Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

На правах рукописи

Захурбеков Алишер

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени доктора философии (PhD)
– доктор по специальности 6D060100 – Математика: 6D060101
– Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана, доктор
физико-математических наук,
профессор Шабозов М.Ш.

ДУШАНБЕ — 2024

Оглавление

Обозначения

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел

$\mathbb{R}^k$ — k-мерное евклидово пространство

L_2 — пространство суммируемых с квадратом функций

$\{u_i(\boldsymbol{x})\}_{i=0}^{\infty}$, $\{v_j(\boldsymbol{y})\}_{j=0}^{\infty}$ — полные ортонормированные системы функций

$S_{N-1}^{(1)}(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — “треугольные” частичные суммы ряда Фурье

$P_{N-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — подпространство обобщенных полиномов

$E_{N-1}^{(1)}(f)$ — наилучшее приближение функции $f \in L_2$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{N-1}$

$\mathscr{F}_h f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — оператор обобщенного сдвига

$\Omega_k(f,\delta)_2$ — обобщенный модуль непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$

$b_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — бернштейнтовский n-поперечник класса $\mathfrak{M}$ в L_2

$d_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — колмогоровский n-поперечник класса $\mathfrak{M}$ в L_2

$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — линейный n-поперечник класса $\mathfrak{M}$ в L_2

$d^n(\mathfrak{M}, L_2)$ — гельфандовский n-поперечник класса $\mathfrak{M}$ в L_2

$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2)$ — проекционный n-поперечник класса $\mathfrak{M}$ в L_2

$S_{N-1}^{(2)}(f;\boldsymbol{x})$ — “гиперболическая” частичная сумма ряда Фурье

$E_{N-1}^{(2)}(f)_2$ — наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$

$\sigma_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — “сферическая” частная сумма $N-1$-го порядка ряда Фурье

$Q_{N-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — множество всевозможных обобщённых сферических полиномов степени не более $N-1$

$E^{(3)}_{N-1}(f)$ — наилучшее среднеквадратическое "сферическое" приближение функции $f \in L_2$

$S_R(f; x, y)$ — "круговая" частичная сумма Фурье функции $f \in L_2$

$\mathscr{E}_R(f)$ — наилучшее среднеквадратическое "круговое" приближение функции $f \in L_2(Q),\ Q := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$

$\mathcal{D}$ — дифференциальный оператор Лапласа второго порядка вида $\mathcal{D} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

В в е д е н и е

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Работа посвящена некоторым вопросам приближения функции многих переменных суммами Фурье по различным ортогональным системам.

Известно, что скорость сходимости ряда Фурье зависит от структурных свойств функции и установление связи между структурными свойствами функции и скоростью сходимости ее ряда Фурье было и остается одной из интересных задач математического анализа. Основополагающие работы в этом направлении были выполнены Д.Джексоном, С.Н.Бернштейном, Ш.Валле-Пуссеном. Дальнейшее развитие эти работы получили в исследованиях А.Зигмунда, С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, А.Ф.Тимана, В.К.Дзядыка, Н.П.Корнейчука, В.М.Тихомирова, М.К.Потапова и др. В вопросах, связанных с оценкой скорости сходимости рядов Фурье на тех или иных классах функций, весьма удобной характеристикой оказалась величина, равная точной верхней грани уклонения частичных сумм ряда Фурье на рассматриваемых классах функций в той или иной метрике. Она была введена в 1935 году А.Н.Колмогоровым, который установил асимптотически точную оценку скорости сходимости тригонометрического ряда Фурье на классе r-раз дифференцируемых 2π-периодических функций в равномерной метрике. Впоследствии эта задача была обобщена в различных направлениях. Наиболее полные и интересные результаты здесь были получены в работах С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, А.В.Ефимова, С.А.Теляковского. Сама задача, суть которой состоит в отыскании точных равенств для верхней грани уклонений тригонометрическими или алгебраическими полиномами, порожденных данным линейным методом на заданном классе функций, называется задачей Колмогорова–Никольского.

В настоящее время большая часть вопросов теории приближения, относящихся к проблемам оценок скорости сходимости одномерных рядов Фурье в различных нормированных пространствах, достаточно хорошо изучена. Хотя и здесь остались и будут возникать в дальнейшем важные проблемы, требующие своего решения. Что же касается многомерном случае, то здесь картина намного хуже в том смысле, что точные результаты получены в редких случаях.

Отыскание точного значения величины наилучшего приближения для скорости сходимости кратных рядов Фурье по специальным функциям на тех или иных классах функций многих переменных в различных функциональных пространствах с весом сводится к исследованию величины, равной точной верхней грани уклонения частичных сумм ряда Фурье на рассматриваемом классе. Так как, в отличие от одномерных рядов Фурье, здесь нет естественного способа построения частичных сумм, то мы сначала фиксируем некоторый класс функций, а затем построим частичные суммы кратного ряда Фурье так, чтобы величина наилучшего приближения была минимально возможной.

Ответить на эти вопросы можно только разобравшись в общих вопросах аппроксимации бесконечномерных функциональных компактов конечномерными. К настоящему времени имеется развитый аппарат теории поперечников бесконечномерных компактов и нахождению точных значений n-поперечников различных классов функций в различных линейных нормированных пространствах посвящено достаточно много работ, но точное значение поперечников классов функций многих переменных крайне мало. Этим объясняется актуальность выбранной тематики.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы. Существенный вклад в решение экстремальных задач теории приближения функций двух переменных тригонометрическими и алгебраическими полиномами и вопросов нахождения точных констант в неравенствах Джексона–Стечкина внесли С.М.Никольский [26], А.Ф.Тиман [38], М.К.Потапов [27–30], Н.П.Корнейчук [24, 25], В.К.Дзядык [21], А.И.Степанец [34–36], С.Б.Вакарчук [16, 17], М.Ш.Шабозов [40–42] и многие другие.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2020-2024 гг. по теме “Теория аппроксимации функций”.

Общая характеристика работы

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в решении экстремальных задач для двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности.

Задачи исследования. В соответствие с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- найти верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найти верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найти верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найти верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$;
- найти наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье;
- найти точные значения различных поперечников в $L_2^{(r)}(Q)$.

Объект исследования. Объектом исследования являются различные экстремальные задачи, связанные с наилучшим совместным приближением функций многих переменных по произвольным ортогональным системам, и вычисление точных значений поперечников.

Предмет исследования. Предметом исследования является получение точных неравенств типа Джексона–Стечкина между наилучшими совместными приближениями функций многих переменных и их промежуточных производных для классов функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности k-го ($k \in \mathbb{N}$) порядка.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- найдены верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$;
- найдено наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных "круговыми" суммами Фурье;
- найдены точные значения поперечников различных классов функций.

Теоретическая и научно-практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в других экстремальных задачах теории приближения функций многих переменных, как в конечных областях, так и во всей плоскости.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о нахождении верхних граней наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- теоремы о верхних гранях наилучших среднеквадратических приближений функций “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- теоремы о верхних гранях наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам;
- теоремы о верхних гранях наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$;
- теоремы о наилучшем совместном приближении функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье.
- теоремы о точных значениях поперечников.

Степень достоверности результатов. Достоверность научных результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведённых в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности (формуле и области исследования). Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060101 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ и является разделом математического анализа, указанного в пункте III параграфа 3 паспорта научной специальности.

Личный вклад соискателя ученой степени. Задача исследования и выбор метода доказательств сформулированы научным руководителем работы, оказывающего также консультативное содействие. Основные результаты диссертационной работы, перечисленные в разделе "Научная новизна", получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2019-2024 гг.);
- республиканской научно-практической конференции "*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*" (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- международной конференции "*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*" (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*" (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной научно-практической конференции "*Комплексный анализ и его приложения*" (Бохтар, 19 ноября 2022 г.);

- международной конференции “*Современные проблемы математики*” (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.);
- международной научно-практической конференции “*Современные проблемы математики и её преподавания*” (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.).

Публикации по теме диссертации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 12 научных работах, из них 6 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 6 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка цитированной литературы из 44 наименований, занимает 102 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теоремы, леммы, следствия или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА I. Анализ литературы по теме диссертационной работы и постановка нерешённых экстремальных задач

§1.1. Методы приближения

В этой главе излагается анализ изученной литературы по теме диссертационной работы, приводятся основы теоретико-методологического исследования, анализ существующих проблем и полученных результатов, а также нерешенные задачи по теме диссертационной работы.

В диссертационной работе даны точные оценки наилучших совместных приближений двойного ряда Фурье по произвольным ортогональным системам функций на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности, а также точные оценки различных поперечников этих классов функций. Так как, в отличие от одномерного случая, для двойных рядов нет естественного способа построения частных сумм, то мы сначала строим некоторые классы функций, а затем соответствующий метод приближения — "треугольные", "гиперболические" и другие частные суммы двойного ряда Фурье, которые позволяют отыскать точные оценки наилучших приближений на указанных классах функций. Известно, что в вопросах, связанных с разложением функций в ряд Фурье по тригонометрической системе или по классическим ортогональным многочленам и точным оценкам наилучших приближений, существенную роль играют операторы сдвига, связанные с «теоремами сложения» и «теоремами умножения» для этих систем. Для произвольных систем таких теорем нет.

В диссертации, опираясь на некоторые ранее известные факты, построен оператор обобщенного сдвига, который позволяет определять классы функций, характеризующиеся обобщенным модулем непрерывности. Для этих классов функций решены различные экстремальные задачи теории приближения функций многих переменных.

Обозначим через $L_2(G^l_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : G^l_{\boldsymbol{t}} \to \mathbb{R}$ с неотрицательным суммируемым на $G^l_{\boldsymbol{t}}$ весом $h(\boldsymbol{t})$ и нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^l_{\boldsymbol{t}}} h(\boldsymbol{t}) f^2(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} \right)^{1/2},$$

$$\big(\boldsymbol{t} := (t_1, t_2, \ldots, t_k) \subset G^l_{\boldsymbol{t}} \subset \mathbb{R}^l, k \geq 1, l \in \mathbb{N}\big).$$

Мы будем предполагать, что весовая функция $h(\boldsymbol{t})$ и область $G^l_{\boldsymbol{t}} \subset \mathbb{R}^l$ таковы, что в пространстве $L_2(G^l_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ существует полная ортонормированная система функций.

Пусть далее

$$u_i(\boldsymbol{x}),\ i = 0, 1, 2, \ldots;\ v_j(\boldsymbol{y}),\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

– полные ортонормированные системы функций соответственно в пространствах $L_2(G^m_{\boldsymbol{x}}; p(\boldsymbol{x}))$ и $L_2(G^n_{\boldsymbol{y}}; q(\boldsymbol{y}))$ (существование таких систем мы заранее предполагаем).

Через $L_2 := L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ обозначим пространство суммируемых с квадратом функций $f : G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}} \to \mathbb{R}$ с весом $p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})$ и нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}) f^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \right)^{1/2},$$

$$G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = G^m_{\boldsymbol{x}} \times G^n_{\boldsymbol{y}} :=$$

$$:= \Big\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \in G^m_{\boldsymbol{x}}; \boldsymbol{y} \in G^n_{\boldsymbol{y}}; \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)\Big\}.$$

Известно, что система функций

$$u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),\ i = 0, 1, \dots,\ j = 0, 1, \dots$$

будет полной ортонормированной системой в пространстве L_2 [8–12].

Пусть $f \in L_2$ и

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), \tag{1.1.1}$$

где

$$c_{ij}(f) = \int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

— её ряд Фурье,

$$S^{(1)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le i+j < N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

$$S^{(2)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} c_{00}(f)u_0(\boldsymbol{x})v_0(\boldsymbol{y}), & N = 1, \\ \sum\limits_{0 < \overline{i}\cdot\overline{j} < N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}), & N = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$$S^{(3)}_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2 < N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

где $\overline{k} = \max(1, k)$, $k = 0, 1, \dots$ соответственно "треугольные", "гиперболические", "сферические" частичные суммы (1.1.1).

Известно, что [1–5, 12–15, 33]

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c^2_{ij}(f). \tag{1.1.2}$$

Через

$$E_N^{(k)}(f) = \inf_{P_N^{(k)}} \|f - P_N^{(k)}\| \quad (k = 1, 2, 3) \tag{1.1.3}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ полиномами вида

$$P_N^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le i+j < N} a_{ij} u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}),$$

$$P_N^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} u_{00}(f) u_0(\boldsymbol{x}) v_0(\boldsymbol{y}), & N = 1, \\ \displaystyle\sum_{0 < \overline{i} \cdot \overline{j} < N} u_{ij}(f) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}), & N = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$$P_N^{(3)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i^2 + j^2 < N} a_{ij} u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}),$$

где, как и выше, $\overline{k} = \max(1, k)$, $k = 0, 1, \dots$.

Рассмотрим теперь функцию

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\eta}; h) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x}) u_i(\boldsymbol{\xi}) v_j(\boldsymbol{y}) v_j(\boldsymbol{\eta}) h^{i+j},$$

где $h \in (0, 1)$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \in G_{\boldsymbol{x}}^m \times C_{\boldsymbol{\xi}}^m$, $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\eta}) \in G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n$ и равенство здесь понимается в смысле сходимости в евклидовой топологии, то есть в топологии пространства

$$L_2\big((G_{\boldsymbol{x}}^m \times C_{\boldsymbol{\xi}}^m) \times (G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n);\ p(\boldsymbol{x}) p(\boldsymbol{\xi}) q(\boldsymbol{y}) q(\boldsymbol{\eta})\big)$$

(последнее обозначение очевидно).

Известно ([20, с.,272]), что в ряде частных случаев для

$$T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\boldsymbol{x}) u_n(\boldsymbol{y}) h^n,$$

$$(0 < h < 1,\ G_{\boldsymbol{x}}^1 = G_{\boldsymbol{y}}^1 = (a, b) \subset \mathbb{R})$$

можно указать и явные выражения.

В пространстве $L_2 = L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ рассмотрим следующий оператор

$$F_h f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) =$$

$$\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{\xi\eta}}} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\eta}; 1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \int\limits_{G^m_{\boldsymbol{\xi}}}\int\limits_{G^n_{\boldsymbol{\eta}}} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\eta}; 1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}, \tag{1.1.4}$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Пользуясь оператором (1.1.4) в первом параграфе второй главы вводится в рассмотрение явный вид модуля непрерывности k-го ($k \in \mathbb{N}$) порядка

$$\Omega_k^2(f, \delta)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-\delta)^{i+j}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

и доказано следующее общее утверждение для наилучшего приближения "треугольными" частичными суммами вида

$$S_N^{(1)}(f; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le i+j < N} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$$

Теорема 2.1.1. *Пусть* $k, N \in \mathbb{N}, 0 < q \le \infty, 0 < h < 1, \varphi(t) \ge 0$ *– суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0, h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f, t)_2 \varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Существует функция $f_0 \in L_2$, *для которой реализуется верхняя грань в равенстве.*

Из теоремы 2.1.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 2.1.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.1.1. Положим* $\varphi(t) := \varphi_0(t) = N(1-t)^{N-1}, N \in \mathbb{N}, 0 < h < 1$. *Тогда из* (2.1.14) *следует экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\Big[1-(1-h)^N\Big]^{k+1/q}}.$$

В частности, полагая $h = 1/N, N \in \mathbb{N}, q = 1/k, k \in \mathbb{N}$, *будем иметь*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{2^k}{\Big(1-(1-1/N)^N\Big)^{2k}}.$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{\Big(1-(1-1/N)^N\Big)^{2k}} = \frac{2^k}{\Big(1-e^{-1}\Big)^{2k}},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Следствие 2.1.2 (уточнение теоремы 1.2.4). *Если в условиях теоремы* 2.1.1 *полагать* $q = 1/k,\ k \in \mathbb{N}, \varphi(t) \equiv 1$, *то получаем*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^{k}} = \left(h - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1}\Big(1-h\Big)^{N+1}\right)^{-k}.$$

Пользуясь результатами теоремы 2.1.1 и её следствий, в третьем параграфе второй главы для класса $W_q(\Omega_k, \varphi, h)$ найдены точные значения всех рассматриваемых поперечников.

