[W_b^{4k}(0, s) - b(0, 0)W_{4k-1}(s)] ds \right) \equiv \\ \equiv N_1(c_3, f_2(0, y)), \quad (2.2.1)$$

$$W_b^{4k}(0, y) = \int_0^y \frac{b(0, s) - b(0, 0)}{s^{4k}} ds, \quad W_{4k-1}(y) = \frac{1}{(4k - 1)y^{4k-1}},$$

c_3 — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем:

$$u(0, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b(0, 0)W_{2k-1}(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b(0, 0)W_{2k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_3.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a(y, y)}{2y}}\right) \quad \text{в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a(y,y)}{2y}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Замечание 2.2.1. Соответствующие утверждения, аналогичные теореме 2.2.1 получены и в случае $n = 2k - 1$.

Приводим выводы исследования для случая, когда второе уравнение системы (1.1) выбрано в качестве базового.

Теорема 2.2.2. Пусть в (1.1) $m = 1, n \geq 2$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) b(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D});$$

$$2) b(x, x) < 0, a(0, 0) > 0;$$

$$3) b(x, y) - b(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > n - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$b(x, y) - b(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > n - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a(x, 0) - a(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}, H_1 = \text{const}, \gamma_1 > 1;$$

$$4) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b(x, y) f_1(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^{n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D;$$

$$5) f_2(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > n - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > n - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_1(x, 0) = o(x^{\lambda_3}), \lambda_3 > 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (1.1), принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-W_b^n(x, y) - b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \\ \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^n} \exp \left[W_b^n(x, s) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] ds \right) \equiv$$

$$\equiv M_2(\varphi_1(x), f_2(x, y)), \quad (2.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \exp[-W_a^2(x, 0) + a(0, 0)W_1(x)] \times \\ &\times \left(c_4 + \int_0^x \frac{f_1(t, 0)}{t^2} \exp[W_a^2(t, 0) - a(0, 0)W_1(t)] dt \right) \equiv \\ &\equiv N_2(c_4, f_1(x, 0)), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{y}{2(n-1)x^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{n-1}},$$

$$W_b^n(x, y) = \int_0^y \frac{b(x, s) - b(x, x)}{(x^2 - s^2)^n} ds, \quad W_a^2(x, 0) = \int_0^x \frac{a(t, 0) - a(0, 0)}{t^2} dt,$$

$$W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_4 — произвольная постоянная.

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a(0, 0)W_1(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0, 0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_4.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$, и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[a(0, 0)W_1(x)]).$$

2.3. Интегральные представления решений для системы (1.1) при $m \geq 2, n = 1$

Предположим, что первое уравнение системы (1.1) рассматривается в качестве исходного. Тогда справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (1.1) $m \geq 2, n = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$
 $f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D});$
- 2) $a(y, y) > 0, b(0, 0) < 0;$
- 3) $a(x, y) - a(y, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > m - 1$ в окрестности $\Gamma_1^0,$
 $a(x, y) - a(y, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > m - 1$ в окрестности $\Gamma_2^0,$
 $|b(0, y) - b(0, 0)| \leq H_1 y^{\lambda_3}, H_1 = \text{const}, \lambda_3 > 1;$
- 4) а) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в $D,$
 б) $(x^2 - y^2)^{m+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^{m+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + b(x, y) f_1(x, y)$ в $D;$
- 5) $f_1(x, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \mu_1 > m - 1$ в окрестности $\Gamma_1^0,$
 $f_1(x, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \mu_2 > m - 1$ в окрестности $\Gamma_2^0,$
 $f_1(x, y) = o(y^{\mu_3}), \mu_3 > 1.$

Тогда всякое решение (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-W_a^m(x, y) + a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \times$$

$$\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(t, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) \equiv$$

$$\equiv \chi_1(\psi_1(y), f_1(x, y)), \quad (2.3.1)$$

где

$$\psi_1(y) = \exp[W_b^1(0, y) - b(0, 0)W_1(y)] \times$$

$$\times \left(c_5 - \int_0^y \frac{f_2(0, s)}{s^2} \exp[-W_b^1(0, y) + b(0, 0)W_1(s)] ds \right) \equiv$$

$$\equiv N_1(c_5, f_2(0, y)), \quad (2.3.2)$$

$$W_a^m(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y) - a(y, y)}{(t^2 - y^2)^m} dt,$$

$$J_{m-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(m-1)y^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{m-1}},$$

$$W_b^1(0, y) = \int_0^y \frac{b(0, s) - b(0, 0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_5 — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[-b(0, 0)W_1(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b(0, 0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_5.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$, и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \right).$$

Предположим, что второе уравнение системы (1.1) есть исходное. Имеет место следующая

Теорема 2.3.2. Пусть в (1.1) $m \geq 2, n = 1$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) \quad b(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad a(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \quad f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$$

$$f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D});$$

$$2) \quad \frac{b(x, x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{b(x, x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$a(0, 0) > 0;$$

$$3) |b(x, y) - b(x, x)| \leq H_1 |x - y|^{\lambda_1}, \quad H_1 = \text{const}, \quad 0 < \lambda_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|b(x, y) - b(x, x)| \leq H_1 |x + y|^{\lambda_2}, \quad H_1 = \text{const}, \quad 0 < \lambda_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|a(x, 0) - a(0, 0)| \leq H_3 x^{\lambda_3}, \quad H_3 = \text{const}, \quad \lambda_3 > 2m - 1;$$

$$4) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{m+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + b(x, y) f_1(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^{m+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D;$$

$$5) f_2(x, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \quad \mu_1 > \frac{b(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \quad \mu_2 > -\frac{b(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_1(x, 0) = o(x^{\mu_1}), \quad \mu_1 > 2m - 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (1.1), принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (2.1.9).

При этом

$$\varphi_1(x) = \exp[-W_a^{2m}(x, 0) + a(0, 0)W_{2m-1}(x)] \times \\ \times \left(c_6 + \int_0^x \frac{f_1(t, 0)}{t^{2m}} \exp[W_a^{2m}(t, 0) - a(0, 0)W_{2m-1}(t)] dt \right) \equiv \\ \equiv N_2(c_6, f_1(x, 0)), \quad (2.3.3)$$

$$W_a^{2m}(x, 0) = \int_0^x \frac{a(t, 0) - a(0, 0)}{t^{2m}} dt, \quad W_{2m-1}(x) = \frac{1}{(2m - 1)x^{2m-1}},$$

c_6 — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a(0,0)W_{2m-1}(x)]).$$

3°. $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_6$.

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

2.4. Интегральные представления решений для системы (1.1) при $m \geq 2, n \geq 2$

Пусть в качестве базового выбрано первое уравнение системы (1.1).

Тогда решение данного уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp \left[-W_a^m(x, y) + a(y, y)J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \\ &\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(t, y) - a(y, y)J_{m-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) \equiv \\ &\equiv \chi_1(\psi_1(y), f_1(x, y)), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где

$$W_a^m(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y) - a(y, y)}{(t^2 - y^2)^m} dt,$$

$$J_{m-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(m-1)y^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{m-1}}.$$

Далее, второе уравнение системы (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_b^n(x, y) + b(x, x)J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] u(x, y) \right\} &= \\ &= \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \exp \left[W_b^n(x, y) + b(x, x)J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right], \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где

$$W_b^n(x, y) = \int_0^y \frac{b(x, s) - b(x, x)}{(x^2 - s^2)^n} ds,$$

$$J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{y}{2(n-1)x^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{n-1}}.$$

Требую выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) \quad \text{в области } D, \quad (2.4.2)$$

а также после дифференцирования (2.4.1) с учётом (2.3.1) и проведения ряда преобразований получим выражение

$$\begin{aligned} \psi_1'(y) + \frac{b(0, y)}{(-y^2)^n} \psi_1(y) &= \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \exp \left[W_a^m(x, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] - \\ &- \frac{b(0, y)}{(-y^2)^n} \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(t, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(t, y) \right] dt - \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(t, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(t, y) \right] dt. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

При условии, что левая часть (2.4.3) не зависит от переменной x , имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \exp \left[W_a^m(x, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \right\} - \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(x, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \right\} = \\ &= \frac{b(0, y)}{(-y^2)^n} \times \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(x, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

С учётом условия (2.4.4), преобразуя последнее слагаемое равенства (2.4.3), для нахождения $\psi_1(y)$ выводим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\psi_1'(y) + \frac{b(0, y)}{(-y^2)^n} \psi_1(y) = \frac{f_2(0, y)}{(-y^2)^n}. \quad (2.4.5)$$

Здесь $n = 2k$ – чётные натуральные числа. Тогда получим уравнение

$$\psi_1'(y) + \frac{b(0,y)}{y^{4k}} \psi_1(y) = \frac{f_2(0,y)}{y^{4k}}. \quad (2.4.6)$$

Решение уравнения (2.4.6) запишем в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \exp[-W_b^{4k}(0,y) + b(0,0)W_{4k-1}(y)] \times \\ &\times \left(c_7 + \int_0^y \frac{f_2(0,s)}{s^{4k}} \exp[W_b^{4k}(0,s) - b(0,0)W_{4k-1}(s)] ds \right) \equiv \\ &\equiv N_1(c_7, f_2(0,y)), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

где

$$W_b^{4k}(0,y) = \int_0^y \frac{b(0,s) - b(0,0)}{s^{4k}} ds, \quad W_{4k-1}(y) = \frac{1}{(4k-1)y^{4k-1}}.$$

c_7 — произвольная постоянная.

Дифференцируя равенство (2.4.4), после некоторых упрощения получим

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a(x,y)f_2(x,y) = \\ = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x,y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + b(x,y)f_1(x,y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 2.4.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (1.1) $m \geq 2, n \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a(x,y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b(x,y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_1(x,y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_2(x,y) \in C_x^1(\bar{D})$;
- 2) $a(y,y) > 0$; $b(0,0) > 0$;
- 3) $a(x,y) - a(y,y) = o((x-y)^{\gamma_1})$, $\gamma_1 > 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a(x,y) - a(y,y) = o((x+y)^{\gamma_2})$, $\gamma_2 > 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b(0,y) - b(0,0)| \leq H_1 y^{\gamma_3}$, $H_1 = \text{const}$, $\gamma_3 > 4k - 1$;
- 4) а) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x,y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x,y)}{(x^2 - y^2)^n} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a(x,y)f_2(x,y) =$

$$= (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + b(x, y) f_1(x, y) \text{ в } D;$$

5) $f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > m - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > m - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(0, y) = o(y^{\lambda_3}), \lambda_3 > 4k - 1.$$

Тогда всякое решение (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (2.3.1) и (2.4.7).

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b(0, 0)W_{2k-1}(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b(0, 0)W_{2k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_7.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a(0, 0)J_{m-1}^{(1)}(x, y)\right]\right).$$

Замечание 2.4.1. Подобные утверждения, как и в теореме 2.4.1 получены в случае, когда $n = 2k - 1$.

При выборе второго уравнения системы (1.1) в качестве исходного решение данного уравнения представляется в следующем виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp\left[-W_b^n(x, y) - b(x, x)J_{n-1}^{(1)}(x, y)\right] \times \\ &\times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^n} \exp\left[W_b^n(x, s) + b(x, x)J_{n-1}^{(1)}(x, s)\right] ds\right) \equiv \\ &\equiv \chi_2(\varphi_1(x), f_2(x, y)), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где

$$W_b^n(x, y) = \int_0^y \frac{b(x, s) - b(x, x)}{(x^2 - s^2)^n} ds,$$

$$J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{y}{2(n-1)x^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{n-1}}.$$

Теперь, первое уравнение системы (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[W_a^m(x, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] u(x, y) \right\} = \\ = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \exp \left[W_a^m(x, y) - a(y, y) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right], \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

где

$$W_a^m(x, y) = \int_0^x \frac{a(t, y) - a(y, y)}{(t^2 - y^2)^m} dt,$$

$$J_{m-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(m-1)y^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{m-1}}.$$

Потребовав выполнение условия совместности (2.4.2) и продифференцировав выражение (2.4.9) с учетом (2.2.2), после ряда упрощений получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) + \frac{a(x, 0)}{x^{2m}} \varphi_1(x) = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \exp \left[W_b^n(x, y) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] - \\ - \frac{a(x, 0)}{x^{2m}} \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^n} \exp \left[W_b^n(x, s) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] ds - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^n} \exp \left[W_b^n(x, s) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] ds. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

При условии, что левая часть (2.4.10) не зависит от y , имеем:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \exp \left[W_b^n(x, y) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \exp \left[W_b^n(x, y) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \right\} = \\
& = \frac{a(x, 0)}{x^{2m}} \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \exp \left[W_b^n(x, y) + b(x, x) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right]. \quad (2.4.11)
\end{aligned}$$

Применяя условие (2.4.11) к последнему слагаемому равенства (2.4.10), для нахождения функции $\varphi_1(x)$ выводится следующее уравнение:

$$\varphi_1'(x) + \frac{a(x, 0)}{x^{2m}} \varphi_1(x) = \frac{f_1(x, 0)}{x^{2m}}. \quad (2.4.12)$$

Решение уравнения (2.4.12) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \exp[-W_a^{2m}(x, 0) + a(0, 0)W_{2m-1}(x)] \times \\
&\times \left(c_8 + \int_0^x \frac{f_1(t, 0)}{t^{2m}} \exp[W_a^{2m}(t, 0) - a(0, 0)W_{2m-1}(t)] dt \right) \equiv \\
&\equiv N_2(c_8, f_1(x, 0)), \quad (2.4.13)
\end{aligned}$$

где

$$W_a^{2m}(x, 0) = \int_0^x \frac{a(t, 0) - a(0, 0)}{t^{2m}} dt, \quad W_{2m-1}(x) = \frac{1}{(2m-1)x^{2m-1}},$$

c_8 — произвольная постоянная.

Дифференцируя равенство (2.3.12), после упрощения приходим к равенству

$$\begin{aligned}
& (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + b(x, y) f_1(x, y) = \\
& = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D. \quad (2.4.14)
\end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2.4.2. Пусть в (1.1) $m \geq 2, n \geq 2$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) \quad b(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad a(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \quad f_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$$

$$f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D});$$

$$2) \quad b(x, x) < 0, \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$b(x, x) > 0$, в окрестности Γ_2^0 ,

$a(0, 0) > 0$;

3) $b(x, y) - b(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1})$, $\alpha_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,

$b(x, y) - b(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2})$, $\alpha_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,

$|a(x, 0) - a(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}$, $H_1 = \text{const}$, $\gamma_1 > 2m - 1$;

4) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right)$ в D ,

б) $(x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + b(x, y) f_1(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a(x, y) f_2(x, y)$ в D ;

5) $f_2(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1})$, $\lambda_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,

$f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2})$, $\lambda_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,

$f_1(x, 0) = o(x^{\lambda_3})$, $\lambda_3 > 2m - 1$.

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (1.1), принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формулам (2.2.2) и (2.4.13).

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a(0, 0)W_{2m-1}(x)]).$$

3°. $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0, 0)W_{2m-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_8$.

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O(\exp[-b(x, x)J_{n-1}(x, y)]).$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

2.5. Постановка и решение задач с начальными данными для полученных интегральных представлений решений системы уравнений (1.1)

Данный параграф посвящён постановке и решению задач с начальными условиями. Для решения поставленных задач будут использованы полученные соотношения, выявленные в ходе исследования системы (1.1).

Задача K_2^1 . Найти решение системы (1.1) $m = n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_1,$$

$p_1 = \text{const.}$

Задача K_2^2 . Найти решение системы (1.1) $m = n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_2,$$

в котором p_2 — заданно известное постоянное.

Задача K_2^3 . При выполнении условий $m = 1, n \geq 2$. Найти решение системы (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b(0,0)W_{2k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_3,$$

в котором предполагается, что p_3 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_2^4 . Найти решение системы (1.1) $m = 1, n \geq 2$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_4,$$

$p_4 = \text{const.}$

Задача K_2^5 . Найти решение системы (1.1) $m \geq 2, n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_5,$$

в котором p_5 — заданно известное постоянное.

Задача K_2^6 . При выполнении условий $m \geq 2, n = 1$. Найти решение системы (1.1), которое принадлежит классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_6,$$

в котором предполагается, что p_6 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_2^7 . Найти решение системы (1.1) $m \geq 2, n \geq 2$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b(0,0)W_{2k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_7,$$

$p_7 = const$.

Задача K_2^8 . Найти решение системы (1.1) $m = n = 1$, принадлежащее классу $C^1(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a(0,0)W_{2m-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_8,$$

в котором p_8 — заданно известное постоянное.

Решение задачи K_2^1 . Для решения задачи K_2^1 применяется интегральное представление, заданное формулами (2.1.1) и (2.1.7), а также рассматриваются его основные свойства. Из анализа данных свойств и условий задачи K_2^1 следует, что

$$c_1 = p_1. \quad (2.5.1)$$

Подставляя найденное значение c_1 из (2.5.1) в (2.1.1) и (2.1.7), получим решение задачи K_2^1 .

Итак, доказана следующая

Теорема 2.5.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1.1. Тогда у задачи K_2^1 есть единственное решение, определяющее формулами (2.1.1), (2.1.7) и (2.5.1).*

Решение задачи K_2^2 . Для решения задачи K_2^2 применяется интегральное представление, заданное формулами (2.1.9) и (2.1.14), а также рассматриваются его основные свойства. Из анализа этих свойств и условий задачи K_2^2 следует, что

$$c_2 = p_2. \quad (2.5.2)$$

Подставляя найденное значение c_2 из (2.5.2) в (2.1.9) и (2.1.14), получим решение задачи K_2^2 .

Итак, доказана

Теорема 2.5.2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.1.2. Тогда у задачи K_2^2 есть единственное решение, определяющее формулами (2.1.9), (2.1.14) и (2.5.2).*

Для однозначной разрешимости поставленных задач $K_2^3 - K_2^8$ справедливы следующие

Теорема 2.5.3. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (1.1) выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда у задачи K_2^3 существует единственное решение, находящееся соотношениями (2.1.1) и (2.2.1), в которых $c_3 = p_3$.*

Теорема 2.5.4. *При выполнении условий теоремы 2.2.2 для системы (1.1) у задачи K_2^4 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (2.2.2) и (2.1.14), в которых $c_4 = p_4$.*

Теорема 2.5.5. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.3.1. Тогда у задачи K_2^5 есть единственное решение, определяющее формулами (2.3.1) и (2.3.2), в которых $c_5 = p_5$.*

Теорема 2.5.6. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (1.1) выполнены условия теоремы 2.3.2. Тогда у задачи K_2^6 существует единственное решение, находящееся соотношениями (2.1.9) и (2.3.3), в которых $c_6 = p_6$.

Теорема 2.5.7. Предположим, что выполнены все условия теоремы 2.4.1. Тогда у задачи K_2^7 есть единственное решение, определяющее формулами (2.3.1) и (2.4.7), в которых $c_7 = p_7$.

Теорема 2.5.8. При выполнении условий теоремы 2.4.2 для системы (1.1) у задачи K_2^8 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (2.2.2) и (2.4.13), в которых $c_8 = p_8$.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННЫХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Целью настоящей главы является изучение переопределённых систем дифференциальных уравнений второго порядка следующих видов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

где $a_i(x, y), b_i(x, y), f_i(x, y), i = \overline{1, 2}$ — являются заданными функциями в области D , m, n, p , — натуральные числа, $u(x, y)$ — обозначает искомую функцию.

Получены представления многообразия решений указанных переопределённых систем из двух дифференциальных уравнений, включающих гиперболическое уравнение второго порядка, с использованием одной произвольной константой в явном виде, как в случае, когда исходным является первое уравнение, так и когда исходным является второе. Исследованы некоторые свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий, а также сформулированы и решены задачи с начальными условиями.

3.1. Интегральные представления решений для системы (2.1)

при $m = n = p = 1$

Рассмотрим случай, при котором первое уравнение системы (2.1) принимается в качестве исходного. В указанной постановке первое уравнение системы (2.1) представим в следующем виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2}\right)u = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^2}, \quad (3.1.1)$$

где

$$c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0.$$

Введя новую неизвестную функцию $\vartheta_1(x, y)$ согласно формуле

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2}u = \vartheta_1(x, y), \quad (3.1.2)$$

сводим исходную задачу к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2}\vartheta_1 = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^2}. \quad (3.1.3)$$

Решение уравнения (3.1.3) в соответствии с [Р.Н., 1985, с. 59], представляется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, y) = & \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b(y, y)}{2y}} \exp[-W_{b_1}^1(x, y)](\psi_1(y) + \\ & + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b(y, y)}{2y}} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] dt \Bigg), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где

$$W_{b_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

Путём решения уравнения (3.1.2) получаем выражение для $u(x, y)$ через $\vartheta_1(x, y)$

$$u(x, y) = \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}} \times \\ \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \vartheta_1(x, \tau) \exp[W_{a_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x+\tau}{\tau-x} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} d\tau \right), \quad (3.1.5)$$

где

$$W_{a_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_1(x, \tau) - a_1(x, x)}{x^2 - \tau^2} d\tau.$$

Подставляя в выражение (3.1.5) значение $\vartheta_1(x, y)$ из (3.1.4) при условии $c_2(x, y) = 0$, получаем

$$u(x, y) = \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}} \times \\ \times \left\{ \varphi_1(x) + \int_0^y \exp[W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x+\tau}{\tau-x} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} \left| \frac{x+\tau}{x-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau, \tau)}{2\tau}} \times \right. \\ \times \left. \left(\psi_1(\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, \tau)}{(t^2 - \tau^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, \tau)] \left| \frac{t+\tau}{t-\tau} \right|^{-\frac{b_1(\tau, \tau)}{2\tau}} dt \right) d\tau \right\} \equiv \\ \equiv T_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x, y)). \quad (3.1.6)$$

Теперь второе уравнение системы (2.1) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] u(x, y) \right\} = \\ = \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right], \quad (3.1.7)$$

где

$$W_{a_2}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

С учётом выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \quad (3.1.8)$$

в области D и после дифференцирования равенства (3.1.7) с использованием (3.1.6), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) &= \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x + y}{y - x} \right| \right] - \\
&\quad - \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \int_0^y \exp [W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x + \tau}{\tau - x} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} \left| \frac{x + \tau}{x - \tau} \right|^{\frac{b_1(\tau, \tau)}{2\tau}} \times \\
&\quad \times \left(\psi_1(\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, \tau) + c_2(t, \tau)u(t, \tau)}{(t^2 - \tau^2)^2} \exp [W_{b_1}^1(t, \tau)] \left| \frac{t + \tau}{t - \tau} \right|^{\frac{b_1(\tau, \tau)}{2\tau}} dt \right) d\tau - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \exp [W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x + \tau}{\tau - x} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} \left| \frac{x + \tau}{x - \tau} \right|^{\frac{b_1(\tau, \tau)}{2\tau}} (\psi_1(\tau) + \\
&\quad + \int_0^x \frac{f_1(t, \tau) + c_2(t, \tau)u(t, \tau)}{(t^2 - \tau^2)^2} \exp [W_{b_1}^1(t, \tau)] \left| \frac{t + \tau}{t - \tau} \right|^{\frac{b_1(\tau, \tau)}{2\tau}} dt) d\tau. \quad (3.1.9)
\end{aligned}$$

Из того, что левая часть (3.1.9) является независимой от переменной y , следует:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x + y}{y - x} \right| \right] \right\} - \\
&\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp [W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x + y}{y - x} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} \left| \frac{x + y}{x - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \right. \\
&\times \left. \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp [W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t + y}{t - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) \right\} = \\
&= \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \exp [W_{a_1}^1(x, y) - W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x + y}{y - x} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} \left| \frac{x + y}{x - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} (\psi_1(y) + \\
&+ \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp [W_{b_1}^1(t, y) - \frac{b_1(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{t + y}{t - y} \right|] dt) \Bigg). \quad (3.1.10)
\end{aligned}$$

С учётом преобразования последнего слагаемого равенства (3.1.9) и условия (3.1.10) для нахождения $\varphi_1(x)$ выводится следующее дифференциальное уравнение:

$$\varphi_1'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_2(x, 0)}{x^2}. \quad (3.1.11)$$

Решение уравнения (3.1.11) согласно [124] запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \exp[-W_{a_2}^1(x, 0) + a_2(0, 0)W_1(x)] \times \\ &\times \left(c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^2} \exp[W_{a_2}^1(t, 0) - a_2(0, 0)W_1(t)] dt \right) \equiv \\ &\equiv N_1(c_1, f_2(x, 0)), \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

где

$$W_{a_2}^1(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x}.$$

Для определения функции $\psi_1(y)$, продифференцировав равенство (3.1.10) и произведя необходимые упрощения, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} &(x^2 - y^2)(a_2(x, y) - b_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ &\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) + f_1(x, y) = \\ &= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) + f_2(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Переходя к пределу при $x \rightarrow 0$ в равенстве (3.1.13), определим функцию $\psi_1(y)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \frac{1}{y^2(b_1(0, y) - a_2(0, y))} \left[y^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \right]_{x=0} + \\ &+ a_1(0, y)f_2(0, y) - f_1(0, y) \equiv F_1(y) \quad (a_2(0, y) \neq b_1(0, y)). \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.1) $m = n = k = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0;$$

$$3) \frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} > -1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$a_2(0, 0) > 0;$$

$$4) |a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_1 |y - x|^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \alpha_1 < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_2 |x + y|^{\alpha_2}, H_2 = \text{const}, 0 < \alpha_2 < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_3 |x - y|^{\beta_1}, H_3 = \text{const}, 0 < \beta_1 < 1, \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_4 |x + y|^{\beta_2}, H_4 = \text{const}, 0 < \beta_2 < 1, \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_5 x^{\gamma_1}, H_5 = \text{const}, \gamma_1 > 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)(a_2(x, y) - b_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \exp[-W_{b_1}^1(t, y)] dt \right) + \\ + f_1(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)} \right) + a_1(x, y)f_2(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > 1 - \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > 1 + \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(x^{\lambda_3}), \lambda_3 > 1.$$

Тогда всякое решение (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (3.1.6), (3.1.12) и (3.1.15).

