ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.923; 517.445; 517.968.73 **На правах рукописи**

ЗАРИФЗОДА САРВАР КАХРАМОН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02–Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор,

академик НАН Таджикистана

Раджабов Нусрат

Душанбе – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…….....5

ГЛАВА 1…….....19

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ…….....19

§1.1. Общие сведения…….....19

§1.2. Обзор результатов, касающихся исследований по теории интегро-дифференциальных уравнений…….....20

§1.3. Обзор результатов, касающихся исследования различных интегральных преобразований…….....27

ГЛАВА 2…….....37

КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОСОБЫХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ….....37

§2.1. Понятие об особом дифференциальном операторе……....38

§2.2. Построение общего интеграла для простейших операторно-дифференциальных уравнений…….....40

§2.3. Построение аналога формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения *n* – го порядка……...…42

§2.4. Построение общего интеграла для полного операторно-дифференциального уравнения первого порядка……...45

§2.5. Построение общего интеграла для полного операторно-дифференциального уравнения n – го порядка……...48

§2.6. Упрощенный способ нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения *n* - го порядка…….53

§2.7. Построение основ операционного метода для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений…….....61

§2.8. Основные свойства и теоремы правостороннего $\mathbf{S_{11}^{+}}$ – интегрального преобразования…….....69

§2.9. Интегрирование линейных операторно-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью S_{11}^{+} - интегрального преобразования…….....82

§2.10. Основные свойства и теоремы левостороннего S_{11}^{-} – интегрального преобразования…….....94

Выводы по главе 2…….....104

ГЛАВА 3…….....105

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА…….....105

§3.1. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с особым двухточечным ядром…….....105

§3.2. Регуляризация немодельного уравнения……..113

§3.3. Исследование сопряжённого модельного уравнения……..118

§3.4. Регуляризация немодельного сопряжённого уравнения……....127

§3.5. Исследование особых интегро-дифференциальных уравнений с полным характеристическим уравнением…….....132

Выводы по главе 3…….....142

ГЛАВА 4…….....144

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ…….....144

§4.1. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с логарифмической особенностью в ядре……...145

§4.2. Исследование сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре…….....156

§4.3. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки…….....170

§4.4. Одномерное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки…….....176

Выводы по главе 4…….....190

ГЛАВА 5…….....191

ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОСОБОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА D_x^α…….....191

§5.1. Понятие об особом дифференциальном операторе D_x^α……....192

§5.2. Построение общего интеграла для простейших операторно-дифференциальных уравнений……....194

§5.3. Построение аналога формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения n-го порядка с оператором дифференцирования D_x^α…….....195

§5.4. Построение основ операционного метода в виде S_α – интегрального преобразования …….....198

§5.5. Основные свойства и теоремы S_α – интегрального преобразования…….....202

§5.6. Интегрирование линейных операторно-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью S_α-интегрального преобразования……....211

§5.7. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа сложной свёртки со степенным особым ядром…….....219

§5.8. Одномерное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки со степенным особым ядром…….....229

Выводы по главе 5…….....239

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ…….....240

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…….....156

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ.....257

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ…….....259

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ…….....298

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Данная диссертационная работа посвящена исследованию некоторых классов операторно-дифференциальных и сингулярных интегро-дифференциальных уравнений классическими и операционными методами. Основное внимание уделено исследованию интегро-дифференциальных уравнений с различными видами сингулярности в ядрах.

Интегро-дифференциальные уравнения возникают при исследовании разнообразных физических явлений. Например, такие уравнения получаются при рассмотрении проблемы флуктуаций яркости звезд; при изучении физических явлений, содержащую память; при изучении аэродинамики крыла самолёта и многих других задач.

Активное исследование теории интегро-дифференциальных уравнений, а также интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами началось во второй половине XX-го столетия в работах Я.В.Быкова [96], М.В.Булатова [95], Ю.Н.Валицкого [97], В.В.Васильева [98], М.М.Вейнберга [102], Н.П.Векуа [100], В.С.Владимирова [107], В.Вольтерра [113], А.И.Некрасова [200], В.Н.Николаенко [202], Н.А.Сидорова [303], С.Л Соболева [307], В.Г.Трубина [315], Г.А.Шишкина [327] и др.

Важно отметить, что в большинстве изученных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений понятие сингулярности ядра понимается в смысле главного значения по Коши. В отличия от этого в данной диссертационной работе исследуются интегро-дифференциальные уравнения, ядро которых содержит точки сингулярности первого порядка и выше чем первого порядка, но с интегралами, понимаемыми в обычном смысле Римана. Также исследуются интегро-дифференциальные уравнения со степенной и логарифмической особенностью в их ядрах.

Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения являются актуальным, быстро развивающим разделом теории дифференциальных и интегро-

дифференциальных уравнений, которые привлекают внимание многих математиков, как и прошлых веках, так и современного мира.

Степень разработанности темы исследования. В теории дифференциальных уравнений с частными производными решение многих задач связано с соответствующими сингулярными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Теория обыкновенных сингулярных дифференциальных уравнений является одной из древних областей математики, в развитию которой содействовали многие великие математики прошлых веков. Достаточно называть здесь многочисленные работы по полиномам Бесселя, гамма и бета функциям Эйлера, гипергеометрическим функциям Эйлера и Гаусса, работы Абеля, Якоби и Вейерштрасса по эллиптическим функциям и другие. Многие из этих функций были введены для решения специфических проблем, именно сингулярных задач.

«Изучение дифференциальных уравнений с разными степенями сингулярности было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала А.Вайнштейном [70], [71], Л.Берса [85] и в трудах математиков И.Е.Егорова [135], Я.И.Житомирского [137], Ш.Т.Каримова [159], В.В.Катрахова [160]- [162], Л.Д.Кудрявцева [172], Б.М.Левитана [178], П.И.Лизоркина, С.М.Никольского [180], О.И.Маричева [185], Л.Г.Михайлова [190], [191], И.Г.Петровского [210], Л.С.Пулькиной [216], Н.Раджабова [217]- [231], Л.Раджабовой [263]- [270], К.Б.Сабитова [291]- [293], М.М.Салохитдинова [295], [296], А.С.Сатторова [297], М.М.Смирнова [305] [306], С.М.Ситника [301], [302], С.А.Терсенова [311], З.Д.Усманова [317], [318] и др. Здесь также можно указать на полезные ссылки [117], [118], [137], [142], [176]. Важность уравнений из этих классов определяется также их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала [20], [21], [70], [71], [175], [176], уравнениям Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД) [13], [63], [112], [117], преобразованию Радона [322], газодинамики и акустики [85], [104], [108], линеаризованным уравнениям Максвелла-Эйнштейна [91], механике, теории упругости и пластичности [126] и многим другим» [162]. Подробную

информацию, касающуюся развития этого направления науки можно найти в монографии В.В.Катрахова и С.М.Ситника «Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений» [162].

Общая теория для сингулярных или вырождающихся уравнений разрабатывалась многими математиками, в том числе А.В.Бицадзе [89], [90], И.Н.Векуа [101], О.А.Вирченко [104], М.И.Вишиком [105], О.А.Вихревым [106], В.Ф.Волкодавовым, [112], В.Н.Враговым [114], Г.В.Джаяни [126], Г.Джангибековым [124], Ю.В.Егоровым [136], В.К.Ивановым [144], В.М.Ивакиным [143], М.В.Келдышом [164], А.А.Килбасом [169], Л.Д.Кудрявцевым [172], П.И.Лизоркиным [180], О.И.Маричевым [185], Л.Г.Михайловым [190]- [191], С.Г.Михлиным [189], Е.И.Моисеевым [194], А.Мухсиновым [197], А.М.Нахушевым [199], С.М.Никольским [201], А.Э.Пасенчуком [209], И.Г.Петровским [210], З.Пресдорфым [213], Л.С.Пулькиной [216], Н.Раджабовым [217]- [224], Л.Н.Раджабовой [265]- [270], О.А.Репиным [286], К.Б.Сабитовым [291], [292], М.С.Салахитдиновым [295], Д.С.Сафаровым [298], А.С.Сатторовым [297], А.П.Солдатовым [308], З.Д.Усмановым [318], М.Исмати [152], С.А.Исхоковым [153], Ф.М.Шамсудиновым [325], А.И.Янушаускасом [332] и многими другими.

Исследовании многих вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными связана с исследованием соответствующие вырождающиеся обыкновенные дифференциальные уравнения. Одним из классических вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений является уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)}(x) + A_0 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + A_{n-1} x y'(x) + A_n y(x) = f(x), \qquad (1)$$

которое легко строится с помощью дифференциального оператора $D_x^1 = x\frac{d}{dx}$. Очевидно, что оператор D_x^1 является обобщением обыкновенного дифференциального оператора $D_x^0 = \frac{d}{dx}$. В последние годы, как в зарубежной, так и в отечественной литературе значительно возрос интерес к исследованию различных модификаций и обобщений уравнения (1). Из многочисленной

литературы, касающейся этого направления, укажем лишь следующие работы [122], [106], [109], [26], [148], [154]-[157], [204]-[205], [220], [222]-[231], [326].

Один из способов обобщения уравнения (1) осуществляется с помощью двухточечного дифференциального оператора $D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$, который обобщает дифференциальный оператор D_x^1 за счёт увеличения числа особых точек перед дифференциальным оператором D_x^1. Также можно обобщать уравнения (1) другим способом с помощью дифференциального оператора $D_x^{\alpha} = x^{\alpha}\frac{d}{dx}$, где $\alpha > 1$. Данный дифференциальный оператор является обобщением дифференциального оператора D_x^1 за счёт увеличения степени особой точки перед дифференциальным оператором D_x^1.

Заметим, что значительный вклад в развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений с особым дифференциальным операторам D_x^{11} и D_x^{α} внесли работы Н.Раджабова. К числу важных результатов Н.Раджабова в этом направлении следует отнести исследования по вырождающимся обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам таких уравнений [30]- [38], [220], [222]-[231], [233]-[235]. Особо следует выделить введённый Н.Раджабовым новый класс интегральных уравнений с особыми и сильно - особыми ядрами [39]- [52], [232], [236]-[240] вида

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)}{t-a}\varphi(t)dt = f(x)$$

и

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^{\alpha}}\varphi(t)dt = f(x),$$

где $\alpha > 1$. Эти уравнения также изучены в случае, когда ядро $K(x,t)$ может содержать точки сингулярности логарифмического или степенного характера вида

$$K(x,t) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)$$

или

$$K(x,t) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) + \cdots + A_n\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big)^{n-1}.$$

В работах Н.Раджабова и его ученика С.Саидова [45], [46], [245], [246], [248], [249], [251]-[254], [258] было исследовано интегральное уравнение типа Вольтерра с двумя сингулярными точками вида

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)\varphi(t)dt}{(t-a)(b-t)} = f(x)$$

и её различные обобщения.

В работе [254] было исследовано интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода с логарифмической особенности n-го порядка вида

$$\int_a^x \ln^n\left[\left(\frac{x-a}{b-x}\right)\left(\frac{b-t}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi(t)dt}{(t-a)(b-t)} = f(x).$$

Именно в этой работе был введен двухточечный дифференциальный оператор с особыми точками a и b вида

$$D_x^{ab} = (x-a)(b-x)\frac{d}{dx}.$$

В работах Н.Раджабова и Г.М.Кадирова [154]-[156], [241]-[244], [250] было исследовано линейное обыкновенное дифференциальное уравнения со сверх-сингулярными коэффициентами. В вышеупомянутых работах был введён сильно-особый дифференциальный оператор вида

$$D_x^\alpha = x^\alpha \frac{d}{dx},$$

где $\alpha > 1$.

В работах Л.Н.Раджабовой были изучены двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра вида

$$u(x,y) + \lambda\int_a^x \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt + \mu\int_b^y \frac{u(x,s)}{(b-s)^\beta}ds +$$

$$+\delta\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_y^b \frac{u(t,s)}{(b-s)^\beta}ds = f(x,y)$$

и различные её обобщения [54]-[57], [59], [271]-[282].

В работах Л.Н.Раджабовой и её ученика М.Б.Хушвахтова [283] данный класс уравнений был исследован на полу- бесконечном интервале.

Сопряжённое двумерное интегральное уравнение вида

$$v(x,y)+\frac{\lambda}{(x-a)^{\alpha}}\int\limits_{x}^{a_0} v(t,y)dt-\frac{\mu}{(b-s)^{\beta}}\int\limits_{b_0}^{y} v(x,s)ds+$$

$$+\frac{\delta}{(x-a)^{\alpha}(b-y)^{\beta}}\int\limits_{x}^{a_0} dt\int\limits_{b_0}^{y} v(t,s)ds=g(x,y)$$

было исследовано в работе [43], [58]. В работах [259], [257], [259] были исследованы некоторые многомерные интегральные уравнения с особыми и сильно-особыми ядрами.

В работах Л.Н.Раджабовой и её ученицы Г.Н.Шукуровой [284] было исследовано симметричное интегральное уравнение с логарифмической особенностью вида

$$u(x)+\int\limits_{-x}^{x}\left[p+q\ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{u(t)}{|t|}dt=f(x),$$

также двумерное симметричное уравнение данного вида.

На основе введённого Н.Раджабовым метода исследования особых интегральных уравнений стало возможным исследовать некоторый класс сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, что отражено в работах автора [1-А], [10-А], [12-А]-[19-А], [22-А]-[31-А], [33-А], [40-А]-[51-А], [54-А]-[56-А].

Из приведённого краткого обзора затрагиваемой темы сразу следует, что выбранная тема и объект исследования диссертационной работы является весьма актуальным.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры вычислительной математики и

механики, а также кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и механики Таджикского национального университета на 2015-2020 г. и 2020-2025 г. по темам «Аналитическое исследование, качественный анализ и численные решения задач прикладной математики и механики» и «Сингулярные и сверх -сингулярные дифференциальные и интегральные операторы».

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель работы. Целью настоящей работы является получение представления многообразия решений для линейного обыкновенного операторно-дифференциального уравнения, а также интегро-дифференциального уравнения с сингулярным ядром классическим и современным методами с привлечением элементов операционного исчисления.

Задачи работы. В соответствии с целью выделим следующие задачи:

- получение интегрального представления многообразия решений для линейного обыкновенного операторно-дифференциального уравнения n-го порядка;
- построение основ операционного исчисления для особого дифференциального оператора D_x^{11};
- исследование сингулярных интегро-дифференциальных уравнений классическим и современным методами;
- построение аналога теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения первого порядка и сопряжённого с ним уравнения;
- построение аналога теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмическим ядром и сопряжённого с ним уравнения;

- построение основ операционного исчисления для особого дифференциального оператора D_x^α;
- исследование операторно-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования D_x^α;
- исследование интегро-дифференциальных уравнений типа сложной свёртки;
- построение аналога теоремы Фредгольма для интегро-дифференциальных уравнений типа сложной свёртки.

Объектом исследования диссертационной работы являются:

- операторно-дифференциальные уравнения, построенные с помощью оператора дифференцирования D_x^{11};
- операторно-дифференциальные уравнения, построенные с помощью оператора дифференцирования D_x^α;
- интегро-дифференциальные уравнения с оператором дифференцирования D_x^{11} в их главных частях и сопряжённые с ним уравнения;
- интегро-дифференциальные уравнения с оператором дифференцирования D_x^α в их главных частях и сопряжённые с ним уравнения;
- S_{11} – интегральное преобразование;
- S_α – интегральное преобразование;
- интегро-дифференциальные уравнения типа сложной свёртки и сопряжённого с ним уравнения.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных уравнений, метод получения интегральных представлений, метод интегральных преобразований, операционные методы исследования, метод решений интегро-дифференциальных уравнений, а также широко используются методы, разработанные в работах Н.Раджабова.

Научная новизна работы. Результаты диссертационной работы являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено интегральное представление многообразия решений для линейного обыкновенного операторно-дифференциального уравнения n-го порядка;
- построена основа операционного исчисления для особого дифференциального оператора D_x^{11};
- исследованы некоторые классы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений классическим и операционным методами;
- построен аналог теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения первого порядка и сопряжённого с ним уравнения;
- построен аналог теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмическим ядром и сопряжённого с ним уравнения;
- построена основа операционного исчисления для особого дифференциального оператора D_x^{α};
- исследованы некоторые классы операторно-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования D_x^{α};
- исследованы некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений типа сложной свёртки;
- построен аналог теоремы Фредгольма для одного класса интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки.

Положения, выносимые на защиту:

- доказательство теоремы о структуре общих решений операторно-дифференциальных уравнений;
- понятие S_{11} – интегральное преобразование и, связанные с ним основные теоремы операционного исчисления;
- понятие S_{α} – интегральное преобразование и, связанные с ним основные теоремы операционного исчисления;

- доказательство теорем о сложной свёртке и восстановлении равенства Парсеваля для S_{11} – интегрального преобразования и S_{α} – интегрального преобразования;
- аналог теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения и сопряжённого с ним уравнения;
- аналог теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения с логарифмическим ядром и сопряжённого с ним уравнения;
- аналог теоремы Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения типа свёртки со степенным ядром и сопряжённого с ним уравнения;

Теоретическая и практическая ценность работы. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории немодельных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными и сверх-сингулярными ядрами, а также в других разделах прикладной математики, механики и физики. Материалы данной диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

Достоверность работы. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также на методы интегральных преобразований и элементы операционного исчисления.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и полностью соответствует её формуле (обыкновенные дифференциальные

уравнения) и двум пунктам области исследования (1. Общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; 2. Начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений; Теория дифференциально-операторных уравнений). Диссертацию можно считать разделом вещественного, комплексного и функционального анализа (смежная специальность 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на следующих международных и республиканских конференциях:

- международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения» (г. Бохтар, Таджикистан, 2022 г.);
- международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (г. Душанбе, Таджикистан, 20-21 октября 2022 г.);
- республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях» (г. Душанбе, Таджикистан, 2022 г.);
- международной научной конференции «Краевые задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений» (г. Душанбе, Таджикистан, 4 декабря 2021 г.);
- международной научной конференции «О применении дифференциальных уравнений при решении прикладных задач» (г. Душанбе, Таджикистан, 4 ноября 2021 г.);
- международной научной конференции «Актуальные проблемы современной математики» (г. Душанбе, Таджикистан, 25-26 июня 2021 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежные разделы математики» (г. Фергана, Узбекистан, 12-13 марта 2020 г.);

- международной научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения» (г. Ташкент, Узбекистан, 17-18 ноября 2020 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений» (г. Душанбе, Таджикистан, 25-26 декабря 2020 г.);
- международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами» (г. Душанбе, Таджикистан, 30-31 января 2020 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа» (г. Душанбе, Таджикистан, 13-14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (г. Душанбе, Таджикистан, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции» (г. Душанбе, Таджикистан, 27-28 февраля 2018 г.);
- международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений» (г. Душанбе, Таджикистан, 21-22 июня 2018 г.);
- международной научно-теоретической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологии» (г. Душанбе, Таджикистан, 27-28 декабря 2018 г.);
- международной научно-теоретической конференции «Современные задачи математики и их приложения» (г. Душанбе, Таджикистан, 25-26 сентября 2018 г.);

- республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы алгебры и теории чисел» (г. Душанбе, Таджикистан, 14-15 декабря 2018 г.);
- международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (г. Самара, Россия, 9-13 октября 2017 г.);
- международной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов Белорусского государственного технологического университета Республики Белоруссия (г. Минск, Белоруссия, 1-12 февраля 2017 г.);
- республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы естественных наук» (г. Душанбе, Таджикистан, 24 ноября 2017 г.);
- республиканской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (г. Душанбе, Таджикистан, 02 апреля 2016 г.);
- республиканской научной конференции «Неклассические дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения» (г. Душанбе, Таджикистан, 25-26 сентября 2015 г.);
- республиканской научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и информатики» (г. Душанбе, Таджикистан, 2014 г.);
- республиканской научной конференции «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения» (г. Душанбе, Таджикистан, 2011 г.);
- семинаре кафедры математического анализа и теории функции ТНУ под руководством д.ф.-м.н., академика НАН Таджикистана Н.Раджабова (Душанбе, 2000-2023 гг.);

Личный вклад автора состоит в непосредственном получении научных результатов, выносимых на зашиту, подготовке основных публикаций по выполненной работе и личном участии в апробации результатов исследования.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-А]-[56-А]. В совместных работах соавторам принадлежит консультативное содействие, а постановка задач и выбор метода доказательства принадлежит лично автору.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка цитированной литературы, состоящего из 388 наименований, занимает 308 страницу машинописного текста.

Благодарность автора. Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту академику НАН Таджикистана Н.Раджабову за полезные советы при подготовке данной диссертационной работы и за моральную поддержку.

ГЛАВА 1
ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1.1. Общие сведения

Во второй половине XX-го столетия в связи с потребностями приложений возрос интерес к изучению вырождающихся дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. Основополагающей здесь была известная работа М.В.Келдыша [164]. После данной работы М.В.Келдыша возник интерес к эллиптическим уравнениям с вырождением. Это статья повлекла за собой целый ряд исследований многих известных математиков и сыграла важную роль в развитии теории вырождающихся дифференциальных уравнений [162]. В результате бурного развития данного направления появились фундаментальные результаты по теории сингулярных дифференциальных уравнений и вырождающихся дифференциальных уравнений в работах А.А.Вашарина [99], И.Н.Векуа [101], М.И.Вишика, В.В.Грушина [105], В.Ф.Волкодавова [112], А.В.Бицадзе [89], [90], А.Д.Джураева [128], И.А.Киприянова [171], Л.Д.Кудрявцева [172], Л.Г.Михайлова [190], [191], С.М.Никольского [201], А.М.Нахушева [199], Н.Раджабова [217]-[262], М.М.Смирнова [305], [306], З.Д.Усманова [318], А.И.Янушаускаса [332], R.P.Gilbert [20], [21], R.W.Carrol [10], R.W.Carrol, R.E.Showalter [11], A.Weinstein [70], [71], и других авторов.

В нашей стране для развития общей теории сингулярных или вырождающихся дифференциальных уравнений, а также интегральных уравнений с различными видами особенностями в их ядрах достойный вклад внесли известные математики, в том числе А.Д.Джураев [129], Л.Г.Михайлов [192], Н.Раджабов [232], [236]-[238], [240], З.Д.Усманов [318], К.Х.Бойматов [94],

М.И.Илолов [147], Э.М.Мухамадиев [196], Н.У.Усманов [317], А.С.Сатторов [297], М.Исмати [152], С.А.Исхоков [153], Д.С.Сафаров [298], Г.Джангибеков [123], [124], С.Байзаев [83], С.З.Курбаншоев [174], И.Д.Нуров [203], Л.Н.Раджабова [263]-[285], Ф.М.Шамсудинов [325], Р.Пиров [211], Х.Ш.Джураев [132] и др.

Следует отметить активное изучение различных видов нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов в работах Ш.А.Алимова [75], [76], Ю.П.Апакова [78], Р.Р.Ашурова [80], А.С.Бердышева [87], Т.Д.Джураева [130], [131], Б.И.Исломова [150], Б.Ж.Кадиркулова [157], М.Мирсабурова [193], М.Х.Рузиева [290], М.С.Салахитдинова [295], [296], Ж.О.Тахиров [309], А.К.Уринова [316], А.Хасанова [321] и др.

§1.2. Обзор результатов, касающихся исследований по теории интегро-дифференциальных уравнений

Теория интегро-дифференциальных уравнений сегодня является одной из самостоятельных областей исследования, которая развивается со своеобразной спецификой почти независимо от других областей математики.

Развитие теории обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений в начале XX-го века началось с работ Бурбаки. В 1934 г. по исследованию интегро-дифференциальных уравнений были опубликованы весомые результаты А.И.Некрасовым [200]. Затем идеи данной работы развивались В.В.Васильевым [98] [33], Т.И.Виграненко [103], Я.В. Быковым [96] и другими. В статье М.М.Вейнберга [102] (см. также обширную библиографию в этой работе) приводится подробный обзор достижений в области интегро-дифференциальных уравнений до шестидесятых годов XX-го столетия. Основная специфика теории интегро-дифференциальных уравнений проявляется в их двойственной природе.

В таких уравнениях неизвестная функция входит в дифференциальное выражение и, вместе с тем, фигурирует под знаком интеграла.

В. Вольтера в серии статей 1909 года (см. монографию [113] и указанную там литературу) предложил математическое описание законов функционирования систем с последствием, наследственностью или с динамической памятью.

С практической точки зрения многие задачи прикладного характера приводят к изучению интегро-дифференциальных уравнений с регулярными и сингулярными коэффициентами. Например, задача Вольтера о крутильных колебаниях [113], задача Прандтля расчёта крыла самолета [100], [182], задача об изучении кинетического уравнения Больцмана [121], задача разрешимости интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [108] и многие другие приводят к изучению интегро-дифференциальных уравнений. В последние годы ряд важных результатов, касающихся исследования различных интегро-дифференциальных уравнений, получены в работах Р.В.Арутюняна [79], А.А.Бободжонова [92], М.Ю.Игнатьева, С.Ю.Советникова [145], М.Илолова [149], С.Искандарова [151], Н.Д.Копачевского [167], С.С.Орлова [206], [207], М.В.Фалалеева [319], Г.А.Шишкина [327], А.И.Янушкаускаса [332], Т.К.Юлдашева [330], [331], T.A.Burton [8], R.Cont [12], A.Favini [16] и ряда других авторов.

Следует отметить, что помимо важнейшей прикладной стороны вопроса, не меньший интерес представляет математическое построение основ составляющей проблематики. Исходя из этого, можно утверждать, что теория интегро-дифференциальных уравнений за последние годы в основном развиваются в двух направлениях. Первое направление связано с изучением интегро-дифференциальных уравнений, появляющихся в конкретных физических или механических задачах [100], [108], [113], [121], [182]. Второе направление связано с построением общей теории для не исследованных классов интегро-дифференциальных уравнений. Ко второму направлению также относится изучение многочисленных абстрактных интегро-дифференциальных уравнений в различных банаховых пространствах [206], [207], [303], [304], [319]. Здесь

заметим, что бурное исследование вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах в последние 50 лет происходило в иркутской математической школе под руководством Н.А.Сидорова [303], [304] и М.В.Фалалеева [319]. Обширный обзор о развитии данного направления можно найти в монографии С.С. Орлова [207].

Также в последние годы активно развивается решение прямых и обратных задач или задач с малыми параметрами для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в работах Ш.А.Алимова, Р.Р.Ашурова [1], P.Feng [18], К.Б.Сабитова [293], Л.А.Сахановича [300], Ж.Ш.Сафарова [299], А.С.Бердышева [87], С.З.Джамалова, Р.Р.Ашурова [125], Б.И.Исломова, У.Ш.Убайдуллаева [150] и других.

Следует отметить быстрое развитие приближенных методов исследования интегро-дифференциальных уравнений [17], [19], [82], [188].

Приведём некоторые основные понятия теории интегро-дифференциальных уравнений.

Уравнение называется интегро-дифференциальным, если в нём неизвестная функция находится и под знаком интеграла, и под знаком дифференциала.

Интегро-дифференциальные уравнения разделяют на интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра и Фредгольма.

Различают обыкновенные интегро-дифференциальные уравнения и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных.

Существует интегро-дифференциальные уравнения с регулярными ядрами и с сингулярными ядрами.

Одним из малоизученных задач в теории интегро-дифференциальных уравнений является задача об изучении интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх-сингулярными коэффициентами или ядрами.

Подобные уравнения возникают при исследовании множества физических или механических задач. Например, при изучении аэродинамики крыла самолёта возникает сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt = f(x),$$

которое в литературе часто называют уравнением Прандтля. Исследованию данного уравнения посвящено большое число работ, в частности, работы И.Н.Векуа [100] и Л.Г.Магнарадзе [182].

Более общее сингулярное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{r=0}^{m}\left[a_r(t_0)\varphi^{(r)}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,t)\varphi^{(r)}(t)dt}{t-t_0}\right] = f(t_0),$$

впервые изучил Л.Г.Магнарадзе.

В настоящее время теория интегро-дифференциальных уравнений развивается в основном в трёх направлениях:

1. Первое направление связано с исследованием регулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера и Фредгольма;
2. Второе направление связано с исследованием сингулярных интегро-дифференциальных уравнений типа Коши;
3. Третье направление связано с исследованием интегро-дифференциальных уравнений приближёнными методами.

Данная диссертационная работа в основном посвящена исследованию сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

Отметим, что присутствие сингулярности в интегро-дифференциальных уравнений в разных работах понимается по-разному.

Например, в работах грузинских математиков сингулярность уравнения понимается в смысле главного значения по Коши, т.е. интегралы в уравнениях являются контурными интегралами и ядро данных уравнений имеет точки сингулярности первого порядка. Для исследования таких уравнений используется математический аппарат теории аналитических функций.

В Иркутской математической школе сингулярность в уравнениях понимается в смысле наличия необратимого оператора при старших

производных. Для исследования таких уравнений используется математический аппарат теории обобщённых функций.

Отметим работу профессора Н.А.Сидорова [304], в которой в классе непрерывных функций изучается разрешимость абстрактного интегрального уравнения Вольтерра

$$Bu(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t),$$

где B и $k(t)$ – замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2. Идеи данной работы распространены М.В.Фалалеевым на более сложные объекты – вырожденные линейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра высокого порядка с переменными операторными коэффициентами.

В области сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в случае конечномерных пространств наиболее важные результаты получены М.В.Булатовым [95]. Им, в частности, разработаны аналитические и численные методы решения систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds + f(t), t \in [0,1],$$

с тождественно вырожденной матрицей $A(t)$, т. е. $\det A(t) = 0$ при всех $t \in [0,1]$.

Но изучению интегро-дифференциальных уравнений, когда сингулярность ядра понимается в обычном смысле Римана, посвящено малое число работ.

Поэтому в отличие от вышеуказанных работ, в дальнейшем мы будем рассматривать интегро-дифференциальные уравнения, ядра которых содержат особенности первого порядка и интегралы понимаются в обычном смысле Римана.

Работы данного направления берут своё начало от серии известных работ Н.Раджабова [236]-[240] по теории интегральных уравнений типа Вольтерра с различными сингулярными ядрами.

Особо отметим работы Н.Раджабова [240] по исследованию интегральных уравнений типа Вольтерра со сверх- сингулярным ядром вида

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K(x,t)}{(t-a)^\alpha}\varphi(t)dt = f(x), \qquad (1.2.1)$$

где $\alpha > 1$. До работ Н.Раджабова [236]-[240] исследованию уравнений вида (1.2.1) в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$ было посвящено малое количество работ. Здесь можно указать работы G.R.Bart [5], [6], T.Sato [62], T.Takesada [66], Л.И.Панова [208], Н.А.Магницкого [183], В.С.Рогожина, С.Н.Расламбекова [288], Н.Н.Габбасова, Р.Р.Замалиева [115] и кандидатскую диссертацию Р.Р.Замалиева [140].

В работах Н.Раджабова и его учеников также исследованы более общие интегральные уравнения с особыми ядрами. Например, исследовано модельное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) + \int_a^x \left[p + q\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right)\right]\frac{\varphi(t)}{t-a}dt = f(x), \qquad (1.2.2)$$

с постоянными коэффициентами p и q, также немодельное уравнение вида (1.2.2), когда $p = p(x,t)$ и $q = q(x,t)$. В работе [48], [49] было исследовано уравнение вида (1.2.2), когда ядро уравнения имеет вид

$$K(x,t) = p_1 + p_2\ln\left(\frac{x-a}{t-a}\right) + \cdots + p_n\ln^{n-1}\left(\frac{x-a}{t-a}\right).$$

В работе Н.Раджабова [50] было исследовано интегральное уравнение типа Вольтерра с сильной степенной сингулярностью вида

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[p+q\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\frac{\varphi(t)}{(t-a)^\alpha}dt=f(x),$$

где $\omega_\alpha(x)=\frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}$.

Более общее интегральное уравнение вида

$$\varphi(x)+\int_a^x\left[p_1+p_2\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)+\cdots+p_n\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)^{n-1}\right]\frac{\varphi(t)}{(t-a)^\alpha}dt=f(x),$$

со сверх- сингулярным ядром было изучено в работе [51].

Полученные результаты Н.Раджабова дали возможность автору продолжить исследования в данном направлении в сторону теории интегро-дифференциальных уравнений с различными видами сингулярных ядер.

