

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию А.Захурбекова  
«Экстремальные задачи приближения функций многих  
переменных суммами Фурье по произвольным ортогональным  
системам», представленную на соискание учёной степени доктора  
философии (PhD) по специальности 6D060100 – Математика:  
6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный  
анализ

**Актуальность темы.** В диссертационной работе рассматривается решение экстремальных задач для многомерных рядов Фурье, основанных на произвольных ортогональных системах. Эти задачи изучаются в контексте классов функций многих переменных, которые характеризуются обобщённым модулем непрерывности. Данный подход позволяет углубить понимание свойств функций и расширить методы анализа в области функционального анализа и теории приближения. Во всех главах используется теория операторов обобщённого сдвига, на основе которой порождаются обобщённые модули непрерывности и различные классы функций. Для указанных классов функций вычисляются точные константы в неравенствах типа Джексона, находятся точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и их промежуточных производных. Скорость сходимости ряда Фурье зависит от структурных свойств функции и установление связи между этими свойствами остаётся важной задачей математического анализа. основополагающие работы в этой области были проведены такими учёными, как Д.Джексон, С.Н.Бернштейн и Ш.Валле-Пуссен. В дальнейшем исследования в этой области развивались благодаря трудам А.Н.Колмогорова, А.Зигмунда, С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, А.Ф.Тимана, В.К.Дзядыки, Н.П.Корнейчука, В.М.Тихомирова, М.К.Потапова и многих других. Эти работы значительно углубили понимание взаимосвязи между структурными свойствами функций и скоростью сходимости их рядов Фурье, что имеет важное значение для теории приближения и функционального анализа.

Актуальность данной тематики в настоящее время обусловлена её применением в общей теории оптимального восстановления, особенно в задачах, возникающих при обработке сигналов и кодировании функций по заданной информации.

### **Структура и содержание работы.**

Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, трёх глав, обсуждения полученных результатов, выводов и списка литературы. Общий объём работы составляет 102 страницы, библиография включает 44 наименования.

Во **введении** автор подробно излагает структуру диссертации, что позволяет читателю лучше понять основные направления исследования и его организацию. Это способствует более глубокому восприятию представленных научных результатов и их значимости в контексте современной теории приближения функций. В части **общая характеристика работы** приводятся цель и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость исследования, основные положения, выносимые на защиту, степень достоверности результатов, соответствие диссертации паспорту специальности, личный вклад автора в исследование, апробация полученных результатов, публикации по теме диссертации.

В **первой** главе представлено содержание обзора литературы, анализ существующих исследований и формулировка нерешённых задач, что создает основу для дальнейших исследований в данной области.

Во второй главе диссертации представлены точные оценки наилучших среднеквадратических приближений различными суммами Фурье (такими как «треугольные», «гиперболические» и «круговые») по произвольным ортогональным системам. В этой главе изложены следующие теоремы и их следствия: теорема 2.1.1, следствия 2.1.1-2.1.2, теорема 2.2.1, теорема 2.3.1, следствия 2.3.1-2.3.2, теорема 2.4.1, следствия 2.4.1-2.4.2, теорема 2.5.1 и следствия 2.5.1-2.5.2. Эти результаты значительно обобщают работы В.А. Абилова, М.К. Керимова и Э.В. Селимханова. Основным результатом первого параграфа второй главы диссертации является теорема 2.1.2. В этой теореме для всех  $k, N \in \mathbb{N}$ ,  $0 < q \leq \infty$ ,  $0 < h < 1$ , и для функции  $\varphi(t) \geq 0$ , которая суммируемая и не эквивалентна нулю на отрезке  $[0, h]$ , доказано экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left( \int_0^h \Omega_k^q(f, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \left( \int_0^h [1 - (1-t)^N]^{kq} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}.$$

В третьей главе обсуждаются точные верхние грани наилучших приближений для некоторых классов функций двух переменных, используя «круговые» суммы Фурье. Эти функции описываются обобщённым модулем непрерывности в гильбертовом пространстве  $L_2$ .