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_1.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(0, y) = O(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}}\right) \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} < 0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} > 0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} < 0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}}\right) \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} > 0.$$

Примем в качестве базового второе уравнение (2.1). Его решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[-W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times \\ &\times \left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt \right) \equiv \\ &\equiv T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)), \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

где

$$W_{a_2}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

Запишем первое уравнение системы (2.1) в форме (3.1.1). После введения новой неизвестной функции оно примет вид (3.1.2) и (3.1.3). Представим уравнение (3.1.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right] u(x, y) \right\} = \\ = \vartheta_1(x, y) \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

В равенство (3.1.17), подставляя значения $u(x, y)$ и $\vartheta_1(x, y)$ из (3.1.16) и (3.1.4) соответственно, и требуя выполнение условия совместности (3.1.8), а также продифференцировав данное равенство, после ряда упрощений получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_2'(y) - \frac{a_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) = \\ = \exp[W_{a_2}^1(x, y) - W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) + \\ + \frac{a_2(0, y)}{y^2} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Учитывая, что левая часть равенства (3.1.18) не зависит от переменной x , получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp[W_{a_2}^1(x, y) - W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \right. \\
& \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) \Bigg\} - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \right\} = \\
& = -\frac{a_2(0, y)}{y^2} \cdot \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}}. \quad (3.1.19)
\end{aligned}$$

С учётом условия (3.1.19) преобразуем последнее слагаемое равенства (3.1.18). В результате для функции $\psi_1(y)$ выводится следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi_2'(y) - \frac{a_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) = \psi_1(y). \quad (3.1.20)$$

Дифференцируя равенство (3.1.19) при выполнении условия $a_1(0, y) = a_2(0, y)$ и выполнив соответствующие упрощения, получим

$$\begin{aligned}
& (x^2 - y^2)(a_2(x, y) - b_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\
& \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)T_2(\psi_2(y), f_2(t, y))}{(t^2 - y^2)^2} \times \right. \\
& \times \left. \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) + c_2(x, y)T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)) = \\
& = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) - f_1(x, y) + a_1(x, y)f_2(x, y) \text{ в } D. \quad (3.1.21)
\end{aligned}$$

В равенстве (3.1.21) при $x \rightarrow 0$ посредством перехода к пределу определяется $\psi_1(y)$ в виде

$$\psi_1(y) = \frac{1}{y^2(a_2(0, y) - b_1(0, y))} \left[f_1(0, y) + y^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \right] \Bigg|_{x=0} -$$

$$-a_1(0, y)f_2(0, y) + c_2(0, y)T_2(\psi_2(y), f_2(0, y))]. \quad (3.1.22)$$

Уравнение (3.1.20) с учётом (3.1.22) примет следующий вид:

$$\psi_2'(y) - \frac{G_1(y)}{y^2} \psi_2(y) = \frac{F_1(y)}{y^2}, \quad (3.1.23)$$

где

$$G_1(y) = a_2(0, y) + \frac{c_2(0, y)}{a_2(0, y) - b_1(0, y)},$$

$$F_1(y) = \frac{1}{a_2(0, y) - b_1(0, y)} \left[f_1(0, y) + y^4 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \Big|_{x=0} - a_1(0, y)f_2(0, y) \right]$$

$$(a_2(0, y) \neq b_1(0, y)).$$

Решение уравнения (3.1.23) запишем в виде

$$\psi_2(y) = \exp \left[W_{G_1}^2(y) - \frac{G_1(0)}{y} \right] \left(c_2 + \int_0^y \frac{F_1(s)}{s^2} \exp \left[-W_{G_1}^2(s) + \frac{G_1(0)}{s} \right] ds \right) \equiv$$

$$\equiv N_2(c_2, f_1(0, y), f_2(0, y)), \quad (3.1.24)$$

где

$$W_{G_1}^2(y) = \int_0^y \frac{G_1(s) - G_1(0)}{s^2} ds,$$

c_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1.2. Пусть в (2.1) $m = n = k = 1$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) \ a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_1(x, y),$$

$$c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$$

$$3) \ \frac{a_2(y, y)}{2y} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_2(y, y)}{2y} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$G_1(0) < 0;$$

$$4) |a_2(x, y) - a_2(y, y)| \leq H_1 |x - y|^{\mu_1}, \quad H_1 = \text{const}, \quad 0 < \mu_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|a_2(x, y) - a_2(y, y)| \leq H_2 |x + y|^{\mu_2}, \quad H_2 = \text{const}, \quad 0 < \mu_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|G_1(y) - G_1(0)| \leq H_3 \cdot y^{\mu_3}, \quad H_3 = \text{const}, \quad \mu_3 > 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)(a_2(x, y) - a_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x + y}{x - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times$$

$$\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) T_2(\psi_2(y), f_2(t, y))}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \times \right.$$

$$\times \left. \left| \frac{t + y}{t - y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) + f_1(x, y) + c_2(x, y) T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)) =$$

$$= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) f_2(x, y) = o(|x - y|^{\gamma_1}), \quad \gamma_1 > -\frac{a_2(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o(|x + y|^{\gamma_2}), \quad \gamma_2 > \frac{a_2(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_1(x) = o(y^{\gamma_3}), \quad \gamma_3 > 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формулам (3.1.16) и (3.1.24).

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0, y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O \left(\exp \left[-\frac{G_1(0)}{y} \right] \right).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[\frac{G_1(0)}{y} \right] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_2.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$, то

$$u(x, 0) = O \left(\exp \left[-\frac{G_1(0)}{y} \right] \right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\frac{x+y}{y-x} \right)^{\frac{a_2(y,y)}{2y}} \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} > 0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} < 0.$$

3.2. Интегральные представления решений для системы (2.1)

при $m = n = 1, p \geq 2$

Рассмотрим первое уравнение системы (2.1) в качестве исходного. В результате выводится следующая

Теорема 3.2.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.1) $m = n = 1, p \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей*

$$1) \ a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_1(x, y), \\ c_1(x, y), \ f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0;$$

$$3) \ \frac{a(x, x)}{2x} + \frac{b(y, y)}{2y} < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a(x, x)}{2x} + \frac{b(y, y)}{2y} > -1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$a_2(0, 0) > 0;$$

$$4) \ |a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_1 |y - x|^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}, \ 0 < \alpha_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_2 |x + y|^{\alpha_2}, H_2 = \text{const}, \ 0 < \alpha_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_3 |x - y|^{\beta_1}, H_3 = \text{const}, \quad 0 < \beta_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_4 |x + y|^{\beta_2}, H_4 = \text{const}, \quad 0 < \beta_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_5 x^{\gamma_1}, H_5 = \text{const}, \quad \gamma_1 > 2p - 1;$$

$$5) \ a) \ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D,$$

$$\begin{aligned} b) \ (x^2 - y^2)^{p+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + a_1(x, y) f_2(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^{p+1} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} - \frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] dt \right) + \\ + (x^2 - y^2)^{p-1} f_1(x, y) \in D; \end{aligned}$$

$$6) \ f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 1 - \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 1 + \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(x^{\mu_1}), \quad \mu_1 > 2p - 1.$$

Тогда всякое решение (2.1), которое принадлежит классу

$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (3.1.6).

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = \exp[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \times \\ \times \left(c_3 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(x, 0) - a_2(0, 0)W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv \\ \equiv N_1(c_3, f_2(x, 0)), \quad (3.2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1(y) = \frac{1}{(-y^2)a_2(0, y) - (-y^2)^p b_1(0, y)} \times \\ \times \left[(-y^2)^{p+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \right]_{x=0} + a_1(0, y)f_2(0, y) - (-y^2)^{p-1}f_1(0, y) \\ ((-y^2)a_2(0, y) \neq (-y^2)^p b_1(0, y)), \quad (3.2.2) \end{aligned}$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_3 — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_3.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(0, y) = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}}\right) \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} < 0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} > 0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} < 0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}}\right) \text{ при } \frac{a_1(x, x)}{2x} > 0.$$

При принятии второго уравнения системы (2.1) за исходное устанавливается следующая

Теорема 3.2.2. Пусть в (2.1) $m = n = 1, p \geq 2$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_1(x, y)$,
 $c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D})$;

$$2) \ c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$$

$$3) \ a_2(y, y) > 0, \ a_1(0, 0) > 0;$$

$$4) \ a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \ \mu_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \ \mu_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_1(0, y) - a_1(0, 0)| \leq H_3 \cdot y^{\mu_3}, \ H_3 = \text{const}, \ \mu_3 > 1;$$

$$5) \ a) \ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$\begin{aligned} & b) \ (a_2(x, y) - b_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \frac{b_1(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x + y}{y - x} \right| (\psi_1(y) + \\ & + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) T_2(\psi_2(y), f_2(t, y))}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t + y}{t - y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt) + \\ & + (x^2 - y^2)^{p-1} (f_1(t, y) + c_2(t, y) T_2(\psi_2(y), f_2(x, y))) = \\ & = (x^2 - y^2)^{p+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + a_1(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D; \end{aligned}$$

$$6) \ f_2(x, y) = o((x - y)^{\gamma_1}), \ \gamma_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\gamma_2}), \ \gamma_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_1(y) \in C(\bar{D}).$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp \left[-W_{a_2}^p(x, y) + a_2(y, y) J_{p-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \\ &\times \left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{(t^2 - y^2)^p} \exp \left[W_{a_2}^p(t, y) - a_2(y, y) J_{p-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) \equiv \\ &\equiv T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где

$$\psi_2(y) = \exp[W_{a_1}^2(0, y) + a_1(0, 0)W_1(y)] \times$$

$$\times \left(c_4 - \int_0^y F_1(s) \exp[-W_{a_1}^2(0, s) - a_1(0, 0)W_1(s)] ds \right) \equiv \\ \equiv N_2(c_4, F_1(y)), \quad (3.2.4)$$

$$F_1(y) = \frac{1}{a_2(0, y) - b_1(0, y)} \left[(-y^2)^{p+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \Big|_{x=0} + \right. \\ \left. + a_1(0, y)f_2(0, y) - (-y^2)^{p-1}f_1(0, y) \right] \quad (a_2(0, y) \neq b_1(0, y)),$$

$$W_{a_2}^p(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{(t^2 - y^2)^p} dt,$$

$$J_{p-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(p-1)y^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{p-1}},$$

$$W_{a_1}^2(0, y) = \int_0^y \frac{a_1(0, s) - a_1(0, 0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_4 — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем:

$$u(0, y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_1(0, 0)W_1(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_1(0, 0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_4.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[a_2(y, y) J_{p-1}^{(1)}(x, y) \right] \right).$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[a_2(y, y) J_{p-1}^{(1)}(x, y) \right] \right).$$

3.3. Интегральные представления решений для системы (2.1)

при $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$

При принятии первого уравнения системы (2.1) за базовое имеем следующую

Теорема 3.3.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$
- 2) $c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$
- 3) $a_1(x, x) < 0, b_1(y, y) < 0, a_2(0, 0) > 0;$
- 4) $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > m - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > m - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x - y)^{\beta_1}), \beta_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x + y)^{\beta_2}), \beta_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\mu_1}, H_1 = \text{const}, \mu_1 > 1;$
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^m (a_2(x, y) - b_1(x, y)) \times$
 $\times \exp \left[W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (\psi_1(y) +$
 $+ \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[w_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt) =$
 $= (x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) -$
 $-(x^2 - y^2) f_1(x, y)$ в D ;
- 6) $f_1(x, y) = o(|x - y|^{\lambda_1}), \lambda_1 > m + n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_1(x, y) = o(|x + y|^{\lambda_2}), \lambda_2 > m + n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_2(x, 0) = o(x^{\mu_2}), \mu_2 > 1.$

Тогда всякое решение (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] & \left\{ \varphi_1(x) + \int_0^y \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, s) - W_{b_1}^n(x, s) + b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t, s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, s) - b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(t, s) \right] dt \right) ds \right\} \equiv \\
 & \equiv \Omega_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x, y)), \quad (3.3.1)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) = \exp \left[-W_{a_2}^2(x, 0) + a_2(0, 0) W_1(x) \right] & \times \\
 \times \left(c_5 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^2} \exp \left[W_{a_2}^2(t, 0) - a_2(0, 0) W_1(t) \right] dt \right) & \equiv \\
 & \equiv N_1(c_5, f_2(x, 0)), \quad (3.3.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_1(y) = \frac{1}{y^m(a_2(0, y) - b_1(0, y))} & \left[y^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \right]_{x=0} + \\
 + y^n a_1(0, y) f_2(0, y) - f_1(0, y) & \quad (a_2(0, y) \neq b_1(0, y)), \quad (3.3.3)
 \end{aligned}$$

$$W_{a_1}^m(x, y) = \int_0^y \frac{a_1(x, s) - a_1(x, x)}{(x^2 - s^2)^m} ds, \quad W_{b_1}^n(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{(t^2 - y^2)^n} dt,$$

$$J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(n-1)y^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{n-1}},$$

$$J_{m-1}^{(2)}(x, y) = \frac{y}{2(m-1)x^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{m-1}},$$

$$W_{a_2}^2(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_5 — произвольная постоянная.

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то будем иметь

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0,0)W_1(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_5.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = 0.$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)\right]\right).$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

При принятии второго уравнения системы (2.1) за исходное и применении приведённой выше схемы выводятся следующая

Теорема 3.3.2. Пусть в (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y),$$

$$c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$$

$$3) a_2(y, y) > 0, B_1(y, y) < 0, a_1(0, 0) > 0;$$

$$4) |a_2(x, y) - a_2(y, y)| \leq H_1 |x - y|^{\mu_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \mu_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|a_2(x, y) - a_2(y, y)| \leq H_2 |x + y|^{\mu_2}, H_2 = \text{const}, 0 < \mu_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|a_1(0, y) - a_1(0, 0)| \leq H_3 y^{\gamma_1}, H_3 = \text{const}, \gamma_1 > 4k - 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) \in D,$$

$$\begin{aligned} b) & (x^2 - y^2)^{m+n+1} \left((x^2 - y^2)^{-1} a_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-n} b_1(x, y) \right) \times \\ & \times \exp \left[-W_{b_1}^1(x, y) + \frac{b_1(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] \times \\ & \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) T_2(\psi_2(y), f_2(t, y))}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \times \right. \\ & \times \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \Big) + \\ & + (x^2 - y^2)^{-1} f_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{-1} c_2(x, y) T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)) = \\ & = (x^2 - y^2)^{-n} a_1(x, y) f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \in D; \end{aligned}$$

$$6) f_2(x, y) = o((x - y)^{\gamma_1}), \quad \gamma_1 > -\frac{a_2(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\gamma_2}), \quad \gamma_2 > \frac{a_2(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_1(y) \in C(\bar{D}).$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (3.1.16).

При этом

$$\begin{aligned} \psi_2(y) &= \exp \left[-W_{a_1}^{4k}(0, y) + a_1(0, 0) W_{4k-1}(y) \right] \times \\ & \times \left(c_6 + \int_0^y F_1(s) \exp \left[W_{a_1}^{4k}(0, s) - a_1(0, 0) W_{4k-1}(s) \right] ds \right) \equiv \\ & \equiv N_2(c_6, F_1(y)), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$W_{a_1}^{4k}(0, y) = \int_0^y \frac{a_1(0, s) - a_1(0, 0)}{s^{4k}} ds, \quad W_{4k-1}(y) = \frac{1}{(4k-1)y^{4k-1}},$$

$$F_1(y) = \frac{1}{(-y)^{2(m+n+1)} (-y^{-2} a_2(0, y) - (-y^{-2n}) b_1(0, y))} \times$$

$$\times [(-y)^{2n}a_1(0,y)f_2(0,y) + (-y)^{2(m+n+1)}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}\right)\Big|_{x=0} - \\ - y^{-2}f_1(0,y)] \quad \left((-y)^{2(m+n+1)}(-y^{-2}a_2(0,y) \neq (-y^{-2n})b_1(0,y))\right),$$

c_6 — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то получим

$$u(x, y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_1(0,0)W_{4k-1}(y)]).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_1(0,0)W_{4k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_6.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[a_1(0,0)W_{4k-1}(y)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a_2(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} > 0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} < 0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} > 0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a_2(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} < 0.$$

Замечание 3.3.1. Аналогичное утверждение как в теореме 3.3.2 получено для случая $m = 2k - 1$.

3.4. Интегральные представления решений для системы (2.1)

при $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$

При принятии первого уравнения системы (2.1) за исходное и применении приведённой выше схемы выводятся следующая

Теорема 3.4.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$
- 2) $c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$
- 3) $a_1(x, x) < 0, b_1(y, y) < 0, a_2(0, 0) > 0;$
- 4) $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > m - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > m - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x - y)^{\beta_1}), \beta_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x + y)^{\beta_2}), \beta_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\mu_1}, H_1 = \text{const}, \mu_1 > 2p - 1;$
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D,$
 б) $(x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^{m+n+p} ((x^2 - y^2)^{-m} a_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-n} \times$
 $\times b_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y)] (F_1(y) +$
 $+ \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y)] dt) +$
 $+(x^2 - y^2)^p f_1(x, y) \in D;$
- 6) $f_1(x, y) = o \left(\exp[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y)] (x - y)^{\lambda_1} \right), \lambda_1 > m + n - 1$
 в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_1(x, y) = o \left(\exp[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y)] (x + y)^{\lambda_2} \right), \lambda_2 > m + n - 1$
 в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_2(x, 0) = O(x^{\mu_3}), \mu_3 > 2p - 1.$

Тогда всякое решение (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (3.3.1).

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \exp[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \times \\ &\times \left(c_7 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0)W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv \\ &\equiv N_1(c_7, f_2(x, 0)), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \frac{1}{(-y^2)^p a_2(0, y) - (-y^2)^n b_1(0, y)} \times \\ &\times \left[(-y^2)^{n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \Big|_{x=0} + (-y^2)^{n-p} a_1(0, y) f_2(0, y) - f_1(0, y) \right] \\ &((-y^2)^p a_2(0, y) \neq (-y^2)^n b_1(0, y)), \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_7 — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то получим

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_7.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)\right]\right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)\right]\right).$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

Рассмотрим случай, когда второе уравнение системы (2.1) принимается за исходное. При этом случае имеет место следующая

Теорема 3.4.2. Пусть в (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), a_2(x, y), \\ f_2(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + \\ + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0$$

$$3) a_2(y, y) > 0, B_1(y, y) < 0;$$

$$4) a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \mu_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0, \\ a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \mu_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0, \\ |B_1(0, y) - B_1(y, y)| \leq H_3 y^{\mu_3}, H_3 = \text{const}, \mu_3 > 2(m + n + p) - 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{m+n+p} \left((x^2 - y^2)^{-p} a_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-n} b_1(x, y) \right) \times \\ \times \exp \left[-W_{b_1}^1(x, y) + \frac{b_1(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x + y}{x - y} \right| \right] (\psi_1(y) + \\ + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) \Omega_2 \left(N_2(c_8, F_1(y)), f_2(t, y) \right)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \times$$

$$\times \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt) + (x^2 - y^2)^p f_1(x, y) +$$

$$+ (x^2 - y^2)^p c_2(x, y) \Omega_2 \left(N_2(c_8, F_1(y)), f_2(x, y) \right) =$$

$$= (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \text{ в } D;$$

$$6) f_2(x, y) = o((x - y)^{\gamma_1}), \gamma_1 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0, \\ f_2(x, y) = o((x + y)^{\gamma_2}), \gamma_2 > p - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_1(y) = o(y^{\gamma_3}), \gamma_3 > 2(m+n+p) - 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле (3.2.3).

При этом

$$\begin{aligned} \psi_2(y) &= \exp \left[W_{B_1}^{2(m+n+p)}(0, y) - B_1(y, y) W_{2(m+n+p)-1}(y) \right] \times \\ &\times \left(c_8 - \int_0^y \frac{F_1(s)}{s^{2(m+n+p)}} \exp \left[-W_{B_1}^{2(m+n+p)}(0, s) + B_1(s, s) W_{2(m+n+p)-1}(s) \right] ds \right) \equiv \\ &\equiv N_2(c_8, F_1(y)), \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

$$W_{B_1}^{2(m+n+p)}(0, y) = \int_0^y \frac{B_1(0, s) - B_1(s, s)}{s^{2(m+n+p)}} ds,$$

$$W_{2(m+n+p)-1}(y) = \frac{1}{(2(m+n+p) - 1)y^{2(m+n+p)-1}},$$

$$\begin{aligned} F_1(y) &= \frac{1}{-y^{2(m+n+p)}(y^{-2n}b_1(0, y) - y^{-2p}a_2(0, y))} \times \\ &\times \left[-y^{2n} a_1(0, y) f_2(0, y) - y^{2(m+n+p)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \Big|_{x=0} + y^{2p} f_1(0, y) \right] \\ &\quad \left((y^{-2n}b_1(0, y) \neq y^{-2p}a_2(0, y)) \right), \end{aligned}$$

c_8 — произвольная постоянная.