Следует также отметить, что в последние десятилетия наблюдается активное развитие теории интегро-дифференциальных уравнений в нерегулярных случаях. Отличительная особенность подобных уравнений проявляется в их нерегулярности или сингулярности и вырождении при старших производных. Это означает присутствие необратимого оператора при старших производных. Важно отметить, что в зависимости от изучаемой задачи понятие вырождения или сингулярности приобретает разную природу и поэтому подход отдельных авторов в изучении сингулярных задач бывает разным. Например, если в работах [206], [207], [303], [304], [319] сингулярность понимается в смысле наличия необратимого оператора при старших производных, то в большинстве других работ [88], [123], [124], [189]-[192], [236]-[240] понятие сингулярности понимается в наличии особой точки в ядре изучаемого уравнения.

В работах автора для исследования сингулярных обыкновенных дифференциальных уравнений [2-A]-[7-A] и обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений [10-A], [12-A]-[16-A], [18-A], [19-A], [22-A]-[32-A], а также некоторых классов двумерных интегро-дифференциальных уравнений с

сингулярным ядром [17-А], [28-А], [42-А], [48-А] был применён математический аппарат, разработанный Н. Раджабовым в работах [217], [221], [247]. Операционный метод исследования таких уравнений разрабатывается в последние годы в работах [20-А], [21-А], [35-А], [36-А] с привлечением теории интегральных преобразований. Отметим, что метод интегральных преобразований для исследования дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений является одним из эффективных методов исследования.

§1.3. Обзор результатов, касающихся исследования различных интегральных преобразований

В математике известны десятки разнообразных интегральных преобразований, каждое из которых предназначено для исследования конкретных видов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с соответствующими дифференциальными и интегральными операторами. Обзорные сведения по различным видам интегральных преобразований можно найти в работах Н.И.Ахиезера [81], А.Г.Баскакова [84], Ю.А.Брычкова, А.П.Прудникова [93], И.К.Волкова [110], М.М.Джарбашяна [127], В.А.Диткина, А.П.Прудникова [133], А.Г.Земаняна [141], П.Н.Князева [165], А.П.Прудникова, Ю.А.Брычкова, О.И.Маричева [214] и другие.

Например, уравнения с дифференциальным оператором D_x^0 и обратным к ниму интегральным оператором $(D_x^0)^{-1}$ исследуются с помощью интегрального преобразования Лапласа [2], [3], [28], [60], [65], [177], [312], [324] [328].

Напомним классическое определение интегрального преобразования Лапласа.

Определение 1.3.1. *Интегральным преобразованием Лапласа функции действительного переменного* $g(t)$ *называется функция комплексного переменного* $G(p)$*, определяемая формулой*

$$G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt.$$

С помощью данного интегрального преобразования легко найти решение следующей задачи Коши:

Задача Коши. *Среди всех решений дифференциального уравнения*

$$(D_x^0)^n y + M_1 (D_x^0)^{n-1} y + \cdots + M_{n-1} D_x^0 y + M_n y = f(x)$$

найти решение $y = y(x)$, *удовлетворяющее условию*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Дифференциальные уравнения, которые построены с помощью дифференциального оператора D_x^1, исследуются с помощью интегрального преобразования Меллина [27], [165], [289], [312].

Определение 1.3.2. *Интегральным преобразованием Меллина функции действительного переменного* $g(t)$ *называется функция комплексного переменного* $G(p)$, *определяемая формулой*

$$G(p) = \int_0^\infty t^{p-1} g(t) dt.$$

С помощью интегрального преобразования Меллина также можно исследовать интегральные уравнения с однородным ядром минуса первой степени.

Также с помощью интегрального преобразования Фурье исследуется обширный класс уравнений с оператором дифференцирования $D_i^{-1} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ [22], [163], [106], [165] [289], [312]. Применение интегрального преобразования Фурье

к решению дифференциальных уравнений привело к созданию современной теории дифференциальных уравнений таких как «Теория псевдо-дифференциальных уравнений» и «Теория интегральных операторов Фурье» в работах М.С.Аграновича [74], Дж.Дж.Кона и Л.Ниренберга [166], Л.Хёрмандера [323], М.Тейлора [310], Ф.Трева [313], М.А.Шубина [329], И.М.Гельфанда и Г.Е.Шилова [119].

Помимо вышеуказанных преобразований существуют десятки других более сложных интегральных преобразований [9], [14] [23]-[25], [29], [120], [138], [139], [141], [214] [215], [287], каждый из которых соответствует определённому виду дифференциального оператора.

Приведем список наиболее известных до настоящего времени интегральных преобразований и обратных к ним преобразований.

1. Интегральное преобразование Лапласа задаётся формулой:

$$L[f(x)](p) = F(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)dx.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$L^{-1}[F(p)](x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{px} F(p)dp.$$

2. Интегральное преобразование Меллина задаётся формулой:

$$M[f(x)](s) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)dx.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$M^{-1}[\varphi(s)](x) = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\varphi(s)ds.$$

3. Интегральное преобразование Фурье задаётся формулой:

$$F[f(x)](t) = \mathcal{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(x)dx.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$F^{-1}[f(t)](x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\mathcal{F}(t)dt.$$

4. Интегральное преобразование Абеля – преобразование, часто используемое при анализе сферически или цилиндрически симметричных функций. Названо в честь норвежского математика Н.Х. Абеля. Для функции $f(r)$ преобразование Абеля даётся уравнением:

$$F(y) = 2\int\limits_{y}^{\infty} \frac{rf(r)dr}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Если функция $f(r)$ спадает с r быстрее чем $\frac{1}{r}$, то можно вычислит обратное преобразование Абеля:

$$f(r) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{r}^{\infty} \frac{F'(y)dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}.$$

5. Интегральное преобразование Хенкеля. В математике преобразование Ханкеля порядка ν функции $f(r)$ задаётся формулой:

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(kr) r dr,$$

где J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν и $\nu \geq -\frac{1}{2}$. Обратным преобразованием Ханкеля функции $F_\nu(k)$ называют следующее выражение:

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty F_\nu(k) J_\nu(kr) k dk.$$

Преобразование Ханкеля является интегральным преобразованием. Оно было изобретено Германом Ханкелем и известно также под именем преобразования Бесселя - Фурье.

6. Интегральное преобразование Гегенбауэра – интегральное преобразование $T\{F(t)\}$ функции $F(t)$:

$$T\{F(t)\} = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\rho-\frac{1}{2}} C_n^\rho(t) F(t) dt = f_n^\rho, \rho > -\frac{1}{2}, n = 0,1,2, \ldots$$

где $C_n^\rho(t)$ – многочлены Гегенбауэра. Если функция разлагается в обобщенный ряд Фурье по многочленам Гегенбауэра, то имеет место формула обращения:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(n+\rho)\Gamma^2(\rho) 2^{2\rho-1}}{\pi\Gamma(\mathrm{n}+2\rho)} C_n^\rho(t) f_n^\rho(t), -1 < t < 1.$$

Преобразование Гегенбауэра сводит дифференциальную операцию

$$R[F(t)] = (1 - t^2)F'' - (2\rho + 1)tF'$$

в алгебраическую вида

$$T\{R[F(t)]\} = -n(n + 2\rho)f_n^{\rho}.$$

Названо в честь австрийского математика Леопольда Гегенбауэра (1849-1903).

7. Интегральное преобразование Конторовича-Лебедева – интегральное преобразование, задаваемое для функции $f(x)$ формулой:

$$F(\tau) = \int_0^{\infty} f(x)K_{i\tau}(x)dx,$$

где $K_\nu(x)$ - функция Макдональда. Обратное преобразование имеет вид:

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x}\int_0^{\infty} K_{i\tau}(x)\tau \mathrm{sh}\pi\tau F(\tau)d\tau.$$

Впервые данное преобразование было рассмотрено М.И.Конторовичем и Н.Н.Лебедевым в 1938 году.

8. Интегральное преобразование Мелера-Фока функции $f(x)$ задаётся равенством :

$$F(\tau) = \int_1^{\infty} f(x)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)dx,$$

где $P_\nu(x)$ - сферическая функция Лежандра первого рода. Обратное преобразование имеет вид:

$$f(x) = \int_0^\infty P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)\tau \mathrm{th}\pi\tau F(\tau)d\tau.$$

Данное преобразование было впервые введено Г.Ф.Мелером в 1881 году, основные теоремы, касающиеся данного преобразования были доказаны В.А.Фоком.

9. Интегральное преобразование Стилтьеса – задаётся формулой:

$$F(\tau) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+\tau}dx,$$

где интегрирование ведётся по вещественной полуоси.

Известно также обобщённое интегральное преобразование Стилтьеса в виде

$$F(\tau) = \int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+\tau)^\rho}dx.$$

10. Интегральным преобразованием Лагерра функции вещественной переменной $f(t)$ называется функция $T(n)$ целого переменного n, определяемое равенством:

$$\mathcal{T}\{f(t)\}(n) = T(n) = \int_0^\infty e^{-t}L_n(t)f(t)dt,$$

где $L_n(t)$ – многочлены Лагерра n-го порядка. Это интегральное преобразование применяется для решения дифференциального уравнения Лагерра

$$L[x(t)] + nx = 0,$$

где $L[x(t)] = tx''(t) + (1-t)x'(t)$. Применение преобразования Лагерра сводит дифференциальную операцию $L[x(t)]$ в алгебраическую операцию в виде:

$$\mathcal{T}\{L[x(t)]\} = -nx^*(n).$$

Из более поздних предложенных интегральных преобразований отметим преобразование Sumudu, которое предложил Watugala в работах [68], [69], также немного видоизмененный вид Sumudu преобразование, которое называется преобразованием Elzaki [15]. Интегральное преобразование Elzaki для функции, принадлежащей классу

$$B = \left\{ f(t) \colon \exists M, k_1, k_2 > 0 \text{ такие что } |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}}, \text{если } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

определяется следующим образом:

$$T(u) = u \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{t}{u}} \, dt, u \in (k_1, k_2)$$

или в эквивалентной форме

$$T(u) = u^2 \int_0^\infty f(ut) e^{-t} \, dt, u \in (k_1, k_2).$$

Интегральное преобразование Sumudu для функции $f(t) \in B$ определяется формулой:

$$F(u) = \frac{1}{u}\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{u}}dt, u \in (k_1, k_2).$$

В работах О.А.Репина, С.М.Заикина [287] и С.М.Заикина [138], а также в кандидатской диссертации С.М.Заикина [139] были введены и исследованы обобщённые интегральные преобразования Лапласа вида

$$\tilde{L}\{f(t); x\} = \int_0^\infty \exp(-tx)\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(tx)^\gamma) f(t)dt \qquad (1.3.1)$$

$$\tilde{L}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma}\{f(t); x\} = \int_0^\infty t^{\gamma_2}\exp(-(tx)^{\gamma_1})\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; -b(tx)^{\gamma\gamma_1}) f(t)dt,$$

где $t \geq 0, \gamma \in C, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0, b \geq 0, f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ $t^{\gamma_2} f(t) < M\exp(s_0 t^{\gamma_1})$, M, s_0 – постоянные числа (при $t > 0$), ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ – обобщённая конфлюэнтная гипергеометрическая функция

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\ {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c,\tau)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle| zt^\tau\right]dt,$$

$$\mathrm{Re}c > \mathrm{Re}a > 0, \tau > 0, \tau \in R, \beta > 0, \beta \in R, \tau - \beta < 1,$$

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ –классическая Гамма-функция,

$${}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}(c,\tau)\\(c,\beta)\end{matrix}\middle| zt^\tau\right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(c+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)}\frac{z^n t^{\tau n}}{n!}$$

–частный случай функции Райта.

Очевидно, что интегральное преобразование (1.3.1) при $b = 0$ совпадает с классическим преобразованием Лапласа.

Важно подчеркнуть, что поскольку подобные интегральные преобразования для особых операторов дифференцирования D_x^{11} и D_x^{α} до настоящего времени в полном и законченном виде не были построены, поэтому исследования дифференциальных и интегральных уравнений с операторамиD_x^{11} и D_x^{α} в их главных частях по методам интегральных преобразований сталкиваются с трудностями.

Важные шаги для преодоления этих трудностей были сделаны в работах автора [20-A], [21-A], [35-A]. В данных работах построена основа операционных методов для исследования дифференциальных уравнений с операторами дифференцирования D_x^{α} и D_x^{11}. Появление новых интегральных преобразований даёт сильный импульс развитию теории дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений в нескольких направлениях. Например, становится возможным исследовать обыкновенные операторно-дифференциальные уравнения и интегро-дифференциальные уравнения с оператором дифференцирования D_x^{α} и D_x^{11}, а также операторно-дифференциальные уравнения в частных производных с данными операторами дифференцирования, интегральные уравнения типа сложной свёртки и т.д.

ГЛАВА 2
КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОСОБЫХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе исследуются дифференциальные уравнения, которые построены с помощью особого двухточечного дифференциального оператора $D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$. Глава состоит из десяти параграфов. В первом и втором параграфах исследуются основные свойства дифференциального оператора D_x^{11}, затем в третьем и четвертом параграфах находится общий интеграл для операторно-дифференциального уравнения первого порядка. Далее, строится аналог формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения n – го порядка.

В пятом параграфе находится общий интеграл для общего операторно-дифференциального уравнения n – го порядка.

Далее, для нахождения общего решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения в шестом параграфе предлагается упрощённый способ нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения.

Чтобы исследовать изучаемые уравнения операционными методами в седьмом параграфе строится основа операционного метода для исследования операторно-дифференциальных уравнений, которая построена с помощью особого двухточечного дифференциального оператора D_x^{11}. В восьмом параграфе изучаются основные свойства построенного S_{11}^{+} - интегрального преобразования.

В девятом параграфе на основе построенной техники находится единственное решение задачи Коши для одного класса операторно-дифференциальных уравнений n – го порядка с постоянными коэффициентами.

В десятом параграфе изучаются основные свойства левостороннего S_{11}^{-} – интегрального преобразования.

Основным результатом данной главы является построение основ операционного метода для исследования операторно-дифференциальных уравнений, которые построены с помощью особого двухточечного дифференциального оператора D_x^{11}.

§2.1. Понятие об особом дифференциальном операторе

Пусть $\Gamma = \{x : 0 < x < 1\}$ - множество точек на вещественной оси. На Г рассмотрим особый дифференциальный оператор вида

$$D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}. \tag{2.1.1}$$

Этот оператор обобщает дифференциальный оператор Эйлера $D_x^1 = x\frac{d}{dx}$ и его особенность заключается в том, что он может обращаться в нуль в обеих концевых точках интервала Г.

Условимся, что в операторе (2.1.1) сомножитель перед оператором $\frac{d}{dx}$ как бы, прикреплён к нему и поэтому он действует на любую функцию как один целый оператор. Отсюда степени оператора (2.1.1) будем определять так

$$(D_x^{11})^n = D_x^{11}(D_x^{11})^{n-1} = \cdots = \underbrace{D_x^{11}\ D_x^{11} \ldots . D_x^{11}}_{n-\text{раз}} \tag{2.1.2}$$

Также в дальнейшем условимся, что в правой части равенства (2.1.2) последний оператор действует первым, перед последним действует вторым и т.д. первый оператор действует последним т.е.

$$\underbrace{D_x^{11}\ D_x^{11} \ldots . D_x^{11}}_{n-\text{раз}} = \underbrace{\overbrace{D_x^{11}}^{n}\ \overbrace{D_x^{11}}^{n-1} \ldots . \overbrace{D_x^{11}}^{2}\ \overbrace{D_x^{11}}^{1}}_{n-\text{раз}}. \tag{2.1.3}$$

Если действовать наоборот, то при вычислении высших степеней оператора D_x^{11} столкнёмся с громоздкими вычислениями. Действительно это сразу становится видно уже при вычислении второй степени данного оператора т.е.

$$(D_x^{11})^2 = \overbrace{D_x^{11}}^{1}\overbrace{D_x^{11}}^{2} = \overbrace{x(1-x)\cdot\frac{d}{dx}}^{1}\overbrace{\left[x(1-x)\cdot\frac{d}{dx}\right]}^{2} =$$

$$= x(1-x)(1-2x)\frac{d}{dx} + x^2(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2}.$$

Отсюда в дальнейшем будем пользоваться оператором (2.1.1) в смысле действия его степеней как в (2.1.3).

Рассмотрим функцию $\psi(x) = \frac{x}{1-x}$. Действуя на него оператором D_x^{11}, получим:

$$D_x^{11}\psi(x) = D_x^{11}\left(\frac{x}{1-x}\right) = x(1-x)\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x(1-x)\cdot\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x}.$$

Следовательно функция $\psi(x) = \frac{x}{1-x}$ для оператора D_x^{11} играет ту же роль, что показательная функция $\varphi(x) = e^x$ играет для обычного оператора дифференцирования $D_x^0 = \frac{d}{dx}$.

Далее покажем, что логарифмическая функция вида $\psi(x) = \ln\frac{x}{1-x}$ для оператора D_x^{11} играет ту же роль, что обычная переменная x играет для оператора D_x^0:

$$D_x^{11}\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = x(1-x)\frac{1-x}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)' = x(1-x)\frac{1-x}{x}\frac{1}{(1-x)^2} = 1.$$

Пусть функция $f(x) \in C(0,1)$. Совершая замену $x = \frac{e^t}{1+e^t}$ в функции данного класса

$$f(x) = f\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right) = g(t) = g\left(\ln\frac{x}{1-x}\right),$$

получим, что $g(t) \in C(-\infty,\infty)$. Далее, пере обозначая:

$$f(x) = f^*\left(\ln\frac{x}{1-x}\right), g(t) = g^*\left(\frac{e^t}{1+e^t}\right),$$

через $C_{11}(0,1)$ обозначим класс сложных функций $f(x) = f^*\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)$, которые зависят от функции $\psi(x) = \ln\frac{x}{1-x}$, как от аргумента.

Таким же образом, через $C_{11}^n(0,1)$ обозначим класс таких функций $f(x)$, которые n раз D_x^{11} дифференцируемы. Если $f(x) \in C_{11}^n(0,1)$, тогда соответствующие функции $g(t)$, где $t = \ln\frac{x}{1-x}$, будут принадлежать классу $C^n(-\infty,\infty)$. Действительно

$$D_x^{11}f(x) = D_x^{11}f\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = x(1-x)f'\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{x(1-x)} = f'\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = g'(t);$$

$$(D_x^{11})^{\,2}f = D_x^{11}D_x^{11}f = D_x^{11}f'\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = f''\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = g''(t);$$

……....

$$(D_x^{11})^{\,n}f = D_x^{11}(D_x^{11})^{\,n-1}f = D_x^{11}f^{(n-1)}\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = f^{(n)}\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) = g^{(n)}(t).$$

§2.2. Построение общего интеграла для простейших операторно-дифференциальных уравнений

На Г рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение, созданное с помощью дифференциального оператора D_x^{11}:

$$D_x^{11}y = f(x), \qquad (2.2.1)$$

где $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$. В дальнейшем дифференциальные уравнения, которое построены с помощью дифференциального оператора D_x^{11}, будем называть *операторно-дифференциальными (О-Д)* уравнениями. Для решения О-Д

уравнения (2.2.1) прежде всего, запишем это уравнение в обычном виде и после непосредственного интегрирования получим:

$$x(1-x)\frac{d}{dx}y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{x(1-x)} \Rightarrow y = \int f(x)\frac{dx}{x(1-x)} + c_1.$$

Или же с помощью определённого интеграла

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\frac{dt}{t(1-t)} + c_1,$$

где $x_0 \in \Gamma$ – фиксированное достаточно близкое к нулю число, $x \in \Gamma$ меняется в пределах Г, c_1 - произвольная константа. Отсюда видно, что оператор

$$I_{x_0}^{x}(\cdot) = \int_{x_0}^{x} (\cdot)\frac{dt}{t(1-t)}$$

является обратным оператором к оператору D_x^{11}, который обозначаем в виде $(D_x^{11})^{-1}$. Поскольку оператор $I_{x_0}^{x}$ определяется с точностью до произвольной константы c_1, поэтому эти операторы являются взаимно обратными правосторонними, но не левосторонними операторами, т.е. в общем случае

$$D_x^{11} I_{x_0}^{x} f(x) \neq I_{x_0}^{x} D_x^{11} f(x).$$

Они будут равными, если принять значения произвольной константы равными $f(x_0)$ т.е. $c_1 = f(x_0)$. Действительно, поскольку

$$D_x^{11}(D_x^{11})^{-1} f(x) = x(1-x)\frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\frac{dt}{t(1-t)} + c_1\right) =$$

$$= x(1-x)\frac{f(x)}{x(1-x)} = f(x),$$

и

$$(D_x^{11})^{-1}D_x^{11}f(x) = \int_{x_0}^{x} t(1-t)\frac{d}{dt}f(t)\frac{dt}{t(1-t)} + c_1 = \int_{x_0}^{x} df(t) + c_1 =$$

$$= f(t)\Big|_{x_0}^{x} + c_1 = f(x) - f(x_0) + c_1,$$

тогда $D_x^{11}I_{x_0}^{x}f(x) = I_{x_0}^{x}D_x^{11}f(x)$, если только $c_1 = f(x_0)$.

§2.3. Построение аналога формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения *n* – го порядка

На Г рассмотрим О-Д уравнение n - го порядка вида

$$(D_x^{11})^n y = f(x), \qquad (2.3.1)$$

где $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$. Это уравнение тоже легко интегрируется в квадратурах. Действительно, так как $(D_x^{11})^n y = D_x^{11}(D_x^{11})^{n-1}y$, то на основе решения уравнения (2.2.1) получим

$$(D_x^{11})^{n-1}y = \int_{x_0}^{x} f(t_1)\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} + c_1,$$

где c_1-произвольная постоянная.

Аналогичными рассуждениями находим:

$$(D_x^{11})^{n-2}y = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)}\,\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} + c_1\ \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right) + c_2\,;$$

……..

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1}\dots\int_{x_0}^{t_{n-1}}}_{n-\text{раз}} f(t_n)\frac{dt_n}{t_n(1-t_n)}\,\frac{dt_2}{t_{n-1}(1-t_{n-1})}\dots\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} +$$

$$+\frac{c_1}{(n-1)!}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)+\frac{c_2}{(n-2)!}\ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)+\dots+$$

$$+\frac{c_{n-1}}{1!}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)+c_n. \quad (2.3.2)$$

Полученное решение (2.3.2) является общим решением уравнения (2.3.1).

Здесь функция

$$y_{\text{чн}} = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1}\dots\int_{x_0}^{t_{n-1}}}_{n-\text{раз}} f(t_n)\frac{dt_n}{t_n(1-t_n)}\,\frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}(1-t_{n-1})}\dots\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)}$$

содержит n квадратур. Можно его заменить одной квадратурой, т.е. легко можно построить аналог формулы Коши. Для этого мы можем рассматривать интеграл

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)}\,\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} = \int_{x_0}^{x}\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)}\int_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)}$$

как повторный и после, меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)}\int_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} = \int_{x_0}^{x} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)}\int_{t_2}^{x}\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t_2)\ln\frac{t_1}{1-t_1}\Bigg|_{t_2}^{x}\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} = \int_{x_0}^{x} f(t_2)\left[\ln\frac{x}{1-x}-\ln\frac{t_2}{1-t_2}\right]\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t_2}{t_2}\right) f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} = |t_2 = t| =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \ln\left(\frac{x}{1-x}\ \frac{1-t}{t}\right) f(t)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Отсюда следует:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)}\ \frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} = \int_{x_0}^{x} \ln\left(\frac{x}{1-x}\ \frac{1-t}{t}\right) f(t)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Аналогично находим:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1}\int_{x_0}^{t_2} f(t_3)\frac{dt_3}{t_3(1-t_3)}\ \frac{dt_2}{t_2(1-t_2)}\ \frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} \int_{x_0}^{t_1} \ln\left(\frac{t_1}{1-t_1}\ \frac{1-t_2}{t_2}\right)\cdot f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} \int_{t_2}^{x} \ln\left(\frac{t_1}{1-t_1}\ \frac{1-t_2}{t_2}\right)\ \frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\ \frac{1-t_2}{t_2}\right) f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} = |t_2 = t| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\ \frac{1-t}{t}\right) f(t)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_1}\cdots\int_{x_0}^{t_{n-1}}}_{n-\text{раз}} f(t_n)\frac{dt_n}{t_n(1-t_n)}\,\frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}(1-t_{n-1})}\cdots\frac{dt_1}{t_1(1-t_1)}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t(1-t)}\,.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (2.3.1) можем представить в виде:

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t(1-t)}+$$

$$+\frac{c_1}{(n-1)!}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)+\frac{c_2}{(n-2)!}\ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{c_{n-1}}{1!}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)+c_n. \qquad (2.3.3)$$

Решение (2.3.3) является общим решением уравнения (2.3.1) в форме Коши.

§2.4. Построение общего интеграла для полного операторно-дифференциального уравнения первого порядка

На Г рассмотрим полное О-Д уравнение первого порядка вида

$$D_x^{11}y+M_1y=f(x), \qquad (2.4.1)$$

где $f(x)\in \mathrm{C}_{11}(\Gamma)$ заданная непрерывная функция на Г, M_1 – известная константа.

Неоднородное уравнение (2.4.1) соответствует однородному уравнению

$$D_x^{11}y+M_1y=0. \qquad (2.4.2)$$

Непосредственным интегрированием общее решение однородного уравнения (2.4.2) получим в виде:

$$y(x) = c_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1}, \tag{2.4.3}$$

где c_1 – произвольная константа.

Далее, применяя метод вариации произвольных констант, решение неоднородного уравнения (2.4.1) будем искать в виде

$$y(x) = c_1(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1}. \tag{2.4.4}$$

Отсюда

$$D_x^{11} y(x) = D_x^{11} c_1(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1} - c_1(x) M_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1}. \tag{2.4.5}$$

Подставляя значения $y(x)$ и $D_x^{11} y(x)$ из (2.4.4) и (2.4.5) в (2.4.1), получим:

$$D_x^{11} c_1(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1} - M_1 c_1(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1} + M_1 c_1(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1} = f(x)$$

$$D_x^{11} c_1(x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1} = f(x) \Rightarrow D_x^{11} c_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{M_1} f(x) \Rightarrow$$

$$c_1(x) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{M_1} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} + C_1.$$

Таким образом, подставляя найденное значение функции $c_1(x)$ в (2.4.4), после некоторых преобразований получим общее решение неоднородного уравнения (2.4.1) в виде:

$$y(x) = C_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-M_1} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{-M_1} f(t) \frac{dt}{t(1-t)}. \tag{2.4.6}$$

Для получения единственного решения уравнения (2.4.1) исследуем следующую задачу Коши для данного уравнения:

Задача Коши. *Среди всех решений уравнения (2.4.1) найти такое решение*

$$y = y(x),$$

которое удовлетворяет условию

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2.4.7)$$

где x_0 и y_0 – заданные числа.

Решение Задачи Коши. Из интегрального представления (2.4.6) получим:

$$y(x_0) = C_1\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^{-M_1} = y_0 \Rightarrow C_1 = y_0\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right)^{M_1}.$$

Подставляя найденное значение C_1 в (2.4.6), получим единственное решение уравнения (2.4.1) в виде:

$$y(x) = y_0\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right)^{-M_1} + \int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{-M_1} f(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (2.4.8)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 2.4.1. *Пусть в уравнении (2.4.1) $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$, M_1 - известная константа, тогда задача Коши (2.4.1)-(2.4.7) имеет единственное решение, которое выражается формулой (2.4.8).*

§2.5. Построение общего интеграла для полного операторно-дифференциального уравнения n – го порядка

Через $P_M^n(x)$ - обозначим следующий полином:

$$P_M^n(x) \equiv x^n + M_1 x^{n-1} + \cdots + M_{n-1}x + M_n.$$

Каждому такому полиному можно сопоставить вырождающийся дифференциальный оператор

$$P_M^n(D_x^{11}) \equiv (D_x^{11})^n + M_1(D_x^{11})^{n-1} + \cdots + M_{n-1}D_x^{11} + M_n,$$

где $D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$ - дифференциальный оператор с особенностями в точках $x = 0$ и $x = 1$. Иначе говоря, по определению

$$P_M^n(D_x^{11})y(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} M_i (D_x^{11})^{n-i} y(x),$$

где $(D_x^{11})^0 = 1$ и, не ограничивая общности, в дальнейшем всегда предположим, что $M_0 \equiv 1$.

«Обозначим множество операторов вида $P_M^n(D_x^{11})$ через $K_1[D_x^{11}]$. Очевидно, что для любых двух элементов из $K_1[D_x^{11}]$ определена их сумма и произведение:

$$\sum_{i=0}^{n} M_i (D_x^{11})^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} N_i (D_x^{11})^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (M_i + N_i)(D_x^{11})^{n-i};$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} M_i (D_x^{11})^{n-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} N_j (D_x^{11})^{m-j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} M_i N_i \, (D_x^{11})^{m+n-i-j}.$$

Через $K_1[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел:

$$P_M^n(x) \in K_1[x], P_M^n(x) = \sum_{i=0}^{n} M_i x^{n-i}.$$

Каждому полиному $P_M^n(x) \in K_1[x]$ можно взаимно однозначно сопоставить оператор $P_M^n(D_x^{11}) \in K_1[D_x^{11}]$. В дальнейшем будем обозначать полином $P_M^n(x)$, отвечающий оператору $P_M^n(D_x^{11})$, символом оператора $P_M^n(D_x^{11})$. При таком сопоставлении сумма двух полиномов переходит в сумму соответствующих операторов и произведение двух полиномов переходит в произведение соответствующих операторов. Имея в виду это соответствие, будем говорить, что $K_1[x]$ и $K_1[D_x^{11}]$ изоморфны» [187].

Далее на $\Gamma = \{x: 0 < x < 1\}$ будем исследовать общее операторно-дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами вида:

$$P_M^n(D_x^{11})y(x) = f(x), \tag{2.5.1}$$

где $f(x) \in \mathrm{C}_{11}(\Gamma)$ - заданная непрерывная функция на Г.

Теория уравнения вида (2.5.1) с обычным оператором дифференцирования $D_i = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ в области обобщённых функций начинала своё развитие в шестидесятых годах прошлого столетия в основополагающих работах В.П.Маслова [187], Дж.Дж.Кона и Л.Ниренберга [166], Л.Хёрмандера [323] и др. Именно в этот период появляются новые научные направления под названием псевдо-дифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Дальнейшее развитие данного направления связано с именами Ю.В.Егорова [136], Ф.Трева [313], М.Тейлора [310] и другими. Важно заметить, что почти во всех данных монографических работах основным аппаратом исследования является интегральное преобразования Фурье. К сожалению, этот аппарат для изучения

уравнения (2.5.1) с оператором дифференцирования $D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$ использовать невозможно.

Такие уравнения имеют свои собственные интегральные преобразования, которые в дальнейшем мы будем исследовать. В данный момент для исследования уравнения (2.5.1) воспользуемся техникой классической теории дифференциальных уравнений. Важно отметить, что фундаментальные результаты в этом направлении были получены в работах Н.Раджабова [245], [246], [248], [249], [251], [252]. В данных работах был широко применён двухточечный дифференциальный оператор вида $D_x^{ab} = (x-a)(b-x)\frac{d}{dx}$. Поскольку этот оператор легко приводится к виду оператора D_x^{11}, поэтому в дальнейшем исследуем дифференциальные уравнения с оператором D_x^{11}.

Прежде всего, заметим, что функция $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}$ для дифференциального оператора D_x^{11} является собственной функцией, т.е.

$$D_x^{11}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} = \lambda\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}.$$

С учётом данного равенства, действуя оператором $P_M^n(D_x^{11})$ к функции вида $y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}$, получим:

$$P_M^n(D_x^{11})\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} = P_M^n(\lambda)\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}.$$

Отсюда видно, что когда оператор $P_M^n(D_x^{11})$ действует на функцию $y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}$, он выделяет из этой функции свой символ, т.е. выделяет полином степени n от переменной λ.