В четвёртом параграфе второй главы найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций "гиперболическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам.

Сначала вводится модуль непрерывности k-го порядка, имеющий вид:

$$\Omega_k^2(f,\delta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-\delta)^{i\cdot j}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

и доказана следующая

Теорема 2.4.1. *Пусть* $k, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$, $h \in (0, 1/4)$, $0 < q \leq \infty$, $\varphi(t) \geq 0$ *– суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0, h]$, $h \in (0, 1/4)$ *функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

При этом существует функция $f_1 \in L_2$, *для которой при каждом значении* $N = 4, 9, 16, \ldots$ *неравенство обращается в равенство.*

Из теоремы 2.4.1 вытекают следующие следствия

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы* 2.4.1 *в случае* $\varphi(t) := \varphi_1(t) = 2\sqrt{N}(1-t)^{2\sqrt{N}-1}$, $N = 4, 9, 16, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi_1(t)dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/k}}{\left[1-(1-h)^{2\sqrt{N}}\right]^{k+1/q}}.$$

Следствие 2.4.2. *В условиях теоремы* 2.4.1 *при* $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(t) \equiv 1$, $N = 4, 9, 16, \ldots$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k} = \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k}.$$

Из этого равенства для произвольной функции $f \in L_2$ *получаем неравенство*

$$E_{n-1}^{(2)}(f)_2 \leq \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k,$$

из которого в частности при $h = \left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}$ *получаем неравенство доказанное ранее Э.В.Селимхановым* [33] *в следующем виде:*

$$E_{n-1}^{(2)}(f)_2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\sqrt{N}+1}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{N}+1}\right)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k} \cdot \left(\int\limits_0^{\left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}} \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k =$$

$$= (2\sqrt{N}+1)^k \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k(2\sqrt{N}+1)} \cdot \left(\int\limits_0^{\left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}} \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k.$$

В пятом параграфе второй главы найдено наилучшее среднеквадратическое приближение функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам.

В этом случае модуль непрерывности k-го порядка имеет вид

$$\Omega_k^2(f,t)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-h)^{i^2+j^2}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

Основным результатом пятого параграфа второй главы является

Теорема 2.5.2. *При любых $k, N \in \mathbb{N}$, $0 < q \le \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(t) \ge 0$ – суммируемая на $(0,h]$ функция, имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\mu(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq}\mu(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Следствие 2.5.2. *В условиях теоремы 2.5.2 при $\mu(t) := \mu_0(t) = N^2(1-t)^{N^2-1}$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k+1/q}}.$$

В частности, при $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, следует равенство

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}} = \frac{2^k}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{2k}}.$$

Из последнего равенства, вытекает, что

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^{N^{-2}} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}} =$$

$$= \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{\left[1-\left(1-1/N^2\right)^{N^2}\right]^{2k}} = 2^k\left(1-e^{-1}\right)^{-2k}.$$

§1.2. Постановка задач

Пользуясь общим видом оператора обобщённого сдвига (1.1.4) для каждого способа приближения — “треугольная”, “гиперболическая”, “сферическая” сумма Фурье, решаются конкретные экстремальные задачи. Указываются случаи, когда решение экстремальной задачи является точноым. Точность результатов подтверждается введением экстремальной функции из исследуемого класса функций.

Именно получение точных результатов представляет возможность найти точные значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного поперечников различных классов функций. Из полученных нами результатов, как частные, вытекают недавно доказанные результаты В.А.Абилова и В.Э.Селимханова [12], В.Э.Селимханова [33], а именно обобщаются в L_p-норме $(0 < p \leq \infty)$ следующие известные утверждения доказанные в гильбертовом пространстве L_2.

Теорема 1.2.1. *Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка*

$$E_N^{(1)}(f) \leq \left[1 - (1-h)^N\right]^{-k} \Omega_k(f, h),$$
$$(h \in (0,1),\ k = 1, 2, \ldots;\ N = 1, 2, \ldots),$$

причём при каждом фиксированном $N = 1, 2, \ldots$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

Теорема 1.2.2. *Пусть $f \in L_2$. Тогда*

$$E_N^{(2)}(f) \leq \left[1 - (1-h)^N\right]^{-k} \Omega_k(f, h),$$

$$(h \in (0,1),\ k = 1, 2, \ldots;\ N = 1, 2, \ldots),$$

и при каждом фиксированном $N = 1, 2, \ldots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

Теорема 1.2.3. *Для любой функции $f \in L_2$ справедлива оценка*

$$E_N^{(3)}(f) \le \left[1-(1-h)^{2\sqrt{N}}\right]^{-k} \Omega_k(f,h),$$

$$(h \in (0,1/4),\ k = 1,2,\ldots;\ N = 4,5,\ldots),$$

причём при каждом фиксированном $N = 4,9,\ldots$ константа в правой части неравенства уменьшена быть не может.

Теорема 1.2.4. *Пусть $f \in L_2$. Тогда*

$$E_N^{(1)}(f) \le (N+1)^k \left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{N+1}} \Omega_k^{1/k}(f,h)dh\right)^k$$

$$(h \in (0,1),\ k = 1,2,\ldots;\ N = 1,2,\ldots)$$

и при каждом фиксированном $N = 1,2,\ldots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

Теорема 1.2.5. *Пусть $f \in L_2$. Тогда*

$$E_N^{(2)}(f) \le (N+1)^k \left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{N+1}} \Omega_k^{1/k}(f,h)dh\right)^k$$

$$(h \in (0,1),\ k = 1,2,\ldots;\ N = 1,2,\ldots)$$

и при каждом фиксированном $N = 1,2,\ldots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

Теорема 1.2.6. *Для любой функции $f \in L_2$ справедливо неравенство*

$$E_N^{(3)}(f) \le (2\sqrt{N}+1)^k \left(1-\frac{1}{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k(2\sqrt{N}+1)} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2\sqrt{N}+1}} \Omega_k^{1/k}(f,h)dh\right)^k,$$

причем при $N = 4,9,\ldots$ константу в правой части неравенства уменьшить нельзя.

ГЛАВА II. Точные оценки наилучших среднеквадратических приближений суммами Фурье по произвольным ортогональным системам

В этой главе найдены точные оценки наилучших приближений функций “треугольными”, “гиперболическими”, “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам функций на классах функций многих переменных, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором обобщённого сдвига. Известно, что в отличие от одномерного случая, для двойных рядов Фурье естественного способа построения частичных сумм Фурье не существует, поэтому сначала нужно строить некоторые классы функций, а затем соответствующий метод приближения, например, “треугольные”, “гиперболические”, “сферические” и другие частичные суммы двойного ряда Фурье, которые позволяют найти точные оценки наилучших приближений на этих классах функций.

Обычно в вопросах, связанных с разложением функций в ряды Фурье по тригонометрической системе функций или по классическим ортогональным многочленам в оценках их наилучших приближений существенную роль играют операторы сдвига, связанные с теоремами сложения и теоремами умножения для этих систем. Поскольку для произвольных ортогональных систем такие теоремы отсутствуют, то в работе, опираясь на некоторые ранее известные факты, построен оператор обобщённого сдвига, позволяющий определить классы функций, характеризующиеся обобщённым модулем непрерывности и на этих классах функций найдены точные оценки наилучших приближений и вычислены значения различных N-поперечников.

§2.1. Верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам

В этом параграфе найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных частичными суммами Фурье по произвольным ортогональным системам функций на некоторых классах функций многих переменных, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым оператором обобщённого сдвига.

В ряде работ [6, 18, 22, 43] изучается вопрос нахождения точных оценок скорости сходимости рядов Фурье по различным ортогональным системам функций одной переменной. Для функций многих переменных аналогичные вопросы менее изучены. Как правило, в отличие от одномерного случая, для двойных рядов нет естественного способа построения частичных сумм, а потому вводят в рассмотрение различные методы приближения — “треугольные”, “гиперболические”, “сферические” и другие частичные суммы, которые позволяют найти точные оценки скорости сходимости наилучших приближений на соответствующих классах функций. При этом существенную роль играют операторы обобщенного сдвига и порожденный ими обобщенный модуль непрерывности, которым определяются классы функций. Пусть $\mathbb{R}^k$ – k-мерное евклидово пространство. Его точки, как обычно, будем обозначать через $\boldsymbol{t} := (t_1, t_2, \ldots, t_k)$. Обозначим через $L_2 := L_2(G^k_{\boldsymbol{t}}; h(\boldsymbol{t}))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f : G^k_{\boldsymbol{t}} \to \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с неотрицательным суммируемым на $G^k_{\boldsymbol{t}}$ весом $h(\boldsymbol{t}) := h(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ и конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(G_{\boldsymbol{t}^k})} = \left(\int\limits_{G_{\boldsymbol{t}}^k} h(\boldsymbol{t}) f^2(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} \right)^{1/2},$$

$$\big(\boldsymbol{t} := (t_1, t_2, \ldots, t_k) \subset G_{\boldsymbol{t}}^k \subset \mathbb{R}^k, k \geq 1, k \in \mathbb{N}\big).$$

Будем предполагать, что весовая функция $h(\boldsymbol{t})$ и область $G_{\boldsymbol{t}}^k \subset \mathbb{R}^k$ таковы, что в пространстве $L_2(G_{\boldsymbol{t}}^k; h(\boldsymbol{t}))$ существует полная ортонормированная система функций.

Пусть

$$\Big\{u_i(\boldsymbol{x})\Big\}_{i=0}^{\infty} := \Big\{u_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)\Big\}_{i=0}^{\infty},$$

$$\Big\{v_j(\boldsymbol{y})\Big\}_{j=0}^{\infty} := \Big\{v_j(y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big\}_{j=0}^{\infty}$$

— две полные ортонормированные системы функций соответственно в пространствах $L_2(G_{\boldsymbol{x}}^m; p(\boldsymbol{x}))$ и $L_2(G_{\boldsymbol{y}}^n; q(\boldsymbol{y}))$, а $L_2 := L_2(G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := f(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) : G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n} \to \mathbb{R}$ с весом $p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}) := p(x_1, x_2, \ldots, x_m)q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G_{\boldsymbol{xy}}^{m+n}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}) f^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \right)^{1/2},$$

где

$$G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n} = G_{\boldsymbol{x}}^m \times G_{\boldsymbol{y}}^n :=$$

$$:= \Big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \in G_{\boldsymbol{x}}^m; \boldsymbol{y} \in G_{\boldsymbol{y}}^n; \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)\Big\}.$$

Хорошо известно, что система функций

$$\Big\{u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y})\Big\}_{i,j=0}^{\infty} :=$$

$$:= \Big\{ u_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot v_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \Big\}_{i,j=0}^{\infty}$$

будет полной ортонормированной системой в пространстве $L_2 = L_2(G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n})$. Для функции $f \in L_2$ ее ряд Фурье имеет вид

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}), \tag{2.1.1}$$

где

$$c_{ij}(f) = \int\limits_{G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n}} p(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \tag{2.1.2}$$

– коэффициенты Фурье функции $f \in L_2$.

В (2.1.1) знак равенства понимается в смысле сходимости в норме пространства L_2. Через

$$S_{N-1}^{(1)}(f; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le i+j \le N-1} c_{ij}(f) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y})$$

обозначим "треугольные" частичные суммы ряда Фурье (2.1.1).

Подпространство обобщенных полиномов вида

$$P_{N-1}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le i+j \le N-1} a_{ij} u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y})$$

обозначим $\mathcal{P}_{N-1}$, а через

$$E_{N-1}^{(1)}(f) := \inf \Big\{ \|f - P_{N-1}^{(1)}\| : P_{N-1}^{(1)} \in \mathcal{P}_{N-1} \Big\} \tag{2.1.3}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_2$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{N-1}$. Несложные вычисления с учетом ортогональности системы функций $\Big\{ u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) \Big\}_{i,j=0}^{\infty}$ в области $G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n}$ приводят нас к равенству

$$E_{n-1}^{(1)}(f) = \left\{ \sum_{i+j \ge N} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.1.4}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};h)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{y})v_j(\boldsymbol{\eta})h^{i+j}, \tag{2.1.5}$$

где $h\in(0,1)$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\in G^m_{\boldsymbol{x}}\times G^m_{\boldsymbol{\xi}}$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta})\in G^n_{\boldsymbol{y}}\times G^n_{\boldsymbol{\eta}}$ и равенство здесь понимается в смысле сходимости в евклидовой топологии, то есть в топологии пространства

$$L_2\big((G^m_{\boldsymbol{x}}\times G^m_{\boldsymbol{\xi}})\times(G^n_{\boldsymbol{y}}\times G^n_{\boldsymbol{\eta}});\,p(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{\eta})\big).$$

В пространстве $L_2=L_2\left(G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}};p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})\right)$ рассмотрим следующий оператор

$$\mathscr{T}_hf(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{\xi\eta}}}p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}=$$

$$=\int\limits_{G^m_{\boldsymbol{\xi}}}\int\limits_{G^n_{\boldsymbol{\eta}}}p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}, \tag{2.1.6}$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Указанный оператор обладает следующими простыми свойствами [6]:

1) $\mathscr{T}_h(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathscr{T}_hf+\mu\mathscr{T}_hg,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},f,g\in L_2;$

2) $\|\mathscr{T}_h\|\le\|f\|;$

3) $\mathscr{T}_h(u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}))=(1-h)^{i+j}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y});$

4) $\|\mathscr{T}_h-f\|\to 0, h\to 0+.$

Пусть $f\in L_2$. Следуя работе [6], определим конечные разности первого и высших порядков функции f равенствами

$$\triangle_hf(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathscr{T}_hf(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\mathscr{T}_h-E)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\triangle^k_hf(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\triangle_h(\triangle^{k-1}_hf(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))=$$

$$= (\mathscr{F}_h - E)^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l \binom{k}{l}\mathscr{F}_h^l f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

где $\mathscr{F}_h^0 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = Ef(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \mathscr{F}_h^i f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathscr{F}_h(\mathscr{F}_h^{i-1} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})), i = \overline{1,k};$

E – единичный оператор в пространстве L_2. Величину [6]

$$\Omega_k(f,\delta)_2 = \sup\Big\{\|\triangle_h^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\| : 0 < h \le \delta\Big\} \tag{2.1.7}$$

будем называть обобщенным модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_2$.