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то будем иметь:

$$u(0, y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O \left(\exp \left[-B_1(y, y) W_{2(m+n+p)-1}(y) \right] \right).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[B_1(y, y) W_{2(m+n+p)-1}(y) \right] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_8.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$, и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Замечание 3.4.1. Подобные результаты получены, как и в теореме 3.4.2 при $m = 2k - 1$.

3.5. Интегральные представления решений для системы (2.2)

при $m = n = p = 1$

При принятии первого уравнения системы (2.2) за исходное и применении схемы, приведённой в (3.1.1), выводятся следующая

Теорема 3.5.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.2) $m = n = p = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) \ b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_1(x, y),$$

$$c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0;$$

$$3) \ \frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} > -1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b_2(0, 0) < 0;$$

$$4) \ |a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_1|x - y|^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}, \ 0 < \alpha_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_2|x + y|^{\alpha_2}, H_2 = \text{const}, \ 0 < \alpha_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_3|x - y|^{\beta_1}, H_3 = \text{const}, \ 0 < \beta_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_4 |x + y|^{\beta_2}, H_4 = \text{const}, 0 < \beta_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_5 x^{\mu_1}, H_5 = \text{const}, \mu_1 > 1;$$

$$5) \text{ a) } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b_1(x, y) f_2(x, y) = f_1(x, y) + (x^2 - y^2) \times \\ \times (b_2(x, y) - a_1(x, y)) \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x + y}{x - y} \right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}} \times \\ \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s)}{(x^2 - s^2)^2} \exp[W_{a_1}^1(x, s)] \left| \frac{x + s}{x - s} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} ds \right) \text{ в } D; \end{aligned}$$

$$6) \quad f_1(x, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \mu_1 > \frac{a_1(x, x)}{2x} + 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \mu_2 > 1 - \frac{a_1(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(0, y) = o(y^{\lambda_1}), \lambda_1 > 1.$$

Тогда всякое решение (2.2), которое принадлежит классу

$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x - y}{x + y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \exp[W_{a_1}^1(t, y) + W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t - y}{t + y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \left| \frac{t + y}{t - y} \right|^{-\frac{a_1(t, t)}{2t}} \times \right. \\ \left. \times \left(\varphi_1(t) + \int_0^y \frac{f_1(t, s)}{(t^2 - s^2)^2} \exp[-W_{a_1}^1(t, s)] \left| \frac{s - t}{s + t} \right|^{-\frac{a_1(t, t)}{2t}} ds \right) dt \right) \equiv \\ \equiv \Omega_1(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x, y)), \quad (3.5.1) \end{aligned}$$

где

$$\psi_1(y) = \exp[W_{b_2}^2(0, y) - b_2(0, 0)W_1(y)] \times$$

$$\times \left(c_9 - \int_0^y \frac{f_2(0, s)}{s^2} \exp[-W_{b_2}^2(0, s) + b_2(0, 0)W_1(s)] ds \right) \equiv \\ \equiv N_1(c_9, f_2(0, y)), \quad (3.5.2)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x^2(b_2(x, 0) - a_1(x, 0))} \left[x^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \right]_{y=0} + \\ + b_1(x, 0)f_2(x, 0) - f_1(x, 0) \quad (a_1(x, 0) \neq b_2(x, 0)), \quad (3.5.3)$$

$$W_{b_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{t^2 - y^2} dt, \quad W_{a_1}^1(x, y) = \int_0^y \frac{a_1(x, s) - a_1(x, x)}{x^2 - s^2} ds,$$

$$W_{b_2}^2(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_9 — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то будем иметь

$$u(0, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[-b_2(0, 0)W_1(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0, 0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_9.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[-b_2(0, 0)W_1(y)]).$$

При принятии второго уравнения системы (2.2) за исходное устанавливается следующая

Теорема 3.5.2. Пусть в (2.2) $m = n = p = 1$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_1(x, y)$, $f_1(x, y)$, $c_1(x, y) \in C(\bar{D})$;

$$2) \ c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) b_1(x, y) \neq 0;$$

$$3) \ \frac{b_2(x, x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{b_2(x, x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b_3(0) > 0;$$

$$4) \ |b_2(x, y) - b_2(x, x)| \leq H_1 |x - y|^{\beta_1}, \ H_1 = \text{const}, \ 0 < \beta_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|b_2(x, y) - b_2(x, x)| \leq H_2 |x + y|^{\beta_2}, \ H_2 = \text{const}, \ 0 < \beta_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0;$$

$$|b_3(x) - b_3(0)| \leq H_3 x^{\gamma_1}, \ H_3 = \text{const}, \ \gamma_1 > 1;$$

$$5) \ a) \ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$b) \ (x^2 - y^2)(b_2(x, y) - a_1(x, y)) \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}} \times \\ \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s) \Omega_2(\varphi_2(x), f_2(x, s))}{(x^2 - s^2)^2} \exp[W_{a_1}^1(x, s)] \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} ds \right) + f_1(x, y) + c_2(x, y) \Omega_2(\varphi_2(x), f_2(x, y)) = \\ = b_1(x, y) f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D;$$

$$6) \ f_2(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \ \lambda_1 > \frac{b_2(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \ \lambda_2 > -\frac{b_2(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_3(x) = o(\exp[b_3(0)W_1(x)]x^{\lambda_3}), \ \lambda_3 > 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.2), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле

$$u(x, y) = \exp[-W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{b_2(x, x)}{2x}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} ds \right) \equiv \\ & \equiv \Omega_2(\varphi_2(x), f_2(x, y)), \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \exp[-W_{b_3}^1(x) + b_3(0)W_1(x)] \times \\ & \times \left(c_{10} + \int_0^x \frac{F_3(t)}{t^2} \exp[W_{b_3}^1(t) - b_3(0)W_1(t)] dt \right) \equiv \\ & \equiv N_3(c_{10}, f_2(x, 0), f_1(x, 0)), \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

$$W_{b_2}^1(x, y) = \int_0^y \frac{b_2(x, s) - b_2(x, x)}{x^2 - s^2} ds, \quad W_{b_3}^1(x) = \int_0^x \frac{b_3(t) - b_3(0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

$$F_3(x) = \frac{1}{b_2(x, 0) - a_1(x, 0)} \left[b_1(x, 0)f_2(x, 0) + x^4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \Big|_{y=0} - f_1(x, 0) \right],$$

$$b_3(x) = b_2(x, 0) + \frac{c_2(x, 0)}{b_2(x, 0) - a_1(x, 0)} \quad (a_1(x, 0) \neq b_2(x, 0)),$$

c_{10} — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то будем получать

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b_3(0)W_1(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_3(0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{10}.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[b_3(0)W_1(x)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{b_2(x, x)}{2x}} \right) \text{ при } \frac{b_2(x, x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{b_2(x, x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b_2(x, x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

3.6. Интегральные представления решений для системы (2.2)

при $m = n = 1, p \geq 2$

При принятии первого уравнения системы (2.2) за базовое и с опорой на схему, изложенную в (3.5.1), выводятся следующая

Теорема 3.6.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.2) $m = n = 1, p \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) \ b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_1(x, y), \\ c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) \ \frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} > -1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b_2(0, 0) < 0;$$

$$4) \ |b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_1|x - y|^{\beta_1}, H_1 = \text{const}, \ 0 < \beta_1 < 1, \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_2|x + y|^{\beta_2}, H_2 = \text{const}, \ 0 < \beta_2 < 1, \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_3|x - y|^{\alpha_1}, H_3 = \text{const}, \ 0 < \alpha_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_4|x + y|^{\alpha_2}, H_4 = \text{const}, \ 0 < \alpha_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_5 x^{\mu_1}, H_5 = \text{const}, \mu_1 > 4k - 1;$$

$$5) \text{ a) } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D,$$

$$\begin{aligned} & \text{b) } (x^2 - y^2)^{p+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_1(x, y) f_2(x, y) = \\ & = \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}} (x^2 - y^2)^{p+1} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} - \frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \times \\ & \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s)}{(x^2 - s^2)^2} \exp[W_{a_1}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} ds \right) + \\ & + (x^2 - y^2)^{p-1} f_1(x, y) \in D; \end{aligned}$$

$$6) \quad f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > \frac{a_1(x, x)}{2x} + 1 \quad \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 1 - \frac{a_1(x, x)}{2x} \quad \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(0, y) = o(\exp[-b_2(0, 0)W_{4k-1}(y)]y^{\gamma_1}), \quad \gamma_1 > 4k - 1.$$

Тогда всякое решение (2.2), которое принадлежит классу

$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (3.5.1).

При этом

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \exp[-W_{b_2}^{4k}(0, y) + b_2(0, 0)W_{4k-1}(y)] \times \\ & \times \left(c_{11} + \int_0^y \frac{f_2(0, s)}{s^{4k}} \exp[W_{b_2}^{4k}(0, s) - b_2(0, 0)W_{4k-1}(s)] ds \right) \equiv \\ & \equiv N_1(c_{11}, f_2(0, y)), \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{x^2 b_2(x, 0) - x^{2p} a_1(x, 0)} \left[x^{2(p+1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \right]_{y=0} + \\ & + b_1(x, 0) f_2(x, 0) - x^{2(p-1)} f_1(x, 0) \quad (x^{2p} a_1(x, 0) \neq x^2 b_2(x, 0)), \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

$$W_{b_2}^{4k}(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^{4k}} ds, \quad W_{4k-1}(y) = \frac{1}{(4k-1)y^{4k-1}}.$$

c_{11} — произвольная постоянная.

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то будем получать

$$u(0, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[-b_2(0,0)W_{4k-3}(y)]).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_{4k-3}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{11}.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{b_1(y,y)}{2y} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{b_1(y,y)}{2y} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

При принятии второго уравнения системы (2.2) за исходное и с опорой на вышеизложенную схему имеет место следующая

Теорема 3.6.2. Пусть в (2.2) $m = n = 1$, $p \geq 2$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0$
- 3) $b_2(x, x) < 0$, $B_1(0, 0) > 0$;
- 4) $b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x - y)^{\mu_1})$, $\mu_1 > p - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x + y)^{\mu_2})$, $\mu_2 > p - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|B_1(x, 0) - B_1(0, 0)| \leq H_1 x^{\mu_3}$, $H_1 = \text{const}$, $\mu_3 > 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \in D$,
 б) $(x^2 - y^2)^{p+1}((x^2 - y^2)^{-p}b_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-1}a_1(x, y)) \times$

$$\begin{aligned}
& \times \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_1(x, x)}{2x}} (\varphi_1(x) + \\
& + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s)T_2(\varphi_2(x), f_2(x, y))}{(x^2 - s^2)^2} \exp[W_{a_1}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{a_1(x, x)}{2x}} ds \Bigg) + \\
& + (x^2 - y^2)^{p-1} \left(f_1(x, y) + c_2(x, y)T_2(\varphi_2(x), f_2(x, y)) \right) = \\
& = b_1(x, y)f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{p+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D;
\end{aligned}$$

- 6) $f_2(x, y) = o((x - y)^{\gamma_1})$, $\gamma_1 > p - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_2(x, y) = o((x + y)^{\gamma_2})$, $\gamma_2 > p - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $F_1(x) \in C(\bar{D})$.

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.2), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \exp[-W_{b_2}^p(x, y) - b_2(x, x)J_{p-1}^{(1)}(x, y)] \times \\
&\times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^p} \exp[W_{b_2}^p(x, s) + b_2(x, x)J_{p-1}^{(1)}(x, s)] ds \right) \equiv \\
&\equiv T_2(\varphi_2(x), f_2(x, y)), \quad (3.6.3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \exp[-W_{B_1}^2(x, 0) + B_1(0, 0)W_1(x)] \times \\
&\times \left(c_{12} + \int_0^x F_1(t) \exp[W_{B_1}^2(t, 0) - B_1(0, 0)W_1(t)] dt \right) \equiv N_2(c_{12}, F_1(x)), \quad (3.6.4)
\end{aligned}$$

$$W_{b_2}^p(x, y) = \int_0^y \frac{b_2(x, s) - b_2(x, x)}{(x^2 - s^2)^p} ds,$$

$$J_{p-1}^{(1)}(x, y) = \frac{y}{2(p-1)x^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{p-1}},$$

$$F_1(x) = \frac{1}{x^{-2}(b_2(x, 0)x^p - a_1(x, 0))} [b_1(x, 0)f_2(x, 0) +$$

$$+ x^{2(p+1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \Big|_{y=0} - x^{2(p+1)} f_1(x, 0) \Big] \quad (a_1(x, 0) \neq b_2(x, 0)x^p),$$

$$W_{B_1}^2(x, 0) = \int_0^x \frac{B_1(t, 0) - B_1(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_{12} — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[B_1(0, 0)W_1(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-B_1(0, 0)W_1(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{12}.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[-b_2(x, x) J_{p-1}^{(1)}(x, y) \right] \right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[-b_2(x, x) J_{p-1}^{(1)}(x, y) \right] \right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

3.7. Интегральные представления решений для системы (2.2)

при $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$

При принятии первого уравнения системы (2.2) за исходное и с опорой на вышеизложенную схему выводятся следующая

Теорема 3.7.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) \quad b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \quad b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \quad a_1(x, y),$$

- $c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y)$;
- 3) $b_1(y, y) > 0, a_1(x, x) > 0, b_2(0, 0) < 0$;
- 4) $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x - y)^{\beta_1}), \beta_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x + y)^{\beta_2}), \beta_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > m - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > m - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_1 y^{\mu_1}, H_1 = \text{const}, \mu_1 > 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в D ,
б) $[(x^2 - y^2)^{m+n} b_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{n+1} a_1(x, y)] \times$
 $\times \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \times \right.$
 $\times \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds \Big) + (x^2 - y^2) f_1(x, y) + (x^2 - y^2) =$
 $= (x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + (x^2 - y^2)^m b_1(x, y) f_2(x, y)$ в D ;
- 6) $f_1(x, y) = o \left(\exp \left[-a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (x - y)^{\lambda_1} \right), \lambda_1 > m + n - 1$
в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_1(x, y) = o \left(\exp \left[-a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (x + y)^{\lambda_2} \right), \lambda_2 > m + n - 1$
в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_2(0, y) = o(y^{\mu_2}), \mu_2 > 1$.

Тогда всякое решение (2.2), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \left\{ \psi_1(y) + \int_0^x \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - \right. \right. \\ \left. \left. - b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(t, y) - W_{a_1}^m(t, y) - a_1(t, t) J_{m-1}^{(1)}(t, y) \right] \times \right.$$

$$\times \left(\varphi_1(t) + \int_0^y \frac{f_1(t,s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(t,s) + a_1(t,t) J_{m-1}^{(1)}(t,s) \right] ds \right) dt \Bigg\} \equiv$$

$$\equiv K_1(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y)), \quad (3.7.1)$$

где

$$\psi_1(y) = \exp[W_{b_2}^2(0,y) - b_2(0,0)W_1(y)] \times$$

$$\times \left(c_{13} - \int_0^y \frac{f_2(0,s)}{s^2} \exp[-W_{b_2}^2(0,s) + b_2(0,0)W_1(s)] ds \right) \equiv$$

$$\equiv N_1(c_{13}, f_2(0,y)), \quad (3.7.2)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{x^{2(m+n)}b_2(x,0) - x^{2(n+1)}a_1(x,0)} \times$$

$$\times \left[x^{2(m+n-1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x,y)}{x^2 - y^2} \right) \Bigg|_{y=0} + x^{2m}b_1(x,0)f_2(x,0) - x^2f_1(x,0) \right]$$

$$\left(x^{2(n+1)}a_1(x,0) \neq x^{2(m+n)}b_2(x,0) \right), \quad (3.7.3)$$

$$W_{b_1}^n(x,y) = \int_0^x \frac{b_1(t,y) - b_1(y,y)}{(t^2 - y^2)^n} dt, \quad W_{a_1}^m(x,y) = \int_0^y \frac{a_1(x,s) - a_1(x,x)}{(x^2 - s^2)^m} ds,$$

$$J_{n-1}^{(2)}(x,y) = \frac{x}{2(n-1)y^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{n-1}},$$

$$J_{m-1}^{(1)}(x,y) = \frac{y}{2(m-1)x^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{m-1}},$$

$$W_{b_2}^2(0,y) = \int_0^y \frac{b_2(0,s) - b_2(0,0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_{13} — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0,y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[-b_2(0,0)W_1(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{13}.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Рассмотрим случай, когда второе уравнение системы (2.2) принимается за исходное. При этом, с опорой на вышеизложенную схему, выводится следующая

Теорема 3.7.2. Пусть в (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) \ b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_1(x, y), \\ c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

$$3) \ \frac{b_2(x, x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{b_2(x, x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$B_1(0,0) > 0;$$

$$4) \ |b_2(x, y) - b_2(x, x)| \leq H_1 |x - y|^{\mu_1}, \ H_1 = \text{const}, \ \mu_1 > 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|b_2(x, y) - b_2(x, x)| \leq H_2 |x + y|^{\mu_2}, \ H_2 = \text{const}, \ \mu_2 > 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|B_1(x, 0) - B_1(0,0)| \leq H_3 x^{\mu_3}, \ H_3 = \text{const}, \ \mu_3 > 2(m + n) + 1;$$

$$5) \ a) \ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) \in D,$$

$$b) \ (x^2 - y^2)^{m+n+1} \left((x^2 - y^2)^{-1} b_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-m} a_1(x, y) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \\
& \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s)\Omega_2(\varphi_2(x), f_2(x, s))}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \times \right. \\
& \times \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds \Big) + (x^2 - y^2)f_1(x, y) + \\
& + (x^2 - y^2)c_2(x, y)\Omega_2(\varphi_2(x), f_2(x, s)) = \\
& = (x^2 - y^2)^m b_1(x, y)f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D;
\end{aligned}$$

$$6) f_2(x, y) = o((x - y)^{\theta_1}), \quad \theta_1 > \frac{b_2(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x, y) = o((x + y)^{\theta_2}), \quad \theta_2 > -\frac{b_2(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$F_1(x) = o(x^{\gamma_1}), \quad \gamma_1 > 2(m + n) + 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.2), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле (3.5.4).

При этом

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \exp \left[-W_{B_1}^{2(m+n+1)}(x, 0) + B_1(0, 0)W_{2(m+n)+1}(x) \right] \times \\
&\times \left(c_{14} + \int_0^x \frac{F_1(t)}{t^{2(m+n+1)}} \exp \left[W_{B_1}^{2(m+n+1)}(t, 0) - B_1(0, 0)W_{2(m+n)+1}(t) \right] dt \right) \equiv \\
&\equiv N_2(c_{14}, F_1(x)), \quad (3.7.4)
\end{aligned}$$

$$W_{B_1}^{2(m+n+1)}(x, 0) = \int_0^x \frac{B_1(t, 0) - B_1(0, 0)}{t^{2(m+n+1)}} dt,$$

$$W_{2(m+n)+1}(x) = \frac{1}{(2(m+n) + 1)x^{2(m+n)+1}},$$

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{1}{x^{-2}b_2(x, 0) - x^{-2m}a_1(x, 0)} \times \\
&\times \left[x^{2m}b_1(x, 0)f_2(x, 0) + x^{2(m+n+1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \Big|_{y=0} - x^2 f_1(x, 0) \right] \\
&(x^{-2m}a_1(x, 0) \neq x^{-2}b_2(x, 0)),
\end{aligned}$$

c_{14} — произвольная постоянная.

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[B_1(0,0)W_{2(m+n)+1}(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-B_1(0,0)W_{2(m+n)+1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{14}.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[B_1(0,0)W_{2(m+n)+1}(x)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b_2(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b_2(x,x)}{2x}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

3.8. Интегральные представления решений для системы (2.2)

при $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$

При принятии первого уравнения системы (2.2) за исходное (для $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$) оно представляется в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n}\right) u = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \quad (3.8.1)$$

где

$$c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0.$$

Введя новую неизвестную функцию $\vartheta_1(x, y)$ в равенстве (3.8.1), согласно заданной формуле, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} u = \vartheta_1(x, y). \quad (3.8.2)$$

Задачу свведём к решению следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \vartheta_1 = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}. \quad (3.8.3)$$

Решение уравнения (3.8.3), согласно [49] запишем в виде

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, y) = \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (\varphi_1(x) + \\ + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s)u(x, s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds) \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

где

$$W_{a_1}^m(x, y) = \int_0^y \frac{a_1(x, s) - a_1(x, x)}{(x^2 - s^2)^m} ds,$$

$$J_{m-1}^{(1)}(x, y) = \frac{y}{2(m-1)x^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{m-1}}.$$

Теперь, решая уравнение (3.8.2), выражаем $u(x, y)$ через $\vartheta_1(x, y)$ согласно [49],

$$\begin{aligned} u(x, y) = \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \vartheta_1(t, y) \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(t, y) \right] dt \right), \end{aligned} \quad (3.8.5)$$

где

$$W_{b_1}^n(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{(t^2 - y^2)^n} dt,$$

$$J_{n-1}^{(2)}(x, y) = \frac{x}{2(n-1)y^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{n-1}}.$$

Равенство (3.8.5), согласно (3.8.4), при $c_2(x, y) = 0$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] & \left\{ \psi_1(y) + \int_0^x \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - \right. \right. \\
 & \left. \left. -b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(t, y) - W_{a_1}^m(t, y) - a_1(t, t)J_{m-1}^{(1)}(t, y) \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left(\varphi_1(t) + \int_0^y \frac{f_1(t, s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(t, s) + a_1(t, t)J_{m-1}^{(1)}(t, s) \right] ds \right) dt \right\} \equiv \\
 & \equiv K_1(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x, y)). \quad (3.8.6)
 \end{aligned}$$

Далее представим второе уравнение системы (2.2) в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{b_2}^p(x, y) + b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] u(x, y) \right\} = \\
 = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \exp \left[W_{b_2}^p(x, y) + b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right], \quad (3.8.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 W_{b_2}^p(x, y) &= \int_0^y \frac{b_2(x, s) - b_2(x, x)}{(x^2 - s^2)^p} ds, \\
 J_{p-1}^{(3)}(x, y) &= \frac{y}{2(p-1)x^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{p-1}}.
 \end{aligned}$$

При выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \quad (3.8.8)$$

в области D и после дифференцирования равенства (3.8.7) с учётом соотношения (3.8.6), на основании соответствующих преобразований получаем следующее выражение:

$$\psi_1'(y) + \frac{b_2(0, y)}{(-y^2)^p} \psi_1(y) = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \exp \left[W_{b_1}^n(x, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{b_2(0,y)}{(-y^2)^p} \int_0^x \exp \left[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y) J_{n-1}^{(2)}(t,y) - W_{a_1}^m(t,y) - \right. \\
& \quad \left. - a_1(t,t) J_{m-1}^{(1)}(t,y) \right] \times \\
& \quad \times \left(\varphi_1(t) + \int_0^y \frac{f_1(t,s)}{(t^2-s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(t,s) + a_1(t,t) J_{m-1}^{(1)}(t,s) \right] ds \right) dt - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \exp \left[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y) J_{n-1}^{(2)}(t,y) - W_{a_1}^m(t,y) - a_1(t,t) J_{m-1}^{(1)}(t,y) \right] \times \\
& \quad \times \left(\varphi_1(t) + \int_0^y \frac{f_1(t,s)}{(t^2-s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(t,s) + a_1(t,t) J_{m-1}^{(1)}(t,s) \right] ds \right) dt. \quad (3.8.9)
\end{aligned}$$

Учитывая, что левая часть равенства (3.8.9) не зависит от переменной x , выводится следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^p} \exp \left[W_{b_1}^n(x,y) - b_1(y,y) J_{n-1}^{(2)}(x,y) \right] \right\} - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{b_1}^n(x,y) - b_1(y,y) J_{n-1}^{(2)}(x,y) - W_{a_1}^m(x,y) - a_1(x,x) J_{m-1}^{(1)}(x,y) \right] \times \right. \\
& \quad \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x,s)}{(x^2-s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x,s) + a_1(x,x) J_{m-1}^{(1)}(x,s) \right] ds \right) \Bigg\} = \\
& = \frac{b_2(0,y)}{(-y^2)^p} \exp \left[W_{b_1}^n(x,y) - b_1(y,y) J_{n-1}^{(2)}(x,y) - W_{a_1}^m(x,y) - \right. \\
& \quad \left. - a_1(x,x) J_{m-1}^{(1)}(x,y) \right] (\varphi_1(x) + \\
& \quad + \int_0^y \frac{f_1(x,s)}{(x^2-s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x,s) + a_1(x,x) J_{m-1}^{(1)}(x,s) \right] ds \Bigg). \quad (3.8.10)
\end{aligned}$$

С учётом условия (3.8.10) преобразуем последнее слагаемое в левой части равенства (3.8.9). В результате для функции $\psi_1(y)$ выводится следующее обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\psi_1'(y) + \frac{b_2(0, y)}{(-y^2)^p} \psi_1(y) = \frac{f_2(0, y)}{(-y^2)^p}. \quad (3.8.11)$$

Когда $p = 2k$ – четное натуральное число

$$\psi_1'(y) + \frac{b_2(0, y)}{y^{4k}} \psi_1(y) = \frac{f_2(0, y)}{y^{4k}}. \quad (3.8.12)$$

Решение уравнения (3.8.12) запишем в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \exp[-W_{b_2}^{4k}(0, y) + b_2(0, 0)W_{4k-1}(y)] \times \\ &\times \left(c_{15} + \int_0^y \frac{f_2(0, s)}{s^{4k}} \exp[W_{b_2}^{4k}(0, s) - b_2(0, 0)W_{4k-1}(s)] ds \right) \equiv \\ &\equiv N_1(c_{15}, f_2(0, y)), \end{aligned} \quad (3.8.13)$$

где

$$W_{b_2}^{4k}(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^{4k}} ds, \quad W_{4k-1}(y) = \frac{1}{(4k-1)y^{4k-1}},$$

c_{15} – произвольная постоянная.