Это свойство даёт возможность отыскать решения однородного уравнения

$$P_M^n(D_x^{11})y(x) = 0, \qquad (2.5.2)$$

в виде $y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}$ и по отношению к λ сразу получить характеристическое уравнение

$$P_M^n(\lambda) = 0, \tag{2.5.3}$$

которое будет алгебраическим уравнением n - го порядка. В зависимости от корней характеристического уравнения (2.5.3), получим общие решения уравнения (2.5.2) в следующих случаях:

I. Пусть корни характеристического уравнения (2.5.3) являются вещественными и разными, которые обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Тогда функции

$$y_1 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1}, \;\; y_2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2}, \dots, y_n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_n}$$

являются частными решениями однородного уравнения (2.5.2) и его общее решение имеет вид:

$$y(x) = c_1^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} + \; c_2^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} + \dots + \; c_n^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_n},$$

где $c_i^1 (i = \overline{1,n}\,)$ - произвольные постоянные числа.

II. Пусть все корни характеристического уравнения (2.5.3) являются вещественными и равными т.е.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda,$$

тогда легко можно проверить, что функции

$$y_1 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}, \;\; y_2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \dots, y_n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

являются частными решениями однородного уравнения (2.5.2). В этом случае общее решение однородного уравнения (2.5.2) имеет вид:

$$y(x) = c_1^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} + c_2^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots + c_n^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

где $c_i^2(i = \overline{1,n})$ - произвольные постоянные числа.

III. Пусть в алгебраическом уравнении (2.5.3) $n = 2k$ - чётное число и все его корни являются комплексно - сопряжёнными, которые обозначим через

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1\,; \quad \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2; \ldots;\ \lambda_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm i\beta_k.$$

В этом случае легко можно показать, что частными решениями однородного уравнения (2.5.2) будут функции

$$y_1 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],\ \ y_2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],\cdots,$$
$$y_{2k-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],\ \ y_{2k} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]$$

и общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^3\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right],$$

где $c_i^2\left(i = \overline{1,2k}\right)$ - произвольные постоянные числа.

§2.6. Упрощённый способ нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения n - го порядка

Из общего курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что существуют разнообразные методы нахождения частного решения неоднородного уравнения. Самым распространённым методом нахождения частного решения неоднородного уравнения для произвольной функции $f(x)$ в правой части исследуемого уравнения является классический метод вариации произвольных постоянных. Применение этого метода для нахождения частного решения неоднородных уравнений высших порядков приводит к громоздким вычислениям. Применение этого метода для нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения n - го порядка (2.5.1) тоже весьма затруднительно и в некоторых случаях нахождение корней характеристического уравнения (2.5.3), становится практически невозможным. Поэтому ниже предлагаем другой способ нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения n - го порядка, который является наиболее упрощённым способом по сравнению с классическими методами.

I. Пусть корни характеристического уравнения (2.5.3) являются вещественными и разными, тогда, как было отмечено, общее решение однородного уравнения (2.5.2) имеет вид:

$$y(x) = c_1^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} + \ c_2^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} + \cdots + \ c_n^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_n}$$

где $c_i^1 (i = \overline{1,n}\ )$ - произвольные постоянные числа. Принимая во внимание общую структуру частного решения неоднородного уравнения первого порядка (2.4.1) в виде (2.4.6), частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) будем искать в виде:

$$y_{\text{чн}} = \int_{x_0}^{x} \left[N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_1} + N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_n^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_n} \right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (2.6.1)$$

где $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$ - неопределённые коэффициенты. Если решение неоднородного уравнения (2.5.1) имеет вид (2.6.1), то остаётся лишь определить неопределённые коэффициенты $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$. Для нахождения данных коэффициентов поступаем следующим образом: последовательно находим D_x^{11}- производные до n - го порядка от функции (2.6.1) и каждый раз требуем выполнения подходящих условий для коэффициентов $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$. Для этого в начале находим D_x^{11}-производную первого порядка от функции (2.6.1):

$$D_x^{11} y_{\text{чн}} = \int_{x_0}^{x} \left[N_1^1 \lambda_1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_1} + \cdots + N_n^1 \lambda_n \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_n} \right] \times$$

$$\times f(t) \frac{dt}{t(1-t)} + (N_1^1 + N_2^1 + \cdots + N_n^1) f(x).$$

Выберем неизвестные константы так, чтобы выполнялось условие

$$N_1^1 + N_2^1 + \cdots + N_n^1 = 0. \qquad (2.6.2)$$

Далее, взяв $(D_x^{11})^2$-производную от функции (2.6.1) получим:

$$(D_x^{11})^2 y_{\text{чн}} = \int_{x_0}^{x} \left[N_1^1 \lambda_1^2 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_1} + \cdots + N_n^1 \lambda_n^2 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_n} \right] \times$$

$$\times f(t) \frac{dt}{t(1-t)} + (N_1^1 \lambda_1 + N_2^1 \lambda_2 + \cdots + N_n^1 \lambda_n) f(x).$$

Здесь требуем выполнения условия

$$N_1^1\lambda_1 + N_2^1\lambda_2 + \cdots + N_n^1\lambda_n = 0. \qquad (2.6.3)$$

Продолжая этот процесс до производной $(D_x^{11})^{n-1}$-го порядка, каждый раз требуем обращения в нуль полученной суммы для коэффициентов N_i^1 $i=\overline{1,n}$. Для производной $(D_x^{11})^n$-го порядка получим:

$$(D_x^{11})^n y = \int_{x_0}^{x} \left[N_1^1\lambda_1^n \left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + \cdots + N_n^1\lambda_n^n \left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_n} \right] \times$$

$$\times f(t)\frac{dt}{t(1-t)} + (N_1^1\lambda_1^{n-1} + N_2^1\lambda_2^{n-1} + \cdots + N_n^1\lambda_n^{n-1})f(x).$$

Подставляя найденные значения $D_x^{11}y, (D_x^{11})^2y, \dots, (D_x^{11})^n y$ в неоднородное уравнение (2.5.1), после некоторых упрощений получим равенство

$$\int_{x_0}^{x} \left[N_1^1 P_M^n(\lambda_1) \left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + \cdots + N_n^1 P_M^n(\lambda_n) \left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_n} \right] \times$$

$$\times f(t)\frac{dt}{t(1-t)} + (N_1^1\lambda_1^{n-1} + N_2^1\lambda_2^{n-1} + \cdots + N_n^1\lambda_n^{n-1})f(x) = f(x).$$

Отсюда следует, что функция вида (2.6.1) будет решением неоднородного уравнения (2.5.1), если выполняется условие

$$N_1^1\lambda_1^{n-1} + N_2^1\lambda_2^{n-1} + \cdots + N_n^1\lambda_n^{n-1} = 1. \qquad (2.6.4)$$

Объединяя условия (2.6.2) (2.6.3) (2.6.4), получим систему алгебраических уравнений по отношению к неопределённым коэффициентам $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$:

$$\begin{cases} N_1^1 + N_2^1 + \cdots + N_n^1 = 0, \\ \lambda_1 N_1^1 + \lambda_2 N_2^1 + \cdots + \lambda_n N_n^1 = 0, \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ \lambda_1^{n-2} N_1^1 + \lambda_2^{n-2} N_2^1 + \cdots + \lambda_n^{n-2} N_n^1 = 0, \\ \lambda_1^{n-1} N_1^1 + \lambda_2^{n-1} N_2^1 + \cdots + \lambda_n^{n-1} N_n^1 = 1. \end{cases} \tag{2.6.5}$$

Поскольку определитель данной системы является определителем Вандермонда и он отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому система алгебраических уравнений (2.6.5) всегда имеет единственное решение. Тем самым доказано, что частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) имеет вид (2.6.1), где константы $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$ определяются единственным образом из алгебраической системы (2.6.5).

Далее, объединяя частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) с общим решением однородного уравнения (2.5.2), получим общее решение неоднородного уравнения (2.5.1) в виде

$$y(x) = c_1^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} + c_2^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} + \cdots + c_n^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_n} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x} \left[N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_n^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_n} \right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)} . \tag{2.6.6}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.6.1. *Пусть в уравнении (2.5.1) коэффициенты* M_i $(i = \overline{1,n})$, *такие, что корни характеристического уравнения (2.5.3) являются вещественными и разными. Функция* $f(x) \in \mathrm{C}_{11}(\Gamma)$. *Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.5.1) из класса* $C_{11}^n(\Gamma)$ *всегда существует, и оно имеет вид (2.6.6), где* $c_1^1, c_2^1, \dots c_n^1$ *-произвольные константы,* $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$ *константы,*

которые единственном образом определяются из системы алгебраических уравнений (2.6.5).

II. Пусть все корни характеристического уравнения (1.5.3) являются вещественными и равными т.е.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda,$$

тогда общее решение однородного уравнения (1.5.2) имеет вид

$$y(x) = c_1^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} + c_2^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots + c_n^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Подобно случаю I, частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) будем искать в виде

$$y_{\text{чн}} = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda}\left[N_1^2 + N_2^2\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_n^2\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\right]f(t)\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (2.6.7)$$

где $N_1^2, N_2^2, \ldots, N_n^2$ -неопределённые константы.

Поступая как в первом случае, для нахождения этих неопределённых констант находим D_x^{11} - производную от функции (2.6.7)

$$D_x^{11}y_{\text{чн}} = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda}\left[\lambda N_1^2 + \lambda N_2^2\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots + \cdot\right.$$

$$+\lambda N_n^2\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + N_2^2\cdot 1! + N_3^2\cdot 2\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots +$$

$$\left. + N_n^2(n-1)\ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\right]f(t)\frac{dt}{t(1-t)} + N_1^2 f(x).$$

Требуем выполнения условия $N_1^2 = 0$.

Далее, взяв $(D_x^{11})^2$-производную от функции (2.6.7) для коэффициента N_2^2, получим условие $1!\,N_2^2 = 0$. Продолжая этот процесс до D_x^{11}-производной $n-1$-го порядка, получим условие $N_{n-1}^2 = 0$. Далее, подставляя значения $D_x^{11}y, (D_x^{11})^2y, \dots, (D_x^{11})^n y$ в неоднородное уравнение (2.5.1), для определения коэффициента N_n получим условие $(n-1)!\,N_n = 1$.

Отсюда легко находим значения неопределённых констант в виде:

$$N_1^2 = 0, \quad N_2^2 = 0, \dots, N_{n-1}^2 = 0, \quad N_n^2 = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) имеет вид:

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Объединяя это решение с общим решением однородного уравнения (2.5.2), общее решение неоднородного уравнения (2.5.1) получим в виде:

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}\left[c_1^2 + c_2^2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \dots + c_n^2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)f(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (2.6.8)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.6.2. *Пусть в уравнении (2.5.1) коэффициенты $M_i(i=\overline{1,n})$ такие, что корни характеристического уравнения (2.5.3) являются вещественными и равными. Функция $f(x) \in C_{11}(0,1)$. Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.5.1) из класса $C_{11}^n(\Gamma)$ всегда существует, и оно имеет вид (2.6.8), где $c_1^2, c_2^2, \dots, c_n^2$ - произвольные постоянные числа.*

III. Пусть корни характеристического уравнения (2.5.3) являются комплексно – сопряжёнными. В этом случае общее решение однородного уравнения (2.5.2) имеет вид:

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$
$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^3\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right].$$

Частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) будем искать в виде:

$$y_{\text{чн}} =$$
$$= \int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3 cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right] + N_2^3 sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right]\right] + \cdots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k} N_{2k-1}^3 cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right] + N_{2k}^3 sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times f(t)\frac{dt}{t(1-t)n}, \qquad (2.6.9)$$

где $N_i^3 \quad \left(i = \overline{1,2k}\right)$ - неопределённые коэффициенты.

Для нахождения неопределённых коэффициентов $N_i^3 \quad \left(i = \overline{1,2k}\right)$ вначале вводим следующие аппараты

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1} = \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{a,b\} = \alpha a - \beta b,\\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1} = \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\{a,b\} = \beta a + \alpha b,\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k} = \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\} = \alpha\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1} - \beta\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1},\\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,k} = \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\} = \beta\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1} + \alpha\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}.\end{cases}$$

Тогда, последовательно взяв D_x^{11}- производную до порядка n включительно от функции (2.6.9) и, как выше, каждый раз, требуя выполнения соответствующих условий для нахождения неопределённых коэффициентов N_i^3 $\left(i=\overline{1,2k}\right)$, получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} N_1^3\cdot 1+N_2^3\cdot 0+\cdots+N_{2k-1}^3\cdot 1+N_{2k}^3\cdot 0=0, \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,1}N_1^3+\Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,1}N_2^3+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,1}N_{2k-1}^3+\Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,1}N_{2k}^3=0, \\ \text{- -} \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}N_1^3+\Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,2k-1}N_2^3+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}N_{2k-1}^3+\Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,2k-1}N_{2k}^3=1, \end{cases} \quad (2.6.10)$$

где $\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{+,1}=\Lambda_{\alpha_i\,\beta_i}^{+,1}\{1,0\}$, $\Lambda_{\beta_i\alpha_i}^{-,1}=\Lambda_{\beta_i\,\alpha_i}^{-,1}\{1,0\}$ $(i=\overline{1,k})$.

Можно показать, что определитель данной системы отличен от нуля и поэтому она имеет единственное решение.

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (2.5.1) имеет вид (2.6.9), где неопределённые константы N_i^3 $\left(i=\overline{1,2k}\right)$ определяются однозначно из алгебраической системы уравнений (2.6.10).

Далее, объединяя частное решение (2.6.9) с общим решением однородного уравнения (2.5.2), общее решение неоднородного уравнения (2.5.1) получим в таком виде:

$$y(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]+c_2^3sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right]+\cdots+$$
$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]+c_{2k}^3\,sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right]+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right]+N_2^3sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]\right.$$
$$+\cdots+$$
$$\left.+\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k}\left[N_{2k-1}^3cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right]+N_{2k}^3sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]\right\}\times$$
$$\times f(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (2.6.11)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.6.3. *Пусть в уравнении (2.5.1)* $n = 2k$ *чётное число и его коэффициенты* M_i $(i = \overline{1,2k})$ *такие, что корни характеристического уравнения (2.5.3) являются комплексно-сопряжёнными. Пусть функция* $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$. *Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.5.1) из класса* $C_{11}^{n}(\Gamma)$ *всегда существует, и оно имеет вид (2.6.11), где* c_i^3 $\left(i = \overline{1,2k}\right)$ *- произвольные константы, а коэффициенты* N_i^3 $\left(i = \overline{1,2k}\right)$ *однозначно определяются из системы алгебраических уравнений (2.6.10).*

Замечание 2.6.1. *Утверждения, подобные теоремам 2.6.1.-2.6.3., получены и для случаях, когда среди корней характеристического уравнения (2.5.3) имеются вещественно-разные и вещественно-равные, вещественно-разные и комплексно-сопряжённые, вещественно-равные и комплексно-сопряжённые.*

§2.7. Построение основ операционного метода для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений

Одним из современных методов исследования дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений является метод интегральных преобразований [110], [133], [162], [301], [302], [324], [328]. Использование интегральных преобразований позволяет свести задачу о нахождении интегральных кривых для дифференциальных, интегральных или интегро-дифференциальных уравнений к задаче о нахождении решения чисто алгебраических уравнений, связанных с линейной алгеброй, методы которых глубоко изучены и широко известны. В случае же дифференциальных уравнений в частных производных метод интегральных преобразований позволяет уменьшить размерность изучаемого уравнения.

Существуют различные виды интегральных преобразований, например, интегральное преобразование Фурье [22], [28], [72], [163], [170], [177], [289],

интегральное преобразование Меллина [27], [214], интегральное преобразование Лапласа [2], [3], [65], [64], [146], [179], [184], интегральное преобразование Гилберта и другие [23], [29], [9], [24], [25], [118], [127], [161], [215], [287], [320], [322]. Каждое из данных интегральных преобразований превращает конкретные виды дифференциальных или интегральных выражений в соответствующие простые математические операции из алгебры между символами. Например, они превращают обычные операции дифференцирования и интегрирования функций на операции произведения и деления между символами. Поэтому в литературных источниках эту методику часто называют операционными методами исчисления [110], [133], [167], [168], [324], [328]. Заметим, что каждому интегральному преобразованию соответствуют различные виды дифференциальных и интегральных выражений. Например, для оператора $D_x^0 = \frac{d}{dx}$ операционное исчисление построено с помощью преобразования Лапласа, а для оператора $D_i^{-1} = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ с помощью интегрального преобразования Фурье. В случае же дифференциального оператора с переменными коэффициентам - для оператора $D_x^1 = x\frac{d}{dx}$, который имеет особенности первого порядка в точке $x = 0$, соответствующее преобразование будет интегральным преобразованием Меллина. Помимо вышеприведенных операторов можно перечислять десятки другие более сложные операторы, для каждого из которых основа операционного исчисления тоже заложена, и в настоящее время находятся на стадии своего развития. Также, в последние годы теория интегральных преобразований активно развивается с привлечением теории обобщённых функций.

Проведённые исследования показывают, что для дифференциального оператора $D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$, который имеет особенности первого порядка в двух точках $x = 0$ и $x = 1$, соответствующее интегральное преобразование до настоящего времени не построено и поэтому многие задачи из области дифференциальных и интегральных уравнений, связанные с этим оператором, почти не исследованы. Основа интегрального преобразования, которое

соответствует дифференциальному оператору D_x^{11}, была построена в работе автора [35-А].

В дальнейшем постараемся заложить основу операционного исчисления для оператора D_x^{11}. Для этого вначале приводим основные понятия, касающиеся интегрального преобразования Лапласа.

Рассмотрим комплексно-значную функцию $g(x)$, определённую на всей числовой оси и удовлетворяющую соотношениям

$$|g(t)| \leq \begin{cases} c_1 e^{\alpha t}, & \text{если} \quad t \in (0, \infty), \\ c_2 e^{\beta t}, & \text{если} \quad t \in (-\infty, 0), \end{cases} \tag{2.7.1}$$

где числа α и β связанны неравенством $\alpha < \beta$.

Определение 2.7.1. *Двухстороннее интегральное преобразование Лапласа функции действительного переменного $g(t)$ называется функция комплексного переменного $G(p)$, определяемая формулой*

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} g(t) dt. \tag{2.7.2}$$

При выполнении условия (2.7.1), легко можно доказать, что функция $G(p)$, определённая формулой (2.7.2), будет аналитической в полосе $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$. Действительно, наше утверждение следует из равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} g(t) dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-pt} g(t) dt + \int_{0}^{\infty} e^{-pt} g(t) dt,$$

так как интеграл по отрицательной полуоси будет давать аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} p < \beta$, а интеграл по положительной полуоси даёт аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Далее, применяя формулы обратного преобразования Фурье, при соответствующих подстановках, формулы обращения для двустороннего преобразования Лапласа получим в виде:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} G(p) dp\,, \;\; \alpha < \gamma < \beta, \qquad (2.7.3)$$

где интеграл в правой части формулы рассматривается в смысле главного значения т. е. в виде предела

$$\lim_{N \to \infty} \int\limits_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{pt} G(p) dp.$$

В формулах (2.7.2), (2.7.3) произведём замену переменной по формуле

$$x = \frac{e^t}{1 + e^t}, \qquad (2.7.4)$$

тогда эти соотношения примут вид

$$G(p) = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} g\left(\ln \frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)}, \qquad (2.7.5)$$

$$g\left(\ln \frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} G(p) dp. \qquad (2.7.6)$$

Вводя обозначения $g\left(\ln \frac{x}{1-x}\right) = f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = f(x),\; F(p) = G(p),$ получим следующие формулы

$$F(p) = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x) \frac{dx}{x(1-x)}, \qquad (2.7.7)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} F(p) dp \qquad (2.7.8)$$

или

$$F(p) = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)}, \qquad (2.7.9)$$

$$f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} F(p) dp. \qquad (2.7.10)$$

Определение 2.7.2. *Двухсторонним S_{11} – интегральным преобразованием функции действительного переменного $f(x)$ называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая формулой (2.7.7).*

Определение 2.7.3. *Двухсторонним обратным S_{11} – интегральным преобразованием функции комплексного переменного $F(p)$ называется функция действительного переменного $f(x)$, определяемая формулой (2.7.8).*

Для выражения S_{11} - интегрального преобразования функции $f(x)$ в дальнейшем будем использовать следующие сокращённые записи:

$$F(p) = \mathrm{S}_{11}\{f(x)\} = \mathrm{S}_{11}[f(x)](p),$$

или же, если $F(p)$ будет S_{11} – интегральным преобразованием функции $f(x)$, то:

$$f(x) \risingdotseq F(p) \text{ или } f(x) \risingdotseq F(p).$$

Для обратного преобразования используем обозначения

$$f(x) = (\mathrm{S}_{11})^{-1}\{F(p)\} = (\mathrm{S}_{11})^{-1}[F(p)](x).$$

Далее, легко можно показать, что при замене (2.7.4) условия (2.7.1) перейдут в условия

$$|f(x)| \le \begin{cases} c_1\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{\alpha}, & \text{если} \quad x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \\ c_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{\beta}, & \text{если} \quad x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{2.7.11}$$

Покажем, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2.7.11), то интеграл в правой части (2.7.7) абсолютно сходится, если комплексное число p удовлетворяет условию $\alpha < \operatorname{Re} p < \beta$, причём в указанной полосе функция $F(p)$ аналитична. Действительно, наше утверждение выходит из следующей цепочки неравенств:

$$\left|\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\frac{dx}{x(1-x)}\right| = \left|\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\frac{dx}{x(1-x)}\right| +$$

$$+\left|\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\frac{dx}{x(1-x)}\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p} |f(x)|\,\frac{dx}{x(1-x)} +$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p} |f(x)|\,\frac{dx}{x(1-x)} \le c_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta} \frac{dx}{x(1-x)} +$$

$$+c_2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{dx}{x(1-x)} = c_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p+\beta-1} d\left(\frac{x}{1-x}\right) +$$

$$+c_2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p+\alpha-1} d\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{c_1}{-\operatorname{Re} p+\beta}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\operatorname{Re} p+\beta}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{c_2}{-\mathrm{Re}\,p+\alpha}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\mathrm{Re}\,p+\alpha}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{c_1}{-\mathrm{Re}\,p+\beta}-\frac{c_2}{-\mathrm{Re}\,p+\alpha}<\infty,$$

если только $\alpha<\mathrm{Re}\,p<\beta$. Итак, S_{11} – интегральное преобразование определено для комплекснозначных функций $f(x)$, заданных на интервале $(0,1)$, для которых произведение $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}f(x)\in L_{11}(0,1)$ при $\alpha<\mathrm{Re}\,p<\beta$. Здесь через L_{11} обозначен класс таких абсолютно интегрируемых функций $f(x)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_0^1|f(x)|\frac{dx}{x(1-x)}<\infty,$$

т.е.

$$L_{11}(0,1)=\left\{f(x)\colon\ \int_0^1|f(x)|\frac{dx}{x(1-x)}<\infty\right\}.$$

S_{11} – интегральное преобразование можно записать в виде суммы двух преобразований - левостороннего и правостороннего преобразований т.е.

$$\mathrm{S}_{11}(p)=\mathrm{S}_{11}^{-}(p)+\mathrm{S}_{11}^{+}(p),$$

или

$$\mathrm{S}_{11}[f(x)](p)=\mathrm{S}_{11}^{-}[f(x)](p)+\mathrm{S}_{11}^{+}[f(x)](p),$$

где

$$\mathrm{S}_{11}^{-}[f(x)](p)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}f(x)\frac{dx}{x(1-x)} \qquad (2.7.12)$$

и

$$\mathrm{S}_{11}^{+}[f(x)](p) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x) \frac{dx}{x(1-x)}. \qquad (2.7.13)$$

Заметим, что при замене (2.7.4) интервал $(-\infty, 0)$ переходит в интервал $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, а интервал $(0, \infty)$ переходит в интервал $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и поэтому левостороннее интегральное преобразование Лапласа переходит при замене (2.7.4) в левостороннее S_{11}^{-} – интегральное преобразование, а правостороннее интегральное преобразование Лапласа переходит в правостороннее S_{11}^{+} – интегральное преобразование. При этом, если речь идёт о левостороннем S_{11}^{-} – интегральном преобразовании функции $f(x)$, имеется в виду, что эта функция удовлетворяет условию

$$|f(x)| \leq \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \\ c_2 \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{\beta}, & \text{если} \quad x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right), \end{cases} \qquad (2.7.14)$$

а если речь идёт о правостороннем S_{11}^{+} – интегральном преобразованием функции $f(x)$, то эта функция удовлетворяет условию

$$|f(x)| \leq \begin{cases} c_1 \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{\alpha}, & \text{если} \quad x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \\ 0, & \text{если} \quad x \notin \left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \end{cases} \qquad (2.7.15)$$

Через $C_{11}^{-}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ соответственно обозначим класс функций $f(x)$, которые удовлетворяют условиям (2.7.14) и (2.7.15) и будем называть их функции – оригиналами. S_{11} – преобразования функции класса $C_{11}^{-}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ будем называть просто изображением. Также в формулах (2.7.14), (2.7.15) числа β и α иногда будем называть показатели роста функции $f(x)$ в соответствующем интервале. Далее, через $C_{11}^{(n),-}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $C_{11}^{(n),+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ соответственно обозначим

класс таких функций - оригиналов $f(x)$, которые имеют D_x^{11} – производную до порядка n включительно и $(D_x^{11})^n f(x) \in C_{11}^{-}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ или $(D_x^{11})^n f(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Заметим, что если $f(x)$ является функция – оригиналом в смысле S_{11} – интегрального преобразования, тогда всегда имеем ввиду, что $f(x) = f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$, то есть функция $f(x)$ всегда зависит от функции $\psi(x) = \frac{x}{1-x}$ как от аргумента.

Далее, построим аналог основных теорем и свойств интегрального преобразования Лапласа для S_{11} – интегрального преобразования. Ради краткости изложения все формулы мы постараемся получить для правостороннего S_{11}^{+} – интегрального преобразования, а соответствующие формулы для правостороннего S_{11}^{-} – интегрального преобразования иногда будем приводить без доказательств.

§2.8. Основные свойства и теоремы правостороннего $\mathbf{S}_{11}^{+}$ – интегрального преобразования

В дальнейших выкладках предположим, что функция $f(x)$ всегда удовлетворяет условию (2.7.15) с показателем роста α. Приводим основные свойства S_{11}^{+}-интегрального преобразования в виде следующей теоремы:

Теорема 2.8.1. (Свойство линейности). *Если* $f_1(x) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(x) \risingdotseq F_2(p)$, *то для любых* $a, b \in R$ *имеем:*

$$af_1(x) \pm bf_2(x) \risingdotseq aF_1(p) \pm bF_2(p),$$

где $Re\, p = \gamma > max\{\alpha_0^1,\ \alpha_0^2\}$, α_0^1, α_0^2 *- показатели роста функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *на интервале* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Доказательство: На основе определения S_{11}^{+} –интегрального преобразования и свойств определённых интегралов имеем:

$$S_{11}^{+}\{af_1(x) \pm bf_2(x)\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} [af_1(x) \pm bf_2(x)] \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= a\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_1(x) \frac{dx}{x(1-x)} \pm b\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_2(x) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= aF_1(p) \pm bF_2(p).$$

Теорема 2.8.2. (Теорема подобия). *Если* $g\left(\ln\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq G(p)$ *и* $a > 0$, *то при* $Re\ \frac{p}{a} > \alpha$ *справедлива формула*

$$g\left(a\ln\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq \frac{1}{a}\, G\left(\frac{p}{a}\right).$$

Доказательство: Действительно, имеем:

$$S_{11}^{+}\left\{g\left(a\ln\frac{x}{1-x}\right)\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \cdot g\left(a\ln\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} a\ln\dfrac{x}{1-x} = \ln\dfrac{y}{1-y}, & x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{dx}{x(1-x)} = \dfrac{1}{a}\,\dfrac{dy}{y(1-y)}\ , & x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\frac{p}{a}} g\left(\ln\frac{y}{1-y}\right) \frac{dy}{y(1-y)} = \frac{1}{a} G\left(\frac{p}{a}\right),$$

если только Re $\frac{p}{a} > \alpha$.

Теорема 2.8.3. (Теорема смешения). *Если* $f(x) \risingdotseq F^{+}(p)$ *и* a *- любое действительное или комплексное число, то*

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a} f(x) \fallingdotseq F^{+}(p-a),$$

при $Re(p-a) > \alpha$.

Доказательство: Действительно, имеем:

$$\mathrm{S}_{11}^{+}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a} f(x)\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{a} f(x) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-a)} f(x) \frac{dx}{x(1-x)} = F^{+}(p-a),$$

где последний несобственный интеграл существует, если

$$\mathrm{Re}(p-a) > \alpha \qquad \text{или} \qquad \mathrm{Re}\, p > \alpha + \mathrm{Re}\, a.$$

Из данного свойства легко можно установить, что

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-a} f(x) \fallingdotseq F^{+}(p+a),$$

при $\mathrm{Re}(p+a) > \alpha$ или $\mathrm{Re}\, p > \alpha - \mathrm{Re}\, a$.

Теорема 2.8.4. (Теорема о дифференцировании оригинала). *Если* $f(x) \fallingdotseq F^{+}(p)$ *и* $D_x^{11} f(x)$ *- оригинал, то*

$$D_x^{11} f(x) \fallingdotseq pF^{+}(p) - f\left(\frac{1}{2}\right), (\mathrm{Re} p = \gamma > \alpha),$$

где - показатель роста функции $f(x)$.

Доказательство: Найдем S_{11}^{+}- преобразования функции $D_x^{11} f(x)$

$$S_{11}^{+}\{D_x^{11} f(x)\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} D_x^{11} f(x) \frac{dx}{x(1-x)} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} df(x) =$$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + p\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\frac{dx}{x(1-x)} = pF^{+}(p) - f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Здесь мы учли, что

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x) = 0,$$

т. к.

$$\left|\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\right| \le \left|\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\right| |f(x)| \le$$

$$\le M\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\mathrm{Re}p}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} = M\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\gamma+\alpha} \to 0,$$

при $x \to 1$, если $\mathrm{Re}p = \gamma > \alpha$.

В дальнейшем под $f\left(\frac{1}{2}\right)$ будем понимать правосторонний предел функции $f(x)$ в точке $x = \frac{1}{2}$, т.е.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}+0\right) = \lim_{x\to\frac{1}{2}+0} f(x)$$

Из данной теоремы вытекает следующее следствие:

Следствия 1.8.1. *Если* $f(x) \risingdotseq F^{+}(p)$ *и* $D_x^{11}f(x)$, $(D_x^{11})^2 f(x), \ldots, (D_x^{11})^n f(x)$ *являются оригиналами, то*

$$(D_x^{11})^n f(x) \risingdotseq p^n F^{+}(p) - p^{n-1} f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}} - p^{n-2} D_x^{11} f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}} - \cdots -$$

$$-p(D_x^{11})^{n-2} f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}} - (D_x^{11})^{n-1} f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

Если $f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}} = D_x^{11} f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}} = \cdots = (D_x^{11})^{n-1} f(x)\big|_{x=\frac{1}{2}} = 0$, то приведённые формулы упрощаются т. е.

$$f(x) \risingdotseq F^{+}(p),$$

$$D_x^{11} f(x) \risingdotseq p\, F^+(p),$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$(D_x^{11})^n f(x) \risingdotseq p^n F^+(p).$$

Теорема 2.8.5. (Теорема об интегрировании оригинала). *Если* $f(x) \risingdotseq F^+(p)$ *и* $Re\, p > \alpha > 0$, *то*

$$\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \risingdotseq \frac{F^+(p)}{p}.$$

Доказательство: Пусть $\mathrm{Re}\, p > \alpha > 0$, тогда на основе определения S_{11}^+ - интегрального преобразования и формулы изменения порядка интегрирования имеем:

$$S_{11}^+ \left\{ \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \int_{t}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \int_{t}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p-1} d\left(\frac{x}{1-x}\right) =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-\frac{1}{p} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \Bigg|_{t}^{1} \right) f(t) \frac{dt}{t(1-t)} = \frac{1}{p} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f(t) \frac{dt}{t(1-t)} = \frac{F^+(p)}{p}.$$

Теорема 2.8.6. (Теорема о дифференцировании изображения). *Если* $f(x) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$-\ln\frac{x}{1-x}f(x) \risingdotseq \frac{d}{dp}F^{+}(p).$$

Доказательство: Действительно, производную аналитической функции $F^{+}(p)$ в области её определения $\operatorname{Re} p = \gamma > \alpha$ можно вычислить, дифференцируя подынтегральную функцию в несобственном интеграле по параметру, т. е.

$$\frac{d}{dp}F^{+}(p) = -\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\ln\frac{x}{1-x}f(x)\frac{dx}{x(1-x)} = S_{11}^{+}\left\{-\ln\frac{x}{1-x}f(x)\right\},$$

где учтено, что если $f(x)$ - оригинал, то $-\ln\frac{x}{1-x}f(x)$ тоже будет оригиналом.