Пользуясь равенством (2.1.5) и ортогональностью систем функций $\Big\{u_i(\boldsymbol{x})\Big\}_{i=0}^{\infty}$ и $\Big\{v_j(\boldsymbol{y})\Big\}_{j=0}^{\infty}$ соответственно в областях $G_{\boldsymbol{x}}^m$ и $G_{\boldsymbol{y}}^n$, получаем

$$\mathscr{F}_n f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int\limits_{G_{\boldsymbol{\xi}}^m}\int\limits_{G_{\boldsymbol{\eta}}^n} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \int\limits_{G_{\boldsymbol{\xi}}^m}\int\limits_{G_{\boldsymbol{\eta}}^n} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})\Bigg\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{y})v_j(\boldsymbol{\eta})(1-h)^{i+j}\Bigg\}d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\Bigg\{\int\limits_{G_{\boldsymbol{\xi}}^m}\int\limits_{G_{\boldsymbol{\eta}}^n} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}\Bigg\}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})(1-h)^{i+j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\cdot(1-h)^{i+j}.$$

Отсюда, учитывая равенство (2.1.1), имеем

$$\triangle_h f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = F_h f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (F_h - E)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})(1-h)^{i+j} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)\big[(1-h)^{i+j}-1\big]u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}).$$

Аналогичным образом, для второй разности с учётом свойства 3) оператора $\mathscr{F}_h$ имеем

$$\triangle_h^2 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \triangle_h^1\big(\triangle_h^1 f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big) = \triangle_h^1\big((\mathscr{F}_h - E)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big) =$$

$$= \triangle_h^1\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)\big[(1-h)^{i+j}-1\big]u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)\big[(1-h)^{i+j}-1\big]\triangle_h^1\big(u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)\big[(1-h)^{i+j}-1\big]\big(\mathscr{F}_h - E\big)\big(u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)\big[(1-h)^{i+j}-1\big]^2 u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}).$$

По методу математической индукции для любого $k \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\triangle_h^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)\big[(1-h)^{i+j}-1\big]^k u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}).$$

Применяя тождество Парсеваля к последнему равенству, приходим к соотношению

$$\|\triangle_h^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \Big[1-(1-h)^{i+j}\Big]^{2k} c_{ij}^2(f), \tag{2.1.8}$$

пользуясь которым для величины (2.1.7) запишем явный вид модуля непрерывности k-го порядка:

$$\Omega_k^2(f,\delta)_2 = \sup\Big\{\|\triangle_h^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\| : 0 < h \le \delta\Big\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \Big[1-(1-\delta)^{i+j}\Big]^{2k} c_{ij}^2(f). \tag{2.1.9}$$

Сформулируем и докажем основные результаты данного параграфа.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.1.1. *Пусть* $k, N \in \mathbb{N}, 0 < q \le \infty, 0 < h < 1, \varphi(t) \ge 0$ – *суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.1.10)$$

Существует функция $f_0 \in L_2$, *для которой реализуется верхняя грань в равенстве* (2.1.10).

Доказательство. В работе [6] доказано, что для любой функции $f \in L_2(G_{\boldsymbol{xy}}^{m+n}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ при любом $h \in (0,1)$ справедлива оценка

$$E_{N-1}^{(1)}(f) \le \left[1-(1-h)^N\right]^{-k}\Omega_k(f,h),$$

из которой для любого $t \in (0,1)$ запишем неравенство

$$\Omega_k(f,t) \ge \left[1-(1-t)^N\right]^{k}\cdot E_{N-1}(f). \qquad (2.1.11)$$

Обе части неравенства (2.1.11) возведём в степень $q(0 < q \le \infty)$, умножим на весовую функцию $\varphi(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,h]$, $0 < h < 1$. В результате приходим к неравенству

$$\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\varphi(t)dt \ge$$

$$\ge \left(E_{N-1}^{(1)}(f)\right)^q \cdot \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt$$

или, что то же,

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq E_{N-1}^{(1)}(f)\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.1.10):

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.1.12)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу заметим, что для функции

$$f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = u_m(\boldsymbol{x})v_n(\boldsymbol{y}) := u_m(x_1,x_2,\ldots,x_m)v_n(y_1,y_2,\ldots,y_n),$$

очевидно принадлежащей пространству $L_2(G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n})$, где $m+n=N\in\mathbb{N}$, в силу равенств (2.1.4) и (2.1.9) имеем:

$$E_{N-1}^{(1)}(f_0)=1,\ \Omega_k(f,t)=\left[1-(1-t)^N\right]^k, \qquad (2.1.13)$$

а потому, учитывая равенства (2.1.13) запишем

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \geq$$

$$\geq \frac{E_{N-1}^{(1)}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f_0,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q}} = \tag{2.1.14}$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^N\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Сопоставляя оценку сверху (2.1.12) с аналогичной оценкой снизу (2.1.14), получаем требуемое равенство (2.1.10), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.1. Из доказанной теоремы 2.1.1 вытекает ряд следствий

Следствие 2.1.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.1.1. *Положим* $\varphi(t) := \varphi_0(t) = N(1-t)^{N-1}, N \in \mathbb{N}, 0 < h < 1$. *Тогда из* (2.1.14) *следует экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^N\right]^{k+1/q}}. \tag{2.1.15}$$

В частности, полагая в (2.1.15) $h = 1/N, N \in \mathbb{N}, q = 1/k, k \in \mathbb{N}$, *будем иметь*

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{2^k}{\left(1-(1-1/N)^N\right)^{2k}}.$$

Отсюда, переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2} \frac{E_N^{(1)}(f)}{\left(N\int\limits_0^{1/N} \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \sup_{N\in\mathbb{N}} \frac{2^k}{\Big(1-(1-1/N)^N\Big)^{2k}} = \frac{2^k}{\Big(1-e^{-1}\Big)^{2k}}, \ k\in\mathbb{N}.$$

Действительно, полагая в равенстве (2.1.10) $\varphi_0(t) = N(1-t)^{N-1}$, $N\in\mathbb{N}$, $0<t<1$, получаем

$$\sup_{f\in L_2} \frac{E^{(1)}_{N-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\varphi_0(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$=\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi_0(t)dt\right)^{-1/q} =$$

$$=\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}N(1-t)^{N-1}dt\right)^{-1/q} =$$

$$=\left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}d\Big[1-(1-t)^N\Big]\right)^{-1/q} =$$

$$= \frac{(kq+1)^{1/q}}{\Big[1-(1-h)^N\Big]^{k+1/q}},$$

откуда и следует равенство (2.1.15).

В работе Э.В.Селимханова [33] доказано, что при любых $k,N\in\mathbb{N}$ для произвольной функции $f\in L_2$ справедливо неравенство

$$E^{(1)}_{n-1}(f) \le (N+1)^k\left(1-\frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{N+1}} \Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k \qquad (2.1.16)$$

и при каждом фиксированном $N \in \mathbb{N}$ константу в правой части (2.1.16) уменьшить нельзя.

В следующем следствии вытекающем из теоремы 2.1.1, получен более общий результат, чем (2.1.16).

Следствие 2.1.2. *Если в условиях теоремы* 2.1.1 *полагать* $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}, \varphi(t) \equiv 1$, *то получаем*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k} =$$

$$= \left(h - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1}\Big(1-h\Big)^{N+1}\right)^{-k}. \qquad (2.1.17)$$

Полагая в (2.1.17) $h = 1/(N+1)$, получаем равенство

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left(\int\limits_0^{1/(N+1)} \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k} = \left[\frac{1}{N+1}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{N+1}\right]^{-k} =$$

$$= (N+1)^k \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left((N+1)\int\limits_0^{1/(N+1)} \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k} = \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}.$$

Переходя к верхней грани по всем $N \in \mathbb{N}$, приходим к равенству

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2} \frac{E_{N-1}^{(1)}(f)}{\left((N+1)\int\limits_0^{1/(N+1)} \Omega_k^{1/k}(f,t)dt\right)^k} =$$

$$= \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big(1 - \frac{1}{N+1}\Big)^{-k(N+1)} = e^k.$$

§2.2. Точные значения n-поперечников класса $W_k(\Phi)$.

В этом параграфе вычислим точные значения ряда известных n-поперечников в теории приближения некоторого класса функций, задаваемой мажорантной функцией Φ.

Всюду далее, через $W_k(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2$, для которых при любом $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\Omega_k(f;t) \le \Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ – неотрицательная монотонно возрастающая функция на $[0,+\infty)$ и $\Phi(0)=0$. Приведём определение n-поперечников в гильбертовом пространстве L_2.

Пусть S – единичный шар в L_2; $S := \{f \in L_2 : \|f\| \le 1\}$, $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_2, \Lambda_n \subset L_2$ – n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства L_2 в Λ_n, $\mathscr{L}^{\perp} : L_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n. Величины [39, 44]

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\Big\{\sup\big\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\big\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\Big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\sup\big\{\inf\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\big\{\sup\{\|f-\mathscr{L}(f)\| : f \in \mathfrak{M}\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_n\big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\sup\big\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\big\} : \Lambda^n \subset L_2\Big\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\big\{\sup\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\} : \mathscr{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейнтовским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками.* Поскольку L_2 является гильбертовым пространством, то справедливы следующие соотношения между перечисленными n-поперечниками (см., например, [39],[44]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \tag{2.2.1}$$

Поставим целью вычислить точные значения вышеперечисленных n-поперечников класса $W_k(\Phi)$.

Нам далее при оценке снизу бернштейновского n-поперечника понадобится следующая теорема В.М.Тихомирова [25, с.255]

Теорема Тихомирова (о поперечниках шара). *Пусть* $L_{n+1} - (n+1)$*-мерное подпространство линейного нормированного пространства* X*, а* S_{n+1}*– замкнутый шар радиуса* γ *в* L_{n+1}*, то есть*

$$S_{n+1} := \{x : x \in L_{n+1}, \|x\| \leq 1\}.$$

Тогда

$$b_n(S_{n+1,}X) = \gamma.$$

Теорема 2.2.1. *При любых* $k \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2, \ldots, N$, $N \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}(W_k(\Phi), L_2) = \Big[1 - (1-h)^N\Big]^{-k} \Phi(h), \tag{2.2.2}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников: бернштейновский* $b_n(\cdot)$*, колмогоровский* $d_n(\cdot)$*, линейный* $\delta_n(\cdot)$*, гельфандовский* $d^n(\cdot)$ *и проекционный* $\pi_n(\cdot)$*.*

Доказательство. В силу соотношения (2.2.1) между n-поперечниками и того факта, что значения n-поперечников $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ и $\pi_n(\cdot)$ в L_2 совпадают, достаточно оценить сверху *колмогоровский* n-поперечник. Пусть $f \in W_k(\Phi)$. Так как треугольная частная сумма N-го порядка

$$S_{N-1}^{(1)}(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j\le N-1} c_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$$

содержит $\frac{1}{2}N(N+1)$ линейно независимых функций

$$u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),\ 0 < i+j \le N-1,$$

то из неравенства [6]

$$E_{N-1}^{(1)}(f) \le \Big[1-(1-h)^N\Big]^{-k}\Omega_k(f,h),$$

где $k,N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$, $h \in (0,1)$, точную при каждом фиксированном N, получаем оценку сверху *колмогоровского* поперечника

$$d_{\frac{1}{2}N(N+1)}\big(W_k(\Phi),L_2\big) \le \Big[1-(1-h)^N\Big]^{-k}\Phi(h).$$

Отсюда, при любом $l = 0,1,2,\dots,N$, получаем

$$d_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_k(\Phi),L_2\big) \le \Big[1-(1-h)^N\Big]^{-k}\Phi(h). \tag{2.2.3}$$

Для получения оценки снизу *бернштейновского* поперечника, равной правой части (2.2.3) в $\frac{1}{2}(N+1)N+2$ – мерном подпространстве полиномов вида

$$P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j\le N} a_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

рассмотрим шар

$$\mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} := \left\{P_N^{(1)} \in \mathscr{P}_N : \|P_N^{(1)}\| \le \Big[1-(1-h)^N\Big]^{-k}\Phi(h)\right\}.$$

То есть таких полиномов $P_N^{(1)} \in \mathscr{P}_N$, у которых

$$\|P_N^{(1)}\|^2 = \sum_{0\le i+j\le N} a_{ij}^2 \le \Big[1-(1-h)^N\Big]^{-2k}\Phi^2(h)$$

и покажем, что шар $\mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$ содержится внутри класса $W_k(\Phi)$.

Пусть полином $P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \subset \mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$. Тогда в силу формулы (2.1.8)

$$\|\triangle_h^k f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\Big[1-(1-h)^{i+j}\Big]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

для полинома $P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \subset \mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$ имеем

$$\|\triangle_h^k P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2 = \sum_{0\le i+j\le N}\Big[1-(1-h)^{i+j}\Big]^{2k} a_{ij}^2(f) \le$$

$$\le \Big[1-(1-h)^{N}\Big]^{2k}\sum_{0\le i+j\le N} a_{ij}^2 \le \Big[1-(1-h)^{N}\Big]^{2k}\times$$

$$\times\Big[1-(1-h)^{N}\Big]^{-2k}\Phi^2(h) = \Phi^2(h).$$

Таким образом, мы доказали, что для $P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$, $\|\triangle_h^k P_n^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\| \le \Phi(h)$, или что то же

$$\Omega_k(P_N^{(1)}, h) \le \Phi(h),$$

которое означает, что $\mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} \in W_k(\Phi)$.

В силу определения *бернштейновского* поперечника это означает, что

$$b_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}\big(W_k(\Phi), L_2\big) \ge b_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}\big(\mathscr{B}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}, L_2\big) \ge$$

$$\ge \Big[1-(1-h)^{N}\Big]^{-2k}\Phi(h). \tag{2.2.4}$$

Требуемое равенство (2.2.2) получаем из сравнения оценки сверху (2.2.3) для *колмогоровского* поперечника с оценкой снизу (2.2.4) для *бернштейновского* поперечника, чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

Из доказанной теоремы при $h = 1/N$ следует асимптотическое равенство

$$\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_k(\Phi), L_2\big) \sim \left(1-\frac{1}{e}\right)^{-k}\Phi\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

§2.3. Точные значения поперечников класса $W_q(\Omega_k, \varphi; h)$

Результаты теорем, доказанные в параграфе 1.1, позволяют найти точные значения n-поперечников, перечисленных в параграфе 1.2.

Исходя из результата теоремы 2.1.1 через $W_q(\Omega_k, \varphi; h)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, усреднённых с весом $\varphi(t)$, значение модуля непрерывности k-го порядка $\Omega_k(f,t)$ которых на отрезке $[0,h]$ удовлетворяет условию

$$\left(\int_0^h \Omega_k^q(f,t)_2 \varphi(t)dt\right)^{1/q} \leq 1.$$

В принятых обозначениях справедлива

Теорема 2.3.1. *Пусть $k, N \in \mathbb{N}$, $l = 1, 2, \ldots, N$, $0 < q \leq \infty$, $h \in (0,1)$, $\varphi(t) \geq 0$ – суммируемая на отрезке $[0,h]$ функция.*

Тогда справедливы равенства

$$\begin{gathered} \lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_q(\Omega_k, \varphi; h), L_2\big) = \\ = E_{\frac{1}{2}N(N+1)}\big(W_q(\Omega_k, \varphi; h)\big) = \\ = \left(\int_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq} \varphi(t)dt\right)^{-1/q}, \end{gathered} \tag{2.3.1}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – есть любой из поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$ и $\pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Из экстремального равенства (2.1.10) для произвольной функции $f \in L_2$ следует неравенство

$$E_{N-1}^{(1)}(f) \leq \left(\int_0^h \big[1-(1-t)^N\big]^{kq} \varphi(t)dt\right)^{-1/q} \left(\int_0^h \Omega_k^q(f,t)_2 \varphi(t)dt\right)^{1/q}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_q(\Omega_k, \varphi, h)$ и повторив схему рассуждении при доказательстве теоремы 2.2.1, в силу соотношения (2.2.1) получаем оценку сверху всех поперечников

$$\begin{gathered}\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_q(\Omega_k,\varphi;h),L_2\big) \le \\ \le d_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_q(\Omega_k,\varphi;h),L_2\big) \le \\ \le \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}.\end{gathered} \tag{2.3.2}$$

Для того, чтобы получить соответствующую оценку снизу перечисленных в параграфе 1.2 поперечников в соответствий с соотношением (2.2.1) между поперечниками, оценим снизу *бернштейновский* n-поперечник класса $W_q(\Omega_k,\varphi;h)$. Для этого введем в рассмотрение $\dfrac{1}{2}(N+1)(N+2)$ – мерный шар полиномов вида

$$P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{0\le i+j\le N} a_{ij}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),$$

которые содержат $\dfrac{1}{2}(N+1)(N+2)$ линейно независимых функций

$$u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),\ 0<i+j\le N.$$

Указанный шар имеет вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{R}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} := \\ = \left\{P_N^{(1)} \in \mathscr{P}_N : \|P_N^{(1)}\| \le \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{-1/q}\right\}.\end{gathered}$$

Покажем, что шар $\boldsymbol{R}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$ содержится в классе $W_q(\Omega_k,\varphi;h)$.