Дифференцируя равенство (3.8.10) и выполнив необходимые упрощения, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} &((x^2 - y^2)^{m+n} b_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{p+n} a_1(x, y)) \times \\ &\times \exp[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, y)] \times \\ &\times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \exp[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, s)] ds \right) + \\ &+ (x^2 - y^2)^p f_1(x, y) = (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + \\ &+ (x^2 - y^2)^m b_1(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (3.8.14)$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow 0$ в равенстве (3.8.14), определим $\varphi_1(x)$ в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \frac{1}{x^{2(m+n)}b_2(x,0) - x^{2(p+n)}a_1(x,0)} \times \\ &\times \left[x^{2(m+n+p)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \Big|_{y=0} + x^{2m}b_1(x,0)f_2(x,0) - x^{2p}f_1(x,0) \right] \equiv \\ &\equiv G_1(x) \quad \left(x^{2(p+n)}a_1(x,0) \neq x^{2(m+n)}b_2(x,0) \right). \quad (3.8.15)\end{aligned}$$

В результате проведённого исследования доказана

Теорема 3.8.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $b_1(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), b_2(x,y) \in C_x^1(\bar{D}), f_2(x,y) \in C_x^1(\bar{D}), a_1(x,y), c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\bar{D});$
- 2) $c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0;$
- 3) $b_1(y,y) > 0, a_1(x,x) > 0, b_2(0,0) > 0;$
- 4) $b_1(x,y) - b_1(y,y) = o((x-y)^{\beta_1}), \beta_1 > n-1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_1(x,y) - b_1(y,y) = o((x+y)^{\beta_2}), \beta_2 > n-1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x-y)^{\alpha_1}), \alpha_1 > m-1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_1(x,y) - a_1(x,x) = o((x+y)^{\alpha_2}), \alpha_2 > m-1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b_2(0,y) - b_2(0,0)| \leq H_1 y^{\mu_1}, H_1 = \text{const}, \mu_1 > 4k-1;$
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x,y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x,y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D,$
 б) $[(x^2 - y^2)^{m+n}b_2(x,y) - (x^2 - y^2)^{p+n}a_1(x,y)] \times$
 $\times \exp \left[-W_{a_1}^m(x,y) - a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,y) \right] \times$
 $\times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x,s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x,s) + a_1(x,x)J_{m-1}^{(1)}(x,s) \right] ds \right) +$
 $+(x^2 - y^2)^p f_1(x,y) + (x^2 - y^2)^p =$

$$= (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + (x^2 - y^2)^m b_1(x,y) f_2(x,y) \text{ в } D;$$

$$6) f_1(x, y) = o \left(\exp \left[-a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (x - y)^{\lambda_1} \right), \lambda_1 > m + n - 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$f_1(x, y) = o \left(\exp \left[-a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (x + y)^{\lambda_2} \right), \lambda_2 > m + n - 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$f_2(0, y) = o(y^{\mu_1}), \mu_1 > 4k - 1.$$

Тогда всякое решение (2.2), которое принадлежит классу

$$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)) \text{ можно представить в виде (3.8.6) при } c_2(x, y) = 0, \quad (3.8.13)$$

и (3.8.15).

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то получим

$$u(0, y) = \psi_1(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b_2(0, 0) W_{4k-1}(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0, 0) W_{4k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{15}.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \right).$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] \right).$$

Замечание 3.8.1. Для системы уравнений (2.2) как и в теореме 3.8.1 при $p = 2k - 1, k = 1, 2, 3 \dots$ получено аналогичное утверждение.

При принятии второго уравнения системы (2.2) за базовое решение данного уравнения представляется в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \exp \left[-W_{b_2}^p(x, y) - b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] \times \\
&\times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^p} \exp \left[W_{b_2}^p(x, s) + b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, s) \right] ds \right) \equiv \\
&\equiv K_2(\varphi_2(x), f_2(x, y)), \quad (3.6.3)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
W_{b_2}^p(x, y) &= \int_0^y \frac{b_2(x, s) - b_2(x, x)}{(x^2 - s^2)^p} ds, \\
J_{p-1}^{(3)}(x, y) &= \frac{y}{2(p-1)x^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{p-1}}.
\end{aligned}$$

Далее, первое уравнение системы (2.2) представлено в виде (3.8.1). После введения новой неизвестной функции оно примет вид (3.8.2) и (3.8.3). Уравнение (3.8.2) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[W_{b_1}^n(x, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right] u(x, y) \right\} &= \\
&= \vartheta_1(x, y) \exp \left[W_{b_1}^n(x, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(2)}(x, y) \right]. \quad (3.8.16)
\end{aligned}$$

В равенстве (3.8.16), подставляя вместо $u(x, y)$ и $\vartheta_1(x, y)$ их значения из (3.6.3) и (3.8.4) соответственно, и требуя выполнения условия совместности (3.8.8), после соответствующих упрощений получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\varphi_2'(x) - \frac{b_1(x, 0)}{x^{2n}} \varphi_2(x) &= \exp \left[W_{b_2}^p(x, y) + b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, y) - W_{a_1}^m(x, y) - \right. \\
&\quad \left. - a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (\varphi_1(x) + \\
&\quad + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s)u(x, s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x)J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds - \\
&\quad - \frac{b_1(x, 0)}{x^{2n}} \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^p} \exp \left[W_{b_2}^p(x, s) + b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, s) \right] ds -
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f_2(x, s)}{(x^2 - s^2)^p} \exp \left[W_{b_2}^p(x, s) + b_2(x, x) J_{p-1}^{(3)}(x, s) \right] ds. \quad (3.8.17)$$

Учитывая, что левая часть равенства (3.8.17) не зависит от переменной y , следует:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{b_2}^p(x, y) + b_2(x, x) J_{p-1}^{(3)}(x, y) - W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \right. \\ & \quad \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s)u(x, s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds \right) \Big\} - \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \exp \left[W_{b_2}^p(x, y) + b_2(x, x) J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] \right\} = \\ & = \frac{b_1(x, 0)}{x^{2n}} \times \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \exp \left[W_{b_2}^p(x, y) + b_2(x, x) J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right]. \quad (3.8.18) \end{aligned}$$

Путём преобразования последнего слагаемого в равенстве (3.8.17) с учётом соотношения (3.8.18) выводится следующее уравнение для нахождения функции $\varphi_2(x)$:

$$\varphi_2'(x) + \frac{b_1(x, 0)}{x^{2n}} \varphi_2(x) = \varphi_1(x). \quad (3.8.19)$$

Дифференцируя равенство (3.8.18) и выполнив упрощения, приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2)^{m+n+p} \left((x^2 - y^2)^{-p} b_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-m} a_1(x, y) \right) \times \\ & \quad \times \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] (\varphi_1(x) + \\ & \quad + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s)u(x, s)}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds \Big) + \\ & \quad + (x^2 - y^2)^p f_1(x, y) + (x^2 - y^2)^p c_2(x, y)u(x, y) = \\ & = (x^2 - y^2)^m b_1(x, y) f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \text{ в } D. \quad (3.8.20) \end{aligned}$$

В равенстве (3.8.20), переходя к пределу при $y \rightarrow 0$, определим $\varphi_1(x)$ в виде

$$\varphi_1(x) = \frac{F_1(x)}{x^{2(m+n+p)}} - \frac{c_2(x, 0)\varphi_2(x)}{x^{2(m+n+p)}(x^{-2p}b_2(x, 0) - x^{-2m}a_1(x, 0))}, \quad (3.8.21)$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{x^{-2p}b_2(x, 0) - x^{-2m}a_1(x, 0)} \times \\ \times \left[x^{2m}b_1(x, 0)f_2(x, 0) + x^{2(m+n+p)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \Big|_{y=0} - x^{2p}f_1(x, 0) \right] \\ (x^{-2m}a_1(x, 0) \neq x^{-2p}b_2(x, 0)).$$

Уравнение (3.8.19) с учётом (3.8.21) примет вид:

$$\varphi_2'(x) + \frac{B_1(x, 0)}{x^{2(m+n+p)}} \varphi_2(x) = \frac{F_1(x)}{x^{2(m+n+p)}}, \quad (3.8.22)$$

где

$$B_1(x, 0) = x^{2(m+p)}b_1(x, 0) + c_2(x, 0).$$

Решение уравнения (3.8.22) запишем в виде

$$\varphi_2(x) = \exp \left[-W_{B_1}^{2(m+n+p)}(x, 0) + B_1(0, 0)W_{2(m+n+p)-1}(x) \right] \times \\ \left(c_{16} + \int_0^x \frac{F_1(t)}{t^{2(m+n+p)}} \exp \left[W_{B_1}^{2(m+n+p)}(t, 0) - B_1(0, 0)W_{2(m+n+p)-1}(t) \right] dt \right) \equiv \\ \equiv N_2(c_{16}, F_1(x)), \quad (3.8.23)$$

где

$$W_{B_1}^{2(m+n+p)}(x, 0) = \int_0^x \frac{B_1(t, 0) - B_1(0, 0)}{t^{2(m+n+p)}} dt, \\ W_{2(m+n+p)-1}(x) = \frac{1}{(2(m+n+p)-1)x^{2(m+n+p)-1}},$$

c_{16} — произвольная постоянная.

Итак, доказана

Теорема 3.8.2. Пусть в (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $b_1(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$
- 3) $b_2(x, x) < 0, B_1(0, 0) > 0;$
- 4) $b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x - y)^{\mu_1}), \mu_1 > p - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x + y)^{\mu_2}), \mu_2 > p - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|B_1(x, 0) - B_1(0, 0)| \leq H_1 x^{\mu_3}, H_1 = \text{const}, \mu_3 > 2(m + n + p) - 1;$
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^{m+n+p} \left((x^2 - y^2)^{-p} b_2(x, y) - (x^2 - y^2)^{-m} a_1(x, y) \right) \times$
 $\times \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, y) \right] \times$
 $\times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \frac{f_1(x, s) + c_2(x, s) K_2(\varphi_2(x), f_2(x, s))}{(x^2 - s^2)^{m+n}} \times \right.$
 $\times \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(1)}(x, s) \right] ds \Big) +$
 $+(x^2 - y^2)^p f_1(x, y) + (x^2 - y^2)^p c_2(x, y) K_2(\varphi_2(x), f_2(x, y)) =$
 $= (x^2 - y^2)^m b_1(x, y) f_2(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right)$ в D ;
- 6) $f_2(x, y) = o \left(\exp \left[-b_2(x, x) J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] (x - y)^{\lambda_1} \right), \lambda_1 > p - 1$
 в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_2(x, y) = o \left(\exp \left[-b_2(x, x) J_{p-1}^{(3)}(x, y) \right] (x + y)^{\lambda_2} \right), \lambda_2 > p - 1$
 в окрестности Γ_2^0 ,
 $F_1(x) = o \left(\exp \left[B_1(0, 0) W_{2(m+n+p)-1}(x) \right] x^{\lambda_3} \right), \lambda_3 > 2(m + n + p) - 1.$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (2.2), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формулам (3.6.3) и (3.8.23).

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{16}.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-b_2(x, x)J_{p-1}^{(3)}(x, y)\right]\right).$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

3.9. Постановка и решение задач с начальными данными для полученных интегральных представлений решений системы уравнений (2.1), (2.2)

В параграфе 3.9 рассматриваются постановка и решение задач с начальными условиями. Для решения поставленных задач будут использованы интегральные представления решений исследуемых систем (2.1) и (2.2).

Задача K_3^1 . Найти решение системы (2.1) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_1,$$

$p_1 = \text{const.}$

Задача K_3^2 . Найти решение системы (2.1) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[\frac{G_1(0)}{y} \right] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_2,$$

в котором p_2 — заданно известное постоянное.

Задача K_3^3 . При выполнении условий $m = n = 1, p \geq 2$. Найти решение системы (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_3,$$

в котором предполагается, что p_3 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_3^4 . Найти решение системы (2.1) $m = n = 1, p \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_1(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_4,$$

$p_4 = \text{const.}$

Задача K_3^5 . Найти решение системы (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_5,$$

в котором p_5 — заданно известное постоянное.

Задача K_3^6 . При выполнении условий $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$. Найти решение системы (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_1(0,0)W_{4k-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_6,$$

в котором предполагается, что p_6 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_3^7 . Найти решение системы (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_7,$$

$p_7 = \text{const.}$

Задача K_3^8 . Найти решение системы (2.1) $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[B_1(y,y)W_{2(m+n+p)-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_8,$$

в котором p_8 — заданно известное постоянное.

Задача K_3^9 . Найти решение системы (2.2) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_9,$$

$p_9 = \text{const.}$

Задача K_3^{10} . Найти решение системы (2.2) $m = n = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_3(0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_{10},$$

в котором p_{10} — заданно известное постоянное.

Задача K_3^{11} . При выполнении условий $m = n = 1, p \geq 2$. Найти решение системы (2.2), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_{4k-3}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_{11},$$

в котором предполагается, что p_{11} — есть заданное известное постоянное.

Задача K_3^{12} . Найти решение системы (2.2) $m = n = 1, p \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-B_1(0,0)W_1(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_{12},$$

$p_{12} = \text{const.}$

Задача K_3^{13} . Найти решение системы (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_{13},$$

в котором p_{13} — заданно известное постоянное.

Задача K_3^{14} . При выполнении условий $m \geq 2, n \geq 2, p = 1$. Найти решение системы (2.2), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-B_1(0,0)W_{2(m+n)+1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_{14},$$

в котором предполагается, что p_{14} — есть заданное известное постоянное.

Задача K_3^{15} . Найти решение системы (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0,0)W_{4k-1}(y)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_{15},$$

$p_{15} = \text{const.}$

Задача K_3^{16} . Найти решение системы (2.2) $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-B_1(0,0)W_{2(m+n+p)-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_{16},$$

в котором p_{16} — заданно известное постоянное.

Решение задачи K_3^1 . Для решения задачи K_3^1 используем интегральное представление, заданное формулами (3.1.6) и (3.1.12), а также его свойства. На основании этих свойств и условий задачи K_3^1 получаем

$$c_1 = p_1. \quad (3.9.1)$$

Подставляя найденное значение c_1 из (3.9.1) в (3.1.6) и (3.1.12) получим решение задачи K_3^1 .

Итак, доказана следующая

Теорема 3.9.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.1.1. Тогда у задачи K_3^1 есть единственное решение, определяющее формулами (3.1.6), (3.1.12) и (3.9.1).*

Решение задачи K_3^2 . Для решения задачи K_3^2 используем интегральное представление, заданное формулами (3.1.16) и (3.1.24), а также его свойства. На основании этих свойств и условий задачи K_3^2 получаем

$$c_2 = p_2. \quad (3.9.2)$$

Подставляя найденное значение c_2 из (3.9.2) в (3.1.16) и (3.1.24), получим решение задачи K_3^2 .

Итак, доказана

Теорема 3.9.2. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.1) выполнены условия теоремы 3.1.2. Тогда у задачи K_3^2 существует единственное решение, находящееся соотношениями (3.1.16), (3.1.24) и (3.9.2).*

Для однозначной разрешимости поставленных задач $K_3^3 - K_3^{16}$ справедливы следующие

Теорема 3.9.3. *При выполнении условий теоремы 3.2.1 для системы (2.1) у задачи K_3^3 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.1.6) и (3.2.1), в которых $c_3 = p_3$.*

Теорема 3.9.4. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.2.2. Тогда у задачи K_3^4 есть единственное решение, определяющее формулами (3.2.3) и (3.2.4), в которых $c_4 = p_4$.*

Теорема 3.9.5. При выполнении условий теоремы 3.3.1 для системы (2.1) у задачи K_3^5 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.3.1) и (3.3.2), в которых $c_5 = p_5$.

Теорема 3.9.6. Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.3.2. Тогда у задачи K_3^6 есть единственное решение, определяющее формулами (3.1.16) и (3.3.4), при этом $c_6 = p_6$.

Теорема 3.9.7. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.1) выполнены условия теоремы 3.4.1. Тогда у задачи K_3^7 существует единственное решение, находящееся соотношениями (3.3.1) и (3.4.1), при этом $c_7 = p_7$.

Теорема 3.9.8. При выполнении условий теоремы 3.4.2 для системы (2.1) у задачи K_3^8 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.2.3) и (3.4.3), в которых $c_8 = p_8$.

Теорема 3.9.9. Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.5.1. Тогда у задачи K_3^9 есть единственное решение, определяющее формулами (3.5.1) и (3.5.2), при этом $c_9 = p_9$.

Теорема 3.9.10. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.2) выполнены условия теоремы 3.5.2. Тогда у задачи K_3^{10} существует единственное решение, находящееся соотношениями (3.5.4) и (3.5.5), при этом $c_{10} = p_{10}$.

Теорема 3.9.11. При выполнении условий теоремы 3.6.1 для системы (2.2) у задачи K_3^{11} существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.5.1) и (3.6.1), при этом $c_{11} = p_{11}$.

Теорема 3.9.12. Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.6.2. Тогда у задачи K_3^{12} есть единственное решение, определяющее формулами (3.6.3) и (3.6.4), при этом $c_{12} = p_{12}$.

Теорема 3.9.13. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.2) выполнены условия теоремы 3.7.1. Тогда у задачи K_3^{13} существует

единственное решение, находящееся соотношениями (3.7.1) и (3.7.2), при этом $c_{13} = p_{13}$.

Теорема 3.9.14. При выполнении условий теоремы 3.7.2 для системы (2.2) у задачи K_3^{14} существует единственное решение, которое находится по соотношениям (3.5.4) и (3.7.4), в которых $c_{14} = p_{14}$.

Теорема 3.9.15. Предположим, что выполнены все условия теоремы 3.8.1. Тогда у задачи K_3^{15} есть единственное решение, определяющее формулами (3.8.6) и (3.8.13), при этом $c_{15} = p_{15}$.

Теорема 3.9.16. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (2.2) выполнены условия теоремы 3.8.2. Тогда у задачи K_3^{16} существует единственное решение, находящееся соотношениями (3.6.3) и (3.8.23), при этом $c_{16} = p_{16}$.

ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Четвёртая глава посвящена исследованию системы (3.1), включающей одно гиперболическое уравнение второго порядка и два уравнения первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями, которые взаимосвязаны через общую неизвестную функцию. В рамках исследования рассматриваемой системы получены выражения, описывающие многообразие её решений с использованием одной произвольной константой, а также выполнен анализ задач с начальными условиями $K_4^1 - K_4^{12}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{c_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} u = \frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k}, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где $a_i(x, y), b_i(x, y), c_1(x, y), f_j(x, y), i = \overline{1, 2}, j = \overline{1, 3}$ — являются заданными функциями в области $D, m, n, p, k \in N, u(x, y)$ — искомая функция.