Применяя доказанную теорему n раз, получим

$$(-1)^{n}\ln^{n}\frac{x}{1-x}f(x) \risingdotseq \frac{d^{n}}{dp^{n}}F^{+}(p)$$

или

$$\frac{d^{n}}{dp^{n}}F^{+}(p) \risingdotseq (-1)^{n}\ln^{n}\frac{x}{1-x}\,f(x).$$

Определение 2.8.1. *Правосторонней сложной свёрткой двух функций* $f_1^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)$ *и* $f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)$ *будем называть функцию* $h^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)$, *определяемую соотношением*

$$h^{+}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^{*}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)f_2^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}$$

и обозначим его как $(f_1^* * f_2^*)^+\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Теорема 2.8.7. (Теорема о сложной свёртке). *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_1^+(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_2^+(p)$, *тогда*

$$h^+\left(\frac{x}{1-x}\right) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} \risingdotseq F_1^+(p)F_2^+(p),$$

где $Rep = \gamma > max\{\alpha_0^1, \alpha_0^2\}$.

Доказательство: Имеем

$$S_{11}^+\left\{h^+\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} h^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\,\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int\limits_{t}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} \dfrac{x}{1-x}\dfrac{1-t}{t} = \dfrac{y}{1-y}, & x = t \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{dx}{x(1-x)} = \dfrac{dy}{y(1-y)}, & x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1-t}\frac{y}{1-y}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{dy}{y(1-y)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{dy}{y(1-y)} =$$

$$= F_1^+(p)F_2^+(p).$$

Это теорема говорит о том, что правосторонней сложной свёрткой двух функций f_1^* и f_2^* в пространстве оригиналов является обычное произведение их S_{11}^+-преобразований в пространстве изображений.

Имеет место и обратное утверждение:

Теорема 2.8.8. *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_1^+(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_2^+(p)$, *то обратное* S_{11}^+- *преобразование от обычного произведения функций* $F_1^+(p)$ *и* $F_2^+(p)$ *в пространстве изображений равно сложной свёртке оригиналов этих функций в пространстве оригиналов т.е.*

$$(S_{11}^+)^{-1}\{F_1^+(p)F_2^+(p)\} = (S_{11}^+)^{-1}[F_1^+(p)F_2^+(p)]\left(\frac{x}{1-x}\right) = (f_1^* * f_2^*)^+\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

где $\mathrm{Re}p = \gamma > \max\{\alpha_0^1, \alpha_0^2\}$.

Доказательство: Эту теорему легко можно доказать в виде следующей цепочки равенств

$$(S_{11}^+)^{-1}\{F_1^+(p)F_2^+(p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p F_1^+(p)F_2^+(p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_2^+(p)\left(\frac{x}{1-x}\right)^p dp\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^p F_2^+(p)dp =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = (f_1^* * f_2^*)^+\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

В этой записи последняя часть верна, потому что произведение функции оригиналов

$$f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) = g_1\left(\ln\frac{t}{1-t}\right) g_2\left(\ln\frac{x}{1-x} + \ln\frac{1-t}{t}\right),$$

как сложная функция от аргумента $\ln\frac{t}{1-t}$, является финитной функцией, носитель которой лежит в интервале $\frac{1}{2} \le t < x$.

Таким образом, из этих теорем следует, что функции

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}, F_1^+(p)F_2^+(p)$$

являются парой S_{11}^+ - преобразования.

Следствие 1.8.2. *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_1^+(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_2^+(p)$, *тогда*

$$(S_{11}^+)^{-1}\{F_1^+(p)F_2^+(-p)\} = \int\limits_{x}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)},$$

где $\mathrm{Re}p = \gamma > \max\{a_0^1, a_0^2\}$.

Доказательство: Действительно, имеем:

$$(S_{11}^+)^{-1}\{F_1^+(p)F_2^+(-p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p F_1^+(p)F_2^+(-p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_2^+(-p)\left(\frac{x}{1-x}\right)^p dp \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p} F_2^+(-p)dp = |-p = q| =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{-q} F_2(q)dq =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)^{q} F_2(q)dq =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int_{x}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Последнее равенство верно потому, что при $\frac{1}{2} < t < x$, $\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t} < 1$ и поэтому $f_2^*\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right) = 0$.

Таким образом, из этого следствия вытекает, что функции

$$\int_{x}^{1} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}, F_1^+(p)F_2^+(-p)$$

являются парой S_{11}^+ - преобразований.

Далее, определим операцию свёртки в пространстве изображений в виде:

$$(F_1^+ * F_2^+)(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^+(r)F_2^+(p-r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^+(p-r) F_2^+(r) dr, \qquad (2.8.1)$$

тогда, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.8.9. *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_1^+(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_2^+(p)$, *то*

$$f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq (F_1^+ * F_2^+)(p),$$

где $\mathrm{Re}(p-r) = \max\{\alpha_0^1, \alpha_0^2\}$.

Доказательство: Действительно, имеем

$$S_{11}^+\left\{f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{r} F_1^+(r) dr \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^+(r) dr \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-r)} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^+(r) F_2^+(p-r) dr = (F_1^+ * F_2^+)(p).$$

Имеет место и обратное утверждение:

Теорема 2.8.10. *Если* $f_1(x) \risingdotseq F_1^+(p)$ *и* $f_2(x) \risingdotseq F_2^+(p)$, *то*

$$(S_{11}^+)^{-1}\{H(p)\} = (S_{11}^+)^{-1}\{(F_1^+ * F_1^+)(p)\} \risingdotseq f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Доказательство: Находим обратное S_{11}^+ - преобразование от функции $H(p)$:

$$(S_{11}^{+})^{-1}\{H(p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} H(p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^{+}(r)F_2^{+}(p-r)drdp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^{+}(r)dr\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} F_2^{+}(p-r)dp =$$

$$= \left|\begin{matrix} p-r=q \\ dp=dq \end{matrix}\right| = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^{+}(r)dr\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{q+r} F_2^{+}(q)dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r} F_1^{+}(r)dr\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{q} F_2^{+}(q)dq = f_1(x)\cdot f_2(x).$$

Если определим операцию свёртки в пространстве изображений в виде (2.8.1), тогда имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^{+}(r)F_2^{+}(p-r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^{+}(r)dr\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-r)} f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r} F_1^{+}(r)dr =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_1^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)}.$$

Из этого равенства при $p = 0$ получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^+(r)F_2^+(-r)dr = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)}.$$

Далее, подчинив функции $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ и $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ равенству $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = \overline{f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)}$, приходим к равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^+(r)F_1^+(-r)dr = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right|^2 \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Положив здесь $\gamma = 0$, $r = i\sigma$ и замечая, что $F_1^+(-i\sigma) = \overline{F_1^+(\iota\sigma)}$, приходим к более симметричному виду равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_1^+(i\sigma)|^2 d\sigma = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right|^2 \frac{dx}{x(1-x)}.$$

§2.9. Интегрирование линейных операторно- дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью S_{11}^+ - интегрального преобразования

Пусть требуется найти решение операторно-дифференциального уравнения n-го порядка

$$P_M^n(D_x^{11})y \equiv (D_x^{11})^n y + M_1(D_x^{11})^{n-1}y + \cdots + M_n y = f(x), \quad (2.9.1)$$

в классе функций – оригиналов $C_{11}^{(n),+}\left(\frac{1}{2},1\right)$, где $\frac{1}{2} \leq x < 1$, M_i $(i = \overline{1,n})$ - коэффициенты уравнения и постоянные числа, $f(x)$ - заданная функция класса $C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},1\right)$ т.е. является оригиналом (имеет S_{11}^{+} - изображение).

Пусть уравнение (2.9.1) задано совместно с нулевыми начальными условиями

$$y(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0, D_x^{11}\, y(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0, .., (D_x^{11})^{n-1}\, y(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0. \quad (2.9.2)$$

На основе теоремы 2.8.4. для S_{11}^{+} - интегрального преобразования оператора $R_M^n(D_x^{11})y(x)$ с учётом условия (2.9.2) получим:

$$S_{11}^{+}\{P_M^n(D_x^{11})y(x)\} = P_M^n(p)Y(p).$$

Теперь, пусть обе стороны уравнения (2.9.1) S_{11}^{+} - преобразуемы, тогда применяя к обеим сторонам этого уравнения S_{11}^{+} - интегрального преобразования, получим:

$$S_{11}^{+}\{P_M^n(D_x^{11})y(x)\} = S_{11}^{+}\{f(x)\},$$
$$P_M^n(p)Y(p) = F(p).$$

Отсюда

$$Y(p) = \frac{1}{P_M^n(p)} F(p). \quad (2.9.3)$$

Функция

$$\Pi(p) = \frac{1}{P_M^n(p)} = \frac{1}{p^n + M_1 p^{n-1} + \cdots + M_{n-1}p + M_n},$$

на которую необходимо умножать S_{11}^{+} - изображение правой части уравнения (2.9.1) в литературе принято называть «передаточной функцией» уравнения (2.9.1) [324], [328]. Следует заметить, что понятие передаточной функции широко используется в теории автоматического регулирования.

Используя понятие передаточной функции, легко можно найти решение уравнения (2.9.1). Для этого изображение (2.9.3) решения уравнения (2.9.1) при помощи передаточной функции можно записать в виде

$$Y(p) = \Pi(p)F(p).$$

Если можно восстановить оригинал $\pi(x) = \pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$, где

$$\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq \Pi(p),$$

то по теореме о сложной свёртке оригиналов решение $y(x)$ уравнения (2.9.1) может быть найдено по формуле

$$y(x) = (\pi^* * f^*)\left(\frac{x}{1-x}\right) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} \pi^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) f^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (2.9.4)$$

Интеграл в правой части (2.9.4) будем называть интегралом типа Дюамеля [328].

Отсюда выходит, что если можно восстанавливать оригинал для передаточной функции $\Pi(p)$, то с помощью формулы (2.9.4) легко можно найти единственное решение задачи (2.9.1) – (2.9.2).

Таким образом, задача о нахождении решения задачи (2.9.1) – (2.9.2) приводится к задаче о восстановлении оригинала для передаточной функции $\Pi(p)$. Но этот оригинал в зависимости от корней характеристического уравнения

$$P_M^n(p) \equiv p^n + M_1 p^{n-1} + \cdots + M_{n-1}p + M_n = 0, \qquad (2.9.5)$$

имеет различные структуры. Рассмотрим некоторые из данных случаев по отдельности.

I. Пусть корни характеристического уравнения (2.9.5) являются вещественными и разными, которые обозначены через $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда передаточную функцию можем записать в виде

$$\Pi(p) = \frac{1}{P_M^n(p)} = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)}.$$

По известным теоремам из алгебры данное равенство можем записать в виде

$$\Pi(p) = \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)} = \frac{N_1^1}{p-p_1} + \frac{N_2^1}{p-p_2} + \cdots + \frac{N_n^1}{p-p_n},$$

где пока N_i^1 $(i = \overline{1,n})$ – неопределённые коэффициенты.

Теперь, восстанавливаем оригинал для правой части последнего равенства:

$$\Pi(p) = \frac{N_1^1}{p-p_1} + \frac{N_2^1}{p-p_2} + \cdots + \frac{N_n^1}{p-p_n} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_2} + \cdots + N_n^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_n} = \pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Отсюда видно, что в случае вещественно-разных корней характеристического уравнения оригинал для передаточной функции с точностью до неопределённых коэффициентов совпадает с общим решением однородного уравнения (2.5.2), полученным классическим методом.

Далее, согласно формуле (2.9.4) решение $y(x)$ неоднородного уравнения (2.9.1), удовлетворяющее условию (2.9.2) находим в виде:

$$y(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_2} + \cdots\right.$$

$$\left. + N_n^1\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_n}\right] f^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (2.9.6)$$

где неопределённые коэффициенты N_i^1 $(i = \overline{1,n})$ находятся через коэффициенты уравнения (2.9.1) из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^1 + N_2^1 + \cdots + N_n^1 = 0, \\ p_1 N_1^1 + p_2 N_2^1 + \cdots + p_n N_n^1 = 0, \\ \text{- - - - - - - - - - - - - -} \\ p_1^{n-2} N_1^1 + p_2^{n-2} N_2^1 + \cdots + p_n^{n-2} N_n^1 = 0, \\ p_1^{n-1} N_1^1 + p_2^{n-1} N_2^1 + \cdots + p_n^{n-1} N_n^1 = 1. \end{cases} \qquad (2.9.7)$$

Таким образом, о разрешимости задачи (2.9.1) – (2.9.2) имеет место следующая теорема:

Теорема 2.9.1. *Пусть в уравнении (2.9.1) коэффициенты* M_i^1 $(i = \overline{1,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения (2.9.5) являются вещественными и разными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. *Тогда задача (2.9.1) – (2.9.2) в классе* $C_{11}^{(n),+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *однозначно разрешима и её единственное решение даётся по формуле (2.9.6), где коэффициенты* N_i^1 $(i = \overline{1,n})$ *определяются единственным образом из системы алгебраических уравнений (2.9.7).*

Теперь пусть требуется проинтегрировать уравнение (2.9.1), но уже не с нулевыми начальными условиями

$$y(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = y_0, D_x^{11}\, y(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = y_0', \ldots, (D_x^{11})^{n-1}\, y(x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = y_0^{(n-1)}. \quad (2.9.8)$$

В этом случае уравнение в изображениях примет следующий вид:

$$P_M^n(p)Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} P_M^{n-k-1}(p)\, y_0^{(k)} = F(p). \qquad (2.9.9)$$

Очевидно, что (2.9.9) алгебраическое уравнение первой степени относительно $Y(p)$ и поэтому его решение легко можно найти в виде

$$Y(p) = \frac{F(p) + \sum_{k=0}^{n-1} P_M^{n-k-1}(p)\, y_0^{(k)}}{P_M^n(p)}.$$

Далее, для отыскания самого решения $y(x)$ по найденному изображению нужно восстанавливать оригинал.

Здесь также для получения результата нужно использовать понятия передаточной функции. С этой целью вначале равенство (2.9.9) перепишем в виде

$$P_M^n(p)Y(p) - \sum_{i=0}^{n-1} K_i(p)^i = F(p), \qquad (2.9.10)$$

где

$$K_0 = y_0^{(n-1)} + M_1 y_0^{(n-2)} + \cdots + M_{n-2} y_0' + M_{n-1} y_0,$$
$$K_1 = y_0^{(n-2)} + M_1 y_0^{(n-3)} + \cdots + M_{n-3} y_0' + M_{n-2} y_0, \qquad (2.9.11)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{n-1} = y_0.$$

Поскольку

$$\frac{1}{P_M^n(p)} = \Pi(p)$$

для изображения $Y(p)$ получим:

$$Y(p) = \Pi(p)F(p) + \sum_{i=0}^{n-1} K_i(p)^i\, \Pi(p).$$

Оригиналом для произведения $\Pi(p)F(p)$, как мы уже отмечали, служит правая часть равенства (2.9.4). Для самого изображения $\Pi(p)$ оригинал $\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ восстановлен в виде

$$\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_2} + \cdots + N_n^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_n}.$$

Отсюда легко можно показать, что функция $\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ на основе системы уравнений (2.9.7) удовлетворяет условиям

$$\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = D_x^{11}\,\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = (D_x^{11})^{n-2}\,\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0.$$

Поэтому на основе теоремы о дифференцировании оригинала находим:

$$D_x^{11}\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq p\Pi(p),$$
$$(D_x^{11})^2\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq p^2\Pi(p),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(D_x^{11})^{n-1}\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq p^{n-1}\Pi(p).$$

Таким образом, на основе полученных равенств находим решение неоднородной задачи (2.9.1) – (2.9.8) в виде:

$$y(x)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\left[N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_1}+N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_2}+\cdots+\right.$$

$$\left.+N_n^1\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_n}\right]f^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}+\sum_{i=0}^{n-1}K_i(D_x^{11})^i\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right),\quad (2.9.12)$$

где $\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ – оригинал передаточной функции, а коэффициенты K_i $(i=1,2,\dots,n-1)$ определяются по начальным условиям и коэффициентам исходного уравнения равенствами (2.9.11).

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2.9.2. *Пусть выполняется все условия теоремы 2.9.1. Кроме того, пусть вместо однородного условия (2.9.2) задано неоднородное условие (2.9.8). Тогда, в этом случае тоже задача (2.9.1) – (2.9.8) в классе* $C_{11}^{(n),+}\left(\frac{1}{2},1\right)$ *однозначно разрешима и её единственное решение даётся по формуле (2.9.12).*

Заметим, что приведённая методика не лишает нас возможности найти и общее решение уравнения (2.9.1). Для этого достаточно в найденном решении (2.9.12) положить $y_0^{(k)}=C_{k+1}$, т.е. считать начальные значения произвольными.

Также, непосредственной проверкой можно убедится, что если в представлении оригинала $\pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ положить $N_k^1=C_k$ $(k=\overline{1,n})$, где C_k – произвольная константа, тогда получим общее решение однородного уравнения (2.9.1), зависящее от *n* произвольных констант.

II. Пусть все корни характеристического уравнения (2.9.5) являются вещественными и равными т.е. $p_1=p_2=\cdots=p_n$. Тогда передаточная функция имеет вид:

$$\Pi(p)=\frac{1}{(p-p_1)^n}.$$

Восстанавим для неё оригинал. С этой целью прежде всего покажем, что имеет место формула

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}, (\mathrm{Re}\, p > \alpha). \qquad (2.9.13)$$

Действительно, на основе определения S_{11}^{+} – преобразования получим:

$$S_{11}^{+}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-\alpha)-1} d\left(\frac{x}{1-x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{p-\alpha}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-\alpha)}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{p-\alpha}, \text{при } \mathrm{Re}\, p > \alpha.$$

Теперь последовательно дифференцируя обе стороны равенства (2.9.13) по α получим:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \ln\frac{x}{1-x} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^2},$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \ln^2\frac{x}{1-x} \risingdotseq \frac{2!}{(p-\alpha)^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \ln^{n-1}\frac{x}{1-x} \risingdotseq \frac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n},$$

или же

$$\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \ln^{n-1}\frac{x}{1-x} \risingdotseq \frac{1}{(p-\alpha)^n}.$$

Отсюда с учётом вышеприведенных формул оригинал для передаточной функции $\Pi(p)$ восстанавливаем в виде:

$$\pi^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1} \ln^{n-1}\frac{x}{1-x}.$$

Таким образом, на основе формулы (2.9.4) решение $y(x)$ уравнения (2.9.1) находим в виде:

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_1}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}. \tag{2.9.14}$$

Теорема 2.9.3. *Пусть в уравнении (2.9.1) коэффициенты* M_i^1 $(i=\overline{1,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения (2.9.5) являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция* $f(x)\in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},1\right)$. *Тогда задача (2.9.1) – (2.9.2) в классе* $C_{11}^{(n),+}\left(\frac{1}{2},1\right)$ *однозначно разрешима и её единственное решение даётся по формуле (2.9.14).*

Далее, легко можно проверить, что система n – функций

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1},\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right),\dots,\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

являются линейно-независимой и каждая из них будет решением однородного уравнения (2.9.1). Поэтому общее решение однородного уравнения (2.9.1) примет вид:

$$y(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\left[c_1+c_2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+\dots+c_n\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right].$$

Добавляя к данному общему решению частное решение (2.9.14) неоднородного уравнения (2.9.1), общее решение неоднородного уравнения (2.9.1) получим в виде:

$$y(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\left[c_1+c_2\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)+\dots+c_n\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{p_1}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)f^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

III. Пусть $n = 2k$ – чётное число и все корни характеристического уравнения (2.9.5) являются комплексно-сопряженными, которые обозначим:

$$p_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, p_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, p_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm i\beta_k,$$

В этом случае передаточной функция уравнения (2.9.1) примет вид:

$$\Pi(p) = \frac{1}{p^n + M_1 p^{n-1} + \cdots + M_{n-1}p + M_n} =$$

$$= \frac{1}{[(p-\alpha_1)^2 + \beta_1^2][(p-\alpha_2)^2 + \beta_2^2]\cdots[(p-\alpha_k)^2 + \beta_k^2]},$$

которую можно разлагать на сумму простейших дробей вида:

$$\Pi(-p) = \frac{N_1^2 p + N_1^3}{(p-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{N_2^2 p + N_2^3}{(p-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{N_k^2 p + N_k^3}{(p-\alpha_k)^2 + \beta_k^2}.$$

С другой стороны, поскольку $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \risingdotseq \frac{1}{p-\alpha}$, то

$$\sin\left[\beta\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] = \frac{e^{i\beta\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)} - e^{-i\beta\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}}{2i} = \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{i\beta} - \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-i\beta}}{2i} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\beta} - \frac{1}{p+i\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}.$$

Аналогично, можно найти операционное соотношение:

$$\cos\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] \risingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

Теперь, применяя к полученным соотношениям теорему смещения, найдём изображения функции $\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \sin\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right], \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \cos\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]$:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \sin\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] \risingdotseq \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$$
$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \cos\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] \risingdotseq \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

С учётом полученных формул восстанавливаем оригинал для передаточной функции:

$$\Pi(p) = \frac{N_1^2 p + N_1^3}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{N_2^2 p + N_2^3}{(p-\alpha_2)^2+\beta_2^2} + \cdots + \frac{N_k^2 p + N_k^3}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} =$$
$$= N_1^2 \frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{N_1^3 + N_1^2\alpha_1}{\beta_1} \frac{\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots +$$
$$+N_k^2 \frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + \frac{N_k^3 + N_k^2\alpha_k}{\beta_k} \frac{\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} \risingdotseq$$
$$= N_1^2 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1} \cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + N_1^4 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1} \sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + \cdots +$$
$$+N_k^4 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k} \cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + N_k^4 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k} \sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] = \pi^*\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

где

$$N_i^4 = \frac{N_i^3 + N_i^2\alpha_i}{\beta_i} \ \left(i = \overline{1,k}\right).$$

Далее, на основе формулы сложной свёртки решение неоднородного уравнения (2.9.1) находим в виде:

$$y(x)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^2\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.+N_1^4\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]+\cdots$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^2\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left.+N_k^4\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]\right\}f^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}. \qquad (2.9.15)$$

Для того, чтобы решение вида (2.9.15) удовлетворяло уравнению (2.9.1), коэффициенты N_i^2, N_i^4 $\left(i=\overline{1,k}\right)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} N_1^2\cdot 1+N_2^4\cdot 0+\cdots+N_{2k-1}^2\cdot 1+N_{2k}^4\cdot 0=0, \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,1}N_1^2+\Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,1}N_2^4+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,1}N_{2k-1}^2+\Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,1}N_{2k}^4=0, \\ \text{- -} \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}N_1^2+\Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,2k-1}N_2^4+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}N_{2k-1}^2+\Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,2k-1}N_{2k}^4=1, \end{cases} \qquad (2.9.16)$$

где

$$\begin{cases} \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{a,b\}=\alpha a-\beta b, \\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}=\Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\{a,b\}=\beta a+\alpha b, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \Lambda_{\alpha\beta}^{+,k}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\}=\alpha\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}-\beta\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}, \\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,k}=\Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\}=\beta\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}+\alpha\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}. \end{cases}$$

Определитель данной системы уравнений отличен от нуля, потому что оно также является вронскианом системы линейно-независимых функций

$$y_1(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],y_2(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],$$

……

$$y_{2k-1}(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],\ y_{2k}(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right],$$

в точке $x = \frac{1}{2}$. Отсюда алгебраическая система (2.9.16) имеет единственное решение, которое можно найти известными способами высшей алгебры.

Таким образом, доказана:

Теорема 2.9.4. *Пусть в уравнении (2.9.1) коэффициенты* M_i^1 $(i = \overline{1,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения (2.9.5) являются комплексно-сопряженными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. *Тогда задача (2.9.1) – (2.9.2) в классе* $C_{11}^{(n),+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *однозначно разрешима и её единственное решение даётся по формуле (2.9.15), где коэффициенты* N_i^2, N_i^4 $(i = \overline{1,n})$ *определяются единственным образом из системы алгебраических уравнений (2.9.16).*

Заметим, что поскольку каждая функция из системы *2k* – линейно-независимых функций $y_j(x)$ $\left(j = \overline{1,2k}\right)$ является частным решением однородного уравнения (2.9.1), то общее решение однородного уравнения (2.9.1) имеет вид:

$$y_{oo}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^2\cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^2\sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$
$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^2\cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^2\sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right].$$

Добавляя к полученному решению частное решение неоднородного уравнения (2.9.1), получим общее решение неоднородного уравнения (2.9.1) в виде:

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^2\cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^2\sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$
$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^2\cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^2\sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] +$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^2\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]+N_1^4\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]\right.$$

$$+\cdots$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^2\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left.+N_k^4\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]\right\}f^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

§2.10. Основные свойства и теоремы левостороннего $\mathbf{S_{11}^-}$ – интегрального преобразования

Как мы отметили раньше, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)|\le\begin{cases}0, & \text{если } x\notin\left(0,\frac{1}{2}\right),\\ c_2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta}, & \text{если } x\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\end{cases}\qquad(2.10.1)$$

то для него существует левостороннее S_{11}^- - интегральное преобразование, которое определяется по формуле

$$S_{11}^-[f(x)](p)=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}f(x)\frac{dx}{x(1-x)},\qquad(2.10.2)$$

где $\mathrm{Re}p<\beta$.

Все основные свойства, которые имели место для правостороннего S_{11}^+-интегрального преобразования, также имеют место для левостороннего S_{11}^--интегрального преобразования. Ниже приводим только основные из них. Заметим, что раньше были принято обозначение $f(x)=f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)=g\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)$ и в правостороннем преобразовании для доказательства основных свойств, исходили из принятого обозначения $f(x)=g\left(\ln\frac{x}{1-x}\right)$. Для левостороннего преобразования

также будем исходить из принятого обозначения $f(x) = f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$. В этом случае соответствующие условия примут своеобразные формы.

Теорема 2.10.1. (Теорема подобия). *Если* $f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq S_{11}^{-}(p)$ *и* $\alpha > 0$, *то*

$$f^*\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\right) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\, F^{-}\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

где $Re\frac{p}{\alpha} < \beta$.

Доказательство: Если $\mathrm{Re}\frac{p}{\alpha} < \beta$, то на основе определения S_{11}^{-} - преобразования получим:

$$\mathrm{S}_{11}^{-}\left\{f^*\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\right)\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f^*\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} = \frac{y}{1-y}, \;\; x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \frac{dx}{x(1-x)} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{dy}{y(1-y)}\,, \;\; x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{1-y}\right)^{-\frac{p}{\alpha}} f^*\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{dy}{y(1-y)} = \frac{1}{\alpha}F^{-}\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Теорема 2.10.2. (Теорема смещения). *Если* $f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^{-}(p)$ *и* α *- любое действительное или комплексное число, то*

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^{-}(p-\alpha),$$

где $Re(p-\alpha) < \beta$.

Доказательство: Действительно, имеем:

$$\mathrm{S}_{11}^{-}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-\alpha)} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} = F^-(p-\alpha)\,,$$

где последний несобственный интеграл существует, если

$$\mathrm{Re}(p-\alpha) < \beta \qquad \text{или} \qquad \mathrm{Re}\, p < \beta + \mathrm{Re}\, \alpha.$$

Из этого свойства легко получить, что

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\alpha} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^-(p+\alpha),$$

при $\mathrm{Re}(p+\alpha) < \beta$ или $\mathrm{Re}\, p < \beta - \mathrm{Re}\, \alpha$.

Теорема 2.10.3. (Теорема о дифференцировании оригинала). *Если* $f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^-(p)$ *и* $D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ *- оригинал, то*

$$D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq pF^-(p) + f^*(1).$$

Доказательство: Найдем S_{11}^-- преобразование функции $D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$

$$S_{11}^-\left\{D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} df^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} +$$

$$+p\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} = pF^-(p) + f^*(1).$$

Здесь мы учли, что

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = 0,$$

т. к.

$$\left|\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right| \le \left|\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\right| \left|f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right| \le$$

$$\le M\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\mathrm{Re}p} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta} = M\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\mathrm{Re}p+\beta} \to 0$$

при $x \to 0$, если $\operatorname{Re} p = \gamma < \beta$.

В дальнейшем под $f^*(1)$ будем понимать левосторонний предел функции $f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ в точке $x = \frac{1}{2}$, т.е.

$$f^*(1) = \lim_{x \to \frac{1}{2}-0} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Из этой теоремы**2.10.3** вытекает следующее следствие:

Следствия 2.10.1. *Если* $f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^-(p)$ *и* $D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $(D_x^{11})^2 f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$, ..., $(D_x^{11})^n f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ *являются оригиналами, то*

$$(D_x^{11})^n f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq p^n F^-(p) + p^{n-1} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} +$$

$$+p^{n-2} D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} + \cdots +$$

$$+p(D_x^{11})^{n-2} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} + (D_x^{11})^{n-1} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

Если

$$f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \cdots = (D_x^{11})^{n-1} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0,$$

тогда получим следующие выражения:

$$f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^-(p),$$

$$D_x^{11} f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq p\, F^-(p),$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$(D_x^{11})^n f^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq p^n F^-(p).$$

Теорема 2.10.4. (Теорема об интегрировании оригинала). *Если* $f(x) \risingdotseq F^-(p)$ *и* $Rep < \beta < 0$, *тогда*

$$\int_x^{\frac{1}{2}} f^*\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{t(1-t)} \risingdotseq -\frac{F^-(p)}{p}.$$

Доказательство: На основе определения S_{11}^{-} - интегрального преобразования и формулы изменения порядка интегрирования с учётом условия $\mathrm{Re}p < \beta < 0$, имеем:

$$S_{11}^{-}\left\{\int_{x}^{\frac{1}{2}} f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\right\} = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\int_{x}^{\frac{1}{2}} f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\,\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int_{0}^{t}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int_{0}^{t}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p-1} d\left(\frac{x}{1-x}\right) =$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{p}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\Bigg|_{0}^{t}\right) f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= -\frac{1}{p}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = -\frac{F^{-}(p)}{p}.$$

Теорема 2.10.5. (Теорема о дифференцировании изображения). *Если* $f^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F^{-}(p)$, *то*

$$-\ln\frac{x}{1-x} f^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq \frac{d}{dp}F^{-}(p).$$

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы о дифференцирования изображения для правостороннего преобразования.

Применяя теорему **2.10.5.** n раз, получим:

$$(-1)^{n}\ln^{n}\frac{x}{1-x} f^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq \frac{d^{n}}{dp^{n}}F^{-}(p).$$

Определение 2.10.1. *Левосторонней сложной свёрткой двух функций* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ *называется функция* $h^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$, *определяемая соотношением*

$$h^*\left(\frac{x}{1-x}\right)=\int\limits_x^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}=$$

$$=\int\limits_x^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) f_2^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}$$

которая обозначается $(f_1^* * f_2^*)^-\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

Теорема 2.10.6. (Теорема о левосторонней сложной свёртке). *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\risingdotseq F_1^-(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\risingdotseq F_2^-(p)$, *то*

$$h^-\left(\frac{x}{1-x}\right)=\int\limits_x^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\risingdotseq F_1^-(p)F_2^-(p),$$

где $\mathrm{Re}p=\gamma>\min\{\beta_0^1,\beta_0^2\}$.

Доказательство: Действительно, имеем:

$$S_{11}^-\left\{h^-\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\}=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} h^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p}\int\limits_x^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\,\frac{dx}{x(1-x)}=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int\limits_0^{t}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dx}{x(1-x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}\dfrac{x}{1-x}\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{y}{1-y}, & x=0\Rightarrow y=0\\ \dfrac{dx}{x(1-x)}=\dfrac{dy}{y(1-y)}, & x=t\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}\end{array}\right|=$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{1-t}\frac{y}{1-y}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{dy}{y(1-y)} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{y}{1-y}\right)\frac{dy}{y(1-y)} =$$

$$= F_1^-(p)F_2^-(p).$$

Из теоремы **2.10.6.** следует, что левосторонней сложной свёрткой двух функций f_1^* и f_2^* в пространстве оригиналов является обычное произведение их S_{11}^--преобразования в пространстве изображений.