Пусть полином $P_N^{(1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \subset \boldsymbol{R}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}$. Тогда из формулы (2.1.9) получаем

$$\Omega_k^2(P_N^{(1)},t)_2 = \sum_{0<i+j\le N}\Big[1-(1-t)^{i+j}\Big]^{2k}a_{ij} \le$$

$$\leq \Big[1-(1-t)^N\Big]^{2k} \sum_{0<i+j\leq N} a_{ij}^2 = \Big[1-(1-t)^N\Big]^{2k} \|P_N^{(1)}\|^2$$

или что то же

$$\Omega_k(P_N^{(1)},t)_2 \leq \Big[1-(1-t)^N\Big]^{k} \|P_N^{(1)}\|. \tag{2.3.3}$$

Возведя обе части неравенства (2.3.3) в степень q $(0<q\leq\infty)$, затем умножив на весовую функцию $\varphi(t)$ и интегрируя по отрезку $[0,h]$, получаем

$$\int_0^h \Omega_k^q(P_N^{(1)},t)_2\varphi(t)dt \leq \big\|P_N^{(1)}\big\|^q \int_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi(t)dt,$$

откуда сразу вытекает неравенство

$$\left(\int_0^h \Omega_k^q\big(P_N^{(1)},t\big)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \big\|P_N^{(1)}\big\| \left(\int_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q}. \tag{2.3.4}$$

Если теперь предполагать, что $P_N^{(1)} \in \mathscr{P}_N \cap L_2$, то

$$\|P_N^{(1)}\| \left(\int_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q} \leq 1$$

и мы из неравенства (2.3.4) имеем

$$\left(\int_0^h \Omega_k^q\big(P_N^{(1)},t\big)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q} \leq 1,$$

а это означает, что шар $\boldsymbol{R}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} \subset W_q(\Omega_k,\varphi;h)$. Но тогда, в силу определения *бернштейновского* n-поперечника и теоремы В.М.Тихомирова [25], запишем оценку снизу

$$b_{\frac{1}{2}N(N+1)}\big(W_q(\Omega_k,\varphi;h),L_2\big) \geq$$

$$\geq b_{\frac{1}{2}N(N+1)}\big(\boldsymbol{R}_{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}, L_2\big) \geq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^N\Big]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q}. \tag{2.3.5}$$

Требуемое соотношение (2.3.1) получаем из сравнения оценки всех n-поперечников сверху (2.3.2) с оценкой снизу (2.3.5) этих же n-поперечников.

Из доказанной теоремы 2.3.1 вытекает

Следствие 2.3.1. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.1.1. *Тогда при* $\varphi_0(t) = N(1-t)^{N-1}$, $N \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$ *имеет место равенство*

$$\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_q(\Omega_k, \varphi_0; h), L_2\big) = \frac{(kq+1)^{1/q}}{\Big[1-(1-h)^N\Big]^{k+1/q}}. \tag{2.3.6}$$

В частности, из (2.3.6) *при* $h = 1/N$, $q = 1/k$, $k, N \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\left(W_q\Big(\Omega_k, \varphi_0; \frac{1}{N}\Big), L_2\right) =$$

$$= \frac{2^k}{\Big(1-(1-1/N)^N\Big)^{2k}},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Следствие 2.3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.3.1. *Тогда при* $q = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $\varphi(t) \equiv 1$ *имеем*

$$\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_{1/k}(\Omega_k, 1; h), L_2\big) =$$

$$= \left(h + \frac{1}{N+1}\Big[(1-h)^{N+1}-1\Big]\right)^{-k}.$$

Из последнего равенства при $= 1/(N+1)$ следует, что

$$\lambda_{\frac{1}{2}N(N+1)+l}\big(W_{1/k}(\Omega_k, 1; 1/(N+1)), L_2\big) =$$

$$= (N+1)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{N+1}\right)^{-k(N+1)}.$$

§2.4. Верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам

В первом параграфе данной главы мы вычислили точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммам Фурье по произвольным ортогональным системами функций, которые характеризовались специальным обобщённым модулем непрерывности высшего порядка, порождённым заданным оператором обощённого сдвига (2.1.6).

В данном параграфе мы продолжим исследование по данной тематике и изучаем вопрос нахождения точных оценок наилучших среднеквадратических приближений “гиперболическими” частными суммами Фурье функций многих переменных по произвольным многомерным ортогональным системам.

Данный вопрос частично изучен в ряде работ В.А.Абилова и М.К.Керимова [8], В.А.Абилова, М.В.Абилова и М.К.Керимова [10], В.А.Абилова, Г.А.Айгунова [5], В.А.Абилова, Ф.В.Абилова, М.К.Керимова[6], а также в работах С.Б.Вакарчука и А.Швачко [18], М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоева [40], М.О.Акобиршоева [14] и многих других.

Отметим, что в перечисленных работах речь идёт о порядке сходимости частичных “треугольных”, “прямоугольных” и “гиперболических” сумм Фурье по произвольным ортогональным системам функций многих переменным к заданной функции.

Наша задача состоит в нахождении точных оценок наилучших среднеквадратических приближений произвольной функции многих переменных

$f(\boldsymbol{t}) \in L_2 := L_2\big(G_{\boldsymbol{t}}^k; h(\boldsymbol{t})\big)$ – пространство суммируемых с квадратом функций

$$f : G_{\boldsymbol{t}}^k \to \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$$

с неотрицательным весом $h(\boldsymbol{t}) := h(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ и конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(G_{\boldsymbol{t}})} = \left(\int\limits_{G_{\boldsymbol{t}}^k} h(\boldsymbol{t}) f^2(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} \right)^{1/2} < \infty.$$

Для $f \in L_2$ запишем ряд Фурье, который имеет вид (2.1.1):

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}),$$

где, как и в (2.1.2), коэффициенты Фурье c_{ij} определяются равенством

$$c_{ij}(f) = \int\limits_{G_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}^{m+n}} p(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} =$$

$$= \int\limits_{G_{\boldsymbol{x}}^m} \int\limits_{G_{\boldsymbol{y}}^n} p(\boldsymbol{x}) q(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}.$$

Через

$$S_{N-1}^{(2)}(f; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le \bar{i} \cdot \bar{j} < N} c_{ij}(f) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}),$$

где $\overline{k} := \max(1, k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначим “гиперболическую” частичную сумму ряда (2.1.1).

Через

$$E_{N-1}^{(2)}(f)_2 := E_{N-1}(f)_{L_2} = \inf\{\|f - p_{N-1}^{(1)}\|, : p_{N-1} \in \mathscr{P}_{N-1}\} \tag{2.4.1}$$

обозначим наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f \in L_2$ полиномами вида

$$P_{N-1}^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{0 \le \bar{i} \cdot \bar{j} \le N-1} a_{ij} u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}),$$

где, как и выше, $\overline{k} := \max(1, k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Хорошо известно, что в этом случае

$$E_{N-1}^{(2)}(f) = \left\{ \sum_{\overline{i} \cdot \overline{j} \geq N} c_{ij}^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.4.2}$$

В работе [33] доказывается, что для "гиперболического" суммирования модуль непрерывности k-го порядка имеет следующий вид

$$\Omega_k^2(f, \delta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left[1 - (1-\delta)^{i \cdot j}\right]^{2k} c_{ij}^2(f)$$

Для нас важным является тот факт, что при любых $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$ и $h \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ справедлива оценка [33]:

$$E_{N-1}^{(2)}(f) \leq \left[1 - (1-h)^{2\sqrt{N}}\right]^{-k} \Omega_k(f, h), \tag{2.4.3}$$

причём при каждом фиксированном $N = 4, 9, 16, \ldots$ константа в правой части (2.4.3) уменьшена быть не может. Более того, для любой функции $f \in L_2$ при любых $k \in \mathbb{N}$, $h \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$ справедлива оценка [33]:

$$E_{N-1}^{(2)} \leq \left(2\sqrt{N}+1\right)^k \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k(2\sqrt{N}+1)} \times$$

$$\times \left(\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{N}+1}} \Omega_k^{\frac{1}{k}}(f; h) dh \right)^k, \tag{2.4.4}$$

причём при $N = 4, 9, 16, \ldots$ константу в правой части (2.4.4) уменьшить нельзя.

Здесь мы, отправляясь от оценки (2.4.3), докажем более общее утверждение, из которого как частный случай вытекает неравенство (2.4.4).

Теорема 2.4.1. *Пусть* $k, N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$, $h \in (0, 1/4)$, $0 < q \leq \infty$, $\varphi(t) \geq 0$ *– суммируемая не эквивалентная нулю на отрезке* $[0, h]$, $h \in (0, 1/4)$ *функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{f \in L_2} \frac{E^{(2)}_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f, t)\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq$$
$$\leq \left(\int\limits_0^h \left[1 - (1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq} \varphi(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{2.4.5}$$

При этом существует функция $f_1 \in L_2$, *для которой при каждом значении* $N = 4, 9, 16, \ldots$ *неравенство* (2.4.5) *обращается в равенство.*

Доказательство. Перепишем неравенство (2.4.3) в виде

$$\Omega_k(f, h) \geq \left[1 - (1-h)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq} E^{(1)}_{N-1}(f) \tag{2.4.6}$$

и, поступая также, как и при доказательстве теоремы 2.1.1, возведём обе части неравенства (2.4.6) в степень q $(0 < q \leq \infty)$ и, умножив на функцию $\varphi(t)$, после интегрировании по отрезку $[0, h]$, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^h \Omega_k^q(f, t)\varphi(t)dt \geq$$
$$\geq \left(E^{(1)}_{N-1}(f)_2\right)^q \int\limits_0^h \left[1 - (1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq} \varphi(t)dt,$$

откуда сразу вытекает, что

$$\frac{E^{(2)}_{N-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f, t)\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q}. \tag{2.4.7}$$

Так как неравенство (2.4.7) имеет место для произвольной функции $f \in L_2$, то из него получаем

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/q}} \leq \tag{2.4.8}$$

$$\leq \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q},$$

и тем самым неравенства (2.4.5) доказано для любого $N \in \mathbb{N}$.

Докажем точность неравенство (2.4.5) для $N = 4, 9, 16, \ldots$ и функции

$$f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = u_\nu(\boldsymbol{x})v_\nu(\boldsymbol{y}) = u_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m)v_\nu(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

где $\nu^2 = N = 4, 9, 16, \ldots$.

Для этой функции в силу равенств (2.4.2) и (2.1.9) получаем

$$E_{N-1}^{(2)}(f_1)_2 \equiv 1,$$

$$\Omega_k(f_1,t)_2 = \left[1-(1-t)^{2\sqrt{N}}\right]^k = \left[1-(1-t)^{2\nu}\right]^k,$$

$$\Omega_k^q(f_1,t)_2 = \left[1-(1-t)^{2\nu}\right]^{kq},$$

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f_1,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q} = \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{2\nu}\right]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q},$$

пользуясь которыми запишем

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^q(f,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}}\geq$$

$$\geq\frac{E_{n-1}^{(2)}(f_1)_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^q(f_1,t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/q}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h\Big[1-(1-t)^{2\nu}\Big]^{kq}\varphi(t)dt\right)^{1/q}}. \tag{2.4.9}$$

Сопоставляя неравенства (2.4.8) и (2.4.9), завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Из теоремы 2.4.1 вытекают следующие следствия

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.1 в случае* $\varphi(t):=\varphi_1(t)=2\sqrt{N}(1-t)^{2\sqrt{N}-1}$, $N=4,9,16,\ldots$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^q(f,t)_2\varphi_1(t)dt\right)^{1/q}}=\frac{(kq+1)^{1/k}}{\Big[1-(1-h)^{2\sqrt{N}}\Big]^{k+1/q}}.$$

Следствие 2.4.2. *В условиях теоремы* 2.4.1 *при* $q=1/k$, $k\in\mathbb{N}$, $\varphi(t)\equiv 1$, $N=4,9,16,\ldots$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{n-1}^{(2)}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\Omega_k^{1/k}(f,t)_2dt\right)^{k}}=$$

$$= \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k}. \qquad (2.4.10)$$

Из (2.4.10) *для произвольной функции* $f \in L_2$ *получаем неравенство*

$$E_{n-1}^{(2)}(f)_2 \le \left(h - \frac{1}{2\sqrt{N}+1} + \frac{1}{2\sqrt{N}+1}(1-h)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k} \times$$

$$\times \left(\int_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k$$

из которого в частности при $h = \left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}$ *получаем неравенство* (2.4.10), *доказанное ранее Э.В.Селимхановым [33] в следующем виде:*

$$E_{n-1}^{(2)}(f)_2 \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2\sqrt{N}+1}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{N}+1}\right)^{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k} \cdot \left(\int_0^{\left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}} \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k =$$

$$= (2\sqrt{N}+1)^k \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{N}+1}\right)^{-k(2\sqrt{N}+1)} \cdot \left(\int_0^{\left(2\sqrt{N}+1\right)^{-1}} \Omega_k^{1/k}(f,t)_2 dt\right)^k.$$

§2.5. Наилучшее среднеквадратическое приближение функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам

В предыдущих параграфах мы исследовали экстремальные задачи наилучшего среднеквадратического полиномиального приближения функций $f \in L_2$ “треугольными” и “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортонормированным системам функций. В ряде случаев были найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений классов функций и вычислены точные значения различных поперечников указанных классов функций.

В данном параграфе будем изучать аналогичные вопросы для наилучшего среднеквадратического приближения функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортонормированными системами функций на некоторых классах функций многих переменных, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности, порождённым конкретным оператором обобщённого сдвига.

Как и в предыдущих параграфах, через $L_2 := L_2(G_{\boldsymbol{t}}^l; h(\boldsymbol{t}))$ обозначим пространство измеримых и суммируемых с квадратом функций $f : G_{\boldsymbol{t}}^l \to \mathbb{R}$ с неотрицательным интегрируемым на $G_{\boldsymbol{t}}^l$ весом $h(\boldsymbol{t})$ и конечной нормой

$$\|f\| := \|f\|_{L_2(G_{\boldsymbol{t}}, h(\boldsymbol{t}))} = \left(\int\limits_{G_{\boldsymbol{t}}^l} h(\boldsymbol{t}) f^2(\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t} \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\boldsymbol{t} := (t_1, t_2, \ldots, t_l) \in G_{\boldsymbol{t}}^l \subset \mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$.

По прежнему будем предполагать, что весовая функция $h(\boldsymbol{t})$ в области $G_{\boldsymbol{t}}^l \subset \mathbb{R}^l$ такова, что в пространстве $L_2 := L_2(G_{\boldsymbol{t}}^l; h(\boldsymbol{t}))$ существует полная ортонормированная система функций.

Итак, пусть $u_i(\boldsymbol{x}) := u_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ – полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2 := L_2(G^m_{\boldsymbol{x}}; p(\boldsymbol{x}))$, а

$$v_j(\boldsymbol{y}) := v_j(y_1, y_2, \ldots, y_n),\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

– полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2 := L_2(G^n_{\boldsymbol{y}}; q(\boldsymbol{y}))$. Тогда через $L_2 := L_2(G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y}))$ обозначим пространство суммируемых с квадратом функций $f : G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \to \mathbb{R}$ с весом $p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})$ и с нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{xy}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} \right)^{1/2} < \infty,$$

где

$$G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} = G^m_{\boldsymbol{x}} \times G^n_{\boldsymbol{y}} :=$$

$$:= \Big\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{x} \in G^m_{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \boldsymbol{y} \in G^n_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Big\}.$$

Хорошо известно [33], что система функций

$$u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}),\ \ i, j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5.1}$$

будет полной ортонормированной системой в пространстве L_2.

Пусть $f \in L_2$ имеет ряд Фурье

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) u_i(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}), \tag{2.5.2}$$

где

$$c_{ij}(f) = \int\limits_{G^{m+n}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}} p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}$$

– коэффициенты Фурье функции f.