4.1. Интегральные представления решений для системы (3.1)

при $m = n = p = k = 1$

Принимая первое уравнение системы (3.1) за основное. При этом первое уравнение (3.1) выразим в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) u = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^2}, \quad (4.1.1)$$

где

$$c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0.$$

Применяя формулу

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} u = \vartheta_1(x, y) \quad (4.1.2)$$

и вводя новую неизвестную функцию, равенство (4.1.1) приводится к задаче решения дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{x^2 - y^2} \vartheta_1 = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^2}. \quad (4.1.3)$$

Решение уравнения (4.1.3) согласно [124], запишем в виде

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, y) = & \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b(y,y)}{2y}} \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] (\psi_1(y) + \\ & + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b(y,y)}{2y}} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] dt \Bigg), \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

где

$$W_{b_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

При решении уравнения (4.1.2) функция $u(x, y)$ представляется через $\vartheta_1(x, y)$

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{-\frac{a_1(x,x)}{2x}} \times \\ & \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \vartheta_1(x, \tau) \exp[W_{a_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x+\tau}{\tau-x} \right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}} d\tau \right), \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

где

$$W_{a_1}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_1(x, \tau) - a_1(x, x)}{x^2 - \tau^2} d\tau.$$

В силу (4.1.4) и при $c_2(x, y) = 0$ равенство (4.1.5) сводится к виду

$$u(x, y) = \exp[-W_{a_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{-\frac{a_1(x,x)}{2x}} \left\{ \varphi_1(x) + \int_0^y \exp[W_{a_1}^1(x, \tau) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -W_{b_1}^1(x, \tau) \left| \frac{x+\tau}{\tau-x} \right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}} \left| \frac{x+\tau}{x-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}} \left(\psi_1(\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, \tau)}{(t^2 - \tau^2)^2} \times \right. \\
& \left. \times \exp[W_{b_1}^1(t, \tau)] \left| \frac{t+\tau}{t-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}} dt \right) d\tau \Bigg\} \equiv T_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x, y)). \quad (4.1.6)
\end{aligned}$$

Таким образом, второе уравнение (3.1) представим в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] u(x, y) \right\} = \\
& = \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right], \quad (4.1.7)
\end{aligned}$$

где

$$W_{a_2}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

Подставив выражение для $u(x, y)$, полученное в (4.1.6), в (4.1.7) и при выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в области } D, \quad (4.1.8)$$

а также применяя операцию дифференцирования к выражению (4.1.7) с последующим проведением необходимых алгебраических преобразований, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
& \varphi_1'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right] - \\
& - \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \int_0^y \exp[W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x+\tau}{\tau-x} \right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}} \left| \frac{x+\tau}{x-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}} \times \\
& \times \left(\psi_1(\tau) + \int_0^x \frac{f_1(t, \tau) + c_2(t, \tau)u(t, \tau)}{(t^2 - \tau^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, \tau)] \left| \frac{t+\tau}{t-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}} dt \right) d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \exp[W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x+\tau}{\tau-x} \right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}} \left| \frac{x+\tau}{x-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}} (\psi_1(\tau) + \\
& + \int_0^x \frac{f_1(t, \tau) + c_2(t, \tau)u(t, \tau)}{(t^2 - \tau^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, \tau)] \left| \frac{t+\tau}{t-\tau} \right|^{\frac{b_1(\tau,\tau)}{2\tau}} dt) d\tau. \quad (4.1.9)
\end{aligned}$$

Учитывая условие независимости левой части равенства (4.1.9) от переменной y , следует:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right] \right\} - \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp[W_{a_1}^1(x, \tau) - W_{b_1}^1(x, \tau)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}} \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}} \times \right. \\
& \times \left. \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}} dt \right) \right\} = \\
& = \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \exp[W_{a_1}^1(x, y) - W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{\frac{a_1(x,x)}{2x}} \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}} (\psi_1(y) + \\
& + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y) - \frac{b_1(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right|] dt) \Bigg). \quad (4.1.10)
\end{aligned}$$

Применяя условие (4.1.10) к последнему слагаемому равенства (4.1.9), для функции $\varphi_1(x)$ выводится следующее дифференциальное уравнение:

$$\varphi_1'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_2(x, 0)}{x^2}. \quad (4.1.11)$$

Согласно [124], решение уравнения (4.1.11) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \exp[-W_{a_2}^1(x, 0) + a_2(0, 0)W_1(x)] \times \\
& \times \left(c_1 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^2} \exp[W_{a_2}^1(t, 0) - a_2(0, 0)W_1(t)] dt \right) \equiv \\
& \equiv N_1(c_1, f_2(x, 0)), \quad (4.1.12)
\end{aligned}$$

где

$$W_{a_2}^1(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_1 — произвольная постоянная.

Применяя дифференцирование к равенству (4.1.10) и упрощая выражение, имеем:

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2)(a_2(x, y) - b_1(x, y)) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ & \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) = \\ & = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) + f_2(x, y) - f_1(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

В дальнейшем третье уравнение системы (3.1) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{b_2}^1(x, y) + \frac{b_2(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right] u(x, y) \right\} = \\ & = \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{b_2}^1(x, y) + \frac{b_2(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right], \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

где

$$W_{b_2}^1(x, y) = \int_0^y \frac{b_2(x, \tau) - b_2(x, x)}{x^2 - \tau^2} d\tau.$$

Согласно (4.1.6), после дифференцирования равенства (4.1.14) и выполнения необходимых упрощений при $a_1(x, y) = b_2(x, y)$, имеем:

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \times \right. \\ & \left. \times \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) = f_3(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

При $x \rightarrow 0$, переходя к пределу в равенстве (4.1.15), определим функцию $\psi_1(y)$ следующим образом:

$$\psi_1(y) = -\frac{f_3(0,y)}{y^2}. \quad (4.1.16)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.1.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1) $m = n = p = k = 1$, и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) \ a_1(x,y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_1(x,y), c_1(x,y), \ f_1(x,y), \\ f_3(x,y) \in C(\bar{D}), f_2(x,y) \in C_y^1(\bar{D});$$

$$2) \ c_1(x,y) = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x,y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x,y)b_1(x,y);$$

$$3) \ \frac{a_1(x,x)}{2x} + \frac{b_1(y,y)}{2y} < 1 \quad \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_1(x,x)}{2x} + \frac{b_1(y,y)}{2y} > -1 \quad \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$a_2(0,0) > 0;$$

$$4) \ |a_1(x,y) - a_1(x,x)| \leq H_1|x - y|^{\alpha_1}, \ H_1 = \text{const}, 0 < \alpha_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a_1(x,y) - a_1(x,x)| \leq H_2|x + y|^{\alpha_2}, \ H_2 = \text{const}, 0 < \alpha_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b_1(x,y) - b_1(y,y)| \leq H_3|x - y|^{\beta_1}, \ H_3 = \text{const}, 0 < \beta_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|b_1(x,y) - b_1(y,y)| \leq H_4|x + y|^{\beta_2}, \ H_4 = \text{const}, 0 < \beta_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_5x^{\gamma_1}, \ H_5 = \text{const}, \gamma_1 > 1;$$

$$5) \ a) \ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x,y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x,y)}{x^2 - y^2} \right) \quad \text{в } D,$$

$$b) \ (x^2 - y^2)(a_2(x,y) - b_1(x,y)) \exp[-W_{b_1}^1(x,y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y,y)}{2y}} \times$$

$$\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) =$$

$$= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) + f_2(x, y) - f_1(x, y) \text{ в } D,$$

$$c) (x^2 - y^2) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times$$

$$\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[w_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) =$$

$$= f_3(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > 1 - \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > 1 + \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]x^{\mu_1}), \mu_1 > 1.$$

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу

$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (4.1.6), (4.1.12) и (4.1.16).

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то будем иметь:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_1.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]).$$

При принятии второго уравнения системы (3.1) за исходное, решение данного уравнения запишем в виде

$$u(x, y) = \exp[-W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times$$

$$\times \left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt \right) \equiv$$

$$\equiv T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)), \quad (4.1.17)$$

где

$$W_{a_2}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

В дальнейшем первое уравнение системы (3.1) примем в виде (4.1.1). После введения новой неизвестной функции оно преобразуется в уравнения (4.1.2) и (4.1.3). Уравнение (4.1.2) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right] u(x, y) \right\} =$$

$$= \vartheta_1(x, y) \exp \left[W_{a_1}^1(x, y) + \frac{a_1(x, x)}{2x} \ln \left| \frac{x+y}{y-x} \right| \right]. \quad (4.1.18)$$

В равенстве (4.1.18), заменяя $u(x, y)$ и $\vartheta_1(x, y)$ значениями из (4.1.17) и (4.1.4) соответственно и учитывая условие совместности (4.1.8), после ряда преобразований выводится следующее выражение:

$$\psi_2'(y) - \frac{a_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) =$$

$$= \exp[W_{a_2}^1(x, y) - W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times$$

$$\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t-y}{t+y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) +$$

$$+ \frac{a_2(0, y)}{y^2} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(t, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right| \right] dt -$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(t, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right| \right] dt. \quad (4.1.19)$$

Учитывая, что левая часть (4.1.19) является независимой от переменной x , следует:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp[W_{a_2}^1(x, y) - W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times \right. \\ & \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) \Bigg\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] \right\} = \\ & = \frac{a_1(0, y)}{y^2} \cdot \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

С учётом соотношения (4.1.20) и преобразования равенства (4.1.19) выводится уравнение для нахождения $\psi_2(y)$:

$$\psi_2'(y) - \frac{a_1(0, y)}{y^2} \psi_2(y) = \psi_1(y). \quad (4.1.21)$$

Далее, дифференцируя равенство (4.1.20), после упрощения при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ приходим к равенству

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) f_2(x, y) = f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y) \text{ в } D. \quad (4.1.22)$$

В дальнейшем третье уравнение системы (3.1) примем в виде (4.1.14). С учётом условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D \quad (4.1.23)$$

и дифференцирования в соответствии с (4.1.17), после ряда преобразований выводится следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_2'(y) - \frac{b_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) &= \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] + \\ &+ \frac{b_2(0, y)}{y^2} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(t, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right| \right] dt - \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(t, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{t+y}{t-y} \right| \right] dt. \quad (4.1.24)$$

В силу независимости левой части (4.1.24) от x , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right] \right\} = \\ & = - \frac{b_2(0, y)}{y^2} \cdot \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) - \frac{a_2(y, y)}{2y} \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right| \right]. \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Применяя условие (4.1.25) к последнему слагаемому равенства (4.1.24), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения $\psi_2(y)$:

$$\psi_2'(y) - \frac{b_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) = - \frac{f_3(0, y)}{y^2}. \quad (4.1.26)$$

Решение уравнения (4.1.26) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \psi_2(y) = \exp[W_{b_2}^2(0, y) - b_2(0, 0)W_1(y)](c_2 - \\ & - \int_0^y \frac{f_3(0, s)}{s^2} \exp[-W_{b_2}^2(0, s) + b_2(0, 0)W_1(s)] ds) \equiv N_2(c_2, f_3(0, y)), \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

где

$$W_{b_2}^2(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_2 — произвольная постоянная.

Теперь дифференцируя равенство (4.1.25), после упрощения получим:

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x, y)f_3(x, y) = \\ & = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)f_2(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.1.2. Пусть в (3.1) $m = n = p = k = 1$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$,
 $b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0$;
- 3) $\frac{a_2(y, y)}{2y} > 0$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $\frac{a_2(y, y)}{2y} < 0$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $b_2(0, 0) < 0$;
- 4) $|a_2(x, y) - a_2(y, y)| \leq H_1|x - y|^{p_1}$, $H_1 = \text{const}$, $0 < p_1 < 1$
 в окрестности Γ_1^0 ,
 $|a_2(x, y) - a_2(y, y)| \leq H_2|x + y|^{p_2}$, $H_2 = \text{const}$, $0 < p_2 < 1$
 в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_3y^{\mu_1}$, $H_3 = \text{const}$, $\mu_1 > 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в D ,
 б) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)f_2(x, y) = f_1(x, y) +$
 $+ c_2(x, y)T_2(\psi_2(y), f_2(x, y))$ при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ в D ,
 в) $(x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x, y)f_3(x, y)$ в D ;
- 6) $f_2(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1})$, $\lambda_1 > -\frac{a_2(y, y)}{2y}$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2})$, $\lambda_2 > \frac{a_2(y, y)}{2y}$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_3(0, y) = o(\exp[-b_2(0, 0)W_1(y)]y^{\mu_2})$, $\mu_2 > 1$.

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формулам (4.1.17) и (4.1.27).

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0, y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[-b_2(0,0)W_1(y)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_2.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$ и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[-b_2(0,0)W_1(y)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a_2(y,y)}{2y}}\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ окрестности } \Gamma_2^0.$$

При условии, что третье уравнение (3.1) является базовым, решение данного уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[-W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{-\frac{b_2(x,x)}{2x}} \times \\ &\times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_3(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{s-x} \right|^{\frac{b_2(x,x)}{2x}} ds \right) \equiv \\ &\equiv T_3(\varphi_2(x), f_3(x, y)), \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

где

$$W_{b_2}^1(x, y) = \int_0^y \frac{b_2(x, s) - b_2(x, x)}{x^2 - s^2} ds.$$

Далее первое уравнение системы (3.1) примем в виде (4.1.1). После введения новой неизвестной функции оно записывается как (4.1.2) и (4.1.3). Подставляя в равенство (4.1.18) значения $u(x, y)$ и $\vartheta_1(x, y)$ из (4.1.6) и (4.1.4) соответственно и предполагая $a_1(x, y) = b_2(x, y)$, после преобразований получаем выражение:

$$\begin{aligned} & \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ & \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t-y}{t+y} \right|^{-\frac{b(y, y)}{2y}} dt \right) = \\ & = f_3(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.1.30)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (3.1), представленное в форме (4.1.7). При подстановке $u(x, y)$ из (4.1.6) и с учётом условия (4.1.23), после ряда преобразований выводится:

$$\begin{aligned} \varphi_2'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_2(x) &= \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} - \\ &+ \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \int_0^y \frac{f_3(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{s-x} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} ds - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f_3(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{s-x} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} ds. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Из условия, что левая часть (4.1.31) является независимой от переменной y , выводится:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} \right\} = \\ & = \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \cdot \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}}. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Применяя условие (4.1.32) к последнему слагаемому равенства (4.1.31), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее $\varphi_2(x)$:

$$\varphi_2'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_2(x) = \frac{f_2(x, 0)}{x^2}. \quad (4.1.33)$$

Решение уравнения (4.1.33) запишем в виде

$$\varphi_2(x) = \exp[-W_{a_2}^2(x, 0) + a_2(0, 0)W_1(x)](c_3 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^2} \exp[W_{a_2}^2(t, 0) - a_2(0, 0)W_1(t)] dt) \equiv N_3(c_3, f_2(x, 0)), \quad (4.1.34)$$

где

$$W_{a_2}^2(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_3 — произвольная постоянная.

Далее, дифференцируя равенство (4.1.32) и упрощая результат, выводится:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x, y)f_3(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b_2(x, y)f_2(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.1.3. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1) $m = n = p = k = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $b_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $f_1(x, y) \in C(\bar{D})$, $f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0$;
- 3) $\frac{b_2(x, x)}{2x} < 0$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $\frac{b_2(x, x)}{2x} > 0$ в окрестности Γ_2^0 ,

$$a_2(0,0) > 0;$$

$$4) |b_2(x, y) - b_2(x, x)| \leq H_1 |x - y|^{k_1}, \quad H_1 = \text{const}, 0 < k_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|b_2(x, y) - b_2(x, x)| \leq H_2 |x + y|^{k_2}, \quad H_2 = \text{const}, 0 < k_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_3 x^{p_1}, \quad H_3 = \text{const}, \quad p_1 > 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$b) \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x + y}{x - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} (\psi_1(y) +$$

$$+ \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) T_3(\varphi_2(t), f_3(t, y))}{(t^2 - y^2)^2} \exp[-w_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t - y}{t + y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \Bigg) =$$

$$= f_3(x, y), \text{ при } a_1(x, y) = b_2(x, y) \text{ в } D,$$

$$c) (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x, y) f_3(x, y) =$$

$$= (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b_2(x, y) f_2(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) f_3(x, y) = o((x - y)^{p_2}), \quad p_2 > \frac{b_2(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_3(x, y) = o((x + y)^{p_3}), \quad p_3 > -\frac{b_2(x, x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]x^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 1.$$

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу

$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (4.1.29) и (4.1.34).

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_3.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[a_2(0,0)W_1(x)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{b_2(x,x)}{2x}}\right) \text{ при } \frac{b_2(x,x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{b_2(x,x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{b_2(x,x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{y-x}\right|^{-\frac{b_2(x,x)}{2x}}\right) \text{ при } \frac{b_2(x,x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

4.2. Интегральные представления решений для системы (3.1)

при $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$

Если первым уравнением системы (3.1) считать исходное, то с применением схемы из пункта 3.1.1 выводится следующая

Теорема 4.2.1. Пусть в (3.1) $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_1(x, y),$$

$$c_1(x, y), f_1(x, y), f_3(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) c_1(x, y) = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y) b_1(x, y);$$

$$3) \frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} < 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_1(x, x)}{2x} + \frac{b_1(y, y)}{2y} > -1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$a_2(0, 0) > 0;$$

$$4) |a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_1 |x - y|^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \alpha_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a_1(x, y) - a_1(x, x)| \leq H_2 |x + y|^{\alpha_2}, \quad H_2 = \text{const}, \quad 0 < \alpha_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_3 |x - y|^{\beta_1}, \quad H_3 = \text{const}, \quad 0 < \beta_1 < 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$|b_1(x, y) - b_1(y, y)| \leq H_4 |x + y|^{\beta_2}, \quad H_4 = \text{const}, \quad 0 < \beta_2 < 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_5 x^{\gamma_1}, \quad H_5 = \text{const}, \quad \gamma_1 > 2p - 1;$$

$$5) \quad a) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D,$$

$$\begin{aligned} b) \quad & (x^2 - y^2)^{p+2} \frac{a_2(x, y) - b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{p+1}} \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ & \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) = \\ & = (x^2 - y^2)^{p+2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + (x^2 - y^2) a_1(x, y) f_2(x, y) - \\ & \quad - (x^2 - y^2)^p f_1(x, y) \in D, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & (x^2 - y^2)^k \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} \times \\ & \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt \right) = \\ & = f_3(x, y) \in D; \end{aligned}$$

$$6) \quad f_1(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 > 1 - \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_1(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \quad \lambda_2 > 1 + \frac{b_1(y, y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(x^{\gamma_2}), \quad \gamma_2 > 2p - 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле (4.1.6).

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \exp[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \times \\ &\times \left(c_4 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0)W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv \\ &\equiv N_1(c_4, f_2(x, 0)), \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

$$\psi_1(y) = \frac{f_3(0, y)}{(-y^2)^k}, \quad (4.2.2)$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_4 — произвольная постоянная.

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_4.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

Считая второе уравнение (3.1) исходным и применяя приведённую выше схему, имеем

Теорема 4.2.2. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1) $m = n = 1$, $p \geq 2$, $k \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

$$1) \ a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}),$$

$$f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ b_1(x, y), \ c_1(x, y), \ f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_1(x, y) = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y);$$

- 3) $a_2(y, y) > 0, b_2(0, 0) > 0$;
- 4) $a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x - y)^{\mu_1}), \mu_1 > p - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x + y)^{\mu_2}), \mu_2 > p - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_1 y^{\gamma_1}, H_1 = \text{const}, \gamma_1 > 4l - 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right)$ в D ,
б) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + a_1(x, y)f_2(x, y) = (x^2 - y^2)^{-2} f_1(x, y)$
при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ в D ,
в) $(x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) + a_2(x, y)f_3(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_2(x, y)f_2(x, y)$ в D ;
- 6) $f_2(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > p - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_2(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > p - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_3(0, y) = o(y^{\lambda_3}), \lambda_3 > 4l - 1$.

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде

$$u(x, y) = \exp \left[-W_{a_2}^p(x, y) + a_2(y, y)J_{p-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{(t^2 - y^2)^p} \exp \left[W_{a_2}^p(t, y) - a_2(y, y)J_{p-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) \equiv \equiv T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)), \quad (4.2.3)$$

где

$$\psi_2(y) = \exp \left[-W_{b_2}^{4l}(0, y) + b_2(0, 0)W_{4l-1}(y) \right] \times \left(c_2 + \int_0^y \frac{f_3(0, \tau)}{\tau^{4l}} \exp \left[W_{b_2}^{4l}(0, \tau) - b_2(0, 0)W_{4l-1}(\tau) \right] d\tau \right) \equiv \equiv N_2(c_5, f_3(0, y)), \quad (4.2.4)$$

$$W_{a_2}^p(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{(t^2 - y^2)^p} dt,$$

$$J_{p-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(p-1)y^2(x^2 - y^2)^{p-1}} + \frac{2p-3}{2(p-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{p-1}},$$

$$W_{b_2}^{4l}(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, \tau) - b_2(0, 0)}{\tau^{4k}} d\tau, \quad W_{4l-1}(y) = \frac{1}{(4l-1)y^{4l-1}},$$

c_5 — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0, y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b_2(0, 0)W_{4l-1}(y)])$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0, 0)W_{4l-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_5.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(1)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_2(y, y)J_{p-1}^{(1)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Замечание 4.2.1. Получены аналогичные результаты при $p = 2l - 1$.