Имеет место и обратное утверждение:

Теорема 2.10.7. *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_1^-(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_2^-(p)$, *то обратное* S_{11}^-- *преобразование от обычного произведения функций* $F_1^-(p)$ *и* $F_2^-(p)$ *в пространстве изображений равно левосторонней сложной свёртке оригиналов этих функций в пространстве оригиналов т. е.*

$$(S_{11}^-)^{-1}\{F_1^-(p)F_2^-(p)\} = (S_{11}^-)^{-1}[F_1^-(p)F_2^-(p)]\left(\frac{x}{1-x}\right) =$$

$$= (f_1^* * f_2^*)^-\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

где $\mathrm{Re}p = \gamma > \min\{\beta_0^1, \beta_0^2\}$.

Доказательство: Эту теорему можно доказать в виде следующей цепочки равенств

$$(S_{11}^-)^{-1}\{F_1^-(p)F_2^-(p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p F_1^-(p)F_2^-(p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_2^-(p)\left(\frac{x}{1-x}\right)^p\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}dp =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^p F_2^-(p)dp =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int_x^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = (f_1^* * f_2^*)^-\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

В этой записи последняя часть верна, потому что произведение функции оригиналов

$$f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) = g_1\left(\ln\frac{t}{1-t}\right) g_2\left(\ln\frac{x}{1-x} - \ln\frac{t}{1-t}\right),$$

как сложная функция от аргумента $\ln\frac{t}{1-t}$, является финитной функцией, носитель которой лежит в интервале $x < t \leq \frac{1}{2}$.

Таким образом, из последних теорем следует что функции

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}, F_1^-(p), F_2^-(p)$$

являются парой S_{11}^- - преобразования.

Далее, определим операцию свёртки в пространстве изображений в виде:

$$(F_1^- * F_2^-)(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^-(r)F_2^-(p-r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^-(p-r)F_2^-(r)dr, \qquad (2.10.3)$$

Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 2.10.8. *Если* $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_1^-(p)$ *и* $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq F_2^-(p)$, *то*

$$f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \risingdotseq (F_1^- * F_2^-)(p),$$

где $\mathrm{Re}(p-r) > \max\{\alpha_0^1, \alpha_0^2\}$.

Доказательство: Действительно, имеем

$$S_{11}^-\left\{f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-r} F_1^-(r)dr\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^-(r)dr\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p-r} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^-(r)F_2^-(p-r)dr = (F_1^- * F_2^-)(p).$$

Имеет место и обратное утверждение:

Теорема 2.10.9. *Если* $f_1(x) \risingdotseq F_1^-(p)$ *и* $f_2(x) \risingdotseq F_2^-(p)$, *то*

$$(S_{11}^-)^{-1}\{H(p)\} = (S_{11}^-)^{-1}\{(F_1^- * F_2^-)(p)\} \risingdotseq f_1(x)\cdot f_2(x).$$

Доказательство: Находим обратное S_{11}^- - преобразование от функции $H(p)$

$$(S_{11}^-)^{-1}\{H(p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p H(p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^-(r)F_2^-(p-r)drdp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^-(r)dr \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^p F_2^-(p-r)dp =$$

$$= \left| \begin{matrix} p - r = q \\ dp = dq \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^-(r)dr \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{q+r} F_2^-(q)dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^r F_1^-(r)dr \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^q F_2^-(q)dq = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Если определим операцию свёртки в пространстве изображений в виде (2.10.3), то имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^-(r) F_2^-(p-r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^-(r)dr \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-(p-r)} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^r F_1^-(r)dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Из этого равенства при $p = 0$ получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1^-(r) F_2^-(-r)dr = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Далее, подчинив функции $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ и $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ равенству $f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = \overline{f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)}$, приходим к равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1^-(r)F_1^-(-r)dr = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left|f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right|^2 \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Положив здесь $\gamma = 0$, $r = i\sigma$ и, замечая, что $F_1^-(-i\sigma) = \overline{F_1^-(\iota\sigma)}$, приходим к более симметричному виду равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_1^-(i\sigma)|^2 d\sigma = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left|f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right|^2 \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Выводы по главе 2

Введён двухточечный особый дифференциальный оператор и исследованы операторно-дифференциальные уравнения, которые построены с помощью этого оператора.

Построен аналог формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения n-го порядка.

Построены основы операционного исчисления для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений.

Введено понятие S_{11} – интегральное преобразование и доказаны основные теоремы, касающиеся S_{11} интегрального преобразования. Также введено понятие правосторонней и левосторонней S_{11} – интегрального преобразования.

Исследованы некоторые линейные операторно-дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами методом S_{11} – интегрального преобразования.

ГЛАВА 3
ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В данной главе исследуется разрешимость одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с двухточечным особым ядром. Вначале исследуется модельное интегро-дифференциальное уравнение, затем во втором параграфе проводится регуляризация немодельного уравнения.

Третий параграф данной главы посвящён исследованию сопряженного модельного интегро-дифференциального уравнения. Далее, находится решение немодельного сопряжённого интегро-дифференциального уравнения в неявном виде с помощью резольвенты соответствующего интегрального уравнения типа Вольтерра с регулярным ядром.

В пятом параграфе третьей главы исследуется особое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с полным характеристическим уравнением. В этом параграфе исследуется задача о наличии спектра для исследуемого класса интегро-дифференциальных уравнений.

Основной результат данной главы состоит в построении аналога теоремы Фредгольма для исследуемого класса уравнений в виде теоремы 3.5.1-3.5.4.

§3.1. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с особым двухточечным ядром

Пусть $\Gamma = \{x: 0 \leq x < 1\}$ множество точек на вещественной оси. В дальнейшем через $\tilde{\Gamma} = \{x: 0 < x \leq 1\}$ обозначим сопряженный интервал к интервалу Γ. Это означает, что если $x = x_0$ является фиксированной точкой интервала Γ, тогда $\Gamma = \{x: 0 \leq x < x_0\}$ и $\tilde{\Gamma} = \{x: x_0 < x \leq 1\}$.

Через $C_{11}(\vec{0},1;\lambda,0),\left(C_{11}(0,\vec{1};\lambda,\infty)\right)$, где $\lambda>0$, обозначим класс непрерывных на интервале (0,1) сложных функций $f(x)$, которые зависят от функции $\psi(x)=\frac{x}{1-x}$ как от аргумента и в точке $x=0$ $(x=1)$ обращаются в нуль (бесконечность) с ассимптотическим поведением

$$f(x)=o\left[x^{\delta}\right],\delta>\lambda,x\to 0 \qquad (3.1.1)$$

$$\left(f(x)=O\left[(1-x)^{-\delta}\right],\delta>\lambda,x\to 1\right). \qquad (3.1.2)$$

Введение обозначения вида $C_{11}(\vec{0},1;\lambda;0),\left(C_{11}(0,\vec{1};\lambda;\infty)\right)$ обосновано тем, что мы одновременно сможем наблюдать поведение функции из этого класса в двух точках $x=0$ и $x=1$, причём параметр λ указывает на степень обращения к нулю или к бесконечности функций из этого класса.

Через $C_{11}^{(n)}(\vec{0},1;\lambda,0)\left(C_{11}^{(0)}(\vec{0},1;\lambda,0)=C_{11}(\vec{0},1;\lambda,0)\right)$ обозначим класс функций $f(x)$, которые имеют непрерывные D_x^{11} – производные до порядка n включительно и для которых $(D_x^{11})^n f(x)\in C_{11}(\vec{0},1;\lambda,0)$ для $\forall n\in N$.

Через $C_{11}^{(n)}(0,1)$ обозначим класс функций имеющий D_x^{11} – производные до порядка n включительно.

На Г рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с особым ядром вида

$$D_x^{11}y+\int_0^x\frac{K(x,t)}{t(1-t)}y(t)dt=f(x), \qquad (3.1.3)$$

где $D_x^{11}=x(1-x)\frac{d}{dx}$ – двухточечный особый дифференциальный оператор первого порядка, $K(x,t)$ - заданная функция на прямоугольнике $\bar{R}$, где $R=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<1\}$ и, причём, $K(0,0)\neq 0$, $f(x)\in C_{11}(\bar{\Gamma})$ – заданная непрерывная функция на $\bar{\Gamma}$.

Теории интегро-дифференциальных уравнений с регулярными и сингулярными ядрами посвящены многочисленные работы. Некоторые важные результаты, касающиеся исследования различных классов интегро-дифференциальных уравнений, получены в работах Я.В.Быкова [96], А.А.Бободжонова [92], В.Вольтерра [113], В.В.Васильева [98], М.М.Вейнберга [102], В.С.Владимирова [107] М.Ю.Игнатьева, С.Ю.Советникова [145], М.Илолова [149], С.Искандарова [151], А.С. Калашникова [158], В.Н.Николаенко [202], С.С.Орлова [206], Н.А.Сидорова [303], С.Л.Соболева [307], В.Г.Трубина [315], М.В. Фалалеева [319], Г.А.Шишкина [327] и ряда других.

Интегральные уравнения типа (3.1.3) были исследованы в работах Н.Раджабова и С.Саидова (см. канд. дисс. С.Саидова[294] и приведённый в ней список литературы). Например, в работе [248] был исследован класс обобщённого интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками. Также, в работе [260] был исследован общий случай сингулярного интегрального уравнения Вольтерровского типа с логарифмической особенностью.

Исследованию некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх -сингулярными ядрами были посвящены работы автора [1-A], [10-A], [12-A]-[19-A], [22-A]-[31-A], [33-A], [40-A]-[51-A], [54-A]-[56-A]. Подобные результаты были получены и для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными ядрами в работах [17-A], [28-A].

Решение уравнения (3.1.3) будем искать в классе $C'_{11}\left(\vec{0},1;\varepsilon,0\right),(\varepsilon>0)$.

Для изучения общего уравнения (3.1.3), прежде всего, исследуем модельное уравнение вида

$$D_x^{11}y(x)+\int_0^x \frac{K}{t(1-t)}y(t)dt=f(x), \qquad (3.1.4)$$

которое получится из (3.1.3) при $K(x,t) = K = const$. Этому уравнению соответствует однородное уравнение

$$D_x^{11} y(x) + \int_0^x \frac{K}{t(1-t)} y(t)dt = 0, \qquad (3.1.5)$$

Решение модельного уравнения (3.1.4) будем искать в классе функций $C'_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$. Предположим, что решение уравнения (3.1.4) существует и оно дважды D_x^{11} – дифференцируемо, т.е. $y(x) \in C''_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$, а правая часть этого уравнения один раз непрерывно D_x^{11} – дифференцируема, т.е. $f(x) \in C'_{11}(0,1)$. Тогда, на обе стороны уравнения (3.1.4) действуя дифференциальным оператором D_x^{11},приходим к решению операторно-дифференциального уравнения второго порядка вида

$$(D_x^{11})^2 y + Ky = D_x^{11} f(x). \qquad (3.1.6)$$

Однородное уравнение, соответствующее этому уравнению, имеет вид:

$$(D_x^{11})^2 y + Ky = 0. \qquad (3.1.7)$$

Если решение однородного уравнения (3.1.7) будем искать в виде

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda},$$

то для определения λ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + K = 0. \qquad (3.1.8)$$

В зависимости от корней характеристического уравнения (3.1.8) выпишем общее решение неоднородного уравнения (3.1.6).

I. Если $K < 0$ то $\lambda_1 = -\sqrt{-K}$, $\lambda_2 = \sqrt{-K}$ и общее решение однородного уравнения(3.1.7) имеет вид:

$$y_{oo}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} c_1^1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} c_2^1.$$

На основе полученных результатов в главе 1 и теоремы 2.6.1, общее решение неоднородного уравнения (3.1.6) представимо в виде:

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} c_1^1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} c_2^1 + \tag{3.1.9}$$

$$+\int_0^x \left[N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2}\right] D_t^{11} f(t)\frac{dt}{t(1-t)},$$

где c_1^1, c_2^1 – произвольные постоянные числа, а коэффициенты N_1^1 и N_2^1единственным образом определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} N_1^1 + N_2^1 = 0, \\ \lambda_1 N_1^1 + \lambda_2 N_2^1 = 1. \end{cases} \tag{3.1.10}$$

Интегрируя по частям правую часть равенства (3.1.9), получим

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} c_1^1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} c_2^1 +$$

$$+\int_0^x \left[\lambda_1 N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + \lambda_2 N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2}\right] f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv$$

$$\equiv E_1^+[c_1^1, c_2^1, f(x)]. \tag{3.1.11}$$

Заметим, что поскольку в уравнении (3.1.4) нижний предел интегрирования начинается от нуля, то в полученном решении (3.1.9) или (3.1.11) также возьмём нижний предел интегрирования, равный нулю. При этом для сходимости интегралов в правой части (3.1.11) требуем, чтобы функция $f(x) \in C_{11}\left(\vec{0}, 1; \lambda_2, 0\right)$

Теперь, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что из двух частных решений $y_1 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1}$ и $y_2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2}$ однородного уравнения (3.1.7) только второе в то же время будет и решением однородного уравнения (3.1.5). Частное решение неоднородного уравнения (3.1.6) также будет и частным решением неоднородного уравнения (3.1.4). Отсюда, общее решение

неоднородного уравнения (3.1.4) содержит одну произвольную константу и выражается по формуле

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} c_2^1 + \int_0^x \left[\lambda_1 N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + \right.$$

$$\left. +\lambda_2 N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2}\right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_1^+[0, c_2^1, f(x)]. \quad (3.1.12)$$

Далее, заметим, что для разрешимости уравнения (3.1.4) вначале мы предполагали дважды D_x^{11} – дифференцируемость функции $y(x)$ и один раз D_x^{11} – дифференцируемость функции $f(x)$. Но после получения решения (3.1.12) увидим, что эти требования являются лишними и принадлежность функции $y(x)$ и $f(x)$ соответственно классам $\mathrm{C}'_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$ и $C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda_2, 0)$ достаточно для разрешимости уравнения (3.1.4).

Таким образом, доказана:

Теорема 3.1.1. *Пусть в уравнении (3.1.4)* $K < 0$ *и функция* $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda_2, 0)$. *Тогда однородное уравнение (3.1.5) имеет одно линейно независимое решение. Неоднородное уравнение (3.1.4) в этом случае всегда разрешимо и его общее решение из класса* $\mathrm{C}'_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$ *даётся по формуле (3.1.12), где* c_2^1 *– произвольное постоянное число,* N_1^1, N_2^1 *определяются единственном образом из системы алгебраических уравнений (3.1.10).*

Замечание 3.1.1. *Из интегрального представления (3.1.12) следует, что, если* $K < 0$ *и функция* $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda_2, 0)$, *то решение уравнения (3.1.4) в точке* $x = 0$ *обращается в нуль с асимптотическим поведением*

$$y(x) = o\left[x^{\lambda_2}\right].$$

II. Находим общее решение уравнения (3.1.4) при $K > 0$. Если $K > 0$, то корни характеристического уравнения (3.1.8) являются комплексно -

сопряжёнными т.е. $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-K} = \pm\sqrt{K}i$. В этом случае общее решение однородного уравнения (3.1.7) имеет вид:

$$y_{\text{оо}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^2 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^2,$$

где c_1^2, c_2^2 – произвольные константы.

На основе теоремы 2.6.3, общее решение неоднородного уравнения (3.1.6) представимо в виде:

$$y_{\text{он}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^2 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^2 +$$

$$+\int_0^x \left[N_1^2\cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] +\right.$$

$$\left.+ N_2^2\sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]D_t^{11}f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv$$

$$\equiv E_2^+[c_1^2, c_2^2, D_x^{11}f(x)], \qquad (3.1.13)$$

где N_1^2, N_2^2 находятся из алгебраической системы уравнений:

$$\begin{cases} N_1^2\cdot 1 + N_2^2\cdot 0 = 0, \\ \Lambda_{0\sqrt{K}}^{+,1}N_1^2 + \Lambda_{\sqrt{K}0}^{-,1}N_2^2 = 1. \end{cases} \qquad (3.1.14)$$

Из этой системы значения N_1^2, N_2^2 легко находим в виде

$$N_1^2 = 0, N_2^2 = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Тогда решение (3.1.13) примет вид:

$$y_{\text{он}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^2 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^2 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{K}}\int_0^x \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]D_t^{11}f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^+[c_1^2, c_2^2, D_x^{11}f(x)].$$

Интегрируя один раз по частям, перепишем это решение в виде :

$$y_{\text{он}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^2 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^2 +$$

$$+\int_0^x \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^+[c_1^2, c_2^2, f(x)].$$

Далее, непосредственной проверкой убедимся, что общее решение однородного уравнения (3.1.7) не является в то же время общим решением однородного уравнения (3.1.5), т.е. в этом случае однородное уравнение (3.1.5) имеет только нулевое решение. Действительно, такое утверждение вполне ожидаемо, поскольку каждое из частных решений однородного уравнения (3.1.7) не входит в класс $C'_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$. В этом случае неоднородное уравнение (3.1.4) имеет единственное решение, которое выражается формулой

$$y(x) = \int_0^x \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^+[0, 0, f(x)]. \quad (3.1.15)$$

Заметим, что для сходимости интеграла в правой части (3.1.15) достаточно, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $C_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3.1.2. *Пусть в уравнении (3.1.4)* $K > 0$ *и функция* $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$. *Тогда однородное уравнение (3.1.5) имеет только нулевое решение. Неоднородное уравнение (3.1.4) в этом случае всегда однозначно разрешимо и его единственное решение из класса* $C'_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$ *даётся по формуле (3.1.15).*

Замечание 3.1.2. *Из представления (3.1.15) видно, что если* $K > 0$ *и функция* $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$, *то решение уравнения (3.1.4) при* $x \to 0$ *обращается в нуль с асимптотическим поведением*

$$y(x) = o[x^{\varepsilon}].$$

Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|y(x)| = \left| \int_0^x \cos\left[\sqrt{K} \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \right| \leq$$

$$\leq \int_0^x \left|\cos\left[\sqrt{K} \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right| |f(t)| \frac{dt}{t(1-t)} \leq A \int_0^x |f(t)| \frac{dt}{t(1-t)} \leq$$

$$\leq A \int_0^x \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\varepsilon} \frac{dt}{t(1-t)} = \frac{A}{\varepsilon}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\varepsilon}\Bigg|_0^x = \frac{A}{\varepsilon}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\varepsilon},$$

откуда следует утверждение замечания 2.1.2.

§3.2. Регуляризация немодельного уравнения

На Г рассмотрим немодельное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$D_x^{11} y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t) dt = f(x), \qquad (3.2.1)$$

где $K(x,t)$ - заданная функция на прямоугольнике $R = \{(x,t): 0 \leq x < 1,\ 0 \leq t < 1\}$. Предположим, что $K(x,t) \in C_{11}(R), f(x) \in C_{11}(\Gamma)$ и $K(0,0) \neq 0$.

Для исследования немодельного уравнения (3.2.1) будем использовать метод регуляризации Н.Раджабова [240].

Уравнению (3.2.1) соответствует однородное уравнение

$$D_x^{11} y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t) dt = 0. \qquad (3.2.2)$$

Решение уравнения (3.2.1), как и в модельном случае, будем искать в классе $C'_{11}(\vec{0},1;\varepsilon,0)$.

Для решения уравнения (3.2.1) данное уравнение представим его в виде

$$D_x^{11}y+\int_0^x \frac{K(0,0)}{t(1-t)}y(t)dt=F(x), \qquad (3.2.3)$$

где

$$F(x)=f(x)-\int_0^x \frac{K(x,t)-K(0,0)}{t(1-t)}y(t)dt. \qquad (3.2.4)$$

Уравнению (3.2.3) соответствует однородное уравнение

$$D_x^{11}y+\int_0^x \frac{K(0,0)}{t(1-t)}y(t)dt=0\ , \qquad (3.2.5)$$

также характеристическое уравнение

$$\lambda^2+K(0,0)=0. \qquad (3.2.6)$$

Предполагая, что в уравнении (3.2.3) $F(x)$ - известная функция, далее используя результаты параграфа §3.1., находим решение уравнения (3.2.3).

I. Пусть в уравнении (3.2.3) $K(0,0)<0$ и функция $F(x)\in C_{11}(\vec{0},1;\lambda_2,0)$, тогда согласно теореме 3.1.1. решение уравнения (3.2.3) даётся по формуле

$$y=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2}c_2^1+\int_0^x\left[\lambda_1N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1}+\right.$$

$$\left.+\lambda_2N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2}\right]F(t)\frac{dt}{t(1-t)}\equiv E_1^+[0,c_2^1,F(x)]. \qquad (3.2.7)$$

где c_2^1 – произвольная константа, N_1^1,N_2^1 находятся через корни характеристического уравнения (3.2.6) из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^1 + N_2^1 = 0, \\ \lambda_1 N_1^1 + \lambda_2 N_2^1 = 1. \end{cases} \qquad (3.2.8)$$

Подставляя вместо функции $F(t)$ её значение из (3.2.4), приходим к решению следующего уравнения

$$y(x) + \int_0^x \left[\lambda_1 N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_1} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{\lambda_2} \right] \int_0^t \frac{K(t,\tau) - K(0,0)}{\tau(1-\tau)} y(\tau) d\tau \frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= E_1^+[0, c_2^1, f(x)].$$

В полученном уравнении меняя порядок интегрирования, совершая замену переменного $t = \tau$, приходим к решению следующего интегрального уравнения

$$y(x) + \int_0^x \frac{K_1^+(x,t)}{t(1-t)} y(t) dt = E_1^+[0, c_2^1, f(x)], \qquad (3.2.9)$$

где

$$K_1^+(x,t) = \int_t^x \left[\lambda_1 N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-\tau}{\tau} \right)^{\lambda_1} + \lambda_2 N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-\tau}{\tau} \right)^{\lambda_2} \right]$$

$$\times [K(\tau,t) - K(0,0)] \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)}.$$

Пусть ядро интегро-дифференциального уравнения (3.2.1) $K(x,t)$ удовлетворяет условию

$$K(x,t) - K(0,0) = o\left[x^{\lambda_2 + \varepsilon} \cdot t^{\varepsilon}\right], \varepsilon > 0, \qquad (3.2.10)$$

тогда функция $K_1^+(x,t)$ при $t \to 0, x \in \bar{\Gamma}$ удовлетворяет условию

$$K_1^+(x,t) = o[t^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, \qquad (3.2.11)$$

т.е. ядро интегрального уравнения (3.2.9) $\frac{K_1^+(x,t)}{t(1-t)}$ в точке $t=0$ имеет слабую особенность. Кроме того, если функция $f(x) \in C_{11}(\vec{0},1;\lambda_2,0)$, то правой частью уравнения (3.2.9) будет непрерывная функция.

Отсюда интегральное уравнение (3.2.9) будет интегральным уравнением типа Вольтера со слабой особенностью в ядре и с непрерывной правой частью, решение которого согласно общей теории интегральных уравнений типа Вольтера [113], [314] даётся по формуле

$$y(x) = E_1^+[0,c_2^1,f(x)] - \int_0^x \Gamma_1^+(x,t)E_1^+[0,c_2^1,f(t)]\frac{dt}{t(1-t)} \equiv T_1^+[0,c_2^1,f(x)], \tag{3.2.12}$$

где $\Gamma_1^+(x,t)$ – резольвента интегрального уравнения (3.2.9).

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 3.2.1. *Пусть в уравнении (3.2.1) ядро* $K(x,t) \in C_{11}(\bar{R})$ *, разность* $K(x,t) - K(0,0)$ *удовлетворяет условию (3.2.10), причём,* $K(0,0) < 0$. *Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_{11}(\vec{0},1;\lambda_2,0)$. *Тогда однородное интегро-дифференциальное уравнение (3.2.2) имеет одно линейно-независимое решение, а неоднородное уравнение (3.2.1) всегда разрешимо и его общее решение из класса* $C_{11}(\vec{0},1;\varepsilon,0)$ *даётся по формуле (3.2.12), где* $\Gamma_1^+(x,t)$ *– резольвента интегрального уравнения (3.2.9),* c_2^1 *– произвольная константа.*

I. Пусть в уравнении (3.2.3) $K(0,0) > 0$ и функция $F(x) \in C_{11}(\vec{0},1;\lambda_2,0)$, тогда согласно теореме 3.1.2. решение уравнения (3.2.3) даётся по формуле

$$y(x) = \int_0^x \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]F(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^+[0,0,F(x)].$$

Подставляя вместо функции $F(t)$ её значение из (3.2.4), далее перенося слагаемые с неизвестными функциями в левую часть, приходим к решению следующего уравнения

$$y(x)+\int_0^x \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\int_0^t \frac{K(t,\tau)-K(0,0)}{\tau(1-\tau)}y(\tau)d\tau\frac{dt}{t(1-t)}$$
$$=E_2^+[0,0,f(x)].$$

Меняя в полученном уравнении порядок интегрирования, и совершая замену переменного по формуле $\tau=t$, приходим к решению следующего уравнения

$$y(x)+\int_0^x \frac{K_2^+(x,t)}{t(1-t)}y(t)dt=E_2^+[\,0,0,f(x)], \qquad (3.2.13)$$

где

$$K_1^+(x,t)=\int_t^x \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right][K(\tau,t)-K(0,0)]\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)}.$$

Из последнего равенства видно, что если разность $K(x,t)-K(0,0)$ удовлетворяет условию

$$K(x,t)-K(0,0)=o[x^\varepsilon t^\varepsilon],\varepsilon>0, \qquad (3.2.14)$$

тогда ядро $K_3^+(x,t)=\frac{K_2^+(x,t)}{t(1-t)}$ в точке $t=0$ имеет слабую особенность. Также, если $f(x)\in C_{11}(\vec{0},1;\varepsilon,0)$, то интегральное уравнение (2.2.13) будет интегральным уравнением типа Вольтера со слабой особенностью в ядре и с непрерывной правой частью, решение, которого согласно общей теории [314], через резольвенту данного интегрального уравнения даётся по формуле

$$y(x)=E_2^+[0,0,f(x)]-\int_0^x \Gamma_2^+(x,t)E_2^+[f(t)]\frac{dt}{t(1-t)}\equiv T_2^+[f(x)]. \qquad (3.2.15)$$

Таким образом, доказана:

Теорема 3.2.2. *Пусть в уравнении (3.2.1) ядро* $K(x,t)\in C_{11}(\bar{R})$ *и разность* $K(x,t)-K(0,0)$ *удовлетворяют условию (3.2.14), причём,*$K(0,0)>0$. *Кроме*

того, пусть функция $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$. *Тогда однородное интегро-дифференциальное уравнение (3.2.2) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (3.2.1) всегда имеет единственное решение из класса* $C_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0)$, *которое даётся по формуле (3.2.15), где* $\Gamma_2^+(x,t)$ *– резольвента интегрального уравнения (3.2.13).*

§3.3. Исследование сопряженного модельного уравнения

Пусть $\tilde{\Gamma} = \{x: x_0 < x \leq 1\}$ множество точек на вещественной оси. Через $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda, 0)\left(\tilde{C}_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, \infty)\right)$, где $\lambda > 0$, обозначим класс непрерывных на интервале (0,1) сложных функций $g(x)$, которые зависят от функции $\tilde{\psi}(x) = \frac{1-x}{x}$ как от аргумента и в точке $x = 1$ $(x = 0)$обрашаются в нуль(бесконечность) с ассимптотическим поведением:

$$g(x) = o\left[(1-x)^{\delta}\right], \delta > \lambda, x \to 1, \qquad (3.3.1)$$

$$\left(g(x) = O\left[x^{-\delta}\right], \delta > \lambda, x \to 0\right). \qquad (3.3.2)$$

Класс $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda, 0)\left(\tilde{C}_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, \infty)\right)$ будем называть классом сопряжённых функций к функциям класса $C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, 0)$.

Далее, через $\tilde{C}_{11}^{(n)}(0, \vec{1}; \lambda, 0)\left(\tilde{C}_{11}^{(0)}(0, \vec{1}; \lambda, 0) = \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda, 0)\right)$ обозначим класс сопряжённых функций $g(x)$, которые имеют непрерывные $-D_x^{11}$ – производные до порядка n включительно и для $\forall n \in N$ выполняется условие $(-D_x^{11})^n g(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda, 0)$.

Через $\tilde{C}_{11}^{(n)}(0,1)$ обозначим класс функций имеющий $-D_x^{11}$ производной до порядка n включительно.

В дальнейшем также мы будем рассматривать классы сопряжённых функций $C_{11}(0, x)$ и $\tilde{C}_{11}(x, 1)$.

В теории интегральных уравнений типа Фредгольма наряду с изучаемыми уравнениями одновременно исследуются и сопряжённые уравнения, соответствующее заданным уравнениям [116], [189], [195]. Когда изучаются интегральные уравнения типа Фредгольма или интегральные уравнения с ядром Коши, важной задачей является построение сопряжённых уравнений и совместное изучение данных уравнений. В нашем случае для интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера это задача приобретает специфическую форму. Например, хотя уравнение (3.1.3) полностью изучено независимо от сопряжённого к нему уравнения, изучение сопряжённого уравнения, соответствующего уравнению (3.1.2), само по себе представляет особый интерес. Сначала необходимо правильно построить сопряжённое уравнение. Поэтому прежде мы должны выяснить, что, если

$$L[y] \equiv D_x^{11} y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt, \tag{3.3.3}$$

особый линейный интегро-дифференциальный оператор первого порядка, то какой вид имеет сопряжённый к нему оператор. Для этого напомним о некоторых деталях теории линейных сопряжённых операторов.

Пусть A непрерывный линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Зафиксировав $y \in H$, рассмотрим скалярное произведение $f(x) = (Ax, y)$ как функционал относительно переменной $x \in H$. Оператор A линеен, то есть функционал линеен по переменной и ограничен, так как

$$|(Ax, y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\|.$$

По теореме Рисса о виде непрерывного линейного функционала, заданного в гильбертовом пространстве, имеет место равенство

$$(Ax, y) = (x, z).$$

Здесь элемент z однозначно определён элементом y и оператором A, то есть определяет некий оператор A^* как $z = A^* y$. Оператор A^* называется сопряжённым с оператором A.

Определение 3.3.1. *Оператор A^* называется сопряжённым с оператором A, если для любой $x, y \in H$ имеет место равенство*

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Также оператор A называется самосопряжённым, если $A = A^*$, унитарным, если $A^* = A^{-1}$ и нормальным, если $A^* A = AA^*$.

Пусть задано линейное пространство $C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda; 0)$ и пространство сопряженных функций $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda; 0)$.

Определение 3.3.2. *Скалярным произведением функций $f \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda; 0)$ и $g \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda; 0)$ называем число (f, g), определяемое равенством*

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) \frac{dx}{x(1-x)}.$$

Для определения оператора L^*, сопряжённого к операторуL, проведем следующие выкладки

$$(L[y], z) = \int_0^1 \left[D_t^{11} y + \int_0^t \frac{K(t,\tau)}{\tau(1-\tau)} y(\tau) d\tau \right] z(t) \frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= \int_0^1 z(t) dy(t) + \int_0^1 z(t) \frac{dt}{t(1-t)} \int_0^t \frac{K(t,\tau)}{\tau(1-\tau)} y(\tau) d\tau =$$

$$= z(t) y(t)|_0^1 - \int_0^1 y(t) dz(t) + \int_0^1 y(\tau) \frac{d\tau}{\tau(1-\tau)} \int_\tau^1 \frac{K(t,\tau)}{t(1-t)} z(t) dt = |\tau = t| =$$

$$= z(1)y(1) - z(0)y(0) - \int_0^1 y(t) D_t^{11} z(t) \frac{dt}{t(1-t)} +$$

$$+ \int_0^1 y(t) \frac{dt}{t(1-t)} \int_t^1 \frac{K(\tau,t)}{\tau(1-\tau)} z(\tau) d\tau = z(1)y(1) - z(0)y(0) +$$

$$+ \int_0^1 y(t) \left[-D_t^{11} z + \int_t^1 \frac{K(\tau,t)}{\tau(1-\tau)} z(\tau) d\tau \right] \frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= z(1)y(1) - z(0)y(0) + (y, L^*[z]).$$

Поскольку $y \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda; 0)$ и $z \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda; 0)$, следовательно

$z(1)y(1) - z(0)y(0) = 0,$

откуда

$$(L[y], z) = (y, \tilde{L}[z]),$$

т.е.

$$(L[y], z) = (y, L^*[z]),$$

где

$$L^*[z] \equiv -D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt.$$

Отсюда оператор

$$L^*[z] \equiv -D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt$$

будет сопряжённый оператор к оператору$L[y]$.