Через

$$\sigma_N(f;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2<N^2} c_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$$

обозначим “сферическую” частную сумму $N-1$-го порядка ряда Фурье (2.5.2), а через

$$Q_{N-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i^2+j^2<N^2} a_{ij}(f)u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$$

обозначим множество всевозможных обобщённых сферических полиномов степени не более $N-1$.

Равенством

$$E_{N-1}^{(3)}(f) := \inf_{Q_{N-1}} \|f - Q_{N-1}\|$$

определим наилучшее среднеквадратическое “сферическое” приближение функции $f \in L_2$.

Простое вычисление с учетом ортонормированности системы функций (2.5.1) и применением равенства Парсеваля даёт

$$E_{n-1}^{(3)}(f) = \left\{ \sum_{i^2+j^2\geq N^2} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.5.3}$$

Теперь введём в рассмотрение функцию

$$\mathscr{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};h) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{y})v_j(\boldsymbol{\eta})h^{i^2+j^2}, \tag{2.5.4}$$

где $h \in (0,1)$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in G_{\boldsymbol{x}}^m \times G_{\boldsymbol{\xi}}^m$, $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta}) \in G_{\boldsymbol{y}}^n \times G_{\boldsymbol{\eta}}^n$ и равенство в (2.5.4) понимается в смысле L_2, то есть

$$\left\| \mathscr{T}(\cdot,\cdot;\cdot,\cdot) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{\xi})v_j(\boldsymbol{y})v_j(\boldsymbol{\eta}) \right\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Известно ([20, с.272]), что в ряде частных случаев для функции одной переменной функция (2.5.4), имеющая вид

$$\mathscr{T}(x,y;h) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)u_n(y)h^n$$

$$\big(h \in (0,1),\ G^1_{\boldsymbol{x}} = G^1_{\boldsymbol{y}} = (a,b) \subset \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)\big)$$

можно указать явное выражение. Так, например, если $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – какой–нибудь из классических ортогональных полиномов с весом $\rho(x)$ на интервале (a,b), то полагая

$$\mathscr{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} P_j(x)P_j(y)h^j, \tag{2.5.5}$$

где $h \in (0,1)$, $x,y \in (a,b)$, а знак равенства в (2.5.5) понимается в смысле сходимости в среднем в пространстве $L_{2,\rho,\rho}\big((a,b)\times(a,b)\big)$, которое состоит из суммируемых в квадрате функций $f : (a,b)\times(a,b) \to \mathbb{R}$ с весом $\rho(x)\rho(y)$ и нормой

$$\|f\| := \left(\int\limits_a^b \int\limits_a^b \rho(x)\rho(y)f^2(x,y)dxdy\right)^{1/2} < \infty.$$

Укажем явное выражение функции $\mathscr{T}(x,y;h)$ для некоторых классических полиномов.

Так, для ортонормированных полиномов Эрмита

$$H_j(x) = \frac{(-1)^j}{\sqrt{j!2^j\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x2}\frac{d^j}{dx^j}\big(e^{-x^2}\big),\ \rho(x) = \exp(-x^2)$$

на основании [32, с.383] получаем

$$\mathscr{T}_\rho(x,y;h) = \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x)H_j(y)h^j =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}} \exp\left(\frac{2xyh - (x^2+y^2)h^2}{1-h^2}\right).$$

Для ортонормированной системы полиномов Лагерра $\{L_j^\alpha(x)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, имеющей вид

$$L_j^\alpha(x) = (-1)^j\sqrt{\frac{j!}{\Gamma(\alpha+j+1)}}e^x x^{-n}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x}),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма – функция в силу [32, с.111] имеем

$$\mathscr{T}_\rho(x,y;h) := \sum_{j=0}^{\infty} L_j^\alpha(x) L_j^\alpha(y) h^j =$$

$$= \frac{\exp\bigl(-(x+y)h/(1-h)\bigr)}{1-h}(xyh)^{-\alpha/2} J_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyh}}{1-h}\right).$$

Здесь $J_\alpha(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода порядка α. Этими примерами мы ограничимся. Отметим лишь, что для системы ортонормальных функций (2.5.1) введение функции (2.5.4), как мы видим, далее при приближении "сферическими" суммами, играет основной роль. Учитывая функцию (2.5.4) в пространстве $L_2 = L_2\left(G_{\boldsymbol{xy}}^{m+n}; p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})\right)$, введём следующий оператор

$$\mathscr{F}_h f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \int\limits_{G_{\boldsymbol{\xi\eta}}^{m+n}} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta} =$$

$$= \int\limits_{G_{\boldsymbol{\xi}}^m}\int\limits_{G_{\boldsymbol{\eta}}^n} p(\boldsymbol{\xi})q(\boldsymbol{\eta})f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{y},\boldsymbol{\eta};1-h)d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{\eta}, \tag{2.5.6}$$

который, как и в параграфе 2.1, назовём оператором обобщённого сдвига. Легко проверить, что для оператора (2.5.6) все свойства 1) – 5) отмеченные в параграфе 2.1, за исключением свойства 4), выполняются, а свойство 4) в данном случае примет вид:

4)$\mathscr{F}_h(u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})) = (1-h)^{i^2+j^2}u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})$, пользуясь которым и повторив буквально схему рассуждений для сферических приближений функций $f \in L_2$, получаем обобщённый модуль непрерывности специального вида

$$\Omega_k^2(f,t)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-h)^{i^2+j^2}\right]^{2k} c_{ij}^2(f). \tag{2.5.7}$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 2.5.1. *При любых $k, N \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$ для произвольной функции $f \in L_2$ справедливо неравенство*

$$E^{(3)}_{N-1}(f) \leq \left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{-k} \Omega_k(f,h). \tag{2.5.8}$$

Неравенство (2.5.8) *неулучшаемо в том смысле, что существует функция $g \in L_2$, для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство Пусть $f \in L_2$ произвольная функция. Тогда в силу (2.5.7) и (2.5.3) запишем

$$\Omega^2_k(f,t)_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left[1-(1-h)^{i^2+j^2}\right]^{2k} c^2_{ij}(f) \geq$$

$$\geq \sum_{i^2+j^2\geq N^2}\left[1-(1-h)^{i^2+j^2}\right]^{2k} c^2_{ij}(f) \geq$$

$$\geq \left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{2k} \sum_{i^2+j^2\geq N^2} c^2_{ij}(f) =$$

$$= \left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{2k} \left(E^{(2)}_{N-1}(f)\right)^2,$$

или, что то же,

$$\Omega_k(f,t)_2 \geq \left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k} E^{(2)}_{N-1}(f), \tag{2.5.9}$$

откуда и следует неравенство (2.5.8).

Докажем точность (неулучшаемость) неравенства (2.5.8). Для функции

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = u_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y}) \in L_2,$$

у которой $i^2+j^2=N^2$, $c_{ij}\equiv 1$ в силу равенств (2.5.3) и (2.5.7) имеем:

$$E^{(3)}_{N-1}(g) \equiv 1,\ \Omega_k(g,h) = \left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k}. \tag{2.5.10}$$

Пользуясь равенствами (2.5.10), запишем

$$\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{-k}\Omega_k(g,h)=$$

$$=\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{-k}\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k}=1=E_{N-1}^{(2)}(g),$$

откуда и следует точность неравенства (2.5.8).

Теорема 2.5.1 доказана.

Следствие 2.5.1. *В условиях теоремы* 2.5.1 *справедливо экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\Omega_k(f,t)_2}=\frac{1}{\left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{k}}. \qquad (2.5.11)$$

Доказательство. В самом деле, с одной стороны в силу того, что неравенство (2.5.8) верно для произвольной функции $f\in L_2$, из него следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.5.11):

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\Omega_k(f,t)_2}\le\frac{1}{\left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{k}}. \qquad (2.5.12)$$

С другой стороны, учитывая равенство (2.5.10), запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\Omega_k(f,t)_2}\ge\frac{E_{N-1}^{(3)}(g)}{\Omega_k(g,t)_2}=\frac{1}{\left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{k}}. \qquad (2.5.13)$$

Сравнивая неравенства (2.5.12) и (2.5.13), получаем требуемое равенство (2.5.11) и следствие 2.5.1 доказано.

Полагая в обеих частях равенства (2.5.11) $t=1/N^2$ и переходя к верхней грани по всем $N\in\mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\Omega_k\big(f,1/N^2\big)_2}=$$

$$= \sup_{N\in\mathbb{N}}\left(1-\left(1-\frac{1}{N^2}\right)^{N^2}\right)^{-k} = (1-e^{-1})^{-k}.$$

Теорема 2.5.2. *При любых* $k, N \in \mathbb{N}$, $0 < q \le \infty$, $h \in (0,1)$, $\mu(t) \ge 0$ *– суммируемая на* $(0,h]$ *функция, имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)_2\mu(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \qquad (2.5.14)$$

Доказательство. Возведя обе части неравенства (2.5.9) в степень q ($0 < q \le \infty$), умножив на весовую функцию $\mu(t)$ и интегрируя полученное соотношение по переменному t на отрезке $[0,h]$, после возведения обеих частей результата в степень $1/q$, приходим к неравенству

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\mu(t)dt\right)^{1/q} \ge$$

$$\ge E_{N-1}^{(3)}(f)\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq}\mu(t)dt\right)^{1/q}.$$

Отсюда сразу получаем

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\mu(t)dt\right)^{1/q}} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq}\mu(t)dt\right)^{1/q}}. \qquad (2.5.15)$$

С другой стороны, пользуясь равенствами (2.5.10), запишем соответствующую оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)\mu(t)dt\right)^{1/q}} \geq \frac{E_{N-1}^{(3)}(g)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_k^q(g,t)\mu(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{N^2}\right]^{kq}\mu(t)dt\right)^{1/q}}. \tag{2.5.16}$$

Требуемое равенство (2.5.14) получаем из сопоставления неравенств (2.5.15) и (2.5.16), чем и завершаем доказательство теоремы 2.5.2.

Приводим некоторые утверждения, вытекающие из теоремы 2.5.2.

Следствие 2.5.2. *В условиях теоремы* 2.5.2 *при* $\mu(t) := \mu_0(t) = N^2(1-t)^{N^2-1}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h \Omega_k^q(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{(kq+1)^{1/q}}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{k+1/q}}. \tag{2.5.17}$$

В частности, при $q=1/k$, $k\in\mathbb{N}$ *из* (2.5.17) *следует равенство*

$$\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^h \Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^{k}} =$$

$$= \frac{2^k}{\left[1-(1-h)^{N^2}\right]^{2k}}. \tag{2.5.18}$$

Из (2.5.18), в свою очередь, вытекает, что

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2}\frac{E_{N-1}^{(3)}(f)}{\left(N^2\int\limits_0^{N^{-2}}\Omega_k^{1/k}(f,t)(1-t)^{N^2-1}dt\right)^k}= \tag{2.5.19}$$

$$=\sup_{N\in\mathbb{N}}\frac{2^k}{\left[1-\left(1-1/N^2\right)^{N^2}\right]^{2k}}=2^k\left(1-e^{-1}\right)^{-2k}.$$

ГЛАВА III. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в $L_2(Q)$

В этой главе найдены точные верхние грани наилучших приближений некоторых классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности в гильбертовом пространстве L_2. Также найдены точные константы в неравенстве типа Джексона-Стечкина между наилучшими приближениями и обобщенным модулем непрерывности в L_2. По этой теме имеется ряд публикаций. Для нас основной является работа [33], где вводится оператор обобщенного сдвига и, базируясь на который вводится специальный модуль непрерывности ν-го ($\nu \in \mathbb{N}$) порядка. В цитируемой работе имеются некоторые асимптотические оценки. Нас же интересует точные оценки, в которые по сути дела уже ничего добавить нельзя, то есть оценки неулучшаемого типа, которые для экстремальной функции класса обращаются в равенства.

Далее здесь при получении точных оценок наилучших совместных полиномиальных приближений периодических функций двух переменных и их промежуточных производных используем дифференциальный оператор второго порядка Лапласа $\mathcal{D} := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ и рекуррентную формулу $\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1})$, $r \in \mathbb{N}$, а также разложение в ряд Фурье следующего вида

$$\mathcal{D}^r f(x,y) = (-1)^r \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(k^2 + l^2\right)^r c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)},$$

на который ставится естественное ограничение

$$\left\|\mathcal{D}^r f\right\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(k^2 + l^2\right)^{2r} c_{k,l}^2(f) < +\infty.$$

§3.1. Постановка задач и предварительные результаты

При изучении прикладных задач математической физики важную роль играют вопросы нахождения точных значений верхних граней наилучших приближений некоторых классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье по различным ортогональным системам. Эти вопросы для функции одного переменного достаточно хорошо изучены (см., например, [19, 22, 23, 31, 37]). Аналогичные вопросы для функции двух переменных менее изучены. В данном параграфе приведём некоторые предварительные результаты.

Сначала в данном параграфе изучается вопрос о нахождении точной оценки верхней грани наилучших приближений периодических классов функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$. Напомним, что $L_2 := L_2(Q), Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ – пространство суммируемых с квадратом функций $f : Q \to \mathbb{R}$ двух переменных, 2π-периодических по каждой из переменных с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f^2(x,y)dxdy\right)^{1/2}.$$

Пусть функция $f \in L_2$ имеет формальное разложение в двумерный комплексный ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \sum_{l\in\mathbb{Z}_+} c_{kl}(f)e^{i(kx+ly)}, \qquad (3.1.1)$$

где коэффициенты $c_{kl}(f)$ определены равенством

$$c_{kl}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y)e^{-i(kx+ly)}dxdy, \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, что применением тождества Парсеваля из равенства (3.1.1) получаем

$$\|f\|^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\bigl|c_{k,l}(f)\bigr|^2=$$

$$=\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{-1}+\sum_{k=0}^{+\infty}\right)\bigl|c_{k,l}(f)\bigr|^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\Bigl(\bigl|c_{-k,-l}(f)\bigr|^2+\bigl|c_{-k,l}(f)\bigr|^2+\bigl|c_{k,-l}(f)\bigr|^2+\bigl|c_{k,l}(f)\bigr|^2\Bigr)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\rho_{k,l}^2(f),$$

где

$$\rho_{k,l}^2(f)=\bigl|c_{k,l}(f)\bigr|^2+\bigl|c_{-k,l}(f)\bigr|^2+\bigl|c_{k,-l}(f)\bigr|^2+\bigl|c_{-k,-l}(f)\bigr|^2. \tag{3.1.2}$$

Для произвольной $R\in\mathbb{N}$ через

$$S_R(f;x,y)=\sum_{k^2+l^2\le R^2-1}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)} \tag{3.1.3}$$

обозначим “круговые” частичные суммы функции $f\in L_2$. Если через $\mathscr{P}_R, R\in\mathbb{N}$ обозначить множество комплекснозначных полиномов вида

$$p_R(x,y)=\sum_{k^2+l^2\le R^2-1}a_{k,l}e^{i(kx+ly)},$$

то хорошо известно [10–12], что наилучшее среднеквадратическое приближение функции $f\in L_2$ элементами $p_R\in\mathscr{P}_R$ реализует “круговая” частичная сумма (3.1.3). При этом

$$\mathscr{E}_R(f):=\inf\Bigl\{\|f-p_R\|:p_R\in\mathscr{P}_R\Bigr\}=$$

$$= \|f - S_R(f)\| = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{3.1.4}$$

В самом деле, поскольку

$$\left\|f - P_R\right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{k^2+l^2 \geq 0} a_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} - \sum_{0 \leq k^2+l^2 < R^2} a_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \right\|^2 =$$

$$\left\| \sum_{0 \leq k^2+l^2 < R^2} \big(c_{kl}(f) - a_{k,l}\big) e^{i(kx+ly)} + \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} \right\|^2 =$$

$$= \sum_{0 \leq k^2+l^2 < R^2} \left|c_{kl}(f) - a_{k,l}\right|^2 + \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left|c_{k,l}(f)\right|^2,$$

то отсюда вытекает, что

$$\inf\left\{ \left\|f - P_R\right\|^2 : P_R \in \mathscr{P}_R \right\} =$$

$$= \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left|c_{kl}(f)\right|^2 = \left\|f - S_R(f)\right\|^2.$$

Этим формула (3.1.4) доказана.