Рассмотрим третье уравнение (3.1) при $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$ в качестве базового. С применением схемы, приведённой выше, выводится следующий результат:

Теорема 4.2.3. Пусть в (3.1) $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$. Кроме того, предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

$$1) \ a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \ b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), \\ f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), \ a_1(x, y), \ b_1(x, y), \ c_1(x, y), \ f_1(x, y) \in C(\bar{D});$$

$$2) \ c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$$

$$3) \ b_2(x, x) < 0, \ a_2(0, 0) > 0;$$

$$4) \ b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x - y)^{\mu_1}), \ \mu_1 > k - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x + y)^{\mu_2}), \ \mu_2 > k - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}, \ H_1 = \text{const}, \ \gamma_1 > 2p - 1;$$

$$5) \ a) \ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \text{ в } D,$$

$$b) \ (x^2 - y^2)^k \exp[-W_{b_1}^1(x, y)] \left| \frac{x + y}{x - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} (\psi_1(y) + \\ + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) T_3(\varphi_2(t), f_3(t, y))}{(t^2 - y^2)^2} \exp[W_{b_1}^1(t, y)] \left| \frac{t + y}{t - y} \right|^{\frac{b_1(y, y)}{2y}} dt) = \\ = f_3(x, y) \text{ при } a_1(x, y) = b_2(x, y) \text{ в } D,$$

$$c) \ (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_2(x, y) f_2(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) + a_2(x, y) f_3(x, y) \text{ в } D;$$

$$6) \ f_3(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1}), \ \lambda_1 > k - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_3(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2}), \ \lambda_2 > k - 1 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x, 0) = o(x^{\theta_1}), \ \theta_1 > 2p - 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле

$$u(x, y) = \exp \left[-W_{b_2}^k(x, y) - b_2(x, x) J_{k-1}^{(2)}(x, y) \right] \times \\ \times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_3(x, \tau)}{(x^2 - \tau^2)^k} \exp \left[W_{b_2}^k(x, \tau) + b_2(x, x) J_{k-1}^{(2)}(x, \tau) \right] d\tau \right) \equiv \\ \equiv T_3(\varphi_2(x), f_3(x, y)), \quad (4.2.5)$$

где

$$\varphi_2(x) = \exp \left[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0) W_{2p-1}(x) \right] \times$$

$$\times \left(c_6 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0)W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv \\ \equiv N_3(c_6, f_2(x, 0)), \quad (4.2.6)$$

$$W_{b_2}^k(x, y) = \int_0^y \frac{b_2(x, \tau) - b_2(x, x)}{(x^2 - \tau^2)^k} d\tau,$$

$$J_{k-1}^{(2)}(x, y) = \frac{y}{2(k-1)x^2(x^2 - y^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)x^2} \int_0^y \frac{d\tau}{(x^2 - \tau^2)^{k-1}},$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_6 — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_6.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-b_2(x, x)J_{k-1}^{(2)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

4.3. Интегральные представления решений для системы (3.1)

при $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p = k = 1$

При условии, что первое уравнение системы (3.1) является исходным, представим его в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n}\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m}\right) u = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}, \quad (4.3.1)$$

где

$$c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) + a_1(x, y)b_1(x, y) = 0.$$

Рассмотрим равенство (4.3.1) и введём новую неизвестную функцию по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} u = \vartheta_1(x, y). \quad (4.3.2)$$

В этом случае задача сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} + \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \vartheta_1 = \frac{f_1(x, y) + c_2(x, y)u(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}. \quad (4.3.3)$$

В соответствии с [124], решение уравнения (4.3.3) принимает вид:

$$\vartheta_1(x, y) = \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right), \quad (4.3.4)$$

где

$$W_{b_1}^n(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{(t^2 - y^2)^n} dt,$$

$$J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(n-1)y^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{n-1}}.$$

Применяя решение уравнения (4.3.2), выражаем неизвестную $u(x, y)$ через $\vartheta_1(x, y)$

$$u(x, y) = \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] \times \\ \times \left(\varphi_1(x) + \int_0^y \vartheta_1(x, s) \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, s) \right] ds \right), \quad (4.3.5)$$

где

$$W_{a_1}^m(x, y) = \int_0^y \frac{a_1(x, s) - a_1(x, x)}{(x^2 - s^2)^m} ds, \\ J_{m-1}^{(2)}(x, y) = \frac{y}{2(m-1)x^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{m-1}}.$$

Равенство (4.3.5) в силу (4.3.4) при $c_2(x, y) = 0$ примет вид:

$$u(x, y) = \exp \left[-W_{a_1}^m(x, y) - a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] \{ \varphi_1(x) + \\ + \int_0^y \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, s) - W_{b_1}^n(x, s) + b_1(s, s)J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] \times \\ \times \left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t, s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, s) - b_1(s, s)J_{n-1}^{(1)}(t, s) \right] dt \right) ds \} \equiv \\ \equiv \Omega_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x, y)), \quad (4.3.6)$$

где

$$W_{a_1}^m(x, y) = \int_0^y \frac{a_1(x, s) - a_1(x, x)}{(x^2 - s^2)^m} ds, \quad W_{b_1}^n(x, y) = \int_0^x \frac{b_1(t, y) - b_1(y, y)}{(t^2 - y^2)^n} dt, \\ J_{n-1}^{(1)}(x, y) = \frac{x}{2(n-1)y^2(x^2 - y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)y^2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 - y^2)^{n-1}}, \\ J_{m-1}^{(2)}(x, y) = \frac{y}{2(m-1)x^2(x^2 - y^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)x^2} \int_0^y \frac{ds}{(x^2 - s^2)^{m-1}}.$$

Теперь второе уравнение (3.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} u(x, y) \right\} = \\ = \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}}, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

где

$$W_{a_2}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

В (4.3.7), заменяя $u(x, y)$, на значение из (4.3.6) и с учётом выполнения условия

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \text{ в области } D, \quad (4.3.8)$$

а также продифференцировав (4.3.7), после ряда преобразований выводится следующее выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_1}^m(x, y) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] - \\ - \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \int_0^y \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, s) - W_{b_1}^n(x, s) + \right. \\ \left. + b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] (\psi_1(s) + \\ + \int_0^x \frac{f_1(t, s) + c_2(t, s)u(t, s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, s) - b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(t, s) \right] dt) ds - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \exp \left[W_{a_1}^m(x, s) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, s) - W_{b_1}^n(x, s) + b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(x, s) \right] \times \\ \times \left(\psi_1(s) + \int_0^x \frac{f_1(t, s) + c_2(t, s)u(t, s)}{(t^2 - s^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, s) - b_1(s, s) J_{n-1}^{(1)}(t, s) \right] dt \right) ds. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

В силу независимости левой части (4.3.9) от переменной y , следует:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_1}^m(x, y) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[W_{a_1}^m(x, y) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) - W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (\psi_1(y) + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right\} - \\
& = \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \exp \left[W_{a_1}^m(x, y) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) - W_{b_1}^n(x, y) + \right. \\
& \quad \left. + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (\psi_1(y) + \\
& \quad \left. + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y)u(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right). \quad (4.3.10)
\end{aligned}$$

С учётом условия (4.3.10) и преобразования последнего слагаемого равенства (4.3.9), приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_1(x) = \frac{f_2(x, 0)}{x^2}. \quad (4.3.11)$$

Решение уравнения (4.3.11) запишем в виде

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(x) = \exp \left[-W_{a_2}^2(x, 0) + a_2(0, 0)W_1(x) \right] \times \\
& \times \left(c_7 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^2} \exp \left[W_{a_2}^2(t, 0) - a_2(0, 0)W_1(t) \right] dt \right) \equiv \\
& \equiv N_1(c_7, f_2(x, 0)), \quad (4.3.12)
\end{aligned}$$

где

$$W_{a_2}^2(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_7 — произвольная постоянная.

В равенстве (4.3.10), выполняя операцию дифференцирования, после упрощения при $c_2(x, y) = 0$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + \frac{a_1(x, y)f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+1}} &= \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} - \frac{b_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} \right) \times \\ &\times \exp[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(x, y)] \times \\ &\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(t, y)] dt \right) + \\ &+ \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^{m+n}}. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

В равенстве (4.3.13) при $x \rightarrow 0$, переходя к пределу, определим $\psi_1(y)$ в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(y) &= \frac{1}{y^m(a_2(0, y) - b_1(0, y))} \left[y^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) \right]_{x=0} + \\ &+ y^n a_1(0, y) f_2(0, y) - f_1(0, y) \quad (a_2(0, y) \neq b_1(0, y)). \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

Теперь третье уравнение (3.1) представим в виде (4.1.14). Дифференцируя его в силу (4.3.6), после некоторых упрощений при $a_1(x, y) = b_2(x, y)$, получим выражение

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) \exp[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(x, y)] \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y)J_{n-1}^{(1)}(t, y)] dt \right) = \\ = f_3(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

При $x \rightarrow 0$ и переходя к пределу в равенстве (4.3.15) функция $\psi_1(y)$ определяется в виде

$$\psi_1(y) = -\frac{f_3(0, y)}{y^2}. \quad (4.3.16)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.3.1. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1) $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p = k = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_1(x, y)$, $c_1(x, y)$, $f_1(x, y)$, $f_3(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) +$
 $+a_1(x, y)b_1(x, y) = 0$;
- 3) $a_1(x, x) < 0$, $b_1(y, y) < 0$, $a_2(0, 0) > 0$;
- 4) $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1})$, $\alpha_1 > m - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2})$, $\alpha_2 > m - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x - y)^{\beta_1})$, $\beta_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x + y)^{\beta_2})$, $\beta_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\mu_1}$, $H_1 = \text{const}$, $\mu_1 > 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2) f_1(x, y)$ при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ в D ,
 в) $(x^2 - y^2) \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \times$
 $\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[w_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) =$
 $= f_3(x, y)$ в D ;
- 6) $f_1(x, y) = o \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (x - y)^{\lambda_1} \right)$, $\lambda_1 > m + n - 1$
 в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_1(x, y) = o \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (x + y)^{\lambda_2} \right)$, $\lambda_2 > m + n - 1$
 в окрестности Γ_2^0 ,
 $f_2(x, 0) = o(\exp[a_2(0, 0)W_1(x)]x^{\mu_2})$, $\mu_2 > 1$.

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу

$C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (4.3.6), (4.3.12) и (4.3.16).

Полученное решение имеет ряд свойств. Ниже перечислим некоторые из них.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0,0)W_1(x)]).$$

$$3°. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_7.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)\right]\right).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)\right]\right).$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

Рассмотрим второе уравнение (3.1) как исходное. В этом случае его решение запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[-W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times \\ &\times \left(\psi_2(y) + \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt \right) \equiv \\ &\equiv T_2(\psi_2(y), f_2(x, y)), \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

где

$$W_{a_2}^1(x, y) = \int_0^x \frac{a_2(t, y) - a_2(y, y)}{t^2 - y^2} dt.$$

Первое уравнение системы (3.1) примем в виде (4.3.1). После введения новой неизвестной функции оно принимает вид (4.3.2) и (4.3.3). Уравнение (4.3.2) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \exp \left[W_{a_1}^m(x, y) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right] u(x, y) \right\} = \\ = \vartheta_1(x, y) \exp \left[W_{a_1}^m(x, y) + a_1(x, x) J_{m-1}^{(2)}(x, y) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Подставляя $u(x, y)$ и $\vartheta_1(x, y)$ из (4.3.17) и (4.3.4) в равенство (4.3.18) с учётом условия совместности (4.3.8), получаем выражение:

$$\begin{aligned} \psi_2'(y) + \frac{a_1(0, y)}{(-y^2)^m} \psi_2(y) = \\ = \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) + W_{a_2}^1(x, y) \right] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times \\ \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) u(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) - \\ - \frac{a_1(0, y)}{(-y^2)^m} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(t, y) \right] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(t, y) \right] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

В силу независимости левой части (4.3.19) от x , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) + W_{a_2}^1(x, y) \right] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \times \right. \\ \left. \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) u(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp \left[W_{a_2}^1(x, y) \right] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{a_1(0, y)}{(-y^2)^m} \cdot \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}}. \quad (4.3.20)$$

Преобразуя последнее равенства (4.3.19) согласно (4.3.20), для определения $\psi_2(y)$ получим уравнение

$$\psi_2'(y) + \frac{a_1(0, y)}{(-y^2)^m} \psi_2(y) = \psi_1(y). \quad (4.3.21)$$

Далее, дифференцируя равенство (4.3.20), после упрощения при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ приходим к равенству

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) = \\ = (x^2 - y^2) (f_1(x, y) + c_2(x, y) u(x, y)) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Далее, третье уравнение системы (3.1) запишем в виде (4.1.14). При выполнении условия совместности (4.1.23) и дифференцировании в соответствии с (4.3.6) после упрощения имеем:

$$\begin{aligned} \psi_2'(y) - \frac{b_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) = \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} + \\ + \frac{b_2(0, y)}{y^2} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^x \frac{f_2(t, y)}{t^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(t, y)] \left| \frac{t+y}{t-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} dt. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

При условии независимости левой части равенства (4.3.23) от y , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \right\} - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}} \right\} = \\ = - \frac{b_2(0, y)}{y^2} \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{a_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{-\frac{a_2(y, y)}{2y}}. \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Используя условие (4.3.24) и преобразуя последнее слагаемое в (4.3.23), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для нахождения функции $\psi_2(y)$:

$$\psi_2'(y) - \frac{b_2(0, y)}{y^2} \psi_2(y) = -\frac{f_3(0, y)}{y^2}. \quad (4.3.25)$$

Решение уравнения (4.3.25) выражается формулой:

$$\begin{aligned} \psi_2(y) &= \exp[W_{b_2}^2(0, y) + b_2(0, 0)W_1(y)] \times \\ &\times \left(c_8 - \int_0^y \frac{f_3(0, s)}{s^2} \exp[-W_{b_2}^2(0, s) - b_2(0, 0)W_1(s)] ds \right) \equiv \\ &\equiv N_2(c_8, f_3(0, y)), \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

где

$$W_{b_2}^2(0, y) = \int_0^y \frac{b_2(0, s) - b_2(0, 0)}{s^2} ds, \quad W_1(y) = \frac{1}{y},$$

c_8 — произвольная постоянная.

Теперь дифференцируя равенство (4.3.24) и упростив выражение, имеем:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x, y)f_3(x, y) = \\ = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_1(x, y)f_2(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.3.2. Пусть в (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$
 $f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) +$
 $+ a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$

$$3) \frac{a_2(y,y)}{2y} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{a_2(y,y)}{2y} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$b_2(0,0) > 0;$$

$$4) |a_2(x,y) - a_2(y,y)| \leq H_1|x-y|^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}, 0 < \alpha_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|a_2(x,y) - a_2(y,y)| \leq H_2|x+y|^{\alpha_2}, H_2 = \text{const}, 0 < \alpha_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|b_2(0,y) - b_2(0,0)| \leq H_3y^{\gamma_1}, H_3 = \text{const}, \gamma_1 > 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x,y)}{x^2-y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x,y)}{x^2-y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2)^{m+n+1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x,y) f_2(x,y) = \\ = (x^2 - y^2) \left(f_1(x,y) + c_2(x,y) T_2(\psi_2(y), f_2(x,y)) \right)$$

$$\text{при } a_2(x,y) = b_1(x,y) \text{ в } D,$$

$$c) (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x,y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x,y) f_3(x,y) = \\ = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2} \right) + b_2(x,y) f_2(x,y) \text{ в } D;$$

$$6) f_2(x,y) = ((x-y)^{\vartheta_1}), \vartheta_1 > \frac{a_2(y,y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_2(x,y) = ((x+y)^{\vartheta_2}), \vartheta_2 > -\frac{a_2(y,y)}{2y} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_3(0,y) = o(y^{\lambda_1}), \lambda_1 > 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формулам (4.3.17) и (4.3.26).

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0,y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[b_2(0,0)W_1(y)]).$$

$$3^\circ. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_8.$$

4°. Если $y \rightarrow 0$, и $x \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[b_2(0,0)W_1(y)]).$$

5°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a_2(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} > 0.$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} < 0.$$

6°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} > 0.$$

$$u(x, y) = O\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{\frac{a_2(y,y)}{2y}}\right) \text{ при } \frac{a_2(y,y)}{2y} < 0.$$

В случае, когда исходным является третье уравнение (3.1), решение запишем в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \exp[-W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{y-x} \right|^{-\frac{b_2(x,x)}{2x}} \times \\ &\times \left(\varphi_2(x) + \int_0^y \frac{f_3(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{s-x} \right|^{\frac{b_2(x,x)}{2x}} ds \right) \equiv \\ &\equiv T_3(\varphi_2(x), f_3(x, y)), \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

где

$$W_{b_2}^1(x, y) = \int_0^y \frac{b_2(x, \tau) - b_2(x, x)}{x^2 - \tau^2} d\tau.$$

Далее, первое уравнение (3.1) представим в виде (4.3.1). Введение новой неизвестной функции приводит его к виду (4.3.2) и (4.3.3).

Уравнение (4.3.2) запишем в виде (4.3.18). Подставляя вместо $u(x, y)$ и $\vartheta_1(x, y)$ их значения из (4.1.26) и (4.3.4), и выполняя преобразования при $a_1(x, y) = b_2(x, y)$, получим выражение

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2) \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (\psi_1(y) + \\ & + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) u(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \Bigg) = \\ & = f_3(x, y) \text{ при } a_1(x, y) = b_2(x, y) \text{ в } D. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

Теперь представим второе уравнение (3.1) в виде (4.3.7). Подставляя в него значение $u(x, y)$ из (4.1.26) и учитывая условие (4.1.8), после преобразований получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} \varphi_2'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_2(x) &= \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} - \\ &- \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \int_0^y \frac{f_3(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} ds - \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \frac{f_3(x, s)}{x^2 - s^2} \exp[W_{b_2}^1(x, s)] \left| \frac{x+s}{x-s} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} ds. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

При условии независимости левой части (4.3.29) от y , имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} \right\} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}} \right\} = \\ & = \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \exp[W_{b_2}^1(x, y)] \left| \frac{x+y}{x-y} \right|^{\frac{b_2(x, x)}{2x}}. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Преобразуя последнее слагаемое равенства (4.3.29) согласно условию (4.3.30), для нахождения функции $\varphi_2(x)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка вида:

$$\varphi_2'(x) + \frac{a_2(x, 0)}{x^2} \varphi_2(x) = \frac{f_2(x, 0)}{x^2}. \quad (4.3.31)$$

Решение уравнения (4.3.25) выражается формулой:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \exp[-W_{a_2}^2(x, 0) + a_2(0, 0)W_1(x)] \times \\ &\times \left(c_9 + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^2} \exp[W_{a_2}^2(t, 0) - a_2(0, 0)W_1(t)] dt \right) \equiv \\ &\equiv N_3(c_9, f_2(x, 0)), \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

где

$$W_{a_2}^2(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^2} dt, \quad W_1(x) = \frac{1}{x},$$

c_9 — произвольная постоянная.

Далее, выполняя дифференцирование равенства (4.3.30) и произведя упрощение, имеем:

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + b_2(x, y)f_2(x, y) &= \\ = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x, y)f_3(x, y). \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 4.3.3. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}), b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D}),$
 $f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D}), a_1(x, y), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D});$
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) +$
 $+ a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0;$

$$3) \frac{b_2(x,x)}{2x} < 0 \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$\frac{b_2(x,x)}{2x} > 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$a_2(0,0) > 0;$$

$$4) |b_2(x,y) - b_2(x,x)| \leq H_1|x-y|^{k_1}, H_1 = \text{const}, 0 < k_1 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$|b_2(x,y) - b_2(x,x)| \leq H_2|x+y|^{k_2}, H_2 = \text{const}, 0 < k_2 < 1 \\ \text{в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$|a_2(x,0) - a_2(0,0)| \leq H_3x^{\mu_1}, H_3 = \text{const}, \mu_1 > 1;$$

$$5) a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x,y)}{x^2-y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x,y)}{x^2-y^2} \right) \text{ в } D,$$

$$b) (x^2 - y^2) \exp \left[-W_{b_1}^n(x,y) + b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(x,y) \right] \times \\ \times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y) + c_2(t,y)T_3(\varphi_2(x), f_3(x,y))}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[W_{b_1}^n(t,y) - b_1(y,y)J_{n-1}^{(1)}(t,y) \right] dt \right) = f_3(x,y)$$

$$\text{при } a_1(x,y) = b_2(x,y) \text{ в } D,$$

$$c) (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x,y)}{x^2 - y^2} \right) + b_2(x,y)f_2(x,y) = \\ = (x^2 - y^2)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x,y)}{x^2 - y^2} \right) + a_2(x,y)f_3(x,y) \text{ в } D;$$

$$6) f_3(x,y) = o((x-y)^{\lambda_1}), \lambda_1 > \frac{b_2(x,x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_1^0,$$

$$f_3(x,y) = o((x+y)^{\lambda_2}), \lambda_2 > -\frac{b_2(x,x)}{2x} \text{ в окрестности } \Gamma_2^0,$$

$$f_2(x,0) = o(\exp[a_2(0,0)W_1(x)]x^{\mu_2}), \mu_2 > 1.$$

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (4.1.29) и (4.3.32).

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то будем иметь

$$u(x,0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0,0)W_1(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_9.$$

4°. Если $x \rightarrow 0$ и $y \neq 0$, то

$$u(x, y) = O(\exp[a_2(0,0)W_1(x)]).$$

4.4. Интегральные представления решений для системы (3.1) при $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, $k \geq 2$

При принятии первого уравнения (3.1) исходное, используя схему, приведённую в (4.3.1), имеем следующая

Теорема 4.4.1. Пусть в (3.1) $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, $k \geq 2$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_1(x, y)$,
 $c_1(x, y), f_1(x, y), f_3(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) +$
 $+ a_1(x, y)b_1(x, y) = 0$;
- 3) $a_1(x, x) < 0$, $b_1(y, y) < 0$, $a_2(0, 0) > 0$;
- 4) $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x - y)^{\alpha_1})$, $\alpha_1 > m - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_1(x, y) - a_1(x, x) = o((x + y)^{\alpha_2})$, $\alpha_2 > m - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x - y)^{\beta_1})$, $\beta_1 > n - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_1(x, y) - b_1(y, y) = o((x + y)^{\beta_2})$, $\beta_2 > n - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}$, $H_1 = \text{const}$, $\gamma_1 > 2p - 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) \in D$,
б) $(x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^p f_1(x, y) \in D$,

$$\begin{aligned}
& c) \quad (x^2 - y^2)^k \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \times \\
& \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y)}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \right) = \\
& \qquad \qquad \qquad = f_3(x, y) \text{ в } D;
\end{aligned}$$

$$6) \quad f_1(x, y) = o \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (x - y)^{\lambda_1} \right), \quad \lambda_1 > m + n - 1$$

в окрестности Γ_1^0 ,

$$f_1(x, y) = o \left(\exp \left[b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] (x + y)^{\lambda_2} \right), \quad \lambda_2 > m + n - 1$$

в окрестности Γ_2^0 ,

$$f_2(x, 0) = o(x^{\gamma_2}), \quad \gamma_2 > 2p - 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле (4.3.6).

При этом

$$\begin{aligned}
& \varphi_1(x) = \exp \left[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0) W_{2p-1}(x) \right] \times \\
& \times \left(c_{10} + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp \left[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0) W_{2p-1}(t) \right] dt \right) \equiv \\
& \qquad \qquad \qquad \equiv N_1(c_{10}, f_2(x, 0)), \quad (4.4.1)
\end{aligned}$$

$$\psi_1(y) = \frac{f_3(0, y)}{(-y^2)^k}, \quad (4.4.2)$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_{10} — произвольная постоянная.

Сформулируем некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то будем получать

$$u(x, 0) = \varphi_1(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0,0)W_{2p-1}(x)]).$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{10}.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[a_1(x, x)J_{m-1}^{(2)}(x, y)\right]\right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0 \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Если второе уравнение (3.1) считать исходным, то с использованием вышеописанной схемы получим следующая

Теорема 4.4.2. *Предположим, что в системе дифференциальных уравнений (3.1) $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, $k \geq 2$ и для коэффициентов и правых частей выполняются нижеперечисленные условия:*

- 1) $a_1(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$,
 $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) +$
 $+ a_1(x, y)b_1(x, y) \neq 0$;
- 3) $a_2(y, y) > 0, b_2(0, 0) > 0$;
- 4) $a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x - y)^{\mu_1})$, $\mu_1 > p - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $a_2(x, y) - a_2(y, y) = o((x + y)^{\mu_2})$, $\mu_2 > p - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|b_2(0, y) - b_2(0, 0)| \leq H_1 y^{\gamma_1}$, $H_1 = \text{const}$, $\gamma_1 > 4l - 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^{m+n+p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + (x^2 - y^2)^n a_1(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^p f_1(x, y)$ при $a_2(x, y) = b_1(x, y)$ в D ,
 в) $(x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) + a_2(x, y) f_3(x, y) =$

$$= (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x,y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_2(x,y) f_2(x,y) \text{ в } D;$$

6) $f_2(x,y) = o((x-y)^{\lambda_1})$, $\lambda_1 > p-1$ в окрестности Γ_1^0 ,

$f_2(x,y) = o((x+y)^{\lambda_2})$, $\lambda_2 > p-1$ в окрестности Γ_2^0 ,

$f_3(0,y) = o(y^{\lambda_3})$, $\lambda_3 > 4l-1$.

Тогда всякое решение (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно представить в виде (4.2.3).

При этом

$$\begin{aligned} \psi_2(y) &= \exp[-W_{b_2}^{4l}(0,y) + b_2(0,0)W_{4l-1}(y)] \times \\ &\times \left(c_{11} + \int_0^y \frac{f_3(0,s)}{s^{4l}} \exp[W_{b_2}^{4l}(0,s) - b_2(0,0)W_{4l-1}(s)] ds \right) \equiv \\ &\equiv N_2(c_{11}, f_3(0,y)), \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$W_{b_2}^{4l}(0,y) = \int_0^y \frac{b_2(0,s) - b_2(0,0)}{s^{4l}} ds, \quad W_{4l-1}(y) = \frac{1}{(4l-1)y^{4l-1}},$$

c_{11} — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $x \rightarrow 0$, то имеем

$$u(0,y) = \psi_2(y).$$

2°. При $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = O(\exp[b_2(0,0)W_{4l-1}(y)]).$$

3°. $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0,0)W_{4l-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = c_{11}$.