Далее, интегро-дифференциальное уравнение

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x), \qquad (3.3.4)$$

называется уравнением, сопряжённым с уравнением

$$D_x^{11}y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x). \qquad (3.3.5)$$

Приступим к исследованию сопряжённого уравнения (3.3.4). С этой целью исследуем модельное сопряжённое уравнение

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K}{t(1-t)} z(t)dt = g(x). \qquad (3.3.6)$$

Уравнению (3.3.6) соответствует однородное уравнение

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K}{t(1-t)} z(t)dt = 0. \qquad (3.3.7)$$

Поскольку ядро немодельного и модельного сопряжённого уравнения (3.3.4), (3.3.6) содержит особенности первого порядка в точке $t = 1$, поэтому решение данных уравнений будем искать в классе $\tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \varepsilon, 0\right) \cup \tilde{C}'_{11}\left(\tilde{\Gamma}\right)$.

Для решения уравнения (3.3.6) сначала предположим, что $z \in \tilde{C}''_{11}\left(\tilde{\Gamma}\right)$, $g(x) \in \tilde{C}'_{11}\left(\tilde{\Gamma}\right)$ и обе стороны этого уравнения один раз $-D_x^{11}$ – дифференцируя, приходим к решению операторно-дифференциального уравнения

$$(-D_x^{11})^2 z + Kz = -D_x^{11} g(x). \qquad (3.3.8)$$

Если искать решение однородного уравнения

$$(-D_x^{11})^2 z + Kz = 0 \qquad (3.3.9)$$

в виде

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}, \qquad (3.3.10)$$

тогда для определения λ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + K = 0, \qquad (3.3.11),$$

которое с точностью совпадает с характеристическим уравнением (3.1.8).

В зависимости от корней характеристического уравнения (3.3.11) выпишем общее решение неоднородного уравнения (3.3.8).

I. Пусть в (3.3.11) $K < 0$, тогда $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-K}$ и общее решение однородного уравнения (3.3.9) имеет вид:

$$z_{\text{оо}} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1} c_1^4 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^4.$$

На основе теоремы 2.6.1с учётом пределов интегрирования в уравнении (3.3.7), общее решение неоднородного уравнения (3.3.8) получим в виде:

$$z_{\text{он}} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1} c_1^4 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^4 +$$

$$+\int_x^1 \left[N_1^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1} + N_2^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2}\right] (-D_t^{11}) g(t) \frac{dt}{t(1-t)} \equiv$$

$$\equiv E_1^-[c_1^4, c_2^4, g(x)], \qquad (3.3.12)$$

где c_1^4, c_2^4 – произвольные постоянные числа, а коэффициенты N_1^4 и N_2^4 единственным образом определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} N_1^4 + N_2^4 = 0, \\ \lambda_1 N_1^4 + \lambda_2 N_2^4 = 1. \end{cases} \qquad (3.3.13)$$

Интегрируя по частям правую часть формулы (3.3.12), получим

$$z_{\text{он}} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1} c_1^4 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^4 + \qquad (3.3.14)$$

$$+\int_x^1 \left[\lambda_1 N_1^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1} + \lambda_2 N_2^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2}\right] g(t) \frac{dt}{t(1-t)}.$$

Для сходимости интегралов в правой части (3.3.14) потребуем, чтобы функция $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$

Теперь, непосредственной проверкой убедимся, что из двух частных решений $z_1 = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1}$ и $z_2 = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2}$ однородное уравнение (3.3.9) только z_2 принадлежит классу $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \varepsilon, 0)$, поэтому будет решением однородного

уравнения (3.3.7). Частное решение неоднородного уравнения (3.3.8) в то же время будет и частным решением неоднородного уравнения (3.3.6). Отсюда общее решение неоднородного уравнения (3.3.6) содержит одну произвольную константу и выражается равенством

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^4 + \tag{3.3.14}$$

$$+\int_x^1 \left[\lambda_1 N_1^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1} + \lambda_2 N_2^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2}\right] g(t) \frac{dt}{t(1-t)}.$$

Далее, заметим, что для разрешимости уравнения (3.3.6) вначале мы предполагали, что $z(x) \in \tilde{C}_{11}''(\tilde{\Gamma})$, $g(x) \in \tilde{C}_{11}'(\tilde{\Gamma})$, но после получения решения (3.3.14) увидим, что эти требования являются лишними и принадлежность функции $z(x)$ и $g(x)$ соответственно классам $\tilde{C}_{11}'(0, \vec{1}; \varepsilon, 0)$ и $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$ достаточно для разрешимости уравнения (3.3.6).

Таким образом, доказано:

Теорема 3.3.1. *Пусть в уравнении (3.3.6)* $K < 0$ *и функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$. *Тогда однородное уравнение (3.3.7) имеет одно линейно - независимое решение. Неоднородное уравнение (3.3.6) в этом случае всегда разрешимо и его общее решение из класса* $\tilde{C}_{11}'(0, \vec{1}; \varepsilon, 0)$ *даётся по формуле (3.3.14), где* c_2^4 *– произвольное постоянное число,* N_1^4, N_2^4 *определяются единственном образом из системы алгебраических уравнений (3.3.13).*

Замечание 3.1.1. *Из интегрального представления (3.3.14) следует, что если* $K < 0$ *и функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$, *то решение уравнения (3.3.6) в точке* $x = 1$ *обращается в нуль с асимптотическим поведением*

$$z(x) = o\left[(1-x)^{\lambda_2}\right].$$

II. Находим общее решение уравнения (3.3.6) при $K > 0$. Если $K > 0$, то корни характеристического уравнения (3.3.11) являются комплексно –

сопряжёнными, т.е. $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-K} = \pm\sqrt{K}i$. В этом случае общее решение однородного уравнения (3.3.9) имеет вид:

$$z_{\text{оо}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^5 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^5,$$

где c_1^5, c_2^5 – произвольные константы.

На основе теоремы 2.6.3. общее решение неоднородного уравнения (3.3.8) даётся по формуле:

$$z_{\text{он}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^5 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^5 +$$

$$+\int_x^1 \left[N_1^5\cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right] +\right.$$

$$\left. + N_2^5\sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]\right](-D_t^{11})g(t)\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (3.3.15)$$

где N_1^5, N_2^5 находятся из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^5\cdot 1 + N_2^5\cdot 0 = 0, \\ \Lambda_{0\sqrt{K}}^{+,1}N_1^5 + \Lambda_{\sqrt{K}0}^{-,1}N_2^5 = 1. \end{cases} \qquad (3.3.16)$$

Из системы уравнений (3.3.16) значения N_1^5, N_2^5 легко находим в виде

$$N_1^5 = 0, N_2^5 = \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Следовательно решение (3.3.15) примет вид:

$$z_{\text{он}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^5 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^5 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{K}}\int_x^1 \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right](-D_t^{11})g(t)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Интегрируя один раз по частям, перепишем полученное решение в виде

$$z_{\text{он}} = \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_1^5 + \sin\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]c_2^5 +$$

$$+\int_x^1 \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^-[c_1^5, c_2^5, g(x)].$$

Далее, поскольку частные решения однородного уравнения (3.3.9) $z_1, z_2 \notin \tilde{C}_{11}(0,\vec{1};\varepsilon,0)$, поэтому однородное уравнение (3.3.7) имеет только нулевое решение. В этом случае неоднородное уравнение (3.3.6) имеет единственное решение, которое выражается по формуле

$$z(x) = \int_x^1 \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^-[0,0,g(x)]. \quad (3.3.17).$$

Для сходимости интеграла в правой части (3.3.17) достаточно, чтобы функция $g(x)$ принадлежала классу $\tilde{C}_{11}(0,\vec{1};\varepsilon,0)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3.3.2. *Пусть в уравнении (3.3.6)* $K > 0$ *и функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0,\vec{1};\varepsilon,0)$. *Тогда однородное уравнение (3.3.7) имеет только нулевое решение. Неоднородное уравнение (3.3.6) всегда однозначно разрешимо и его единственное решение из класса* $\tilde{C}'_{11}(0,\vec{1};\varepsilon,0)$ *даётся по формуле (3.3.17).*

Замечание 3.3.2. *Из представления (3.3.17) видно, что если* $K > 0$ *и функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0,\vec{1};\varepsilon,0)$, *тогда решение уравнения (3.3.6) при* $x \to 1$ *обращается в нуль с асимптотическим поведением*

$$z(x) = o[(1-x)^{\varepsilon}].$$

Действительно, имеет место оценка

$$|z(x)| = \left|\int_x^1 \cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}\right| \leq$$

$$\leq \int_x^1 \left|\cos\left[\sqrt{K}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]\right||g(t)|\frac{dt}{t(1-t)} \leq A\int_x^1 |g(t)|\frac{dt}{t(1-t)} \leq$$

$$\leq A\int_x^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{\varepsilon}\frac{dt}{t(1-t)} = -\frac{A}{\varepsilon}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\varepsilon}\Bigg|_x^1 = \frac{A}{\varepsilon}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\varepsilon},$$

откуда следует утверждение замечания 2.3.2.

§3.4. Регуляризация немодельного сопряжённого уравнения

На $\tilde{\Gamma}$ рассмотрим немодельное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt = g(x), \qquad (3.4.1)$$

где $K(t,x)$ - заданная функция на прямоугольнике $\tilde{R} = \{(t,x): 0 < t \leq 1,\ 0 < x \leq 1\}$. Предположим, что $K(t,x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{R}), g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$ и $K(1,1) \neq 0$.

Уравнению (3.4.1) соответствует однородное уравнение

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt = 0. \qquad (3.4.2)$$

Решение уравнения (3.4.1), как в модельном случае, будем искать в классе $C'_{11}(0,\vec{1};\varepsilon,0)$.

Для решения уравнения (3.4.1) представим его в виде

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(0,0)}{t(1-t)}z(t)dt = G(x), \qquad (3.4.3)$$

где

$$G(x) = g(x) - \int_x^1 \frac{K(t,x) - K(0,0)}{t(1-t)} z(t)dt. \qquad (3.4.4)$$

Уравнению (3.4.3) соответствует однородное уравнение

$$-D_x^{11} z + \int_x^1 \frac{K(0,0)}{t(1-t)} z(t)dt = 0 \qquad (3.4.5)$$

и характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + K(0,0) = 0, \qquad (3.4.6)$$

Будем предполагать, что в уравнении (3.4.3) $G(x)$ - известная функция, используя результаты параграфа §3.3., находим решение уравнения (3.4.3).

I. Пусть в уравнении (3.4.3) $K(0,0) < 0$, функция $G(x) \in \tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \lambda_2, 0\right)$, тогда согласно теореме 3.3.1. решение уравнения (3.4.3) даётся по формуле

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^4 + \int_x^1 \left[\lambda_1 N_1^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1} + \lambda_2 N_2^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2}\right] \times$$

$$\times G(t) \frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_1^-[0, c_2^4, G(x)], \qquad (3.4.7)$$

где c_2^4 – произвольная константа, N_1^4, N_2^4 находится через корни характеристического уравнения (3.4.6) из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^4 + N_2^4 = 0, \\ \lambda_1 N_1^4 + \lambda_2 N_2^4 = 1. \end{cases} \qquad (3.4.8)$$

Подставляя вместо функции $G(t)$ её значение из (3.4.4), приходим к решению следующего уравнения

$$z(x) + \int_x^1 \left[\lambda_1 N_1^4 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1} + \right.$$

$$+\lambda_2 N_2^4\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2}\Bigg]\int\limits_t^1\frac{K(\tau,t)-K(0,0)}{\tau(1-\tau)}z(\tau)d\tau\frac{dt}{t(1-t)}=$$

$$=E_1^-[0,c_2^4,G(x)].$$

В полученном уравнении меняя порядок интегрирования, далее совершая замену переменного $t=\tau$, приходим к решению следующего интегрального уравнения

$$z(x)+\int\limits_x^1\frac{K_1^-(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt=E_1^-[0,c_2^4,G(x)], \qquad (3.4.9)$$

где

$$K_1^-(t,x)=\int\limits_x^t\left[\lambda_1 N_1^4\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1}+\lambda_2 N_2^4\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2}\right]\times$$

$$\times[K(t,\tau)-K(0,0)]\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)}.$$

Пусть ядро $K(t,x)$ удовлетворяет условию

$$K(t,x)-K(0,0)=o\big[(1-t)^{\varepsilon}\cdot(1-x)^{\lambda_2+\varepsilon}\big],\varepsilon>0. \qquad (3.4.10)$$

Тогда функция $K_1^-(t,x)$ при $t\to 0, x\in\overline{\Gamma}$ удовлетворяет условию

$$K_1^-(t,x)=o[(1-t)^{\varepsilon}],\varepsilon>0, \qquad (3.4.11)$$

т.е. ядро интегрального уравнения (3.4.9) $\frac{K_1^-(x,t)}{t(1-t)}$ в точке $t=1$ имеет слабую особенность. Кроме того, если функция $g(x)\in\tilde{C}_{11}\big(0,\vec{1};\lambda_2,0\big)$, то правой частью уравнения (3.4.9) будет непрерывная функция.

Следовательно, интегральное уравнение (3.4.9) будет интегральным уравнением типа Вольтера со слабой особенностью в ядре и с непрерывной правой частью, решение которого согласно общей теории интегральных уравнений типа Вольтера даётся по формуле

$$z(x) = E_1^-[0, c_2^4, g(x)] - \int_x^1 \Gamma_1^-(t,x) E_1^-[0, c_2^4, g(t)] \frac{dt}{t(1-t)} \equiv T_1^-[0, c_2^4, g(x)], \tag{3.4.12}$$

где $\Gamma_1^-(t,x)$ – резольвента интегрального уравнения (3.4.9).

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 3.4.1. *Пусть в уравнении (3.4.1) ядро* $K(t,x) \in \tilde{C}_{11}(\bar{R})$ *и разность* $K(t,x) - K(0,0)$ *удовлетворяют условию (3.4.10), причём,*$K(0,0) < 0$. *Кроме того, пусть функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$. *Тогда однородное интегро-дифференциальное уравнение (3.4.2) имеет одно линейно-независимое решение, а неоднородное уравнение (3.4.1) всегда разрешимо и его общее решение из класса* $\tilde{C}'_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$ *даётся по формуле (3.4.12), где* $\Gamma_1^-(t,x)$ *– резольвента интегрального уравнения (3.4.9),* c_2^4 *– произвольная константа.*

II. Пусть в уравнении (3.4.3) $K(0,0) > 0$ и функция $G(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_2, 0)$, тогда согласно теореме 3.3.2 решение уравнения (3.4.3) даётся по формуле

$$z(x) = \int_x^1 \cos\left[\sqrt{K(0,0)} \ln\left(\frac{1-x}{x} \frac{t}{1-t}\right)\right] G(t) \frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_2^-[0,0,G(x)].$$

Подставляя вместо $G(t)$ его значение из равенства (3.4.4), далее перенося слагаемые с неизвестными функциями в левую часть, приходим к решению следующего уравнения

$$z(x) + \int_x^1 \cos\left[\sqrt{K(0,0)} \ln\left(\frac{x}{1-x} \frac{1-t}{t}\right)\right] \int_t^1 \frac{K(\tau,t) - K(0,0)}{\tau(1-\tau)} z(\tau) d\tau \frac{dt}{t(1-t)} =$$
$$= E_2^-[0,0,g(x)].$$

Меняя в этом равенстве порядок интегрирования и, совершая замену переменного по формуле $\tau = t$, приходим к решению уравнения

$$z(x)+\int_x^1 \frac{K_2^-(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt = E_2^-[\,0,0,g(x)], \qquad (3.4.13)$$

где

$$K_2^-(t,x)=\int_x^t \cos\left[\sqrt{K(0,0)}\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right][K(t,\tau)-K(0,0)]\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)}.$$

Из последнего равенства следует, что если разность $K(t,x)-K(0,0)$ удовлетворяет условию

$$K(t,x)-K(0,0)=o[(1-t)^{\varepsilon}(1-x)^{\varepsilon}], \varepsilon>0, \qquad (3.4.14)$$

то ядро $K_3^-(t,x)=\frac{K_2^-(t,x)}{t(1-t)}$ в точке $t=1$ имеет слабую особенность. Кроме того, если $g(x)\in \tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\mu_1,0\right)$, то интегральное уравнение (3.4.13) будет интегральным уравнением типа Вольтерра со слабой особенностью в ядре и с непрерывной правой частью, решение которого согласно общей теории выражается через резольвенту данного интегрального уравнения по формуле

$$z(x)=E_2^-[0,0,g(x)]-\int_x^1 \Gamma_2^-(t,x)E_2^-[0,0,g(t)]\frac{dt}{t(1-t)}\equiv T_2^-[f(x)]. \qquad (3.4.15)$$

Таким образом, доказана:

Теорема 3.4.2. *Пусть в уравнении (3.4.1) ядро* $K(t,x)\in \tilde{C}_{11}(\bar{R})$ *и разность* $K(t,x)-K(0,0)$ *удовлетворяет условию (3.4.14), причём,* $K(0,0)>0$. *Кроме того, пусть функция* $g(x)\in \tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\lambda_2,0\right)$. *Тогда однородное интегро-дифференциальное уравнение (3.4.2) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (3.4.1) всегда имеет единственное решение из класса* $\tilde{C}'_{11}\left(0,\vec{1};\lambda_2,0\right)$, *которое даётся по формуле (3.4.15), где* $\Gamma_2^-(t,x)$ *– резольвента интегрального уравнения (3.4.13).*

§3.5. Исследование особых интегро-дифференциальных уравнений с полным характеристическим уравнением

На Γ рассмотрим следующее особое интегро-дифференциальное уравнение

$$D_x^{11}y + Ay + \int_0^x \frac{\lambda}{t(1-t)} y(t)dt = f(x), \tag{3.5.1}$$

а на $\tilde{\Gamma}$ соответствующее ему сопряжённое уравнение

$$-D_x^{11}z + Az + \int_x^1 \frac{\lambda}{t(1-t)} z(t)dt = g(x). \tag{3.5.2}$$

Этим уравнениям соответствуют однородные уравнения

$$D_x^{11}y + Ay + \int_0^x \frac{\lambda}{t(1-t)} y(t)dt = 0 \tag{3.5.3}$$

и

$$-D_x^{11}z + Az + \int_x^1 \frac{\lambda}{t(1-t)} z(t)dt = 0. \tag{3.5.4}$$

При изучении интегральных уравнений одной из центральных задач является задача о наличии собственных значений и собственных функций для изучаемых уравнений [134], [168], [108], [173], [176], [178]. Для корректной постановки и исследования подобной задачи для изучаемых нами интегро-дифференциальных уравнений отправным пунктом для нас будет уравнение (3.5.1) и сопряжённое с ним уравнение (3.5.2), которому в отличие от уравнений (3.1.4) и (3.3.6), соответствуют полные характеристические уравнения.

Если в уравнении (3.5.1) λ считать параметром, то задачу о собственных значениях данного уравнения можно сформулировать следующим образом:

Задача А. *Найти те значения параметра λ, для которых однородное уравнение (3.5.3) имеет ненулевые решения.*

Если такие значения параметра λ существуют, то они образуют множество точек на прямой $O\lambda$, которые в дальнейшем будем называть собственными

точками уравнения (3.5.1). Ниже покажем, что в таком случае точки λ для сопряжённого уравнения (3.5.2) тоже будут собственными точками.

Для решения данной задачи поступим следующим образом: решение однородных уравнений (3.5.3) и (3.5.4) будем искать в виде $y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k$ и $z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^k$. Тогда, для определения k получим характеристическое уравнение

$$k^2 + Ak + \lambda = 0. \tag{3.5.5}$$

На основе корней характеристического уравнения (3.5.5) сразу можно выписать общее решение для обоих уравнений (3.5.3) и (3.5.4). Рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

I. Случай вещественно-разных корней. Пусть корни характеристического уравнения (3.5.5) являются вещественными и разными и $0 < k_1 < k_2$, тогда однородное уравнение (3.5.3) имеет два линейно независимых решения и его общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1^6 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k_1} + c_2^6 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k_2}.$$

В этом случае однородное уравнение (3.5.4) также имеет два линейно-независимых решения и его общее решение примет вид

$$z(x) = c_1^7 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{k_1} + c_2^7 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{k_2},$$

где $c_1^6, c_2^6, c_1^7, c_2^7$ – произвольные постоянные числа.

Отсюда те значения параметра λ, для которых выполняется неравенство $0 < k_1 < k_2$, составляют двукратные собственные точки уравнения (3.5.1). Эти же значения параметра λ в то же время составляют двукратные собственные точки и для сопряжённого уравнения (3.5.2). Очевидно, что существует континуум множества таких значений параметра λ, для которых выполняется неравенство $0 < k_1 < k_2$. Кроме того, это множество непрерывно заполняет бесконечную часть $O\lambda$ – прямой.

Если выполняется условие $k_1 < 0 < k_2$, тогда каждое однородное уравнение (3.5.3), (3.5.4) имеет по одному линейно - независимому решению и общее решение данных уравнений в этом случае примет вид

$$y(x) = c_2^6 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{k_2}$$

и

$$z(x) = c_2^7 \left(\frac{1-x}{x}\right)^{k_2}.$$

В случае выполнения неравенства $k_1 < 0 < k_2$, соответствующие значения параметра λ являются однократными собственными точками для уравнения (3.5.1) и для сопряжённого уравнения (3.5.2).

Если выполняется условие $k_1 < k_2 < 0$, тогда каждое из однородных уравнений (3.5.3) и (3.5.4, кроме нулевого решения, других решений не имеют.

Далее, на основе результатов §3.1. и §3.3., если решение неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) существуют, тогда они соответственно представимы в виде

$$y_{\text{чн}} = \int_0^x \left[k_1 N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{k_1} + k_2 N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{k_2}\right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \tag{3.5.7}$$

и

$$z_{\text{чн}} = \int_x^1 \left[k_1 N_1^1 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{k_1} + k_2 N_2^1 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{k_2}\right] g(t) \frac{dt}{t(1-t)}. \tag{3.5.8}$$

Далее, если обозначить

$$\Gamma(x,t) = k_1 N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{k_1} + k_2 N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{k_2}, \tag{3.5.9}$$

тогда частное решение неоднородных уравнений (3.5.1), (3.5.2) можно записать в виде

$$y_{\text{чн}} = \int_0^x \Gamma(x,t)\, f(t) \frac{dt}{t(1-t)}$$

и

$$z_{\text{чн}} = \int_x^1 \Gamma(t,x)\, g(t) \frac{dt}{t(1-t)}.$$

Пусть выполняется условие $k_1 < k_2 < 0$, тогда интегралы в правой части (3.5.7) для любой функции $f(x)$ из класса $C_{11}(0,1)$ существуют и решение неоднородного уравнения (3.5.1) однозначно определяется по формуле (3.5.7). В этом случае, для любой функции $g(x)$ из класса $\tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$ решение неоднородного сопряжённого уравнения (3.5.2) также существует и его единственное решение определяется по формуле (3.5.8).

В случае $0 < k_1 < k_2$ или $k_1 < 0 < k_2$ неоднородное уравнение (3.5.1) вообще говоря, не разрешимо. В этих случаях для разрешимости неоднородного уравнения (3.5.1) необходимо выполнение условий

$$\int_0^1 f(x)\, z_i(x) \frac{dx}{x(1-x)} = 0, i = 1,2, \qquad (3.5.11)$$

где $z_i(x), (i = 1,2)$ линейно независимые решения однородного сопряжённого уравнения (3.5.4). Достаточным условием разрешимости неоднородного уравнения (3.5.1) при этом будет условие принадлежности функции $f(x)$ классу $C_{11}(\vec{0}, 1; k_2, 0)$.

Условия (3.5.11) называют условиями ортогональности функции $f(x)$ ко всем решениям однородного сопряжённого уравнения (3.5.4).

Ясно, что условие (3.5.11) эквивалентно условию

$$\int_0^1 f(x)\, z(x) \frac{dx}{x(1-x)} = 0, \qquad (3.5.12)$$

где $z(x)$ – любое решение уравнения (3.5.4).

В дальнейшем, мы данные условия различать не будем.

Для доказательства условия необходимости вышеприведённого утверждения поступим следующим образом:

Пусть $y(x)$ – решение уравнения (3.5.1) и $z(x)$ – любое решение однородного сопряжённого уравнения (3.5.4).

Умножим тождество (3.5.1) на $z(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1, тогда

$$\int_0^1 z(x)D_x^{11}y(x)\frac{dx}{x(1-x)} + A\int_0^1 y(x)z(x)\frac{dx}{x(1-x)} +$$

$$+\int_0^1 z(x)\left[\int_0^x \frac{\lambda}{t(1-t)}y(t)dt\right]\frac{dx}{x(1-x)} = \int_0^1 f(x)z\,(x)\frac{dx}{x(1-x)}.$$

В левой части, меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_0^1 f(x)z\,(x)\frac{dx}{x(1-x)} = y(x)z(x)|_0^1 - \int_0^1 y(x)D_x^{11}z(x)\frac{dx}{x(1-x)} +$$

$$+A\int_0^1 y(x)z(x)\frac{dx}{x(1-x)} + \int_0^1 y(t)\left[\int_t^1 \frac{\lambda}{x(1-x)}z(x)dx\right]\frac{dt}{t(1-t)} =$$

$$= y(x)z(x)|_0^1 + \int_0^1 y(x)\left[-D_x^{11}z(x) + Az(x) + \int_x^1 \frac{\lambda}{t(1-t)}z(t)dt\right]\frac{dx}{x(1-x)} = 0$$

так как выражение в квадратных скобках обращается в нуль, в силу того, что $z(x)$ – решение уравнения (3.5.4); слагаемое $y(x)z(x)|_0^1$ также обращается в нуль в силу того, что $z(x)$ и $y(x)$ соответственно в точках $x = 1$и $x = 0$ обращаются в нуль.

Итак, условие (3.5.12) выполняется для любого решения $z(x)$ однородного сопряжённого уравнения (3.5.4).

Для доказательства условия достаточности разрешимости неоднородного уравнения (3.5.1) отметим только, что, если $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; k_2, 0)$, то интеграл в правой части (3.5.7) существует и этой формулой выражается решение неоднородного уравнения (3.5.1).

II. Случай вещественно–равных корней. Пусть корни характеристического уравнения (3.5.5) являются вещественными и равными и $k_1 = k_2 = k = -\frac{A}{2}$. Тогда, если $k > 0$, то однородное уравнение (3.5.3) имеет два линейно- независимых решения и его общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1^8 \left(\frac{x}{1-x}\right)^k + c_2^8 \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

В этом случае однородное уравнение (3.5.4) также имеет два линейно-независимых решения и его общее решение примет вид

$$z(x) = c_1^9 \left(\frac{1-x}{x}\right)^k + c_2^9 \left(\frac{1-x}{x}\right)^k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right),$$

где$c_1^8, c_2^8, c_1^9, c_2^9$ – произвольные постоянные числа.

Если $k < 0$, тогда однородное уравнение (3.5.3) и сопряжённое с ним однородное уравнение (3.5.4), кроме нулевого решения других решений не имеют.

В случае вещественно-равных корней характеристического уравнения (3.5.5), поступая как в параграфах §3.1. и §3.3., с учётом теоремы 3.6.2. решение неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) находим в виде

$$y_{\text{чн}} = \int_0^x \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^k \left[k \ln\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + 1\right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \tag{3.5.13}$$

и

$$z_{\text{чн}} = \int_x^1 \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^k \left[k \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right) + 1\right] g(t) \frac{dt}{t(1-t)}. \tag{3.5.14}$$

Если $k < 0$, тогда интегралы в правых частях (3.5.13) и (3.5.14) для любой функции $f(x)$ из класса $C_{11}(\Gamma)$ и $g(x)$ из класса $\tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$ существуют и решение неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) однозначно определяются по формулам (3.5.13) и (3.5.14).

В случае $k > 0$ неоднородные уравнения (3.5.1) и (3.5.2), вообще говоря, не разрешимы. В этом случае для разрешимости неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) необходимо выполнение условий

$$\int_0^1 f(x)\, z_i(x) \frac{dx}{x(1-x)} = 0, i = 1,2, \qquad (3.5.15)$$

и соответственно

$$\int_0^1 g(x)\, y_i(x) \frac{dx}{x(1-x)} = 0, i = 1,2, \qquad (3.5.16)$$

где $z_i(x), (i = 1,2)$ линейно- независимые решения однородного сопряжённого уравнения (3.5.4), а $y_i(x)$линейно- независимые решения однородного уравнения (3.5.3). В этом случае достаточными условиями разрешимости неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) будут условия принадлежности функции $f(x)$ классу $C_{11}(\vec{0}, 1; k, 0)$, а функции $g(x)$ классу $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; k, 0)$.

III. Случай комплексно-сопряжённых корней. Пусть корни характеристического уравнения (3.5.5) являются комплексно- сопряжёнными и $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = -\frac{A}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4\lambda - A^2}}{2}$. Тогда, если $\alpha > 0$, то однородное уравнение (3.5.3) имеет два линейно независимых решения и его общее решение имеет вид

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} \left[c_1^8 \cos\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^8 \sin\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right].$$

В этом случае, однородное уравнение (3.5.4) также имеет два линейно-независимых решения и его общее решение примет вид

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha} \left[c_1^9 \cos\left[\beta \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_2^9 \sin\left[\beta \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right].$$

В случае $\alpha < 0$ однородное уравнение (3.5.3) и сопряжённое с ним однородное уравнение (3.5.4), кроме нулевого решения, других решений не имеют.

Когда корни характеристических уравнений (3.5.5) и (3.5.6) являются комплексно–сопряжёнными, решение неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) с учётом §3.1., §3.3. и теоремы 2.6.3, находим в виде

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{\beta}\int_0^x \left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha} \cos\left[\beta \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \quad (3.5.17)$$

и

$$z_{\text{чн}} = \frac{1}{\beta}\int_x^1 \left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha} \cos\left[\beta \ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right] g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (3.5.18)$$

Если $\alpha < 0$, тогда интегралы в правых частях (3.5.17) и (3.5.18) для любой функции $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$ и $g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$ существуют и решение неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) однозначно определяются по формулам (3.5.17) и (3.5.18).

В случае $\alpha > 0$, для разрешимости неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2), как в предыдущих случаях, необходимо выполнение условий ортогональности (3.5.11) и (3.5.12), где $z_i(x)$, $y_i(x)$ $(i = 1,2)$ соответственно являются линейно - независимыми решениями однородных уравнений (3.5.4) и (3.5.3) в случае комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения (3.5.5) и (3.5.6). В этом случае достаточным условием разрешимости неоднородных уравнений (3.5.1) и (3.5.2) будет условие принадлежности функции $f(x)$ классу $C_{11}(\vec{0}, 1; \alpha, 0)$, а функции $g(x)$ классу $\tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \alpha, 0)$

Из вышеприведённых рассуждений следует, что, когда

1. $0 < k_1 < k_2$ в случае вещественно разных корней;
2. $k = -\frac{A}{2} > 0$ в случае вещественно равных корней;
3. $\alpha = -\frac{A}{2} > 0$ в случае комплексно сопряжённых корней;

точки λ одновременно является собственной точки кратности два для уравнения (3.5.1) и сопряжённого уравнения (2.5.2). Те точки λ, для которых выполняется

условие $k_1 < 0 < k_2$, являются собственными значениями кратности один для уравнения (3.5.1) и сопряжённого уравнения (3.5.2).

Заметим, что, когда для изучаемого уравнения ставится задача о наличия собственных значений и собственных функций, тогда нужно будет сформулировать аналог теоремы Фредгольма для этой задачи.

С этой целью, подытоживая вышеприведённые результаты, можно построить аналог теоремы Фредгольма для уравнения (3.5.1), (3.5.2) следующим образом.

Теорема 3.5.1. *Если точка λ не является собственной точкой уравнения (3.5.1), то как данное интегро-дифференциальное уравнение (3.5.1), так и сопряжённое с ним уравнение (3.5.2), однозначно разрешимы при любом свободном члене $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$ и $g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$. Соответствующие однородные уравнения имеют при этом только тривиальные решения.*

Теорема 3.5.2. *Если точка λ является собственной точкой уравнения (3.5.1), то однородное интегро-дифференциальное уравнение (3.5.3) также, как и сопряжённое с ним однородное уравнение (3.5.4), имеют нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегро-дифференциального уравнения (3.5.3) конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряжённого уравнения (3.5.4).*

Теорема 3.5.3. *Для того, чтобы неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (3.5.1) было разрешимо, необходимо, чтобы его свободный член $f(x)$ был ортогонален ко всем решениям соответствующего однородного сопряжённого уравнения (3.5.4) и достаточно, чтобы функция $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; k_2, 0)$.*

Теорема 3.5.4. *Особое интегро-дифференциальное уравнение (3.5.1) имеет континуум множества собственных точек.*

Часто эти теоремы формулируются в эквивалентной форме таким образом:

Теорема 3.5.5. *Для интегро-дифференциального уравнения (3.5.1) представляются две взаимоисключающие возможности:*

1. Если λ не является собственной точкой уравнения (3.5.1), то уравнения (3.5.1) и (3.5.2) имеют только по одному решению при любых функциях $f(x) \in C_{11}(0,1)$ и $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0,1)$. Соответствующие однородные уравнения (3.5.3) и (3.5.4) имеют только нулевые (тривиальные) решения.