Пусть $\mathcal{D} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Определим $\mathcal{D}^r := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), r \in \mathbb{N}, \mathcal{D}^0 := E$. Через $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых существуют частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ldots$$

и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$, то есть $\|\mathcal{D}^r f\| < \infty$. Применив оператор $\mathcal{D}^r,\ r \in \mathbb{N}$ к ряду (3.1.1) в силу линейности этого оператора и легко проверяемое равенство

$$\mathcal{D}^r\big(e^{i(kx+ly)}\big) = (-1)^r (k^2 + l^2)^r e^{i(kx+ly)},$$

находим

$$\mathcal{D}^r f(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f)\mathcal{D}^r\left[e^{i(kx+ly)}\right] =$$

$$= (-1)^r \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(k^2+l^2)^r c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)},$$

а отсюда, в силу равенства Парсеваля и соотношения (3.1.2), запишем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^r f\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}|c_{kl}(f)|^2\big(k^2+l^2\big)^{2r} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\big(k^2+l^2\big)^{2r}\rho_{k,l}^2(f).\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

Из формул (3.1.4) и (3.1.5) следует, что

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f) = \left\{\sum_{k^2+l^2\ge R^2}\big(k^2+l^2\big)^{2r}\rho_{k,l}^2(f)\right\}^{1/2}.\tag{3.1.6}$$

Заметим, что при любом $s = 0,1,\ldots,r;\ r\in\mathbb{Z}_+$ из (3.1.6) следует формула

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) = \left\{\sum_{k^2+l^2\ge R^2}\big(k^2+l^2\big)^{2s}\rho_{k,l}^2(f)\right\}^{1/2}.\tag{3.1.7}$$

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 3.1.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $R\in\mathbb{R}_+$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}.\tag{3.1.8}$$

Доказательство. Пользуясь равенством (3.1.7) и учитывая формулу (3.1.6), для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ получаем

$$\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) = \sum_{k^2+l^2\ge R^2}\big(k^2+l^2\big)^{2s}\rho_{k,l}^2(f) =$$

$$= \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left(k^2+l^2\right)^{-2(r-s)} \cdot \left(k^2+l^2\right)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) \leq$$

$$\leq R^{-4(r-s)} \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left(k^2+l^2\right)^{2r} \rho_{k,l}^2(f) = R^{-4(r-s)} \mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f).$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (3.1.8):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f)} \leq \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{3.1.9}$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрении комплекснозначную функцию $f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, для которой при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m^2+n^2 = R^2$, и при любой $s = 0, 1, \ldots, r$, $r \in \mathbb{N}$ в силу равенства (3.1.7) имеем

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f_0) = \left(m^2+n^2\right)^s = R^{2s}. \tag{3.1.10}$$

Пользуясь равенством (3.1.10), запишем оценку снизу указанной величины

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f)} \geq \frac{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f_0)}{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f_0)} = \frac{R^{2s}}{R^{2r}} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{3.1.11}$$

Из сопоставления оценки сверху (3.1.9) и оценки снизу (3.1.11) получаем требуемое равенство (3.1.8), чем и завершаем доказательство теоремы 3.1.1.

Теорема 3.1.2. *Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$ справедливо неравенство типа Колмогорова*

$$\mathscr{E}_R^2\big(\mathcal{D}^s f\big) \leq \Big(\mathscr{E}_R^2(f)\Big)^{1-s/r} \cdot \Big(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\Big)^{s/r}. \tag{3.1.12}$$

Неравенство точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, применяя неравенство Гельдера для рядов

$$\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\left|a_{k,l}b_{k,l}\right|\leq\left(\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\left|a_{k,l}\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\left|b_{k,l}\right|^q\right)^{1/q},$$

полагая $p=\dfrac{r}{r-s}$, $q=\dfrac{r}{s}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, получаем

$$\mathscr{E}_R^2\big(\mathcal{D}^s f\big)=\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\big(k^2+l^2\big)^{2s}\rho_{k,l}^2(f)=$$

$$=\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\Big(\rho_{k,l}^2(f)\Big)^{1-s/r}\cdot\Big\{\rho_{k,l}^2(f)\big(k^2+l^2\big)^{2r}\Big\}^{s/r}\leq$$

$$\leq\left\{\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\rho_{k,l}^2(f)\right\}^{1-s/r}\cdot\left\{\sum_{k^2+l^2\geq R^2}\rho_{k,l}^2(f)\big(k^2+l^2\big)^r\right\}^{s/r}=$$

$$=\Big(\mathscr{E}_R^2(f)\Big)^{1-s/r}\cdot\Big(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\Big)^{s/r},$$

откуда и вытекает неравенство (3.1.12).

Докажем, что неравенство (3.1.12) неулучшаемо. Для этого рассмотрим функцию $f_0(x,y)=e^{i(mx+ny)}$, введенную нами в конце теоремы 3.1.1 и для которой при всех $s=0,1,2,\cdots,r$ верно равенство (3.1.10). Имеем:

$$\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f_0\big)=R^{2s}=\big(1^2\big)^{(1-s/r)}\cdot\big(R^{2r}\big)^{s/r}=$$

$$=\Big(\mathscr{E}_R(f_0)\Big)^{1-s/r}\cdot\Big(\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f_0)\Big)^{s/r},$$

откуда и следует точность неравенства (3.1.12).

Пусть теперь $W^{(r)}L_2$ – класс функций $f\in L_2^{(r)}$, у которых $\|\mathcal{D}^r f\|\leq 1$.

Теорема 3.1.3. *При всех $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_2}\frac{\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\Big(\mathscr{E}_R(f)\Big)^{1-s/r}}=1. \tag{3.1.13}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_2$ имеем

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f) \le \|\mathcal{D}^r f\| \le 1,$$

а потому из (3.1.13) следует, что

$$\mathscr{E}_R^2\big(\mathcal{D}^s f\big) \le \Big(\mathscr{E}_R^2(f)\Big)^{1-s/r} \cdot \Big(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\Big)^{s/r} \le \Big(\mathscr{E}_R^2(f)\Big)^{1-s/r},$$

откуда получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части (3.1.13):

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_2} \frac{\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\Big(\mathscr{E}_R(f)\Big)^{1-s/r}} \le 1. \tag{3.1.14}$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, введем в рассмотрение функцию $g_0(x,y) = R^{-2r}e^{i(mx+ny)}$, для которой при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ имеют место равенства

$$\mathcal{D}^s g_0(x,y) = R^{-2r}(-1)^s\big(m^2+n^2\big)^s e^{i(mx+ny)}$$

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s g_0) = R^{-2(r-s)}, \quad \mathscr{E}_R(g_0) = R^{-2r}. \tag{3.1.15}$$

Используя равенства (3.1.15), запишем

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_2} \frac{\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\Big(\mathscr{E}_R(f)\Big)^{1-s/r}} \ge \frac{\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s g_0\big)}{\Big(\mathscr{E}_R(g_0)\Big)^{1-s/r}} = \frac{R^{-2(r-s)}}{R^{-2(r-s)}} = 1. \tag{3.1.16}$$

Из неравенств (3.1.14) и (3.1.16) следует требуемое равенство (3.1.13). Теорема 3.1.3 доказана.

Имеет место также следующее утверждение

Теорема 3.1.4. *Пусть $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\Big(W^{(r)}L_2\Big) = \sup\Big\{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) : f \in W^{(r)}L_2\Big\} = \frac{1}{R^{2(r-s)}}. \tag{3.1.17}$$

Доказательство. Из равенства (3.1.8) для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_2$ получаем

$$\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big) \le R^{-2(r-s)}\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^r f\big) \le R^{-2(r-s)}. \tag{3.1.18}$$

Для функции $g_0(x,y) = R^{-2r}e^{i(mx+ny)} \in W^{(r)}L_2$, рассмотренной нами выше, для которой $\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s g_0\big) = R^{-2(r-s)}$, получаем оценку снизу

$$\mathscr{E}_R\Big(W^{(r)}L_2\Big) \ge \mathscr{E}_R\Big(\mathcal{D}^s g_0\Big) = R^{-2(r-s)}, \tag{3.1.19}$$

сравнивая которую с оценкой сверху (3.1.18), получаем требуемое равенство (3.1.17), чем и завершаем доказательство теоремы 3.1.4.

§3.2. Оптимизация неравенства Джексона – Стечкина в $L_2(Q)$

В этом параграфе приведём некоторые результаты, связанные с оптимизацией неравенства типа Джексона – Стечкина между величиной наилучшего "кругового" приближения функций $f \in L_2$ и усредненными значениями обобщенного модуля непрерывности, порожденного конкретным оператором обобщенного сдвига. Следуя работе [12], вводим в рассмотрение функцию

$$T(x,u;y,v;h) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)}e^{il(y-v)}h^{k^2+l^2}, \tag{3.2.1}$$

где $h \in (0,1)$ и сходимость двойного ряда справа понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(Q \times Q)$. Пользуясь функцией (3.2.1), определим оператор $\mathscr{F}_h : L_2 \to L_2$ по следующей формуле

$$\mathscr{F}_h(f) := \mathscr{F}_h f(x,y) = \iint\limits_{(Q)} f(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv, \tag{3.2.2}$$

которую назовем оператором обобщенного сдвига.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (3.2.2) обладает следующими свойствами:

1. $\mathscr{F}_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathscr{F}_h(f) + \mu \mathscr{F}_h(g), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f, g \in L_2;$
2. $\|\mathscr{F}_h(f)\| \le \|f\|;$
3. $\|\mathscr{F}_h(f) - f\| \to 0, \quad h \to 0+,$
4. $\mathscr{F}_h(e^{i(mx+ny)}) = (1-h)^{n^2+m^2} \cdot e^{i(mx+ny)}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+.$

В самом деле, имеем

$$\mathscr{F}_h(\lambda f + \mu g) = \mathscr{F}\big[\lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\big] =$$

$$= \iint\limits_{(Q)} \big[\lambda f(u,v) + \mu g(u,v)\big] T(x,u;y,v;1-h)dudv =$$

$$= \lambda \iint\limits_{(Q)} f(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv +$$

$$+\mu \iint\limits_{(Q)} g(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv =$$

$$= \lambda \mathscr{F}_h f(x,y) + \mu \mathscr{F}_h g(x,y) = \lambda \mathscr{F}_h(f) + \mu \mathscr{F}_h(g)$$

и свойство 1 доказано.

Докажем свойство 2:

$$\left\| \mathscr{F}_h(f) \right\|^2 = \left\| \mathscr{F}_h f(\cdot,\cdot) \right\|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} \mathscr{F}_h^2 f(x,y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} \left(\iint f(u,v)T(x,u;y,v;1-h)dudv \right)^2 dxdy \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f^2(u,v)dudv \left(\iint\limits_{(Q)} T(x,u;y,v;1-h)dxdy \right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f^2(u,v)dudv = \left\| f \right\|^2,$$

поскольку

$$\iint T(x,u;y,v;1-h)dxdy =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (1-h)^{k^2+l^2} \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ik(x-y)} e^{il(x-y)} dxdy \equiv 1.$$

Свойство 3 является следствием свойства 2, так как

$$0 \leq \left\| \mathscr{F}_h f - f \right\| \leq \left\| f - f \right\| \to 0, \text{ при } h \to 0.$$

Проверим свойство 4. Имеем:

$$\mathscr{F}_h\big(e^{i(mx+ny)}\big) = \iint\limits_{(Q)} e^{i(mu+nv)} T(x,u;y,v;1-h)dudv =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(Q)} e^{i(mu+nv)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-u)}e^{il(y-v)}(1-h)^{k^2+l^2}dudv =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}(1-h)^{k^2+l^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{ikx+i(m-k)u}e^{ily+i(n-l)v}dudv =$$

$$= (1-h)^{k^2+l^2}e^{i(mx+ny)},$$

откуда и следует свойство 4.

Определим теперь разности первого и высших порядков, как и в классическом случае, следующим образом:

$$\Delta_h f = \mathscr{F}_h f - f = (\mathscr{F}_h - E)f,$$

$$\Delta_h^\nu f := \Delta_h\big(\Delta_h^{\nu-1}f\big) = \big(\mathscr{F}_h - E\big)^\nu f = \sum_{j=0}^{\nu}(-1)^{\nu-j}\binom{\nu}{j}\mathscr{F}_h^j(f),$$

где

$$\mathscr{F}_h^0 f = Ef = f, \quad \mathscr{F}_h^j f := \mathscr{F}_h\Big(\mathscr{F}_h^{j-1}f\Big), \quad j=\overline{1,\nu}; \quad \nu\in\mathbb{N};$$

E – единичный оператор в пространстве L_2.

Равенством

$$\Omega_\nu(f,t) := \sup\Big\{\|\Delta_h^\nu f\| : 0 < h \le t\Big\}, \quad t\in(0,1) \tag{3.2.3}$$

определим обобщенный модуль непрерывности функции $f \in L_2$.

Очевидно, что оператор (3.2.2) в силу свойств 4 представим в виде

$$\mathscr{F}_h f(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{kl}(f)(1-h)^{k^2+l^2}e^{i(kx+ly)}.$$

Пользуясь полученным представлением и равенством (3.1.1), запишем

$$\Delta_h f = \big(\mathscr{F}_h - E\big) f(x,y) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big((1-h)^{k^2+l^2} - 1\Big) c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}.$$

Применяя метод математической индукции, с учетом последнего равенства для любого $\nu \in \mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^\nu f = \big(\mathscr{F}_h - E\big)^\nu f(x,y) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big((1-h)^{k^2+l^2} - 1\Big)^\nu c_{kl}(f) e^{i(kx+ly)}.$$

Применяя равенство Парсеваля, отсюда имеем

$$\|\Delta_h^\nu f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Big(1 - (1-h)^{k^2+l^2}\Big)^{2\nu} c_{kl}^2(f) =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \Big(1 - (1-h)^{k^2+l^2}\Big)^{2\nu} \rho_{kl}^2(f).$$

Пользуясь этим равенством, в силу (3.2.3) найдем явный вид обобщенного модуля в L_2 :

$$\Omega_\nu^2(f,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \Big(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\Big)^{\nu} \rho_{kl}^2(f). \tag{3.2.4}$$

Теперь заметим, что, как следует из равенств (3.1.7) и (3.1.4), коэффициенты $\rho_{kl}(\mathcal{D}^r f)$ и $\rho_{kl}(f)$ связаны равенством

$$\rho_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) = \big(k^2 + l^2\big)^{2r} \rho_{kl}^2(f).$$

Учитывая это равенство для модуля непрерывности (3.2.4), запишем

$$\Omega_\nu(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \Big(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\Big)^{\nu} \rho_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\Big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\Big)^{\nu}\Big(k^2+l^2\Big)^{2r}\rho_{kl}^2(f). \qquad (3.2.5)$$

Теорема 3.2.1. *При любых* $\nu, R\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ *и* $h\in(0,1)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f;h\big)}=\frac{1}{\Big(1-(1-h)^{R^2}\Big)^{\nu}}. \qquad (3.2.6)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ при любых $m,n\in\mathbb{N}$, для которых $m^2+n^2\ge R^2$, $R\in\mathbb{N}$ и $h\in(0,1)$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\Omega_\nu^2\big(\mathcal{D}^r f,h\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\big)^{2\nu}(k^2+l^2)^{2r}\rho_{k,l}^2\ge\\ &\ge \sum_{k^2+l^2\ge R^2}\big(1-(1-h)^{k^2+l^2}\big)^{2\nu}(k^2+l^2)^{2r}\rho_{k,l}^2(f)\ge\\ &\ge \big(1-(1-h)^{R^2}\big)^{2\nu}R^{4r}\sum_{k^2+l^2\ge R^2}\rho_{k,l}^2(f)=\\ &= \big(1-(1-h)^{R^2}\big)^{2\nu}R^{4r}\mathscr{E}_R^2(f).\end{aligned} \qquad (3.2.7)$$

Отсюда получаем

$$\mathscr{E}_R(f)\le R^{-2r}\Big(1-(1-h)^{R^2}\Big)^{-\nu}\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f;h\big). \qquad (3.2.8)$$

Из (3.2.8) следует оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (3.2.6):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\Big(\mathcal{D}^r f,h\Big)}\le\frac{1}{\Big(1-(1-h)^{R^2}\Big)^{\nu}}. \qquad (3.2.9)$$

Получим аналогичную оценку снизу для функции $f_0(x)=e^{i(mx+ny)}\in L_2^{(r)}$, $m^2+n^2=R^2$, введенную нами в конце теоремы 3.1.1, $\mathscr{E}_R(f_0)=1$ и в силу

(3.2.5) имеем

$$\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f_0, h\big) = \big(m^2+n^2\big)^r\Big(1-(1-h)^{m^2+n^2}\Big)^\nu = \\ = R^{2r}\Big(1-(1-h)^{R^2}\Big)^\nu. \tag{3.2.10}$$

Пользуясь этими равенствами запишем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\Big(\mathcal{D}^r f, h\Big)} \geq \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f_0)}{\Omega_\nu\Big(\mathcal{D}^r f_0, h\Big)} = \frac{1}{\Big(1-(1-h)^{R^2}\Big)^\nu}. \tag{3.2.11}$$

Сопоставляя неравенства (3.2.9) и (3.2.11), получаем (3.2.6). Теорема 3.2.1 доказана.