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x,y) = O \left(\exp \left[a_2(y,y) J_{p-1}^{(3)}(x,y) \right] \right) \text{ в окрестности } \Gamma_1^0.$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x,y) = O \left(\exp \left[a_2(y,y) J_{p-1}^{(3)}(x,y) \right] \right) \text{ в окрестности } \Gamma_2^0.$$

Замечание 4.4.1. Получены соответствующие утверждения и при $k = 2l - 1$.

При принятии третье уравнения (3.1) в качестве базового, на основе вышеописанной схемы получим следующая

Теорема 4.4.3. Пусть в (3.1) $m \geq 2$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, $k \geq 2$. Кроме того предположим, что для коэффициентов и правых частей выполнены следующие требования:

- 1) $a_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$, $b_2(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $f_2(x, y) \in C_y^1(\bar{D})$,
 $f_3(x, y) \in C_x^1(\bar{D})$, $a_1(x, y), b_1(x, y), c_1(x, y), f_1(x, y) \in C(\bar{D})$;
- 2) $c_2(x, y) = -c_1(x, y) + (x^2 - y^2)^{m+n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} \right) +$
 $+ a_1(x, y) b_1(x, y) \neq 0$;
- 3) $b_2(x, x) < 0$, $a_2(0, 0) > 0$;
- 4) $b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x - y)^{\mu_1})$, $\mu_1 > k - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $b_2(x, y) - b_2(x, x) = o((x + y)^{\mu_2})$, $\mu_2 > k - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,
 $|a_2(x, 0) - a_2(0, 0)| \leq H_1 x^{\gamma_1}$, $H_1 = \text{const}$, $\gamma_1 > 2p - 1$;
- 5) а) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right)$ в D ,
 б) $(x^2 - y^2)^k \exp \left[-W_{b_1}^n(x, y) + b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(x, y) \right] \times$
 $\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y) + c_2(t, y) T_3(\varphi_2(t), f_3(t, y))}{(t^2 - y^2)^{m+n}} \times \right.$
 $\times \exp \left[W_{b_1}^n(t, y) - b_1(y, y) J_{n-1}^{(1)}(t, y) \right] dt \Big) = f_3(x, y)$
 при $a_1(x, y) = b_2(x, y)$ в D ,
 в) $(x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^p} \right) + b_2(x, y) f_2(x, y) =$
 $= (x^2 - y^2)^{p+k} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_3(x, y)}{(x^2 - y^2)^k} \right) + a_2(x, y) f_3(x, y)$ в D ;
- 6) $f_3(x, y) = o((x - y)^{\lambda_1})$, $\lambda_1 > k - 1$ в окрестности Γ_1^0 ,
 $f_3(x, y) = o((x + y)^{\lambda_2})$, $\lambda_2 > k - 1$ в окрестности Γ_2^0 ,

$$f_2(x, 0) = o(x^{\theta_1}), \quad \theta_1 > 2p - 1.$$

Тогда при выполнении вышеприведённых требований всякое решение рассматриваемой системы (3.1), принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ можно найти по формуле (4.2.5).

При этом

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \exp[-W_{a_2}^{2p}(x, 0) + a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \times \\ &\times \left(c_{12} + \int_0^x \frac{f_2(t, 0)}{t^{2p}} \exp[W_{a_2}^{2p}(t, 0) - a_2(0, 0)W_{2p-1}(t)] dt \right) \equiv \\ &\equiv N_3(c_{12}, f_2(x, 0)), \quad (4.4.4) \end{aligned}$$

$$W_{a_2}^{2p}(x, 0) = \int_0^x \frac{a_2(t, 0) - a_2(0, 0)}{t^{2p}} dt, \quad W_{2p-1}(x) = \frac{1}{(2p-1)x^{2p-1}},$$

c_{12} — произвольная постоянная.

Отметим некоторые свойства полученного решения.

1°. Если предполагать, что $y \rightarrow 0$, то имеем

$$u(x, 0) = \varphi_2(x).$$

2°. При $y \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ имеем оценку

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = O(\exp[a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)]).$$

$$3°. \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0, 0)W_{2p-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = c_{12}.$$

4°. Если $y \rightarrow x$, то

$$u(x, y) = O\left(\exp\left[-b_2(x, x)J_{k-1}^{(2)}(x, y)\right]\right).$$

5°. Если $y \rightarrow -x$, то

$$u(x, y) = 0.$$

4.5. Постановка и решение задач с начальными данными для полученных интегральных представлений решений системы уравнений (3.1)

В данном параграфе изложены постановка и решение задач с начальными условиями с применением, полученных в ходе исследования системы (3.1) результатов.

Задача K_4^1 . Найти решение системы (3.1) $m = n = p = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_1,$$

$p_1 = \text{const.}$

Задача K_4^2 . Найти решение системы (3.1) $m = n = p = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_2,$$

в котором p_2 — заданно известное постоянное.

Задача K_4^3 . При выполнении условий $m = n = p = k = 1$. Найти решение системы (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_3,$$

в котором предполагается, что p_3 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_4^4 . Найти решение системы (3.1) $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_4,$$

$p_4 = \text{const.}$

Задача K_4^5 . Найти решение системы (3.1) $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0,0)W_{4l-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_5,$$

в котором p_5 — заданно известное постоянное.

Задача K_4^6 . При выполнении условий $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$. Найти решение системы (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_6,$$

в котором предполагается, что p_6 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_4^7 . Найти решение системы (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_7,$$

$p_7 = const$.

Задача K_4^8 . Найти решение системы (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0,0)W_1(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_8,$$

в котором p_8 — заданно известное постоянное.

Задача K_4^9 . При выполнении условий $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$. Найти решение системы (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_9,$$

в котором предполагается, что p_9 — есть заданное известное постоянное.

Задача K_4^{10} . Найти решение системы (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_{10},$$

$p_{10} = \text{const.}$

Задача K_4^{11} . Найти решение системы (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-b_2(0,0)W_{4l-1}(y)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_{11},$$

в котором p_{11} — заданно известное постоянное.

Задача K_4^{12} . При выполнении условий $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$. Найти решение системы (3.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_{2p-1}(x)] \lim_{x \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_{12},$$

в котором предполагается, что p_{12} — есть заданное известное постоянное.

Решение задачи K_4^1 . Для решения задачи K_4^1 используем интегральное представление (4.1.6), (4.1.12) и его свойства. Из этих свойств и условия задачи K_3^1 следует, что

$$c_1 = p_1. \quad (4.5.1)$$

Подставляя найденное значение c_1 из (4.5.1) в (4.1.6) и (4.1.12) получим решение задачи K_4^1 .

Итак, доказана следующая

Теорема 4.5.1. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 4.1.1. Тогда у задачи K_4^1 есть единственное решение, определяющее формулами (4.1.6), (4.1.12) и (4.5.1).*

Решение задачи K_4^2 . Для решения задачи K_4^2 используем интегральное представление, заданное формулами (4.1.17) и (4.1.27), а также его свойства. На основании этих свойств и условия задачи K_4^2 получаем

$$c_2 = p_2. \quad (4.5.2)$$

Подставляя найденное значение c_2 из (4.5.2) в (4.1.17) и (4.1.27), получим решение задачи K_4^2 .

Итак, доказана

Теорема 4.5.2. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (3.1) выполнены условия теоремы 4.1.2. Тогда у задачи K_4^2 существует единственное решение, находящееся соотношениями (4.1.17), (4.1.27) и (4.5.2).

Для однозначной разрешимости поставленных задач $K_4^3 - K_4^{12}$ справедливы следующие

Теорема 4.5.3. При выполнении условий теоремы 4.1.3 для системы (3.1) у задачи K_4^3 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (4.1.29) и (4.1.34), в которых $c_3 = p_3$.

Теорема 4.5.4. Предположим, что выполнены все условия теоремы 4.2.1. Тогда у задачи K_4^4 есть единственное решение, определяющее формулами (4.1.6) и (4.2.1), при этом $c_4 = p_4$.

Теорема 4.5.5. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (3.1) выполнены условия теоремы 4.2.2. Тогда у задачи K_4^5 существует единственное решение, находящееся соотношениями (4.2.3) и (4.2.4), при этом $c_5 = p_5$.

Теорема 4.5.6. При выполнении условий теоремы 4.2.3 для системы (3.1) у задачи K_4^6 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (4.2.5) и (4.2.6), при этом $c_6 = p_6$.

Теорема 4.5.7. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 4.3.1. Тогда у задачи K_4^7 есть единственное решение, определяющее формулами (4.3.6), (4.3.12), в которых $c_7 = p_7$.*

Теорема 4.5.8. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (3.1) выполнены условия теоремы 4.3.2. Тогда у задачи K_4^8 существует единственное решение, находящееся (4.3.17) и (4.3.26), при этом $c_8 = p_8$.*

Теорема 4.5.9. *При выполнении условий теоремы 4.3.3 для системы (3.1) у задачи K_4^9 существует единственное решение, которое находится по соотношениям (4.1.29) и (4.3.32), при этом $c_9 = p_9$.*

Теорема 4.5.10. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 4.4.1. Тогда у задачи K_4^{10} есть единственное решение, определяющее формулами (4.3.6) и (4.4.1), где $c_{10} = p_{10}$.*

Теорема 4.5.11. *Пусть для коэффициентов и правых частей системы (3.1) выполнены условия теоремы 4.4.2. Тогда у задачи K_4^{11} существует единственное решение, находящееся соотношениями (4.2.3) и (4.4.3), при этом $c_{11} = p_{11}$.*

Теорема 4.5.12. *При выполнении условий теоремы 4.4.3 для системы (3.1) у задачи K_4^{12} существует единственное решение, которое находится по соотношениям (4.2.5) и (4.4.4), в которых $c_{12} = p_{12}$.*

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящем разделе проводится краткий анализ основных результатов, полученных в ходе выполнения диссертационного исследования.

В первой главе изложен краткий обзор литературы, посвящённой теории переопределённых систем дифференциальных уравнений, а также состоянию изучения таких систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами.

Вторая глава посвящена получению представления многообразия решений одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей две внутренние сингулярные линии вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x, y)}{(x^2 - y^2)^m} u = \frac{f_1(x, y)}{(x^2 - y^2)^m}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b(x, y)}{(x^2 - y^2)^n} u = \frac{f_2(x, y)}{(x^2 - y^2)^n}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $a(x, y), b(x, y), f_j(x, y), j = \overline{1, 2}$ – заданные функции в области D , $u(x, y)$ – искомая функция.

Для данной системы при условии определённой взаимосвязи между коэффициентами и других возможных случаев найдено явное представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

Кроме того, для полученных интегральных представлений поставлены и решены задачи с начальными условиями $K_2^1 - K_2^8$.

Результаты исследования этой главы опубликованы в [1-А], [2-А], [10-А], [12-А], [13-А], [17-А], [18-А] и [25-А].

В третьей главе исследуются переопределённых систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями (2.1) и (2.2).

Получены представления многообразия решений указанных переопределённых систем из двух дифференциальных уравнений, включающих гиперболическое уравнение второго порядка, с использованием

одной произвольной константой в явном виде, как в случае, когда исходным является первое уравнение, так и когда исходным является второе. Исследованы некоторые свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий, а также сформулированы и решены задачи с начальными условиями.

В разделе 3.9 поставлены и решены задачи с начальными данными. Например:

Задача K_3^1 . При выполнении условий $m = n = k = 1$. Найти решение системы (2.1), которое принадлежит классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D и удовлетворяет требованию

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) \right\} = p_1,$$

в котором предполагается, что p_1 — есть заданное известное постоянное.

Решение задачи K_3^1 . Для решения задачи K_3^1 используем интегральное представление, заданное формулами (3.1.6) и (3.1.12), а также его свойства. На основании этих свойств и условий задачи K_3^1 получаем

$$c_1 = p_1. \quad (3.9.1)$$

Подставляя найденное значение c_1 из (3.9.1) в (3.1.6) и (3.1.12) получим решение задачи K_3^1 .

Итак, доказана следующая

Теорема 3.9.1. *При выполнении условий теоремы 3.1.1 для системы (2.1) у задачи K_3^1 существует единственное решение, которое находится по соотношениями (3.1.6), (3.1.12) и (3.9.1).*

Результатами данной главы являются теоремы 3.1.1, 3.1.2, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1, 3.5.2, 3.6.1, 3.6.2, 3.7.1, 3.7.2, 3.8.1, 3.8.2, а также 3.9.1, 3.9.2, 3.9.3, 3.9.4, 3.9.5, 3.9.6, 3.9.7, 3.9.8, 3.9.9, 3.9.10, 3.9.11, 3.9.12, 3.9.13, 3.9.14, 3.9.15, 3.9.16, которые опубликованы в [3-A], [6-A], [9-A], [11-A], [15-A], [16-A], [19-A], [20-A], [21-A], [24-A] и [26-A].

В четвёртой главе исследуется система (3.1), состоящая из одного гиперболического уравнения второго порядка и двух уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями, причём эти уравнения связаны посредством неизвестной функции.

В зависимости от вариантов $m = n = p = k = 1$; $m = n = 1, p \geq 2, k \geq 2$; $m \geq 2, n \geq 2, p = 1, k = 1$; $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2, k \geq 2$, для исследуемой системы получены выражения, описывающие многообразие её решений через одну произвольную константу.

В параграфе 4.5 изложены постановка и решение задач с начальными условиями $K_4^1 - K_4^{12}$ с применением, полученных в ходе исследования системы (3.1) результатов.

Например:

Задача K_4^7 . Найти решение системы (3.1) $m \geq 2, n \geq 2, p = k = 1$, принадлежащее классу $C^2(D \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2))$ в области D , для которого имеет место начальное условие

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \exp[-a_2(0,0)W_1(x)] \lim_{y \rightarrow 0} u(x,y) \right\} = p_7,$$

$p_7 = \text{const.}$

Теорема 4.5.7. Пусть для коэффициентов и правых частей системы (3.1) выполнены условия теоремы 4.3.1. Тогда у задачи K_4^7 существует единственное решение, находящееся соотношениями (4.3.6) и (4.3.12), в которых $c_7 = p_7$.

Результаты данной главы опубликованы в работах [4-A], [5-A], [7-A], [8-A], [14-A], [23-A] и [22-A].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертационной работе для одного класса переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями получены представления многообразия решений. Исследованы свойства данных решений, а также сформулированы и решены задачи с начальными данными. Ниже представлены основные результаты, отражённые в диссертации:

- для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями в прямоугольной области получено описание многообразия её решений. Исследовано поведение решений в их окрестности, а также поставлены и решены некоторые задачи с начальными условиями, которые опубликованы в [1-A], [2-A], [10-A], [12-A], [13-A], [17-A], [18-A] и [25-A];

- получены явные представления многообразия решений переопределённых систем, состоящих из двух дифференциальных уравнений, одно из которых - гиперболическое уравнение второго порядка. Решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассматриваются два случая: когда исходным является первое уравнение и когда - второе. Исследованы свойства полученных решений в окрестности сингулярных линий. Также сформулированы и решены задачи с начальными условиями. Полученные результаты опубликованы в [3-A], [6-A], [9-A], [11-A], [15-A], [16-A], [19-A], [20-A], [21-A], [24-A] и [26-A];

- исследована переопределённая система, состоящая из трёх дифференциальных уравнений, одно из которых является гиперболическим уравнением второго порядка. Построены явные представления многообразия её решений. Полученные решения выражены через одну произвольную постоянную. Рассмотрены различные случаи, когда в качестве основного уравнения выступает первое, второе или третье. Проанализированы свойства решений в окрестностях сингулярных линий, а также поставлены и решены задачи с начальными условиями. Полученные результаты опубликованы в [4-A], [5-A], [7-A], [8-A], [14-A], [23-A] и [22-A].

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследования, представленные в диссертации, имеют теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории переопределённых систем дифференциальных уравнений первого и второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями, а также применяться при решении различных прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А) Список использованных источников

- [1] Абдуллаев, А.Р. О задаче Коши для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / А.Р. Абдуллаев, Я.Н. Крохалева // Евразийское Научное Объединение. - 2018. - №12 (46). - С. 1-3.
- [2] Азбелев, Н.В. О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка / Н.В. Азбелев, М.Ж. Алвеш, Е.И. Бравый // Известия высших учебных заведений. Математика. - 1999.-№2 (441). -С. 3-11.
- [3] Архутик, Г.М. Регулярная особая точка линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков [Текст] /Г.М. Архутик // Изв.АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – №3. – С. 46-54.
- [4] Архутик, Г.М., Общая теории линейных уравнений в полных дифференциалах высших порядков [Текст] /Г.М. Архутик, Э.И. Грудю //Весті АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1979. – №3. – С. 37-46.
- [5] Байзаев, С. Об ограниченных решениях одного класса переопределенных систем уравнений в частных производных [Текст] /С. Байзаева, М.А. Рахимова //Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. – 2016. – Т. 38. – №3. – С. 8-15.
- [6] Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- [7] Болтаев, К.С. Краевые задачи типа линейного сопряжения для уравнения Гельмгольца смешанного типа с сингулярной линией [Текст] / К.С. Болтаев // Вестник Бох. ГУ им. Н Хусрава. Серия естественных наук. - 2017. - №2-2 (46). - С. 11-15.
- [8] Брычев, С.В. Исследование задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст]: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук / С.В. Брычев. - Екатеринбург, 2000.

- [9] Гайшун, И.В. Линейные уравнения в полных производных [Текст] /И. В. Гайшун. – Минск: Наука и техника, 1983. – 273 с.
- [10] Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения производных [Текст] /И.В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
- [11] Гришанин, Г.Э. Об особенности задачи Коши для дифференциального уравнения Эйлера второго порядка в сингулярной точке [Текст] / Г.Э. Гришанин, Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // В сборнике: Вузовская наука — региону. Материалы XV Всероссийской научной конференции с международным участием. - 2017. - С. 62 - 72.
- [12] Дадоджонова, М.Ё. Интегральные представления решений для одного уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с сингулярной точкой [Текст] / М.Ё. Дадоджонова, Н.Р. Раджабов, А.Г. Олимов // Вестник педагогического университета. Издание Таджикского государственного педагогического университета им. Садриддина Айни. - 2013. - №5(54). - С. 39-43.
- [13] Джангибеков, Г. Задача линейного сопряжения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости [Текст] / Г. Джангибеков // ДАН СССР. - 1991. - Т. 317, №4.-С. 813-818.
- [14] Джумаев, Б.М. Разрешимость переопределенных систем линейных уравнений с частными производными первого и второго порядка с вещественными и комплексными переменными. [Текст]: дис... кан. физ.-мат. наук: 010102: защищена 28.12.22 / Джумаев Бустонбек Махмадназарович. -Д., 2022.-152с.
- [15] Джураев А. Д. Об одном случае вырождения эллиптической системы первого порядка на плоскости [Текст] / А.Д. Джураев //Докл. АН Тадж ССР. – 1972. – Т. 15, №11. – С. 3 – 5.

- [16] Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного составного типов [Текст] / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238с.
- [17] Жегалов, В.И. О краевых задачах со смещениями для уравнений гиперболического и смешанного типа [Текст] / В.И. Жегалов // Differential equations and applications (I). Proc. of the third conference "Rousse -85". - Bulgaria, 1987. – P.139-142.
- [18] Зарипов, С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, С.К. Зарипов // Известия АН Республики Таджикистан. - 2009. - №1. - С. 7-17.
- [19] Зарипов, С.К. Исследование устойчивости решения одного класса линейного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. - 2015, №1-4(168). - С. 28-36.
- [20] Иззатуллоев, Д. Переопределенные линейные системы двух и трех дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной и сверхсингулярной точками [Текст] //автореф. дис... канд. физ.-мат.,наук / Д. Иззатуллоев. – Душанбе: 2012. – 23 с.
- [21] Илолов, М. Об устойчивости Улама-Хайерса дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов // Сборник статей международной научно-практической конференции на тему «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» (4 ноября 2021 г.). - Душанбе, 2021. - С. 83-86.
- [22] Исхоков, С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений [Текст] / С.А. Исхоков // Дифференциальные уравнения. – 1995.- Т.31, №4. -С. 641-653.

- [23] Кальменов, Т.Ш. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / Т.Ш. Кальменов // Дифференциальные уравнения. – 1971. – VII, №1.
- [24] Капилевич, М.Б. Об одном классе гипергеометрических функции Горна [Текст] / М.Б. Капилевич // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. IV, №8. – С. 1465-1483.
- [25] Коровина, М.В. Некоторые результаты касающейся задачи Коши для переопределенных систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] / М.В. Коровина // Вестник МГУ. – 1990. – Т. 26, №1. – С. 75-85.
- [26] Латышева, К.Я. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения. Метод Фробениуса - Латышевой [Текст] / К.Я. Латышева, Н.И. Терещенко. – Киев: Институт Математики АН УССР, 1970. – 394 с.
- [27] Маликов, Х.М. Переопределенная система линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами [Текст] / Х.М. Маликов // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9, №12. - С. 2265-2266.
- [28] Михайлов, Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе: Дониш, 1963. - 183с.
- [29] Михайлов, Л.Г. Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г. Михайлов. - Душанбе: Дониш, 1969.- 126с.
- [30] Михайлов, Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями [Текст] / Л.Г. Михайлов. – Душанбе: Дониш, 1986. – 115с.
- [31] Михайлов, Л. Г. К теории полных дифференциалов с сингулярными точками [Текст] / Л. Г. Михайлов // ДАН России. – 1992. – Т. 322, №4. – С. 646-650.

- [32] Михайлов, Л.Г. К сингулярной теории полных дифференциалов [Текст] /Л.Г. Михайлов //ДАН России. – 1997, Т. 354, №1, С. 21-24.
- [33] Михайлов, Л.Г. О некоторых переопределенных системах уравнений в частных производных с сингулярными точками [Текст] / Л.Г. Михайлов //ДАН России. – 2004. – Т.398, №2. – С. 1-4.
- [34] Михайлов, Л.Г. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками [Текст] / Л.Г. Михайлов, Х.С. Хидиров // Доклады АН Республики Таджикистан. - 2009. -Т. 52, №7.-С.507-512.
- [35] Михайлов, Л.Г. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями [Текст] /Л.Г. Михайлов // ДАН России. – 2013. – Т. 451, №3. – С. 251-254.
- [36] Мухаммадиев Э. Избранные труды [Текст] /Э. Мухаммадиев. – Вологда: ВОТГУ, 2011. – С. 550.
- [37] Мухсинов, А. Формула представления решений одного уравнения в частных производных с двумя сингулярными плоскостями [Текст] / «А. Мухсинов, Н.К. Охунов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. -2011.-Т.54, №10.-С. 807-814.
- [38] Мирзоев, Н.Х. К теории линейной переопределённой системы первого порядка с особыми коэффициентами [Текст] / Н.Х. Мирзоев // Доклады Академии наук РТ. – 2003. – Т. 46, №3-4. – С. 34-40.
- [39] Мирзоев, Н.Х. Интегральные представления решений для одного класса переопределённой системы дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами // [Текст]: дис... кан. физ.-мат. наук: 010102: / Мирзоев Нейматулло Хакимович. -Д., 2004. - с.110.
- [40] Мухамед, Аль-Саид Абдель-Аал Абдель-Гхани Гхареб. К теории линейной переопределенной системы трех уравнений, содержащей гиперболическое уравнение второго порядка с двумя вырождающимся

- линиями [Текст] /Мухамед Аль-Саид Абдель-Аал Абдель-Гхани Гхареб, Н. Раджабов //Известия АН РТ. – 2010. – №1 (138). – С.7-18.
- [41] Нахушев, А.М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболического уравнения [Текст] / А.М. Нахушев //Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т. 7, №1. – С. 40–56.
- [42] Новицкая, А.Н. О линейно-независимых решениях системы, уравнений для гипергеометрической функций F_4 [Текст] / А.Н. Новицкая //Материалы международной научно-практической конференции "Информационные технологии: инновации в науке и образовании "(21-22 февраля 2015 г). Актобе, изд. ун. им. К. Жубанова, 2015. – С. 204-208.
- [43] Олими, А.Г. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с внутренней сингулярной точкой [Текст] / А.Г. Олими // Учёные записки Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова. Серия: естественные и экономические науки. – 2009. - №3(50). -С. 20-25.
- [44] Пиров, Р. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем уравнений в частных производных с несколькими неизвестными функциями [Текст]: дис... докт. физ.-мат. наук: 010102: / Пиров Рахмон. -Д., 2018. - с.279.
- [45] Плещинская, И.Е, Плещинский, Н. Б. Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн [Текст] / И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский // Ученые записки Казанского университета, серия физико-математической науки. – 2005. – Т. 147. – Кн.3. – С.4-32.
- [46] Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярными линиями или сингулярными поверхностями [Текст] /Н. Раджабов. – Душанбе: Изд. ТГУ, 1980. – Ч.I. – 127 с.; 1981. – Ч.II. – 170 с.; 1982. – Ч.III. – 170 с.