Основным результатом первого параграфа третьей главы является теорема 3.1.2, в которой для произвольной функции  $f \in L_2^{(r)}$  при любых  $r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$  и  $r \geq s$  устанавливается неравенство типа Колмогорова:

$$\mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq \left( \mathcal{E}_R^2(f) \right)^{1-s/r} \cdot \left( \mathcal{E}_R^2(\mathcal{D}^r f) \right)^{s/r}.$$

Это неравенство является точным в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_2^{(r)}$ , для которой оно обращается в равенство. Пользуясь результатом, полученным в теореме 3.1.2, вычисляется точное значение верхней грани отношения наилучшего совместного приближения  $\mathcal{D}^s f$  к самому наилучшему приближению  $f \in L_2^{(r)}$  "круговыми" суммами Фурье. В теореме 3.1.4 также найдено точное значение верхней грани  $\mathcal{E}_R(\mathcal{D}^s f)_{L_2}$  для всех функций  $f \in W^{(r)}L_2$ , у которых выполняется условие  $\|\mathcal{D}^{(r)} f\|_{L_2} \leq 1$ .

В заключительном параграфе 3.3 рассматривается экстремальная задача наилучшего совместного приближения функций  $f \in L_2^{(r)}(Q)$  и их частных производных с использованием круговых сумм Фурье. В теореме 3.3.1 установлена точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина для совместного наилучшего полиномиального приближения функции  $f$  и всех её промежуточных производных  $\mathcal{D}^s f$  при всех  $0 \leq s \leq r$ , где  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ .

#### **Степень достоверности результатов проведенных исследований.**

Научные положения, выводы, сформулированные в диссертации А.Захурбекова, не вызывают сомнения, подтверждаются с помощью строгих математических доказательств. Все утверждения диссертационной работы являются обоснованными.

**Новизна и практическая значимость, ценность научных работ соискателя.** Основные научные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми:

- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций  $f \in L_2$  "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве  $L_2(Q)$ ;
- найдено наилучшее совместное приближение функций  $f \in L_2^{(r)}(Q)$  и их частных производных "круговыми" суммами Фурье;
- найдены точные значения поперечников различных классов функций.

**Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем.** По теме диссертации опубликованы 12 научных работ, 6 статей входят в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а 6 - в трудах международных конференций. Основные результаты диссертационной работы достаточно полно отражены в этих публикациях.

**Достоинства и недостатки в содержании и оформлении диссертации.** Диссертация А.Захурбекова на тему "Экстремальные задачи приближения функций многих переменных суммами Фурье по произвольным ортогональным системам" является достойным продолжением и развитием работ в теории приближения функций. Это высококвалифицированное и завершённое исследование, выполненное на достойном теоретическом уровне, объём которого соответствует требованиям. Автор демонстрирует владение современными методами, разработанными в области теории приближения функций и функционального анализа, что свидетельствует о высоком уровне его подготовки и компетентности в данной области. В целом автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеется незначительное количество опечаток редакционного характера, например:

- 1) на странице 24: пятая строка сверху, в место слова "точным" написано слова "точным то есть лишняя буква "о";
- 2) страница 22: В следствии 2.5.2. при написании формулы пропущен знак =;
- 3) страница 46, при оценке снизу знак " $\leq$ " надо поменять на знак " $\geq$ ";
- 4) страница 46, третья строка снизу, в левой части равенства  $= 1/(N + 1)$  пропущена буква  $h$  и т.д.

Выявленные недостатки не влияют на общую положительную оценку работы.

**Соответствие автореферата основному содержанию диссертации.** Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Содержание автореферата и его основные положения, выносимые на защиту, соответствуют основному содержанию самой диссертации. Научные публикации автора отражают основные положения и выводы диссертации.

**Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным Положением о присуждении учёных степеней.** Диссертационная работа Захурбекова Алишера "Экстремальные задачи приближения функций многих переменных суммами Фурье по произвольным ортогональным системам" и полученные научные результаты соответствуют

критериям Положения о порядке присуждения учёных степеней ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора философии PhD по физико-математическим наукам, а её автор заслуживает присуждения искомой учёной степени по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 - Вещественный,  
комплексный и функциональный анализ,  
заместитель директора по науке и образованию  
Института математики им. А.Джураева  
Национальной академии наук Таджикистана

Каримов О.Х.

734063, Республика Таджикистан,  
г. Душанбе, ул. Айни, 299/4  
Веб-сайт: <https://www.mintas.tj>  
Тел.: +992(200)709854.

Подпись Каримова О.Х. заверяю  
Начальник ОК ИМ НАНТ



Маллаева М.

30.01.2025г.