Следствие 3.2.1. *Полагая в условиях теоремы* 3.2.1 $h = 1/R^2$, $R\in\mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\Big(\mathcal{D}^r f, 1/R^2\Big)} = \\ = \sup_{R\in\mathbb{N}}\left(1-\left(1-\frac{1}{R^2}\right)^{R^2}\right)^\nu = \Big(1-e^{-1}\Big)^\nu.$$

Всюду далее под весовой функцией $\mu(x)$ на отрезке $[0,1]$ понимаем неотрицательную суммируемую не эквивалентную нулю на этом же отрезке функцию.

Теорема 3.2.2. *Пусть* $R,\nu\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+, 1\leq q\leq\infty,\ h\in(0,1),\mu(x)$ — *весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f; t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} = \\ = \left(\int\limits_0^h \Big[1-(1-t)^{R^2}\Big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{3.2.12}$$

Доказательство. Из неравенства (3.2.8), верного для любых $n, m \in \mathbb{N}$, для которых $n^2+m^2 \geq R^2,\ R,\nu \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ t \in (0,1)$ и любой функции $f \in L_2^{(r)}(Q)$, получаем

$$\left(1-(1-t)^{R^2}\right)^{\nu} \cdot R^{2r}\mathscr{E}_R(f) \leq \Omega_\nu\left(\mathcal{D}^r f; t\right).$$

Возведем обе части полученного неравенства в степень q $(1 \leq q \leq \infty)$, умножим на весовую функцию μ и интегрируем по отрезку $[0,h]$, где $h \in (0,1)$. Возведя полученное таким образом неравенство в степень $1/q$ $(1 \leq q \leq \infty)$, получаем соотношение

$$\begin{gathered} R^{2r}\mathscr{E}_R(f) \cdot \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{1/q} \leq \\ \leq \left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\left(\mathcal{D}^r f; t\right)\mu(t)dt\right)^{1/q}. \end{gathered} \tag{3.2.13}$$

Из неравенства (3.2.13) сразу получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.2.12)

$$\begin{gathered} \sup_{f \in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\left(\mathcal{D}^r f; t\right)\mu(t)dt\right)^{1/q}} \leq \\ \leq \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \end{gathered} \tag{3.2.14}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, используем ранее рассмотренную нами функцию $f_0(x) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)}$, $m^2+n^2 = R^2$, $m, n, R \in \mathbb{N}$, для которой $\mathscr{E}_R(f_0) = 1$ и справедливо равенство (3.2.10), пользуясь которыми запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} \geq$$

$$\geq \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f_0;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} = \tag{3.2.15}$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Сравнивая оценку сверху (3.2.14) с оценкой снизу (3.2.15), получаем требуемое равенство (3.2.12) и тем самым теорема 3.2.2 доказана.

Следствие 3.2.2. *В условиях теоремы* 3.2.2 *при* $\mu(t) := R^2(1-t)^{R^2-1}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2(r-1/q)}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left\{\frac{\nu q+1}{\left[1-(1-h)^{R^2}\right]^{\nu q+1}}\right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/R^2$ *и переходя к верхней грани по всем* $R\in\mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(Q)} \frac{R^{2(r-1/q)}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(\nu q+1)^{1/q}}{(1-e^{-1})^{\nu+1/q}};$$

§3.3. Наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных "круговыми" суммами Фурье

В предыдущем параграфе найдены точные верхние грани наилучших среднеквадратических приближений периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2 := L_2(Q)$. Здесь полученные результаты обобщаются на случай совместного приближения функций и промежуточных частных производных "круговыми" суммами Фурье и их частными производными.

В предыдущем параграфе при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ доказано соотношение

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) = \left\{ \sum_{k^2+l^2 \geq R^2} \left(k^2 + l^2\right)^{2s} \rho_{k,l}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{3.3.1}$$

Там же доказано, что для любой функции $f \in {L_2}^{(r)}$ имеет место формула

$$\Omega_\nu(D^r f, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(1 - (1-t)^{k^2+l^2}\right)^\nu \left(k^2 + l^2\right)^{2r} \rho_{kl}^2(f).$$

Справедлива следующая

Теорема 3.3.1. *При любых* $\nu, R \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$ *и* $h \in (0, 1)$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)} \mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big)} = \frac{1}{\big(1 - (1-h)^{R^2}\big)^\nu}. \tag{3.3.2}$$

Доказательство. В параграфе 2.2 нами доказано, что при любых $\nu, R \in \mathbb{N},\ \ r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 1)$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2r} \mathscr{E}_R(f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f, h\big)} = \frac{1}{\big(1 - (1-h)^{R^2}\big)^\nu}.$$

Отсюда для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, для которых $m^2 + n^2 \geq R^2$, $R \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, 1)$, получаем неравенство

$$\mathscr{E}_R(f) \leq R^{-2R} \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big).$$

Полагая сначала в полученном неравенстве $r = 0$, затем, заменяя f на $\mathcal{D}^r f$, будем иметь

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^r f) \leq \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big). \tag{3.3.3}$$

Применив к неравенству (3.3.3) доказанную в теореме 3.1.1 формулу

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) \leq \frac{1}{R^{2(r-s)}} \cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^r f\big), \tag{3.3.4}$$

имеем

$$\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f) \leq R^{-2(r-s)} \cdot \left(1 - (1-h)^{R^2}\right)^{-\nu} \Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big).$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (3.3.2):

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f \notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)} \mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f; h\big)} \leq \frac{1}{\big(1 - (1-h)^{R^2}\big)^{\nu}}. \tag{3.3.5}$$

Для получения противоположного неравенства введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r)},$$

для которой имеем

$$\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f_0\big) = (m^2 + n^2)^{2s} = R^{2s},$$

$$\mathcal{D}_\nu\big(\mathcal{D}^r f_0, t\big) = (m^2 + n^2)^{2r} \big(1 - (1-h)^{m^2+n^2}\big)^{\nu} =$$

$$= R^{2r}\big(1-(1-h)^{R^2}\big)^{\nu}.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f;h\big)} \geq \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f_0\big)}{\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f_0;h\big)} =$$

$$= \frac{R^{2(r-s)}\cdot R^{2s}}{R^{2r}\big(1-(1-h)^{R^2}\big)^{\nu}} = \frac{1}{\big(1-(1-h)^{R^2}\big)^{\nu}}. \tag{3.3.6}$$

Сопоставляя (3.3.5) и (3.3.6), получаем требуемое равенство (3.3.2), чем и завершаем доказательство теоремы 3.3.1.

Приведём обобщение теоремы 3.2.2

Теорема 3.3.2. *Пусть* $R,\nu\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ r\geq s,\ 1\leq q<\infty,\ h\in(0,1)$, $\mu(x)$ *– весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{R^2}\big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{3.3.7}$$

Доказательство. В теореме 3.2.2 доказано, что при любых $R,\nu\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $1\leq q<\infty$, $h\in(0,1)$, $\mu(x)$ – весовая на отрезке $[0,h]$ функция, справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin \mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2r}\mathscr{E}_R(f)}{\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{R^2}\big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{R^2}\big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}. \tag{3.3.8}$$

Если в левой части равенства (3.3.7) полагать $\mathcal{D}^s f = g$, то в силу линейности оператора $\mathcal{D}$ имеем $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^{r-s} g$. Это означает, что если $f \in L_2{}^{(r)}$, то $g \in L_2^{(r-s)}$, а потому, учитывая (3.3.8), запишем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin\mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \sup_{g\in L_2^{(r-s)}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(g)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^{(r-s)} g;t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}.$$

Теорема 3.3.2 доказана.

Следствие 3.3.1. *В условиях теоремы* 3.3.2 *при* $\mu(t) := R^2(1-t)^{R^2-1}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left\{\frac{\nu q+1}{\left[1-(1-h)^{R^2}\right]^{\nu q+1}}\right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/R^2$ *и переходя к верхней грани по всем* $R \in \mathbb{N}$, *получаем*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{(\nu q+1)^{1/q}}{\left(1-e^{-1}\right)^{\nu+1/q}}$$

и если в полученном равенстве полагать $q = 1/\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$, *то имеем*

$$\sup_{R\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-\nu)}\cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^{1/\nu}\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{\nu}} = \frac{2^\nu}{\left(1-e^{-1}\right)^{2\nu}}.$$

В теореме 3.1.2 доказано, что при любых $r \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}_+,\ r \geq s$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ справедливо неравенство

$$\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^s f) \leq \left(\mathscr{E}_R^2(f)\right)^{1-s/r}\cdot\left(\mathscr{E}_R^2(\mathcal{D}^r f)\right)^{s/r}. \tag{3.3.9}$$

Отсюда вытекает, что помимо функций f и $\mathcal{D}^r f$ все остальные промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ также принадлежат пространству L_2. Поэтому представляет несомненный интерес изучение поведения величин $\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором классе $\mathfrak{M}^r \subseteq Ł_2^{(r)}$. Таким образом, требуется найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\left\{\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f); f \in \mathfrak{M}^{(r)}\right\}. \tag{3.3.10}$$

Пусть $H \in (0,1),\ 1 \leq p < \infty,\ \nu, R \in \mathbb{N},\ \ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ \ r \geq s,\ \varphi$ – весовая на $[0,H]$ функция. Через $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^H \Omega_\nu^p\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt \leq 1.$$

Теорема 3.3.3. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)\right) =$$

$$= R^{-2(r-s)}\left(\int\limits_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu}\mu(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (3.3.11)$$

Доказательство. Из равенства (3.3.8) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем неравенство

$$\mathscr{E}(\mathcal{D}^s f) \le \frac{1}{R^{2(r-s)}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^H \Omega_\nu^p\big(\mathcal{D}^r f, t\big)\mu(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu p}\mu(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Используя определение класса $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu, \mu)$, получаем

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)\right) \le$$

$$\le R^{-2(r-s)}\left(\int\limits_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu p}\mu(t)dt\right)^{-1/q} \qquad (3.3.12)$$

и оценка сверху величины, стоящей в левой части (3.3.11), установлена. Для получения оценок снизу на множестве $P_R \cup L_2^{(r)}$ рассмотрим $(R+1)$ – мерный шар

$$\mathscr{B}_{R+1} :=$$

$$:= \left\{Q_R \in \mathscr{P}_R : \big\|Q_R\big\| \le R^{-2R}\left(\int\limits_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu p}\mu(t)dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)$. Для произвольного полинома

$$Q_R(x,y) = \sum_{k^2+l^2<R^2} a_{kl}e^{i(kx+ly)},$$

являющегося элементом шара $\mathscr{B}_{R+1}$, в силу возрастания элементов $(k^2+l^2)\,(k=\overline{0,R-1}, l=\overline{0,R-1})$ и формулы

$$\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r f,t\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\Big)^\nu\left(k^2+l^2\right)^{2r}\rho_{k,l}^2(f),$$

будем иметь

$$\Omega_\nu\big(\mathcal{D}^r Q_R,t\big)\le$$

$$\le\sum_{k^2+l^2<R^2}\Big(1-(1-t)^{k^2+l^2}\Big)^\nu\left(k^2+l^2\right)^{2r}\rho_{k,l}^2(f)\le \tag{3.3.13}$$

$$\le\Big(1-(1-t)^{R^2}\Big)^\nu\cdot R^{2r}\cdot\big\|Q_R\big\|.$$

Возведя левую и правую части неравенства (3.3.13) в степень p, умножая их затем на функцию μ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от 0 до H, имеем

$$\int_0^H\Omega_\nu^p\big(\mathcal{D}^r Q_R,t\big)\mu(t)dt\le$$

$$\le R^{2r}\cdot\big\|Q_R\big\|\cdot\int_0^h\Big(1-(1-t)^{R^2}\Big)^\nu\mu(t)dt\le 1.$$

Следовательно, $\mathscr{B}_{R+1}\subset HW_{2,p}^{(r)}\big(\Omega_\nu;\mu\big)$. Имея ввиду этот факт, рассмотрим следующую функцию

$$f_1(x,y)=R^{-2r}\left(\int_0^h\Big[1-(1-t)^{R^2}\Big]^{\nu p}\mu(t)dt\right)^{-1/p}\cdot e^{i(mx+ny)},$$

где $m^2+n^2=R^2$, $m,n,R\in\mathbb{N}$. Для этой функции при любых $s=1,2,\ldots,r-1$

$$\mathcal{D}^s f_1(x,y)=R^{-2(r-s)}\cdot\left(\int_0^h\Big[1-(1-t)^{R^2}\Big]^{\nu p}\mu(t)dt\right)^{-1/p}\times$$

$$\times(-1)^s \left(m^2+n^2\right)^{2s} \cdot e^{i(mx+ny)},$$

и, кроме того,

$$E_R(\mathcal{D}^s f_1) = R^{-2(r-s)} \cdot \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu p} \mu(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (3.3.14)$$

Легко проверить, что

$$\int\limits_0^H \Omega_\nu^p\big(\mathcal{D}^r f_1, t\big)\mu(t)dt = 1.$$

Пользуясь равенством (3.3.14), запишем оценку снизу указанной величины

$$\mathscr{E}_R\left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)\right) \geq E_R\big(\mathcal{D}^s f_1\big) =$$

$$= R^{-2(r-s)} \left(\int\limits_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^{\nu p} \mu(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (3.3.15)$$

Требуемое равенство (3.3.11) следует из сопоставления оценок сверху (3.3.12) и снизу (3.3.15), что и завершает доказательство теоремы 3.3.3.

Обсуждение полученных результатов

В диссертационной работе найдены точные верхние грани отклонения функций многих переменных от их суммы Фурье по произвольным ортогональным системам функций в гильбертовом пространстве с суммируемым весом. При этом вводится класс функций многих переменных, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности и для них находятся точные значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного N-поперечников.

Хорошо известно, что обычный (классический) модуль непрерывности играет важную роль в теории приближения функций при доказательстве прямых и обратных теорем. В экстремальных задачах теории приближения функций многих переменных модуль непрерывности можно определить по разному. Так как, в отличие от одномерного случая, для многомерных рядов по произвольным ортогональным системам таких нет естественного способа построения частичных сумм, то мы сначала строим некоторые классы функций, а затем строим метод приближения — “треугольные”, “гиперболические”, “круговые” и другие частичные суммы двойного ряда Фурье, которые позволяют отыскать точные оценки наилучших приближений на этих классах функций.