- [47] Раджабов, Н. Об одном методе представления многообразия решений общего линейного гиперболического уравнения второго порядка с регулярными и сингулярными коэффициентами на плоскости [Текст] / Н. Раджабов // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук. - 1984, №4(94). - С. 8-14.
- [48] Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых гиперболических уравнений с одной и двумя сингулярными линиями. [Текст] / Н. Раджабов // ДАН СССР. – 1985. – Т. 281, №3. – С. 534-537.
- [49] Раджабов, Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями "Введение в теорию немодельных гиперболических уравнений второго порядка с сингулярными линиями" [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе: Изд – во.ТГУ, Ч.4, 1985. – 148 с.
- [50] Раджабов, Н. Об одном уравнении гиперболического типа второго порядка с двумя сингулярными линиями [Текст] / Н. Раджабов // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, №12. – С. 2129-2133.
- [51] Раджабов, Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов. – Душанбе: Из – во ТГУ, 1992. – 236 с.
- [52] Раджабов, Н. Задачи типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов // Научная конференция Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения. - Курган-Тюбе, 1997. - С. 46-47.
- [53] Раджабов, Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с тремя внутренними сингулярными точками [Текст] / Н. Раджабов, Е. Шишкина // Материалы международной научной конференции

- «Актуальные проблемы математики и её приложения» (г. Худжанд, 29-31 мая 2003 г.). - Худжанд, 2003. -С. 119-122.
- [54] Раджабов, Н. Линейная переопределенная система второго порядка с одной сингулярной точкой [Текст] /Н. Раджабов, Б.М. Шоимкулов //Вестник Национального Университета, Душанбе, ТГНУ, серия естественных наук, 2005. – С. 3-10.
- [55] Раджабов, Н. Об одном линейном обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка общего вида с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, Г.М. Кадиров // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа» (г. Душанбе, 8—10 ноября 2005 г.). — Душанбе, 2005. -С.145-148.
- [56] Раджабов, Н. Интегральные уравнения типа Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н. Раджабов. - Душанбе: Деваштич, 2007. - 222 с.
- [57] Раджабов. Н. Модельная линейная переопределенная система трех уравнений второго порядка с двумя сверхсингулярными линиями [Текст] /Н. Раджабов // Труды международной научной конференции Дифференциальные уравнения и смежные проблемы, «Посвященной юбилеям академиков АН России Ильина В. А и Моисеева Е.И.», 24-28 июня 2008, Стерлитамак, Т. 1, Уфа, Гилем. – 2008. – С. 159-163.
- [58] Раджабов, Н. Переопределённая линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями/Н. Раджабов, М. Эльсаед Абдель Аал. – Саарбрюкен: Lap Lambert Academic Publishing, 2011. – 234 с.
- [59] Раджабов, Н. Линейная модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной левой

- граничной сингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, О.И. Меликов // Доклады АН Республики Таджикистан. - 2015. - Т. 58, № 6. - С.451-457.
- [60] Раджабов, Н. Переопределённая линейная система интегральных уравнений и сингулярные, сверхсингулярные интегральные уравнения типа Вольтерра третьего рода с логарифмическими и сверхсингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н. Раджабов. - Душанбе: ТНУ, 2021. - 317 с.
- [61] Раджабова, Л.Н. Об одном классе линейного дифференциального уравнения третьего порядка с суперсингулярной точкой [Текст] / Н. Раджабов, А.Л. Раджабова // Труды международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и специальные функции». - Самара, 1992. - С.207-208.
- [62] Раджабова, Л.Н. Об одном классе гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н. Раджабова // Вестник национального университета. - 2002. - №5 (31). - С. 44-51.
- [63] Расулов, А.Б. Представление многообразия решений и исследование краевых задач для некоторых обобщенных систем Коши-Римана с одной и двумя сингулярными линиями [Текст] / А.Б.Расулов // Изв. АН. Тадж. ССР, отд. физико-математических, химических и геологических наук. - 1982. -№2(84). -С.23-32.
- [64] Расулов, А.Б. Интегральные представления решений линейной эллиптической системы второго порядка с внутренней сверхсингулярной точкой [Текст] / А.Б. Расулов // ДАН России. – 2009. – Т. 429, №6. – С. 735-737.
- [65] Рахимова, М.А. Исследование переопределённых систем уравнений в частных производных первого порядка в неограниченных областях. [Текст]: дис... кан. физ.-мат. наук: 010102: защищена 10.04.19 / Рахимова Махсуда Аюбовна. -Д., 2019.-140с.
- [66] Рузметов, Э. Дифференциальные уравнения с параметром и их приложения к исследованию некоторых переопределённых систем

- уравнений в частных производных [Текст] /Э. Рузметов. – Душанбе: ДГПУ, 1994. – 241 с.
- [67] Сабитов, К.Б. "О некорректности краевых задач для одного класса гиперболических уравнений"[Текст] / К.Б. Сабитов, Р.Р. Илясов // Изв. вузов. Математика. – 2001. – №5. – С.59-63.
- [68] Сабитов, К.Б. "Задачи Коши Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения"[Текст] / К.Б. Сабитов, Г.Г. Шарафуддинова // Изв. вузов. Математика. – 2003. –№5. – С.21-29.
- [69] Сабитов, К.Б. К теории уравнений смешанного типа [Текст] / К.Б. Сабитов. - М: Физматлит, 2014. - 300 с.
- [70] Салахатдинов, М. С. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа с различным порядком вырождения. Нелокальные задачи для уравнений в частных производных и их приложения к моделированию и автоматизации проектирования сложных систем [Текст] / М.С. Салахатдинов, Д. Аманов. - Нальчик, 1986. – 225 с.
- [71] Самойленко, А.М. Нормальные решения одной специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, Ж.Н. Тасмамбетов. – Киев, 1989 (Препр. / АН УССР, Институт математики; 89.4, 40 с.)
- [72] Самойленко, А.М. Решение в конечной форме регулярной системы дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, Ж.Н. Тасмамбетов. - Киев, 1990 (Препр. АН УССР; Институт математики; 90.21), 44с.
- [73] Спенсер, Д. Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных [Текст]/Д. Спенсер //Математика. – 1970. – Т. 14, Вып. 3. – С. 99–126.
- [74] Сатторов, А.С. Интегральные представления решения некоторых вырождающихся уравнений с сингулярной линией [Текст] /А.С. Сатторов // Изв. АН Тадж. ССР, отд.- физ. мат. и геолог. наук. – 1990, №2(116). – С. 3-9.

- [75] Сатторов, А.С. Интегральные представления и задача типа коши для одного квазилинейного вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной линией [Текст] /А.С. Сатторов // Док. АН Тадж., 2009, том 52, №12.– С. 907-912.
- [76] Сафаров, Д.С. Периодические решения переопределенных систем уравнений Коши-Римана// Сб. "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения". Душанбе, 1997г., С.103-107.
- [77] Сафаров, Д.С. О размерности пространства решений степенного роста для одного класса переопределенных эллиптических систем [Текст] /Д. Сафаров // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №8. – С. 1526-1528.
- [78] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа [Текст] М.М. Смирнов. - М.: Наука, 1970. - 296 с.
- [79] Смирнов, М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения [Текст] / М.М. Смирнов. – Минск: Высшая школа, 1977. – 157 с.
- [80] Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
- [81] Тасмамбетов, Ж.Н. Об определении регулярных особенностей одной системы в частных производных [Текст] / Ж.Н. Тасмамбетов //Изв. Каз. ССР, Сер. физ. -мат., 1988, №3. – С. 50-53.
- [82] Тасмамбетов, Ж. Н. Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст]: монография. – Актобе, 2015. – 463 с.
- [83] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1966. - 724 с.
- [84] Терещенко, Н.И. О логарифмических решениях системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Н.И. Терещенко, Ж.Н. Тасмамбетов //Сборник трудов Института математики и механики, АН Каз. ССР, 1974. – С. 236-244.

- [85] Усманов, Н. Сингулярная граничная задача сопряжения гармонических функций [Текст] / Б.Б. Саидов, Н. Усманов // Докл. АН Республики Таджикистан. - 2015. - Т. 58, №12. - С. 1078-1083.
- [86] Усмонов, З. Д. Обобщенные системы Коши - Римана с сингулярной точкой [Текст] /З.Д. Усмонов. – Душанбе: ТГУ, 1993. – 244 с.
- [87] Хасанов, А.Х. Краевые задачи для обобщенного осе симметрического уравнения Гельмгольца [Текст] / А.Х. Хасанов, Р.Б. Сеилханова //Материалы международной научно-практической конференции «Информационные технологии: инновации в науке и образовании» (21-22 февраля 2015г.) Актобе, университет им. К. Жубанова, 2015. – С. 242-247.
- [88] Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] /Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
- [89] Хёрмандер, Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными [Текст] /Л. Хёрмандер. – М.: Мир 1987. – Т. 2. – 694 с.
- [90] Шамсудинов Ф. М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью.\ Ф.М. Шамсудинов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2015.- №1\4(168). - с.37-42.
- [91] Шамсудинов Ф. М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы второго порядка с сингулярной точкой. / Ф.М. Шамсудинов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2015.- №1/1(156). - с.60 - 65.
- [92] Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы со сверхсингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2003. – Т.46, №3-4. – С. 15-21.

- [93] Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределённой системы с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2004. – Т.47, №4. – С.56-61.
- [94] Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестник Таджикского педагогического университета. Серия естественных наук. 2013. – №5 (54). – С. 97-100.
- [95] Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер.1, Мат.Физ. 2014. №5 (24). – С. 46-54.
- [96] Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2014. – №4 (157). – С. 32-41.
- [97] Шамсудинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2015. – №1/1 (156). - С. 60-65.
- [98] Шамсудинов, Ф.М. Об исследовании одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка со сверхсингулярными коэффициентами [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2015. – Т.58, №6. – С. 465- 475.
- [99] Шамсуддинов, Ф.М. Интегральные представления решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка со слабой особенностью [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Изв. АН РТ. Отд. физ. - мат. хим., геол. и техн. н., 2015, №3 (160). - С. 7-14.

- [100] Шамсудинов, Ф.М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М. Шамсудинов // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер.1, Мат.Физ. 2016. – №6 (37). – С.99-107.
- [101] Шамсудинов, Ф. М. Об исследовании одного класса гиперболических уравнений второго порядка и с связанных с ними переопределённых систем дифференциальных уравнений с сингулярными и сверхсингулярными точками. [Текст]: дис... докт. физ.-мат. наук: 010102: защищена 25.12.19.: утв. 25.09.20 / Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич. -Д., 2019.-355с.-Библиогр.: с.338-355.
- [102] Шоимкулов, Б.М. Интегральные представления многообразия решений для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений с одной сингулярной и с одной сверхсингулярной линией в общем случае [Текст] /Б.М. Шоимкулов // Вестник Таджикского национального университета, №1/5, серия естественных наук, Душанбе. – 2017. – С.133-138.
- [103] Шоимкулов, Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной линией и двумя сверхсингулярными линиями [Текст] / Б.М. Шоймкулов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. — 2018. — №3. — С. 32-43.
- [104] Шоимкулов, Б.М. К теории переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной сингулярной точкой и одной сингулярной линией [Текст] / Б.М. Шоймкулов // Вестник Пермского Университета. – 2021. Вып.4(55). – С. 14-18.
- [105] Шоимкулов, Б.М. Интегральные представления многообразия решений для некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными

- точками [Текст]: дис... кан. физ.-мат. наук: 010102 / Шоимкулова Бойтура Магмудбековича. -Д., 2006.-110с.
- [106] Шарипов, Б. Вполне интегрируемые системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными коэффициентами [Текст]: дис... докт. физ.-мат. наук: 010102 / Шарипов Бобоали. -Д., 2022.-380с.
- [107] Янушаускас, А.И. Аналитическая теория эллиптических уравнений [Текст]/А.И. Янушаускас. – Новосибирск: Наука, 1979. – 190 с.
- [108] Appel, P. Fonctions hypergeometriques of hyperspheriges Polynomes d'Hermite [Text] / P. Appel, M.J. Kampe de Fériet. – Paris: Gauthier-Villars. – 1926. – 434s.
- [109] Begehr, H. Transformations, transmutations and kernel functions [Text] /H. Begehr, R.P. Gilbert. – V.2. – Harlow: Longman, 1993. – 268p.
- [110] Cai, Jian Ping. Asymptotic expressions for the solutions to the Cauchy problem for higher - order ordinary differential equations, when the limit equation has a singularity (Chinese) [Text] / Jian Ping Cai, Zong Chi Lin // Zhangzhou Shiyan Xuebao (Ziran Kexue Ban). 1993. No. 4. PP. 25-30.
- [111] Emile, P. Sur la determination des integrals des équations linéaires aux dérivées partielles par les valeurs des dérivées normales sur un contour [Text] / Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 24 (1907), p. 335-340.
- [112] Fuchs, L. ber Relationen, Welche für die Zwischen je zwei singulden Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearen Differentialgleichungen [Text] / L. Fuchs //Journal für die reine und angewandte Math. – 1873. – V. 76. – P. 177 -213.
- [113] Fuchs, L. ber die Werte, welche die Integrale einer Differentialgleichungen erster Ordnung in singulden Punkten annehmen können [Text] / L. Fuchs //Berl. Ber. – 1886. – P. 219-300.
- [114] Frobenius G. bber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen [Text] / G. Frobenius // Journal für die reine und angewandte Math. – 1873. – Bd. 76. – P. 214-235.

- [115] Gilbert, R.C. Asymptotic formulas for solutions of singular linear ordinary differential equation [Text] / R.C. Gilbert // Proc. Roy. Edinburgh Sect. A 81 (1978). No. 1-2. PP. 57-70.
- [116] Hasanov, A.H. Some decomposition formulas associated with the Lauricela Function $F_A^{(r)}$ and other multiple hypergeometric function [Text] / A.H. Hasanov, M. Srivastava // Applications Mathematical Letters, 19, 2006. – pp. 113-121.
- [117] Liouville, J. Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires et sur le développement des fonctions en séries
Publié dans: Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, série 1, tome 3, 1838, pp. 561–614.
- [118] Hasanov, A.H. Fundamental solutions of ganeralized biaxially symmetric Helmholtz equation. Complex Variables and Elliptic Equations [Text] / A.H. Hasanov. – Vol. 52, №8, 2007. – pp. 673-683.
- [119] Rajabov, N. Linear hyperbolic equations with two super singular lines //Integral equations and boundary value problems [Text], Beijing Ghina, 2-7 September 1990. World scientific. Singapore. / N. Rajabov. – New Jersey-London-Harg Kong. – P. 170-175.
- [120] Rajabov, N. Linear hyperbolic equations of the fourth order with two singular lines [Text] / N. Rajabov // Proc. Asian Math. Conf. Hong-Cong. 1990. PP. 387-393.
- [121] Rajabov, N. Linear hyperbolic equations with two super - singular lines [Text] / N. Rajabov // Inntegral equations and boundary value problems. World Scientific Conference. Sinqapore. New - Jersey. London. Hong-Cong. 1991. PP. 170-175.
- [122] Rajabov, N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Abstract ISAAC Congress. New York: University of Delaware USA. 1997.

- [123] Rajabov, N. Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary differential equation with super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // International congress of Mathematicians. Berlin. 1998. P. 186.
- [124] Rajabov, N. Introduction to ordinary differential equations with super-singular coefficients, [Text] / N. Rajabov. - Dushanbe, 1998. - 160 p.
- [125] Rajabov, N.R. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients / N. R. Rajabov. - Dushanbe: TSNU, 1998. – 158 p.
- [126] Rajabov, N. First order over determined system with singular point [Text] / N. Rajabov, A.N. Adib //Bulletin de la Classe des Sciences, 6 series, Tome XVIII (1-6), 2007. – P. 65-80.
- [127] Rajabov, N. Model three equations second order over determined linear system with two degenerating lines [Text] / N. Rajabov // Abstracts of the International Conference, Inverse Problems: Modeling and Simulation, hold on May 26-30, 2008 at Oludtniz, Fethye, Turkey. – P. 156-157.
- [128] Rajabov, N. About one class of linear first order over determined system with interior singular and super-singular manifolds [Text] / N. Rajabov //More progresses in Analysis, Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania Italy 25-30 July 2005, World Scientific, New Jersey - London -Singapore -Beijing -Shanghai -Hong Kong -Taipei -Chennai, 2009. – P. 1207-1217.
- [129] Salakhidinov, M.S. Solution of the Neumanu Dirichlet boundary value problem for generalized bi- axially symmetric Helmholtz equation [Text] / M.S. Salakhidinov, A. Hasanov. – Complex Variables and Elliptic Equations 53(4), 2008. – P. 355-364.
- [130] Wilczynski, E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces [Text] / E.J. Wilczynski. – Leipzig: B.G. Teubner, 1906. – 324 p.

Б) Публикации автора по теме диссертации

1. В изданиях из перечня ВАК при Президенте

Республики Таджикистан:

- [1-A] Валиев Р.С. Об исследовании одного класса системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал) Серия естественных наук. -2023. - №2 / 1 (108). - С. 23-26.
- [2-A] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал). Серия естественных наук. - 2023. - №2 / 2 (111). - С. 17-21.
- [3-A] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Вестник филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. Серия естественных наук. 2023. Том 1, №4(35). - С. 30-38.
- [4-A] Валиев Р.С. Оид ба як системаи муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби дуюм бо ду хати дохилии сингулярӣ [Матн] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Светоч науки (Международный научный журнал). Высшая аттестационная комиссия при президенте Республики Таджикистан. 2024. №001 (1)/2024. - С. 106-116.
- [5-A] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] /

Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Доклады НАН Таджикистана. – 2024. – Т.67, №5-6. - С. 243-253.

[6-A] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Хорогского университета. – 2024. №2 (30). - С. 197-205.

[7-A] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Известия НАН Таджикистана. – 2024. –№3(196) - С. 48-59.

[8-A] Валиев Р.С. Задачи с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник Бохтарского государственного университета им. Носира Хусрава (научный журнал) Серия естественных наук. 2024. - №2/3 (126) ч-2. - С. 8-15.

[9-A] Валиев Р.С. Задачи с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями. [Текст] / Валиев Р.С. // Вестник «Номаи Донишгоҳ» «Ученые записки». Серия естественные и экономические науки. Худжандский государственный университет им. Б. Гафуров. – 2024. – №2 (69). – С. 3-8.

2. В сборниках материалов конференций:

[10-A] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 24-28 мая 2022г. -С. 254-257.

[11-A] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго

- порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы теории оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений». - г. Бишкек, 23-25 июня 2022г. - С. 108-110.
- [12-А] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сверхсингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2022» - г. Уфа, 28 сент-1 окт 2022г. Том 2. - С. 276-278.
- [13-А] Валиев Р.С. Об одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её приложения” ТНУ. – г. Душанбе, 20-21 окт 2022 г. - С. 257-260.
- [14-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции “Комплексный анализ и его приложения” БГУ им. Н. Хусрав. - г. Бохтар, 19 ноя 2022г. - С. 239-242.
- [15-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики» НАНТ институт математики имени А. Джураева. – г. Душанбе, 26-27 мая 2023 г. - С. 275-277.

- [16-A] Валиев Р.С. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] \ Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Сборник трудов. – Казань, 22-27 авг. 2023 г. - Т. 66. - С. 275-276.
- [17-A] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной переопределённой системе дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] \ Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С.//Международной научно-практической конференции «Междисциплинарное синхронное и асинхронное использование инновационных образовательных технологий в контексте развития креативной активности учащихся и студентов». - г. Денау респ. Узбекистан, 29-30 сентября 2023г. - С. 29-31.
- [18-A] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения» ТНУ. – Душанбе, 5 окт. 2023г. - С. 261-263.
- [19-A] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» - г. Уфа, 4 – 8 октября 2023 г. - С. 144 – 146.
- [20-A] Валиев Р.С. Об одной системе дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. //

Международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» - г. Ташкент респ. Узбекистан, 23 – 25 ноября, 2023 г. - С. 148 – 149.

[21-А] Валиев Р.С. Задача с начальными данными для одной переопределенной системы дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р. С. // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения» ТНУ. – г. Душанбе, 18 мая 2024 г. - С. 359-362.

[22-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С. // Тезисы докладов республиканской научно-практической конференции на тему «Современные проблемы и перспективы прикладной математики» Каршинский государственный университет. - г. Карши, 24 - 25 мая 2024 г. - С. 375-377.

[23-А] Валиев Р.С. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р.С. // Международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения» НАНТ институт математики имени А. Джураева. – г. Душанбе, 30-31 мая 2024 г. - С. 233-236.

[24-А] Валиев Р.С. Об исследовании одной переопределённой системе дифференциальных уравнений второго порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф.М., Валиев Р. С. // Республиканская конференция “Интегративный подход к развитию креативной деятельности учащихся соединения синхронно и асинхронно

общеобразовательные дисциплины” – г. Ташкент, 25 – 26 октября 2024 г. - С. 20-23.

- [25-А] Валиев Р.С. Задача с начальными данными для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя внутренними сингулярными линиями [Текст] / Валиев Р. С. // Материалы международной научно - практической конференции XIV Ломоносовские чтения «Роль филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе в развитии науки и образования». Ч-2. (Естественные науки). – г. Душанбе, 22-23 ноя. 2024г. - С. 24-28.
- [26-А] Валиев Р.С. Интегральные представления решений для одной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя внутренними суперсингулярными линиями [Текст] / Шамсудинов Ф. М., Валиев Р. С. // Сборник трудов всероссийская школа – конференция «Лобачевские чтения». – г. Казань, 27 ноя – 2 дек. 2024 г. - С. 70-72.