Если λ является собственной точкой уравнения (3.5.1), тогда уравнение (3.5.1) разрешимо в том и только в том случае, когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем решениям соответствующего однородного сопряжённого уравнения (3.5.4) и $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; k_2, 0)$. При этом уравнения (3.5.3) и (3.5.4) имеют одинаковое и, притом, конечное число линейно- независимых решений и общее решение уравнения (3.5.1) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (3.5.3) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (3.5.1).

Аналог об альтернативе Фредгольма можно сформулировать в более короткой, но эквивалентной форме:

Теорема 3.5.6. *Если однородное интегро-дифференциальное уравнение (3.5.3) имеет только тривиальное решение, то соответствующее неоднородное уравнение (3.5.1) всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородное уравнение (3.5.3) имеет нетривиальные решения, то неоднородное уравнение (3.5.1) в зависимости от свободного члена $f(x)$ либо вовсе не имеет решения, либо имеет бесконечное число решений.*

Из вышеприведенных рассуждений следует, что первые три теоремы с точностью совпадают с теоремами Фредгольма для интегральных уравнений.

Существенное отличие наблюдается в четвёртой теореме. Действительно, в отличие от уравнения Фредгольма, которое имеет не более счётного множества характеристических чисел, интегро-дифференциальное уравнение (3.5.1) имеет континуум множества собственных чисел, непрерывно заполняющих бесконечную часть λ прямой.

Другое отличие уравнения (3.5.1) от уравнения типа Фредгольма в том, что для уравнения (3.5.1) необходимо вводить понятие точки бифуркации двух родов.

Определение 3.5.1. *Точка λ прямой $O\lambda$ называется точкой бифуркации первого рода для уравнения (3.5.1), если при переходе через него число собственных функций уравнения меняется, оставаясь, однако, конечным.*

Определение 3.5.2. *Точка λ прямой $O\lambda$ называется точкой бифуркации второго рода для уравнения (3.5.1), если при переходе через неё структура собственных функций уравнения меняется.*

Для уравнения Фредгольма с особыми ядрами наличие точки бифуркации первого рода показано в классической литературе [314]. В отличие от этого, для особого уравнения (3.5.1) существует бесконечная линия бифуркации первого рода на прямой $O\lambda$. Действительно, в $OA\lambda$– плоскости для характеристического уравнения (3.5.5), в случае $D > 0$ при переходе от верхней части линии $\lambda = 0, A < 0$ к её нижней, условие $0 < k_1 < k_2$ меняется на $k_1 < 0 < k_2$, поэтому число собственных функций однородного уравнения (3.5.3) уменьшается на единицу.

Для показа наличия линии бифуркации второго рода для уравнения (3.5.1) отметим, что в области $\lambda < \frac{A^2}{4}, A < 0$ собственные функции однородного уравнения (3.5.3) имеют гиперболическую структуру, в точке линии $\lambda = \frac{A^2}{4}, A < 0$ имеют параболическую структуру, а в точке области $\lambda > \frac{A^2}{4}, A < 0$ имеют эллиптическую структуру. Поэтому линию $\lambda = \frac{A^2}{4}, A < 0$ можно называть линией бифуркации второго рода для уравнения (3.5.1).

Выводы по главе 3

Изучен вопрос о разрешимости интегро-дифференциального уравнения первого порядка с особым ядром и с двухточечным особым дифференциальным оператором первого порядка. Использован метод регуляризации для исследования немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка.

Построено общее решение сопряжённого модельного и немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с особым ядром. Для

исследования немодельного сопряжённого уравнения применён метод регуляризации немодельных уравнений.

Далее, исследовано особое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с полным характеристическим уравнением и сопряжённое с ним уравнение.

Построен аналог теоремы Фредгольма для интегро-дифференциального уравнения первого порядка с особым ядром и сопряжённого с ним уравнения.

Выявлено, что первые три сформулированные теоремы совпадают с теоремами Фредгольма, а четвёртая теорема утверждает о наличии множества мощности континуума собственных чисел для исследуемых классов уравнений.

ГЛАВА 4
ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

Четвёртая глава посвящена исследованию одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с логарифмической особенностью в их ядрах. Глава состоит из четырёх параграфов. Первый параграф посвящён исследованию интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью порядка $n-1$ в ядре. О разрешимости данного класса уравнений доказаны основные теоремы 4.1.2.-4.1.4.

Во втором параграфе четвёртой главы исследуется сопряженное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с сопряженным логарифмическим ядром.

Далее, в третьем параграфе данной главы исследуется одномерное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки. В отличие от предыдущих результатов об однозначной разрешимости этого класса уравнений доказана теорема 4.3.1.

В четвертом параграфе четвёртой главы исследуется сопряженное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки. В этом параграфе, поскольку однородное сопряженное уравнение имеет нетривиальные решения, возникает вопрос о наличии спектра для сопряженного интегро-дифференциального типа сложной свёртки. О решении вышеназванной задачи построен аналог теоремы Фредгольма в виде теорем 4.4.4.-4.4.7.

Основной результат данной главы состоит в построении аналог теоремы Фредгольма для интегро-дифференциальных уравнений с логарифмическим ядром.

§4.1. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с логарифмической особенностью в ядре

Пусть $\Gamma = \{x: 0 \leq x < 1\}$ множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим следующее особое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$D_x^{11} y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t) dt = f(x), \qquad (4.1.1)$$

где $f(x) \in C_{11}(\Gamma), K(x,t)$ - заданная функция в квадрате $R = \{(x,t): 0 \leq x < 1, 0 < t < 1\}$, которая имеет логарифмическую особенность следующего вида:

$$K(x,t) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right). \quad (4.1.2)$$

Решение уравнения (4.1.1) будем искать в классе функций $y(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0), (\varepsilon > 0)$, для которых $D_x^{11} y \in C_{11}(\Gamma)$.

Исследование интегральных уравнений с логарифмическим и степенно-логарифмическим ядром было предметом изучения многих авторов [77], [189], [192], [195], [284], [294]. В частности, в работах Н.Раджабова [48], [260] подробно были исследованы интегральные уравнения с логарифмическим ядром. В диссертационной работе С.А.Саидова [294] было изучено интегральное уравнение с логарифмической особенностью первой степени. Также в работах Л.Раджабовой [284] и её учеников получены интегральные представления многообразия решений для двумерных интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядре. В работах автора [14-А], [23-А], [25-А], [27-А], [40-А], [47-А] были исследованы интегро-дифференциальные уравнения с логарифмической особенностью в ядре.

Для исследования уравнения (4.1.1) нам необходима следующая

Лемма 4.1.1. *Для ядра $K(x,t)$, имеющего вид (4.1.2), имеет место следующее равенство:*

$$(D_x^{11})^{n-1} K(x,t) = (n-1)!\, A_n.$$

Доказательство: Для доказательства леммы, прежде всего, заметим, что действия оператора D_x^{11} к логарифмической функции $\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)$ даёт единицу. Действительно,

$$D_x^{11}\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)=x(1-x)\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)'_x=1.$$

Отсюда, последовательно действуя операторомD_x^{11} на ядро $K(x,t)$, получим

$$D_x^{11}K(x,t)=A_2+2A_3\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)+\cdots+(n-1)A_n\ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right),$$

$$(D_x^{11})^2K(x,t)=2!\,A_3+3\cdot 2A_4\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)+\cdots$$

$$+(n-1)(n-2)A_n\ln^{n-3}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(D_x^{11})^{n-1}K(x,t)=(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1A_n=(n-1)!\,A_n.$$

Итак, лемма 4.1.1. доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4.1.1. *Если в интегро-дифференциальном уравнении (4.1.1) неизвестная функция $y(x)$ и правая часть$f(x)$ соответственно $n+1$ и n раз D_x^{11} –дифференцируемы, то решение уравнения (4.1.1) эквивалентно решению операторно-дифференциального уравнения $n+1$ – го порядка вида*

$$(D_x^{11})^{n+1}y+A_0(D_x^{11})^n y+\cdots+(n-1)!\,A_n y=(D_x^{11})^n f(x). \qquad (4.1.3)$$

Эквивалентность решения уравнений (4.1.1) и (4.1.3) является односторонней, т.е. все решения уравнения (4.1.1) могут быть решениями уравнения (4.1.3), но обратное утверждение неверно, т.е. не всегда все решения уравнения (4.1.3) в то же время будут решениями уравнения (4.1.1).

Доказательство: Сначала докажем первую часть теоремы. Предположим, что условия теоремы выполняются, т.е. функция $y(x)$ и правая часть $f(x)$ соответственно $n+1$ и n раз D_x^{11}-дифференцируемы. Тогда к обеим сторонам уравнения (4.1.1) действуя оператором D_x^{11} n раз с учётом леммы 4.1.1. получим:

$$(D_x^{11})^2 y + A_0 D_x^{11} y + A_1 y + \int_0^x \left[A_2 + 2A_3 \ln\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. +(n-1)A_n \ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)\right] \frac{y(t)}{t(1-t)} dt = D_x^{11} f(x),$$

$$(D_x^{11})^3 y + A_0 (D_x^{11})^2 y + A_1 D_x^{11} y + 1!\, A_2 y +$$

$$+ \int_0^x \left[2!\, A_3 + 3 \cdot 2A_4 \ln\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + \cdots \right.$$

$$\left. +(n-1)(n-2)A_n \ln^{n-3}\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)\right] \frac{y(t)}{t(1-t)} dt = (D_x^{11})^2 f(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(D_x^{11})^{n+1} y + A_0 (D_x^{11})^n y + \cdots + (n-1)!\, A_n y = (D_x^{11})^n f(x).$$

Отсюда видно, что если решение уравнения (4.1.1) $y(x)$ $n+1$ раз D_x^{11} дифференцируемо и его правая часть также n раз D_x^{11}дифференцируема, а также, поскольку уравнение (4.1.3) получено из уравнения (4.1.1) операциями $n+1$ раз D_x^{11} дифференцирования, тогда решение $y(x)$ уравнения (4.1.1) в тоже время будет и решением уравнения (4.1.3).

Таким образом, доказана первая часть теоремы 4.1.1. К доказательству второй части теоремы вернёмся позднее после получения решения уравнения (4.1.1).

Для исследования неоднородного уравнения (4.1.3) сначала решаем соответствующее однородное уравнение

$$(D_x^{11})^{n+1} y + A_0 (D_x^{11})^n y + \cdots + (n-1)!\, A_n y = 0. \qquad (4.1.4)$$

Решение уравнения (4.1.4), как в главе 2, будем искать в виде

$$y(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}. \qquad (4.1.5)$$

Тогда, для определенияλ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^{n+1} + A_0 \lambda^n + 0!\, A_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (n-1)!\, A_n = 0. \qquad (4.1.6)$$

Заметим, что если решение однородного уравнения

$$D_x^{11}y + A_0 y + \int\limits_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = 0, \qquad (4.1.7)$$

будем искать в виде (4.1.5), тогда для определения λ получим характеристическое уравнение

$$\lambda + A_0 + \frac{A_1}{\lambda} + \frac{1!\,A_2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{\lambda^n} = 0,$$

которое легко приводится к виду (4.1.6), только с тем ограничением, что λ строго должно удовлетворять условию $\lambda > 0$. Это и есть условие того, что функция вида (4.1.5) принадлежит классу $C_{11}(\vec{0}, 1, \varepsilon, 0)$.

С другой стороны, условие $\lambda > 0$ будет достаточным условием того, что решение однородного операторно-дифференциального уравнения (4.1.4), которое имеет вид (4.1.5), будет и решением однородного интегро-дифференциального уравнения (4.1.7). В дальнейшем частные решения однородного уравнения (4.1.7) будем называть собственными функциями данного уравнения.

Теперь, в зависимости от корней характеристического уравнения (4.1.6), постараемся получить общее решение неоднородного уравнения (4.1.3) и соответственно (4.1.1).

I. Случай вещественно - разных корней. Пусть все корни характеристического уравнения (4.1.6) являются вещественными и разными, которые обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ и они упорядочены по мере их возрастания т.е.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения (4.1.4) имеет вид

$$y_{\text{оо}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1} c_1^1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2} c_2^1 + \cdots + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_{n+1}} c_{n+1}^1 \ , \qquad (4.1.8)$$

а частное решение неоднородного уравнения (4.1.3), согласно теореме 1.6.1, имеет вид

$$y_{\text{чн}} = \int\limits_{x_0}^x \left[N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1} + N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2} + \cdots + \right.$$

$$+N_{n+1}^1\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_{n+1}}\Bigg](D_t^{11})^n f(t)\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (4.1.9)$$

где коэффициенты $N_1^1, N_2^1, \dots, N_n^1$ определяются из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^1+N_2^1+\dots+N_{n+1}^1=0, \\ \lambda_1 N_1^1+\lambda_2 N_2^1+\dots+\lambda_{n+1}N_{n+1}^1=0, \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ \lambda_1^{n-1}N_1^1+\lambda_2^{n-1}N_2^1+\dots+\lambda_{n+1}^{n-1}N_{n+1}^1=0, \\ \lambda_1^n N_1^1+\lambda_2^n N_2^1+\dots+\lambda_{n+1}^n N_{n+1}^1=1. \end{cases} \qquad (4.1.10)$$

В (4.1.9), интегрируя n раз по частям и, формально считая все интегральные слагаемые, а также нижний предел интегрирования, равными нулю, получим

$$y_{\text{чн}}=\int_0^x\Bigg[N_1^1\lambda_1^n\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_1}+N_2^1\lambda_2^n\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_2}+\dots+$$

$$+N_{n+1}^1\lambda_{n+1}^n\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{\lambda_{n+1}}\Bigg]f(t)\frac{dt}{t(1-t)}\equiv E_1^+[f(x)]. \qquad (4.1.11)$$

В случае $\lambda_{n+1}>0$, для сходимости интегралов в (4.1.11) в (4.1.11) требуем, чтобы функция $f(x)\in C_{11}(\vec{0},1,\lambda_{n+1},0)$.

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что (4.1.11) будет в то же время и частным решением неоднородного уравнения (4.1.1).

Осталось показать, при каких значениях $\lambda_i(i=\overline{1,n+1})$ общее решение однородного уравнения (4.1.4) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.1.7). Выделяем следующие случаи

1) Пусть

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_{n+1}, \qquad (4.1.12)$$

тогда легко можно показать, что для любой $c_i^1(i=\overline{1,n+1})$ общее решение (4.1.8) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.1.7). В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) имеет вид

$$y_{\text{он}}(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1}c_1^1+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2}c_2^1+\dots+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_{n+1}}c_{n+1}^1+E_1^+[f(x)].$$

(4.1.13)

2) Пусть

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{k-1} < 0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots < \lambda_{n+1}, \quad (4.1.14)$$

тогда собственные функции, соответствующие корням $\lambda_j\left(j = \overline{1, k-1}\right)$, не принадлежат классу $C_{11}\left(\vec{0}, 1, \varepsilon, 0\right)$. Отбрасывая данные решения или же, аннулируя их за счёт произвольных постоянных$c_j^1\left(j = \overline{1, k-1}\right)$, общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) получим в виде

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_k} c_k^1 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_{k+1}} c_{k+1}^1 + \cdots + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_{n+1}} c_{n+1}^1 + E_1^+[f(x)]. \quad (4.1.15)$$

3) Пусть

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0, \quad (4.1.16)$$

тогда однородное уравнение (4.1.7), кроме нулевого решения, других решений не имеет. В этом случае неоднородное уравнение (4.1.1) имеет только единственное решение вида

$$y_{\text{он}}(x) = E_1^+[f(x)]. \quad (4.1.17)$$

Таким образом, подытоживая вышеприведённые рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.1.2. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (4.1.1) с ядром вида (4.1.2) коэффициенты* $A_0, A_1, \dots, A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.1.6) являются вещественными и разными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_{11}(0,1)$, *а в случае* $\lambda_{n+1} > 0$ $f(x) \in C_{11}\left(\vec{0}, 1, \lambda_{n+1}, 0\right)$. *Тогда при выполнении условий (4.1.12), (4.1.14) и (4.1.16) общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) из класса* $C_{11}'(0,1)$ *задаётся соответственно по формулам (4.1.13), (4.1.15) и (4.1.17).*

II. Случай вещественно - равных корней. Пусть все корни характеристического уравнения (4.1.6) являются вещественными и равными и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{n+1} = \lambda$. В этом случае легко можно показать, что общее решение однородного уравнения (4.1.4) имеет вид

$$y_{\text{оо}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} c_1^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) c_2^2 + \cdots$$

$$+ \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right) c_{n+1}^2. \qquad (4.1.18)$$

Согласно теореме 2.6.2, частное решение неоднородного уравнения (4.1.3) примет вид

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda} \ln^n\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) (D_t^{11})^n f(t) \frac{dt}{t(1-t)}. \quad (4.1.19)$$

Подобно случаю I., интегрируя по частям в (4.1.19) n раз и, формально считая все интегральные слагаемые, а также нижний предел интегрирования, равными нулю, получим

$$y_{\text{чн}} = \frac{1}{n!}\int_{0}^{x} \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{\lambda} \left[\lambda^n \ln^n\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + \right.$$

$$+ C_n^1 \lambda^{n-1} n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + C_n^2 \lambda^{n-2} n(n-1) \ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + \cdots$$

$$\left. + C_n^{n-1} \lambda n(n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + n!\right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)} \equiv$$

$$\equiv E_2^{+}[f(x)]. \qquad (4.1.20)$$

Для сходимости интегралов, в случае $\lambda > 0$, требуем, чтобы функция $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1, \lambda, 0)$.

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что (4.1.20) будет в то же время и частным решением неоднородного уравнения (4.1.1).

Теперь покажем, при каких значениях λ общее решение однородного уравнения (4.1.4) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.1.7). Имеют место следующие случаи

1) Пусть

$$\lambda > 0, \qquad (4.1.21)$$

тогда для любой $c_i^2 (i = \overline{1, n+1})$, общее решение (4.1.18) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.1.7). В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) имеет вид

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} c_1^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) c_2^2 + \cdots$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right) c_{n+1}^2 + E_2^+[f(x)]. \qquad (4.1.22)$$

2) Пусть

$$\lambda < 0, \qquad (4.1.23)$$

тогда ни одно из частных решений вида

$$y_1 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda}, y_2 = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \cdots, y_{n+1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda} \ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

не принадлежит классу $C_{11}(\vec{0}, 1, \varepsilon, 0)$. Отсюда однородное уравнение (4.1.7), кроме нулевого решения. других решений не имеет. В этом случае неоднородное уравнение (4.1.1) имеет только единственное решение

$$y_{\text{он}}(x) = E_2^+[f(x)]. \qquad (4.1.24)$$

Таким образом, подытоживая вышеприведённые рассуждения, приходим к следующему утверждению:

Теорема 4.1.3. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (4.1.1) с ядром вида (4.1.2) коэффициенты* $A_0, A_1, \dots, A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.1.6) являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_{11}(0,1)$, *в случае* $\lambda > 0 f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1, \lambda, 0)$. *Тогда, при выполнении условий (4.1.21), и (4.1.23). общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) из класса* $C'_{11}(0,1)$ *задаётся соответственно по формулам (4.1.22), и (4.1.24).*

III. Случай комплексно-сопряжённых корней. Пусть в характеристическом уравнении (4.1.6) $n + 1 = 2k$– чётное число и все корни данного уравнения являются комплексно-сопряжёнными, которые обозначим через $\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, \lambda_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm i\beta_k$. Ради определённости предположим, что действительные части данных корней упорядочены по мере их возрастания, т.е.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k.$$

Тогда. общее решение однородного уравнения (4.1.4) имеет вид:

$$y_{\text{оо}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^3\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right], \quad (4.1.25)$$

а частное решение неоднородного уравнения (4.1.3). согласно теореме 2.6.3, имеет вид

$$y_{\text{чн}}(x) =$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1}\begin{bmatrix} N_1^3 cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] + \\ N_2^3 sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\end{bmatrix} + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k} \begin{matrix} N_{2k-1}^3 cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] + \\ N_{2k}^3 sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\end{matrix}\right\} \times$$

$$\times \left(D_t^{11}\right)^{2k-1} f(t)\,\frac{dt}{t(1-t)}\,. \quad (4.1.26)$$

где коэффициенты $N_i^3\left(i = \overline{1,2k}\right)$ определяются из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^3\cdot 1 + N_2^3\cdot 0 + \cdots + N_{2k-1}^3\cdot 1 + N_{2k}^3\cdot 0 = 0, \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,1}N_1^3 + \Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,1}N_2^3 + \cdots + \Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,1}N_{2k-1}^3 + \Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,1}N_{2k}^3 = 0, \\ - \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}N_1^3 + \Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,2k-1}N_2^3 + \cdots + \Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}N_{2k-1}^3 + \Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,2k-1}N_{2k}^3 = 1, \end{cases} \quad (4.1.27)$$

где

$$\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{+,1} = \Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{+,1}\{1,0\}, \qquad \Lambda_{\beta_i\alpha_i}^{-,1} = \Lambda_{\beta_i\alpha_i}^{-,1}\{1,0\}\ \left(i = \overline{1,k}\right)$$

и

$$\begin{cases} \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1} = \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{a,b\} = \alpha a - \beta b, \\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1} = \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\{a,b\} = \beta a + \alpha b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda_{\alpha\beta}^{+,k} = \Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}, \Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\} = \alpha\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1} - \beta\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}, \\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,k} = \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}, \Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\} = \beta\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1} + \alpha\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}. \end{cases}$$

В решении (4.1.26) интегрируя по частям $2k-1$ раз ,далее формально считая все интегральные слагаемые, а также нижний предел интегрирования, равными нулю, получим

$$y_{\text{чн}}(x) =$$

$$+\int_0^x \left\{ \left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1} \begin{bmatrix} \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}\{N_1^3, N_2^3\} cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] + \\ +\Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{-,2k-1}\{N_1^3, N_2^3\} sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] \end{bmatrix} + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k} \begin{bmatrix} \Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}\{N_{2k-1}^3, N_{2k}^3\} cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] + \\ +\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{-,2k-1}\{N_{2k-1}^3, N_{2k}^3\} sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right] \end{bmatrix} \right\} \times$$

$$\times f(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_3^+[f(x)]\,. \qquad (4.1.28)$$

Здесь в случае $\alpha_k > 0$ для сходимости интегралов требуем, чтобы функция $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1, \alpha_k, 0)$.

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что (4.1.28) будет в то же время и частным решением неоднородного уравнения (4.1.1).

Выясним, при каких значениях $\alpha_i\left(i = \overline{1,k}\right)$ общее решение однородного уравнения (4.1.4) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.1.7). Выделяем следующие случаи:

1) Пусть

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \qquad (4.1.29)$$

тогда легко можно показать, что для любой $c_j^3\left(j = \overline{1,2k}\right)$, общее решение (4.1.25) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.1.7). В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) имеет вид

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_2^3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^3\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] +$$

$$+E_3^+[f(x)]. \qquad (4.1.30)$$

2) Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{l-1} < 0 < \alpha_l < \alpha_{l+1} < \cdots < \alpha_k, \qquad (4.1.31)$$

тогда собственные функции, соответствующие корням $\alpha_j\left(j = \overline{1, l-1}\right)$, не принадлежат классу $C_{11}\left(\vec{0}, 1, \varepsilon, 0\right)$. Отбрасывая эти чужие решения, общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) получим в виде

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_l}\left[c_{2l-1}^3\cos\left[\beta_l \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2l}^3\sin\left[\beta_l \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots +$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2k}^3\sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] +$$

$$+E_3^+[f(x)]. \qquad (4.1.32)$$

3) Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 0, \qquad (4.1.33)$$

тогда поскольку ни одна из функций вида

$$y_i = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_i}\left[c_{2i-1}^3\cos\left[\beta_i \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + c_{2i}^3\sin\left[\beta_i \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right]$$

не принадлежит классу $C_{11}\left(\vec{0}, 1, \varepsilon, 0\right)$, поэтому однородное уравнение (4.1.7), кроме нулевого решения других линейно- независимых решений. не имеет. В этом случае неоднородное уравнение (4.1.1) для любой функции $f(x) \in C_{11}(0,1)$ имеет только единственное решение вида

$$y_{\text{он}}(x) = E_3^+[f(x)]. \qquad (4.1.34)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1.4. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (3.1.1) с ядром вида (4.1.2) коэффициенты* $A_0, A_1, \dots, A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.1.6), являются комплексно-сопряжёнными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$, *а в случае* $\alpha_k > 0, f(x) \in C_{11}\left(\vec{0}, 1, \alpha_k, 0\right)$. *Тогда, при выполнении условий (4.1.29), (4.1.31) и (4.1.33), общее решение неоднородного уравнения (4.1.1) из класса* $C_{11}'(\Gamma)$ *выражается соответственно равенствами (4.1.30), (4.1.32) и (4.1.34).*

Замечание 4.1.1. *Утверждения, подобные утверждению теоремы 4.1.4., легко можно построить и в других возможных случаях корней характеристического уравнения (4.1.6).*

§4.2. Исследование сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре

Как было отмечено во второй главе, изучение уравнений, сопряжённых с данным уравнением является с одной стороны актуальным, с другой стороны даёт возможность одновременно изучать два типа уравнений. Иногда, даже не решая одно из уравнений, мы можем получить информацию об общей структуре его решений, о числе собственных функций однородного уравнения, о разрешимости неоднородного уравнения и т.д. Исходя из этого, в настоящей главе займёмся исследованием сопряжённого уравнения с логарифмическим ядром.

Пусть $\tilde{\Gamma} = \{x: 0 < x \leq 1\}$ множество точек на вещественной оси. На $\tilde{\Gamma}$ рассмотрим следующее сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x), \qquad (4.2.1)$$

где $g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma}), K(t,x)$ заданная функция в квадрате $R = \{(t,x): 0 < t \leq 1, 0 < x \leq 1\}$, которая имеет логарифмические особенности вида

$$K(t,x) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right). \qquad (4.2.2)$$

Решение уравнения (4.2.1) будем искать в классе функций $z(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \varepsilon, 0)$, для которых $D_x^{11}z \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$.

Для ядра$K(t,x)$ аналог леммы 4.1.1. примет вид:

Лемма 4.2.1. *Для ядра $K(t,x)$, имеющего вид (4.2.2), имеет место следующее равенство*

$$(-D_x^{11})^{n-1}K(t,x) = (n-1)!\,A_n.$$

Доказательство: Последовательно действуя оператором$-D_x^{11}$ на ядро $K(t,x)$, получим

$$-D_x^{11}K(t,x) = A_2 + 2A_3 \ln\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right) + \cdots$$

$$+(n-1)A_n \ln^{n-2}\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right),$$

$$(-D_x^{11})^2K(t,x) = 2!\,A_3 + 3\cdot 2A_4 \ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots$$

$$+(n-1)(n-2)A_n \ln^{n-3}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right),$$

……

$$(-D_x^{11})^{n-1}K(t,x) = (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1A_n = (n-1)!\,A_n.$$

Таким образом, лемма 4.2.1. доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 4.2.1. *Если в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (4.2.1) неизвестная функция $z(x)$ и правая часть $g(x)$ соответственно $n+1$ и n раз $-D_x^{11}$ – дифференцируемы, то решение уравнения (4.2.1) эквивалентно решению операторно-дифференциального уравнения $n+1$ – го порядка вида*

$$(-D_x^{11})^{n+1}z + A_0(-D_x^{11})^n z - A_1(-D_x^{11})^{n-1}z + \cdots + (n-1)!\,A_n z =$$
$$= (-D_x^{11})^n g(x). \qquad (4.2.3)$$

Доказательство: Пусть функция $z(x)$ и правая часть$g(x)$ соответственно $n+1$и n раз $-D_x^{11}$ – дифференцируемы. Тогда на обе стороны уравнения (4.2.1) действуем оператором$-D_x^{11}$ $n\ +1$ раз и с учитывая лемму 4.2.1. получим:

$$(-D_x^{11})^2 z + A_0(-D_x^{11})z + A_1 z + \int_x^1 \left[A_2 + 2A_3 \ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots\right.$$

$$\left.+(n-1)A_n \ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\right]\frac{z(t)}{t(1-t)}dt = -D_x^{11}g(x),$$

$$(-D_x^{11})^3 z + A_0(-D_x^{11})^2 z + A_1(-D_x^{11})z + 1!\,A_2 z +$$

$$+\int_x^1 \left[2!\,A_3 + 3\cdot 2A_4 \ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots\right.$$

$$\left.+(n-1)(n-2)A_n \ln^{n-3}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\right]\frac{z(t)}{t(1-t)}dt = (-D_x^{11})^2 g(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-D_x^{11})^{n+1}z + A_0(-D_x^{11})^n z + A_1(-D_x^{11})^{n-1}z + \cdots +$$

$$+(n-1)!\,A_n z = (-D_x^{11})^n g(x).$$

Таким образом, эквивалентность уравнений (4.2.1) и (4.2.3) доказана. Здесь важно отметить, что данная эквивалентность является односторонней эквивалентностью, т.е. при выполнении условий теоремы 4.2.1. все решения уравнения (4.2.1) будут в то же время и решениями уравнения (4.2.3), но не все решения уравнения (4.2.3) будут в то же время решениями уравнения (4.2.1). Действительно, при переходе от уравнения (4.2.1) к (4.2.3) мы расширили область исследования и поэтому после решения уравнения (4.2.3) можем получить такие решения, в которых часть из них, или даже все они могут оказаться чужими для первоначального уравнения.

Очевидно, что неоднородному уравнению (4.2.3) соответствует однородное уравнение

$$(-D_x^{11})^{n+1}z + A_0(-D_x^{11})^n z + A_1(-D_x^{11})^{n-1}z + \cdots + (n-1)!\,A_n z = 0. \tag{4.2.4}$$

Решение уравнения (4.2.4) будем искать в классе $\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1},\varepsilon,0\right)$ в виде

$$y(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}. \tag{4.2.5}$$

Тогда для определения λ получим характеристическое уравнение

$$\lambda^{n+1} + A_0\lambda^n + 0!\,A_1\lambda^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n = 0. \tag{4.2.6}$$

Если решение однородного уравнения

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt = 0, \tag{4.2.7}$$

будем искать в виде (4.2.5), тогда для определения λ получим характеристическое уравнение

$$\lambda + A_0 + \frac{A_1}{\lambda} + \frac{1!\,A_1}{\lambda^2} - \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{\lambda^n} = 0,$$

которое легко приводится к виду (4.2.6), только с тем ограничением, что λ строго должна удовлетворять условию $\lambda > 0$. Данное условие и есть условие того, что функция вида (4.2.5) принадлежит классу $\tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \varepsilon, 0\right)$.

Очевидно, что уравнение

$$\lambda^{n+1} + A_0\lambda^n + 0!\,A_1\lambda^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n = 0, \qquad (4.2.8)$$

полностью совпадает с характеристическим уравнением (4.1.6). Отсюда, на основе корней характеристического уравнения (4.2.8) сразу можем выписать общее решения для уравнения (4.2.4). Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

I. Случай вещественно - разных корней. Пусть все корни характеристического уравнения (4.2.8) являются вещественными и разными, и они упорядочены по мере их возрастания, т.е.