Следуя отметить, что в вопросах, связанных с разложением функций в ряды Фурье по тригонометрической системе или по классическим многочленам и отыскании точных значений их наилучших приближений, существенную роль играет оператор сдвига, связанный с теоремами сложения и умножения для этих систем. Однако для произвольных систем в многомерном случае таких теорем нет. Поэтому в диссертационной работе, опираясь на некоторые ранее известные факты, построен оператор обобщённого сдвига, который позволяет определять классы функций, характеризующиеся обобщённым модулем непрерывности. На этих классах функций доказан ряд точных теорем, пользуясь которыми вычислены точные значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного N-поперечников.

Перечислим основные результаты диссертации по главам. Теорема 2.1.1 является основным результатом первого параграфа второй главы.

Вытекающие из неё следствия 2.1.1 и 2.1.2, в частных случаях содержат основные результаты работ Э.В.Селимханова [6] и [33]. Более того, следствие 2.1.2 является точной константой в неравенстве Джексона — Стечкина в многомерном случае.

Во втором и третьем параграфе вычислены точные значения всех вышеперечисленных N-поперечников классов $W_k(\Phi)$ и $W_q(\Omega_k, \varphi; h)$ при всех $0 < q \leq \infty$ и $h \in (0, 1)$. Для класса $W_k(\Phi)$ ранее был вычислен только колмогоровский N-поперечник. Все остальные поперечники вычислены во втором параграфе данной работы. Поперечники класса $W_q(\Omega_k, \varphi; h)$ даже в случае $q = 2$ не были известны. В четвёртом параграфе изучена задача нахождения точных оценок наилучших среднеквадратических приближений “гиперболическими” частными суммами Фурье функций многих переменных по произвольным многомерным ортогональным системам. Указанный вопрос частично изучен в работах [5–10]. Отметим, что в перечисленных работах речь идёт о порядке сходимости частичных “треугольных”, “прямоугольных” и “гиперболических” сумм Фурье по произвольным ортогональным системам функций многих переменных к заданным функциям. В теореме 2.4.1 решается экстремальная задача нахождения точных оценок наилучших среднеквадратических приближений произвольной функции многих переменных "гиперболическими" частичными суммами, из следствий 2.4.1. и 2.4.2 которой, в частности вытекают известные результаты работ [5, 6, 10, 33].

Последний параграф 2.5 второй главы посвящён экстремальной задаче наилучшего среднеквадратического приближения функций многих переменных "сферическими" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам. Здесь основной является теорема 2.5.2, в которой вычислена верхняя грань отношения наилучшего приближения сферическими суммами к усреднённой с весом значений L_2 – нормы $(0 < q \leq \infty)$ обобщённого модуля непрерывности k-го порядка. Этот результат ни при каких значениях $q \in (0, +\infty]$ ранее не был известен.

В третьей главе диссертационной работы изучается экстремальная задача отыскания точных значений верхних граней наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в пространстве $L_2 := L_2(Q), Q := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

Основным результатом первого параграфа третьей главы является теорема 3.1.2, в которой для класса $L_2^{(r)} (r \in \mathbb{N})$ периодических по обеим переменных функций $f(x, y)$, у которых $\|\mathcal{D}^{(r)} f\|_{L_2} < \infty$, где $\mathcal{D} := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, доказано неулучшаемое неравенство типа Колмогорова. Пользуясь полученным результатом в теореме 3.1.2 вычисляется точное значение верхней грани отношения наилучшего совместного приближения $\mathcal{D}^s f$ к самому наилучшему приближению $f \in L_2^{(r)}$ "круговыми" суммами Фурье, а в теореме 3.1.4 найдено точное значение верхней грани $\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)_{L_2}$ по всем функциям $f \in W^{(r)} L_2$, у которых $\|\mathcal{D}^{(r)} f\|_{L_2} \leq 1$.

Во втором параграфе третьей главы рассматривается задача оптимизации неравенства Джексона – Стечкина и в теореме 3.2.1 находится общая оценка для неравенства указанного типа, из которого в следствии 3.2.1 находится явный вид константы в неравенстве Джексона – Стечкина.

Наиболее значимым результатом этого параграфа является теорема 3.2.2, из которой при конкретном значении весовой функции вытекают числовые значения верхней грани экстремальной характеристики (3.2.12).

В завершающем параграфе 3.3 исследуется экстремальная задача о наилучшем совместном приближении функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье. В теореме 3.3.1 найдена точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина для совместного наилучшего полиномиального приближения функции f и всех её промежуточных производных $\mathcal{D}^s f$ при всех $0 \le s \le r$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Основным результатом этого параграфа является теорема 3.3.2, в которой при всех $R, \nu \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$, $1 \le q < \infty$, $h \in (0, 1)$ и весовой функции $\mu(t)$, определённой на $[0, h]$, доказано экстремальное равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}\\ f\notin\mathscr{P}_{2r}}} \frac{R^{2(r-s)}\mathscr{E}_R(\mathcal{D}^s f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f; t\big)\mu(t)dt\right)^{1/q}} = \left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{R^2}\big]^{\nu q}\mu(t)dt\right)^{-1/q}.$$

В следствие 3.3.1, вытекающем из последнего равенства при $\mu(t) = R^2(1-t)^{R^2-1}$, получаем равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)}\cdot\mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f; t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} =$$

$$= \left\{ \frac{\nu q + 1}{\left[1-(1-h)^{R^2}\right]^{\nu q+1}} \right\}^{1/q}.$$

В частности, полагая здесь $h = 1/R^2$ и переходя к верхней грани по всем $R \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{R\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-1/q)} \cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^q\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{1/q}} = \frac{(\nu q+1)^{1/q}}{\big(1-e^{-1}\big)^{\nu+1/q}}$$

и если в полученном равенстве полагать $q = 1/\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$, то получаем

$$\sup_{R\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{R^{2(r-s-\nu)} \cdot \mathscr{E}_R\big(\mathcal{D}^s f\big)}{\left(\int\limits_0^{1/R^2} \Omega_\nu^{1/\nu}\big(\mathcal{D}^r f;t\big)(1-t)^{R^2-1}dt\right)^{\nu}} = \frac{2^\nu}{\big(1-e^{-1}\big)^{2\nu}}.$$

Пользуясь результатом теоремы 3.3.2 для класса функций $HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)$, состоящей из функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^H \Omega_\nu^p\big(\mathcal{D}^r f;t\big)\mu(t)dt \le 1,$$

в теореме 3.3.3 доказано экстремальное равенство

$$\mathscr{E}_R^{(s)}\left(HW_{2,p}^{(r)}(\Omega_\nu;\mu)\right) = R^{-2(r-s)}\left(\int\limits_0^H \left[1-(1-t)^{R^2}\right]^\nu \mu(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Выводы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных “треугольными” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [1-A];
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций “гиперболическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [2-A, 3-A, 7-A];
- найдены верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций $f \in L_2$ “сферическими” суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [3-A, 10-A];
- найдены верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в пространстве $L_2(Q)$ [2-A, 4-A, 6-A, 7-A, 8-A];
- найдено наилучшее совместное приближение функций $f \in L_2^{(r)}(Q)$ и их частных производных “круговыми” суммами Фурье [5-A, 9-A, 11-A,12-A].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое значение и могут быть применены при нахождении точных верхних граней наилучших полиномиальных приближений классов функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут быть использованы при чтении специальных курсов для студентов старших курсов учебных заведений по специальности “Математика” и “Прикладная математика” высших учебных заведений.

Список литературы

А) Список использованных источников

1. Абилов В.А. Оценка поперечника одного класса функций в пространстве $L_2((a,b),p(x))$ // Докл. Болгарской А.Н., 1992, т.45, №10, с.23–24.
2. Абилов В.А. Ещё раз об одном экстремальной свойстве классических ортогональных многочленов // Докл. Болгарской А.Н., 1992, т.45, №6, с.33–34.
3. Абилов В.А., Абилова Ф.В. О наилучшем приближении функций алгебраическими многочленами в среднем // Изв. вузов. Математика, 1997, №3, с.40–43.
4. Абилов В.А., Керимов М.К. Некоторые вопросы разложения функций в двойные ряды Фурье–Бесселя. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2004, т.44, №12, с.2128–2149.
5. Абилов М.В., Айгунов Г.А. Некоторые вопросы приближения функций многих переменных суммами Фурье в пространстве $L_2((a,b)^n;p(x))$ // Успехи матем. наук, 2004, т.59, №6, с.201-202.
6. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b);p(x))$ // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №6, с.966-980.
7. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2((a,b)\times(c,d);p(x)q(y))$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т.49, №8, с.1364–1368.

8. Абилов В.А., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости “гиперболических” частных сумм двойного ряда Фурье по ортогональным многочленам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2012, т.52, №11, с.1052–1058.

9. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье–Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №6, с.917–927.

10. Абилов В.А., Абилов М.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, т.55, №7, с.1109–1117.

11. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. О точных оценках скорости сходимости двойных рядов Фурье–Бесселя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2017, т.57, №11, с.1–6.

12. Абилова Ф.В., Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье двух переменных и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2018, т. 58, №10, с. 1596–1603.

13. Абилова Ф.В. О наилучшем приближении функций алгебраическими многочленами в среднем // Докл. Болгарской АН., 1993, т.46, №12, с.9–11.

14. Акобиршоев М.О. Среднеквадратическое приближение “углом” в пространстве $L_{2,\mu}(R^2)$ с весом Чебышева-Эрмита // Изв. вузов. Матем. 2021. Т.65. №9. С.3–12.

15. Акобиршоев М.О., Сайнаков В.Д. О наилучшем совместном приближении «углом» в среднем периодических функций двух переменных неко-

торых классов функций // Доклады НАН Таджикистана. 2022. Т.65. №9-10. С.567–579.

16. Вакарчук С.Б. О приближении функций двух переменных обобщенными полиномами // Тр. МИАН СССР. 1987. т.180. с.77–78.
17. Вакарчук С.Б. О приближении дифференцируемых функций многих переменных // Матем. заметки. 1990. т.48. №3. с.37–44.
18. Вакарчук С.Б., Швачко А. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точные значения поперечников классов функций // Укр. матем. журнал, 2015, т.65, №9, с.1013-1027.
19. Владимиров В.С. Уравнение математической физики // М.:Наука, 1976.
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.
21. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами // Наука. М. 1977. 512 с.
22. Керимов М.К., Селимханов Э.В. О точных оценках скорости сходимости рядов Фурье для функций одной переменной в пространстве L_2 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т.56, №5, с.730–741.
23. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа // М.:Наука, 1981, 542 с.
24. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближений // М.:Наука, 1987, 424 с.
25. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения // М.:Наука, 1976, 320 с.
26. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения // М.: Наука, 1969, 480 с.

27. Потапов М.К. О приближении “углом” // Конференция по конструктивной теории функций, тезисы докладов. Будапешт. 1969. с.68–69.

28. Потапов М.К. Приближение “углом” и теоремы вложения // Mathematica Balkanica. 1972. №2. с.183–198.

29. Потапов М.К. О приближении “углом” в смешанной метрике// Тезисы докладов VII-ой межвузовской конференции по математике и механике. Караганда. 1981. с.9–40.

30. Потапов М.К. О наилучшем приближении аналитических функций многих переменных// Ученые записки Ивановского педиститута. 1958. т.18. с.75–108.

31. Рафальсон С.З. Наилучшее приближение функций в метриках $L^2_{p(x)}$ алгебраическими многочленами и коэффициенты Фурье по ортогональным многочленам // Вестник Ленинг. гос. ун-та. Серия механ. и матем., 1969, №7, с.68–79.

32. Сегё Г. Ортогональные многочлены // М.: Физматгиз, 1962, 500 с. с.730–741.

33. Селимханов Э.В. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по произвольным ортогональным системам // Проблемы современной науки и образования. 2018, т.124, №4, с.17–29.

34. Степанец А.И. Точные оценки коэффициентов Фурье на классах непрерывных и дифференцируемых периодических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1981. т.26. №11. с.34–38.

35. Степанец А.И. Верхние грани коэффициентов Фурье на классах непрерывных функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. т.46. №3. с.650–665.

36. Степанец А.И. Оценки отклонений частных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. т.44. №5. с.1150–1190.

37. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены // М.:Наука, 1979, 415 с.

38. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного // М.:Физматгиз, 1960.

39. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.:МГУ, 1976, 325 с.

40. Шабозов М.Ш. Акобиршоев М.О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // Чебышевский сборник, 2019, т.20, №2, с.348–365.

41. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Среднеквадратическое приближение "углом" на плоскости с весом Чебышева-Эрмита // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2019. №2(20). С.96–103.

42. Шабозов М.Ш. Акобиршоев М.О. Среднеквадратическое приближение "углом" в метрике L_2 и значения квазипоперечников некоторых классов функций // Укр. матем. журн., 2020, т.72, №6,с.852–864.

43. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды ИМ и М УрО РАН, 2015, т.21, №4, с.292-308.

44. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory // Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo, 1985, pp252.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан

[1-A] Захурбеков А. Верхние грани наилучших среднеквадратических приближений функций многих переменных "треугольными" суммами Фурье по произвольным ортогональным системам [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №5-6. – С. 275–282.

[2-A] Захурбеков А. Верхние грани наилучших приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2021. – Т.64. – №7-8. – С. 368–377.

[3-A] Захурбеков А. Верхние грани наилучших совместных приближений некоторых классов периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2022. – Т.65. – №9-10. – С. 580–585.

[4-A] Захурбеков А. Приближение периодических функций двух переменных "круговыми" суммами Фурье в L_2 [Текст] / А.Захурбеков // Известия Национальной академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2022. – №4(189). – С. 17–25.

[5-A] Захурбеков А. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций двух переменных в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Доклады

Национальной академии наук Таджикистана. – 2023. – Т.66. – №3-4. – С. 156–161.

[6-А] Захурбеков А. О наилучших приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье [Текст] /М.Ш.Шабозов, А.Захурбеков // Известия Национальной Академии наук Таджикистана. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2024. – №3(196). – С. 5–22.

В других изданиях:

[7-А] Захурбеков А. Наилучшее приближение некоторых классов периодических функций двух переменных “круговыми” суммами Фурье в $L_2(Q)$ [Текст] / А.Захурбеков // Материалы республиканской научно-практической конференции “*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*”, посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 30-летию образование кафедры информатики и вычислительной математики и “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук”(Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С. 32–35.

[8-А] Захурбеков А. О приближении периодических функций “круговыми” суммами Фурье в L_2 [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной конференции “*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*”, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Дододжона Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 78–81.

[9-А] Захурбеков А. Наилучшие совместные приближения некоторых классов периодических функций двух переменных суммами Фурье [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 68–71.

[10-А] Захурбеков А. О наилучшем приближении функций двух переменных по ортогональным системам [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научно-практической конференции "*Комплексный анализ и его приложения*", посвященной "Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования", 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл. корр. НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова и 70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж.С. Сафарова (Бохтар, 19 ноября 2022 г.). – С. 65–67.

[11-А] Захурбеков А. О наилучших совместных приближениях некоторых классов периодических функций двух переменных [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной конференции "*Современные проблемы математики*", посвященной 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальная академия наук Таджикистана (Душанбе, 26-27 мая 2023 г.). – С. 70–73.

[12-А] Захурбеков А. О наилучших совместных приближениях некоторых классов функции двух переменных "круговыми" суммами Фурье [Текст] / А.Захурбеков // Материалы международной научно-практической конференции "*Современные проблемы математики и её преподавания*", посвященная 35-летию Государственной Независимости Республики Таджикистан, 30-летию Конституции Республики Таджикистан, “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” и 70-летию доктора физико-математических наук Тухлиева Камаридина (Худжанд, 21-22 июня 2024 г.). – С. 39–41.