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1},$$

тогда общее решение однородного уравнения (4.2.4) имеет вид

$$z_{\text{оо}}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1} c_1^1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^1 + \cdots + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_{n+1}} c_{n+1}^1\,, \qquad (4.2.9)$$

а частное решение неоднородного уравнения (4.2.3), согласно теореме 2.6.1. с учётом пределов интегрирования в (4.2.1), примет вид

$$z_{\text{чн}} = \int_x^1 \left[N_1^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_1} + N_2^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_{n+1}^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda_{n+1}}\right](-D_t^{11})^n g(t)\,\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (4.2.10)$$

где коэффициенты $N_1^1, N_2^1, \ldots, N_n^1$ определяются из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^1 + N_2^1 + \cdots + N_{n+1}^1 = 0, \\ \lambda_1 N_1^1 + \lambda_2 N_2^1 + \cdots + \lambda_{n+1} N_{n+1}^1 = 0, \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ \lambda_1^{n-1} N_1^1 + \lambda_2^{n-1} N_2^1 + \cdots + \lambda_{n+1}^{n-1} N_{n+1}^1 = 0, \\ \lambda_1^n N_1^1 + \lambda_2^n N_2^1 + \cdots + \lambda_{n+1}^n N_{n+1}^1 = 1. \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Интегрируя по частям n раз равенство (4.2.10) и формально считая все интегральные слагаемые равными нулю, получим

$$z_{\text{чн}} = \int_x^1 \left[N_1^1 \lambda_1^n \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t} \right)^{\lambda_1} + N_2^1 \lambda_2^n \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t} \right)^{\lambda_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_{n+1}^1 \lambda_{n+1}^n \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t} \right)^{\lambda_{n+1}} \right] g(t) \frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_1^-[g(x)]. \tag{4.2.12}$$

Здесь, в случае $\lambda_{n+1} > 0$, для сходимости интегралов требуем, чтобы функция $g(x) \in \tilde{C}_{11}(0, \vec{1}; \lambda_{n+1}, 0)$.

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (4.2.12) будет в то же время и частным решением неоднородного сопряжённого интегро-дифференциального уравнения (4.2.1).

Теперь покажем, при каких значениях $\lambda_i (i = \overline{1, n+1})$ общее решение однородного уравнения (4.2.4) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.2.7). Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}, \tag{4.2.13}$$

тогда легко можно показать, что для любой $c_i^1 (i = \overline{1, n+1})$ общее решение (4.2.9) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.2.7). В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) имеет вид

$$z_{\text{он}}(x) = \left(\frac{1-x}{x} \right)^{\lambda_1} c_1^1 + \left(\frac{1-x}{x} \right)^{\lambda_2} c_2^1 + \cdots + \left(\frac{1-x}{x} \right)^{\lambda_{n+1}} c_{n+1}^1 + E_1^-[g(x)]. \tag{4.2.14}$$

2) Пусть

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{k-1} < 0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots < \lambda_{n+1}, \tag{4.2.15}$$

тогда частные решения вида

$$z_1(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1}, z_2(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2} c_2^1, \cdots, z_{k-1}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_{k-1}}$$

не принадлежат классу $\tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \varepsilon, 0\right)$, в котором ищется решение однородного уравнения (4.2.7). Поэтому отбрасывая чужие решения, общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) получим в виде

$$z_{\text{он}}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_k} c_k^1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_{k+1}} c_{k+1}^1 + \cdots + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_{n+1}} c_{n+1}^1 + E_1^-[g(x)]. \tag{4.2.16}$$

3) Пусть

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0, \tag{4.2.17}$$

тогда однородное уравнение (4.2.7), кроме нулевого решения, других ненулевых решений не имеет. В этом случае неоднородное уравнение (4.2.1) однозначно разрешимо и его единственное решение даётся по формуле

$$z_{\text{он}}(x) = E_1^-[g(x)]. \tag{4.2.18}$$

Таким образом, подытоживая вышеприведённые рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2.2. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (4.2.1) с ядром вида (4.2.2) коэффициенты* $A_0, A_1, \dots, A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.2.8) являются вещественными и разными. Кроме того, пусть функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$, *а в случае* $\lambda_{n+1} > 0$ $g(x) \in \tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \lambda_{n+1}, 0\right)$. *Тогда, при выполнении условий (4.2.13), (4.2.15) и (4.2.17). общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) из класса* $\tilde{C}'_{11}(\tilde{\Gamma})$ *задаётся соответственно равенствами (4.2.14), (4.2.16) и (4.2.18).*

II. Случай вещественно - равных корней. Пусть все корни характеристического уравнения (4.2.8) являются вещественными и равными и $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n+1} = \lambda$. В этом случае легко можно показать, что общее решение однородного уравнения (4.2.4) имеет вид

$$z_{\text{оо}}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda} c_1^2 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda} \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) c_2^2 + \cdots$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}\ln^{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)c_{n+1}^{2}. \qquad (4.2.19)$$

Согласно теореме 2.6.2, частное решение неоднородного уравнения (4.2.3) примет вид

$$z_{\text{чн}}=\frac{1}{n!}\int_{x}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\ln^{n}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)(-D_{t}^{11})^{n}g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (4.2.20)$$

Интегрируя n раз по частям решение вида (4.2.20), получим

$$z_{\text{чн}}=\frac{1}{n!}\int_{x}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\lambda}\left[\lambda^{n}\ln^{n}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)+\right.$$

$$+C_{n}^{1}\lambda^{n-1}n\ln^{n-1}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)+C_{n}^{2}\lambda^{n-2}n(n-1)\ln^{n-2}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)+\cdots$$

$$\left.+C_{n}^{n-1}\lambda n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)+n!\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}\equiv$$

$$\equiv E_{2}^{-}[g(x)]. \qquad (4.2.21)$$

Для сходимости интегралов, в случае $\lambda>0$, потребуем выполнения условия $g(x)\in\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\lambda,0\right)$.

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что частное решение (4.2.21) будет в то же время и частным решением неоднородного уравнения (4.2.1).

Теперь покажем, при каких значениях λ общее решение однородного уравнения (4.2.4) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.2.7). Имеют место следующие случаи

1) Пусть

$$\lambda>0, \qquad (4.2.22)$$

тогда для любой $c_{i}^{2}(i=\overline{1,n+1})$ общее решение (4.2.19) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.2.7). В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) примет вид

$$z_{\text{он}}(x)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}c_{1}^{2}+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)c_{2}^{2}+\cdots$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}\ln^{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)c_{n+1}^{2}+E_{2}^{-}[g(x)]. \qquad (4.2.23)$$

2) Пусть

$$\lambda<0, \qquad (4.2.24)$$

тогда ни одно из частных решений

$$z_1=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}, z_2=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right),\cdots,z_{n+1}=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda}\ln^{n}\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

не принадлежит классу $\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\varepsilon,0\right)$, поэтому однородное уравнение (4.2.7) кроме нулевого решения, других решений не имеет. В этом случае неоднородное уравнение (4.2.1) имеет только единственное решение

$$z_{\text{он}}(x)=E_{2}^{-}[f(x)]. \qquad (4.2.25)$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению:

Теорема 4.2.3. *Пусть в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (4.2.1) с ядром вида (4.2.2) коэффициенты $A_0,A_1,\dots,A_n$ такие, что корни характеристического уравнения (4.2.8) являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция $g(x)\in\tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$, а в случае $\lambda>0 g(x)\in\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\lambda,0\right)$. Тогда при выполнении условий (4.2.22) и (4.2.24) общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) из класса $\tilde{C}'_{11}(\tilde{\Gamma})$ выражается соответственно равенствами (4.2.23), и (4.2.25).*

III. Случай комплексно-сопряжённых корней. Пусть в характеристическом уравнении (4.2.8) $n+1=2k$ – чётное число и все корни уравнения являются комплексно-сопряжёнными, обозначим их в виде $\lambda_{1,2}=\alpha_1\pm i\beta_1,\lambda_{3,4}=\alpha_2\pm i\beta_2,\dots,\lambda_{2k-1,2k}=\alpha_k\pm i\beta_k$. Кроме того, пусть действительные части этих корней упорядочены по мере их убывания, т.е.

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k.$$

Тогда общее решение однородного уравнения (4.2.4) имеет вид:

$$z_{\text{оо}}(x)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]+c_2^3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right]+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]+c_{2k}^3\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right], \quad (4.2.26)$$

а частное решение неоднородного уравнения (4.2.3), согласно теореме 2.6.3, имеет вид

$$y_{\text{чн}}(x)=$$
$$=\int_x^1\left\{\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3 cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]+N_2^3 sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]\right]+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_k}N_{2k-1}^3 cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]+N_{2k}^3 sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right]\right\}\times$$
$$\times(-D_t^{11})^{2k-1}g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (4.2.27)$$

где коэффициенты $N_i^3\left(i=\overline{1,2k}\right)$ определяются из алгебраической системы уравнений

$$\begin{cases} N_1^3\cdot 1+N_2^3\cdot 0+\cdots+N_{2k-1}^3\cdot 1+N_{2k}^3\cdot 0=0, \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,1}N_1^3+\Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,1}N_2^3+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,1}N_{2k-1}^3+\Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,1}N_{2k}^3=0, \\ \text{- -} \\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}N_1^3+\Lambda_{\beta_1\alpha_1}^{-,2k-1}N_2^3+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}N_{2k-1}^3+\Lambda_{\beta_k\alpha_k}^{-,2k-1}N_{2k}^3=1, \end{cases} \quad (4.2.28)$$

где

$$\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{+,1}=\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{+,1}\{1,0\},\qquad \Lambda_{\beta_i\alpha_i}^{-,1}=\Lambda_{\beta_i\alpha_i}^{-,1}\{1,0\}\ \ (i=\overline{1,k})$$

и

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{a,b\}=\alpha a-\beta b,\\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}=\Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\{a,b\}=\beta a+\alpha b,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k}=\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\}=\alpha\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}-\beta\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1},\\ \Lambda_{\beta\alpha}^{-,k}=\Lambda_{\beta\alpha}^{-,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}\right\}=\beta\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1}+\alpha\Lambda_{\beta\alpha}^{-,k-1}.\end{cases}$$

Интегрируя по частям в равенстве (4.2.27) $2k-1$ раз и, формально считая все интегральные слагаемые, а также нижний предел интегрирования, равными нулю, получим

$$y_{\text{чн}}(x) =$$

$$= \int_x^1 \left\{ \left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_1} \begin{bmatrix} \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}\{N_1^3, N_2^3\} cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right] + \\ +\Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{-,2k-1}\{N_1^3, N_2^3\} sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right] \end{bmatrix} + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_k} \begin{bmatrix} \Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}\{N_{2k-1}^3, N_{2k}^3\} cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right] + \\ +\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{-,2k-1}\{N_{2k-1}^3, N_{2k}^3\} sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\frac{t}{1-t}\right)\right] \end{bmatrix} \right\} \times$$

$$\times\, g(t)\frac{dt}{t(1-t)} \equiv E_3^-[g(x)]\,. \qquad (4.2.29)$$

Здесь, в случае $\alpha_k > 0$, для сходимости интегралов потребуем выполнения условия $g(x) \in \tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \alpha_k, 0\right)$.

Далее, непосредственной проверкой можно убедиться, что решение (4.2.29) будет в то же время и частным решением неоднородного уравнения (4.2.1).

Выясним, при каких значениях $\alpha_i\left(i = \overline{1,k}\right)$ общее решение однородного уравнения (4.2.4) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.2.7). Выделяем следующие случаи:

1) Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 0 \qquad (4.2.30)$$

тогда легко можно показать, что для любой $c_j^3\left(j = \overline{1,2k}\right)$ общее решение (4.2.26) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.2.7). В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) имеет вид

$$z_{\text{он}}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_2^3\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] + \cdots +$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_{2k}^3\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] +$$

$$+E_3^-[g(x)]. \qquad (4.2.31)$$

2) Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_l < 0 < \alpha_{l+1} < \cdots < \alpha_k, \qquad (4.2.32)$$

тогда собственные функции, соответствующие числам $\alpha_j\left(j=\overline{1,l}\right)$, не принадлежат классу$\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\varepsilon,0\right)$. Отбрасывая данные чужие решения, общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) получим в виде:

$$z_{\text{он}}(x)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_{l+1}}\left[c_{2l-1}^{3}\cos\left[\beta_l\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]+c_{2l}^{3}\sin\left[\beta_l\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right]+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1}^{3}\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]+c_{2k}^{3}\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right]+$$

$$+E_3^-[g(x)]. \qquad (4.2.33)$$

3) Пусть

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k<0, \qquad (4.2.34)$$

тогда поскольку ни одна из функций вида

$$z_i=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_i}\left[c_{2i-1}^{3}\cos\left[\beta_i\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]+c_{2i}^{3}\sin\left[\beta_i\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right]$$

не принадлежит классу $\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\varepsilon,0\right)$, поэтому однородное уравнение (4.2.7) кроме нулевого решения, других линейно независимых решений не имеет. В этом случае неоднородное уравнение (4.2.1) для любой функции $g(x)\in\tilde{C}_{11}(0,1)$ имеет только единственное решение вида

$$z_{\text{он}}(x)=E_3^-[g(x)]. \qquad (4.2.35)$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4.2.4. *Пусть в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (4.2.1) с ядром вида (4.2.2) коэффициенты $A_0,A_1,\dots,A_n$ такие, что корни характеристического уравнения (4.2.8) являются комплексно-сопряжёнными. Кроме того, пусть функция $g(x)\in\tilde{C}_{11}\left(\tilde{\Gamma}\right)$, в случае $\alpha_k>0$, выполняется условие $g(x)\in\tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\alpha_k,0\right)$. Тогда, при выполнении условий (4.2.30), (4.2.32) и (4.2.34), общее решение неоднородного уравнения (4.2.1) из класса $\tilde{C}'_{11}\left(\tilde{\Gamma}\right)$ выражается соответственно равенствами (4.2.31), (4.2.33) и (4.2.35).*

Замечание 4.2.1. *Утверждения, подобные утверждению теоремы 4.2.4., легко можно построить и в других возможных случаях корней характеристического уравнения (4.2.8).*

Теперь рассмотрим однородное уравнение

$$D_x^{11}y + \mu y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = 0, \qquad (4.2.36)$$

с параметром μ и ядром вида (4.1.2) и исследуем следующую задачу:

Задача Б. *Найти те значения параметра μ, для которых однородное уравнение (4.2.36) имеет ненулевые решения.*

Из вышеприведённых рассуждений заключаем, что те значения параметра μ, для которых выполняется условие $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$, являются $n+1$ – кратными собственными значениями уравнения (4.2.36). Данные значения параметра μ также будут собственными значениями и для однородного сопряжённого уравнения

$$-D_x^{11}z + \mu z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = 0, \qquad (4.2.37)$$

В этом случае число собственных функций однородного уравнения (4.2.36) и сопряжённого с ним уравнения (4.2.37) не превышает $n+1$ и они выражаются равенствами

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_1}, y_2(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_2}, \cdots, y_{n+1}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda_{n+1}}$$

и

$$z_1(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_1}, z_2(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_2}, \cdots, z_{n+1}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\lambda_{n+1}}.$$

Если для некоторых i $(i = \overline{1,n})$ $\lambda_i < 0$, тогда кратность собственных значений и число собственных функций однородного уравнения (4.2.36) и сопряжённого с ним уравнения (4.2.37) на i единиц уменьшается. В случае $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$ однородное уравнение (4.2.36) и сопряжённое с ним уравнение (4.2.37), кроме нулевых решений, других решений не имеют. Именно в данном последнем случае неоднородные уравнения (4.2.36) и (4.2.37) всегда имеют единственное решение.

Такие же рассуждения имеют место и в случае, когда корни характеристического уравнения (4.1.6) являются вещественными и равными, комплексно - сопряжёнными и т.д.

Таким образом, на основе вышеприведённых результатов, в случае вещественно - разных корней характеристического уравнения (4.2.8), построим аналог теоремы Фредгольма для уравнения (4.1.1), (4.2.1).

Теорема 4.2.5. (Аналог первой теоремы Фредгольма). *Если выполняется условие* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$, *тогда как данное интегро-дифференциальное уравнение (4.1.1), так и сопряжённое с ним уравнение (4.2.1), однозначно разрешимы при любом свободном члене* $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$ и $g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$. *Соответствующие однородные уравнения имеют при этом только тривиальные решения.*

Теорема 4.2.6. (Аналог второй теоремы Фредгольма). *Если выполняются условия* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$ *или* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{k-1} < 0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots < \lambda_{n+1}$, *тогда однородное интегро-дифференциальное уравнение (4.1.7), также и сопряжённое с ним однородное уравнение (4.2.7), имеют нетривиальные решения. Число линейно - независимых решений однородного интегро-дифференциального уравнения (4.1.7) конечно и равно числу линейно - независимых решений однородного сопряжённого уравнения (4.2.7).*

Теорема 4.2.7. (Аналог третьей теоремы Фредгольма). *Для того, чтобы неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (4.1.1) было разрешимо, необходимо, чтобы его свободный член* $f(x)$ *был ортогонален ко всем решениям*

соответствующего однородного сопряжённого уравнения (4.2.7) и достаточно, чтобы выполнялось условие $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda_{n+1}, 0)$.

Теорема 4.2.8. (Аналог четвертой теоремы Фредгольма). *Особое интегро-дифференциальное уравнение (4.1.1) имеет континуум множества собственных чисел.*

Эти теоремы сформулируем в виде аналога альтернативе Фредгольма:

Теорема 4.2.9. (Аналог об альтернативе Фредгольма). *Для интегро-дифференциального уравнения (4.1.1) имеет место два взаимоисключающих случая:*

1. Если выполняются условия $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1} < 0$, *тогда уравнения (4.1.1) и (4.2.1) имеют только по одному единственному решению при любых функциях* $f(x) \in C_{11}(\Gamma)$ *и* $g(x) \in \tilde{C}_{11}(\tilde{\Gamma})$. *Соответствующие однородные уравнения (4.1.7) и (4.2.7) имеют только нулевые (тривиальные) решения.*

Если выполняются условия $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$ *или* $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{k-1} < 0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots < \lambda_{n+1}$, *тогда уравнение (4.1.1) разрешимо в том и только в том случае, когда функция* $f(x)$ *ортогональна ко всем решениям соответствующего однородного сопряжённого уравнения (4.2.7) и* $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda_{n+1}, 0)$. *При этом уравнения (4.1.7) и (4.2.7) имеют одинаковое и притом конечное число линейно - независимых решений и общее решение уравнения (4.1.1) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения (4.1.7) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (4.1.1).*

§4.3. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки

В теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений одно из важных, и в то же время хорошо развивающихся направлений является теория интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки [14], [67], [93], [97], [120], [139], [158], [163], [184], [212]. Важно отметить, что каждому существующему интегральному преобразованию соответствует определённый вид операции свёртки. Как было отмечено в первой главе 8, операция сложной свёртки для двух функций $f_1^*\left(\frac{x}{1-x}\right), f_2^*\left(\frac{x}{1-x}\right) \in C_{11}^+\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ определена в виде

$$h^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^*\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^*\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) \frac{dt}{t(1-t)}$$

и поскольку присутствующие здесь функции зависят от сложного аргумента, поэтому мы назвали его операцией сложной свёртки. Эта операция, особенно теорема 2.8.7., даёт возможность исследовать некоторые типы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа сложной свёртки.

На $\Gamma^+ = \left\{x: \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$ рассмотрим следующее особое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка

$$D_x^{11} y + A_0 y + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t) dt = f(x), \tag{4.3.1}$$

где $f(x) \in C_{11}^+\left(\frac{1}{2}, 1\right), K(x,t) \in C_{11}^+(R)$ заданная непрерывная функция в квадрате $R = \left\{(x,t): \frac{1}{2} < x < 1, \frac{1}{2} < t < 1\right\}$, которая имеет логарифмическую особенность следующего вида:

$$K(x,t) = \quad K^*\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) =$$

$$= A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right). \qquad (4.3.2)$$

Пусть решение уравнения (4.3.1) тоже ищется в классе функций $y(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, для которых $D_x^{11} y \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Лемма 4.3.1. *Уравнение (4.3.1) эквивалентно уравнению*

$$D_x^{11} y + A_0 y + \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x). \qquad (4.3.3)$$

Доказательство: Действительно, если $K(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, то $K(x) = K^*\left(\frac{x}{1-x}\right)$ как функция аргумента $\frac{x}{1-x}$ принадлежит классу $C_{11}^{+}(1,\infty)$. Очевидно, что при $x < t < 1$, $\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t} < 1$ и, следовательно,$K^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) = 0$ и тем самым эквивалентность уравнений (4.3.1) и (4.3.3) установлена.

Для исследования уравнения (4.3.3) запишем его в подходящей форме для применения теоремы о сложной свёртке, т.е.

$$D_x^{11} y + A_0 y + \int_{\frac{1}{2}}^{x} K^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) y^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = f(x). \qquad (4.3.4)$$

Вначале находим S_{11}^{+} - изображения функции

$$K^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

При $Rep > 0$ имеем

$$S_{11}^{+}\left\{K^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \left[A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= |n-1 - \text{раз интегрируем по частям}| =$$

$$= \frac{A_1}{p} + \frac{1!\,A_2}{p^2} + \frac{2!\,A_3}{p^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}.$$

Далее, к обеим сторонам уравнения (4.3.4) подействуем S_{11}^{+} - интегральным преобразованием и с учётом теоремы 2.8.7, получим

$$pY(p) - y^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} + A_0 Y(p) +$$

$$+\left(\frac{A_1}{p} + \frac{1!\,A_2}{p^2} + \frac{2!\,A_3}{p^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}\right)Y(p) = F(p)$$

или при предположении $y^{*}\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0$, имеем

$$\left(p + A_0 + \frac{A_1}{p} + \frac{1!\,A_2}{p^2} + \frac{2!\,A_3}{p^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}\right)Y(p) = F(p).$$

Отсюда, можно преобразовать полученное равенство следующим образом:

$$Y(p) = \frac{p^n}{p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n}F(p). \qquad (4.3.5)$$

Известными способами алгебры функцию

$$\Pi^{+}(p) = \frac{p^n}{p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n}$$

в зависимости от корней алгебраического уравнения

$$p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n = 0 \qquad (4.3.6)$$

например, в трёх случаях можно привести к одному из видов

$$\Pi_1^{+}(p) = \frac{N_1^1}{p-p_1} + \frac{N_2^1}{p-p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{p-p_{n+1}}, \qquad (4.3.7)$$

$$\Pi_2^{+}(p) = \frac{N_1^2}{p-p_1} + \frac{N_2^2}{(p-p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(p-p_1)^{n+1}}, \qquad (4.3.8)$$

$$\Pi_3^{+}(p) = \frac{N_1^3 p + N_1^4}{(p-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{N_2^3 p + N_2^4}{(p-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{N_k^3 p + N_k^4}{(p-\alpha_k)^2 + \beta_k^2}, \qquad (4.3.9)$$

с неопределёнными коэффициентами N_i^j, $(i = \overline{1, n+1}, j = 1,2), N_l^j$, $(l = \overline{1,k}, j = 3,4)$.

В случае (4.3.7) оригинал для $\Pi_1^{+}(p)$ легко можем восстановить в виде

$$\pi_1^{+}(x) = N_1^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_2} + \cdots + N_{n+1}^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_{n+1}}. \qquad (4.3.10)$$

Далее, записывая равенство (4.3.5) в виде

$$Y(p) = \left(\frac{N_1^1}{p-p_1} + \frac{N_2^1}{p-p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{p-p_{n+1}}\right) F(p),$$

на основе обратной теоремы к теореме о сложной свёртке, с учётом (4.3.10) решения уравнения (4.3.4) получим в следующем виде

$$y(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{p_1} + N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{p_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_{n+1}^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right)^{p_{n+1}} \right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)}. \qquad (4.3.11)$$

Осталось выяснить имеет ли однородное уравнение

$$D_x^{11} y + A_0 y + \int_{\frac{1}{2}}^{x} K^* \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) y^* \left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{dt}{t(1-t)} = 0, \qquad (4.3.12)$$

нетривиальные решения. Если предположить принадлежность функции $y(x)$ классу $C_{11}^{(n+1),+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, тогда задача решения однородного уравнения (4.3.12) эквивалентна задаче решения уравнения

$$(D_x^{11})^{n+1} y + A_0 (D_x^{11})^n y + A_1 (D_x^{11})^{n-1} y + \cdots + (n-1)!\, A_n y = 0. \qquad (4.3.13)$$

без потери решения однородного уравнения (4.3.12), но с появлением, может быть, посторонних для него решений. Прямая подстановка покажет, что функция оригинал вида (4.3.10) с произвольными коэффициентами $c_1^1, c_2^1, \cdots, c_{n+1}^1$ является общим решением однородного уравнения (4.3.13). С другой стороны, каждая собственная функция вида

$$y_i = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_i}, (i = \overline{1, n+1})$$

не является частным решением однородного уравнения (4.3.12). Отсюда следует, что однородное уравнение (4.3.12) кроме нулевых решений других решений не имеет.

Заметим, что такой результат вполне ожидаемый и согласуется с общей теорией интегро-дифференциальных уравнений с регулярными ядрами. Действительно, поскольку пределы интегрирования в уравнении (4.3.12) меняется в пределах от $\frac{1}{2}$ до x, в этих пределах ядро уравнения не имеет никакой особенности, поэтому однородное уравнение (4.3.12) должно иметь только нулевое решение, а неоднородное уравнение (4.3.1) или (4.3.4) иметь единственное решение.

В случае (4.3.8) оригинал для $\Pi_2^+(p)$ восстанавливается в виде

$$\pi_2^+(x) = N_1^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1} + N_2^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots$$
$$+N_{n+1}^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right). \quad (4.3.14)$$

Отсюда, записывая равенство (4.3.5) в виде

$$S_{11}^+(p) = \left(\frac{N_1^2}{p-p_1} + \frac{N_2^2}{(p-p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(p-p_1)^{n+1}}\right)F(p),$$

на основе обратной теоремы к теореме о сложной свёртке, с учётом (4.3.14) решение уравнения (4.3.4) получим в виде

$$y(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x}\left[N_1^2\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{p_1} + N_2^2\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots\right.$$
$$\left.+N_{n+1}^2\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)^{p_1}\ln^n\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\right]f(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (4.3.15)$$

В этом случае также легко можно показать, что каждая собственная функция вида

$$y_i = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln^{i-1}\left(\frac{x}{1-x}\right), (i = \overline{1, n+1})$$

не является частным решением однородного уравнения (4.3.12) и поэтому однородное уравнение (4.3.12) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (4.3.1) или (4.3.4) всегда имеет единственное решение, которое даётся по формуле (4.3.15).

В случае (4.3.9) для восстановления оригинала для $\Pi_3^+(p)$, сначала запишем его в виде

$$\Pi_3^+(p) = N_1^3 \frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{N_1^4 + N_1^3\alpha_1}{\beta_1}\frac{\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots +$$

$$+N_k^3 \frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + \frac{N_k^4 + N_k^3\alpha_k}{\beta_k}\frac{\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}.$$

Отсюда

$$\pi_3^+(x) = N_1^3\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + N_1^5\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + \cdots$$

$$+N_k^3\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + N_k^5\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right], \qquad (4.3.16)$$

где

$$N_i^5 = \frac{N_i^4 + N_i^3\alpha_i}{\beta_i}\left(i=\overline{1,k}\right).$$

Теперь, записывая равенство (4.3.5) в виде

$$Y(p) = \left(N_1^3\frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + N_1^5\frac{\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots\right.$$

$$\left.+N_k^3\frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + N_k^5\frac{\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\right)F(p),$$

на основе обратной теоремы к теореме о сложной свёртке, с учётом (4.3.16) решение уравнения (4.3.4) находим в виде

$$y(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x}\left\{\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.+N_1^5\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right] + \cdots$$

$$+\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left.+N_k^5\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-t}{t}\right)\right]\right]\right\}f(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \qquad (4.3.17)$$

Подобно предыдущим случаям, в этом случае также однородное уравнение (4.3.12) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (4.3.1) или (4.3.4) всегда имеет единственное решение, которое даётся по формуле (4.3.17).

Теорема 4.3.1. *Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (4.3.1)* $f(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right), K(x,t) \in C_{11}^{+}(R)$ *и ядро* $K(x,t)$ *имеет свёрточный вид (4.3.2). Тогда однородное уравнение (4.3.12) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (4.3.1) или эквивалентное ему уравнение (4.3.4) всегда имеет единственное решение, которое в зависимости от корней характеристического уравнения (4.3.6) задаётся по одному из равенств (4.3.11), (4.3.15) или (4.3.17).*

Замечание 4.3.1. *В случае, когда среди корней характеристического уравнения (4.3.6) имеются вещественно - разные и вещественно - равные, вещественно- разные и комплексно- сопряжённые, вещественно- равные и комплексно- сопряжённые, также имеют место утверждения, подобные утверждениям теоремы 4.3.1.*

§4.4. Одномерное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки

В пространстве $C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ рассмотрим уравнение

$$L[y] \equiv D_x^{11} y + A_0 y + \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x) \qquad (4.4.1)$$

с ядром вида

$$K(x,t) = \quad K^*\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) =$$

$$= A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t}\right). \qquad (4.4.2)$$

Для элементов $f, g \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ вводим понятия их скалярного произведения в виде

$$(f,g)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)g(x)\frac{dx}{x(1-x)}$$

и находим оператор L^*-сопряжённый к оператору L следующим образом:

$$(L[y],z)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left[D_x^{11}y+A_0y+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{K(x,t)}{t(1-t)}y(t)dt\right]z(x)\frac{dx}{x(1-x)}=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} z(x)dy(x)+A_0\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(x)z(x)\frac{dx}{x(1-x)}+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} z(x)\frac{dx}{x(1-x)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}\frac{K(x,t)}{t(1-t)}y(t)dt=z(x)y(x)|_{\frac{1}{2}}^{1}-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(x)dz(x)+$$

$$+A_0\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} z(x)y(x)\frac{dx}{x(1-x)}+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(t)\frac{dt}{t(1-t)}\int\limits_{t}^{1}\frac{K(x,t)}{x(1-x)}z(x)dx=|t=x|=$$

$$=z(1)y(1)-z\left(\frac{1}{2}\right)y\left(\frac{1}{2}\right)-\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(x)D_x^{11}z(x)\frac{dx}{x(1-x)}+A_0\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} z(x)y(x)\frac{dx}{x(1-x)}+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(x)\frac{dx}{x(1-x)}\int\limits_{x}^{1}\frac{K(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt=z(1)y(1)-z\left(\frac{1}{2}\right)y\left(\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y(x)\left[-D_x^{11}z+A_0z(x)+\int\limits_{x}^{1}\frac{K(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt\right]\frac{dx}{x(1-x)}=$$

$$=z(1)y(1)-z\left(\frac{1}{2}\right)y\left(\frac{1}{2}\right)+(y,L^*[z]),$$

т.е.

$$(L[y],z)=z(1)y(1)-z\left(\frac{1}{2}\right)y\left(\frac{1}{2}\right)+(y,L^*[z]),$$

где

$$L^*[z] \equiv -D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt.$$

Отсюда оператор

$$L^*[z] \equiv -D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt$$

будет сопряжённым оператором к оператору $L[y]$ в пространстве сопряжённых функций $\tilde{C}_{11}^{+}(\tilde{\Gamma}^{+})$, где $\tilde{\Gamma}^{+} = \left\{x: \frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$.

Таким образом, уравнение, сопряжённое к интегро-дифференциальному уравнению (4.4.1), имеет вид

$$L^*[z] \equiv -D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x), \qquad (4.4.4)$$

где

$$K(t,x) = \quad K^*\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right) =$$

$$= A_1 + A_2 \ln\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right). \qquad (4.4.5)$$

В дальнейшем через $\tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, \vec{1}; \lambda, 0\right)$ обозначим класс функций-оригиналов $z(x)$, которые в точке $x = 1$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$z(x) = o\left[(1-x)^{\delta}\right], \delta > \lambda.$$

Допустим, что в (4.4.4) $g(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right), K(t,x) \in C_{11}^{+}(R)$ - заданная непрерывная функция в квадрате $R = \left\{(x,t): \frac{1}{2} < x < 1, \frac{1}{2} < t < 1\right\}$ и решение уравнения (4.4.4) ищется в классе функций $z(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, для которых $-D_x^{11}z \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Если записать уравнение (4.4.4) в виде

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 K^*\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right) z^*\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{t(1-t)} = g(x), \qquad (4.4.6)$$

тогда для исследования уравнения (4.4.6) можно применить следствие 2.8.2.

Чтобы применить данное следствие, прежде всего, находим S_{11}^{+} - изображение функции

$$K^*\left(\frac{x}{1-x}\right) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

Имеем

$$S_{11}^{+}\left\{K^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\} =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} \left[A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] \frac{dx}{x(1-x)} =$$

$$= |n-1 - \text{раз интегрируем по частям}| =$$

$$= \frac{A_1}{p} + \frac{1!\,A_2}{p^2} + \frac{2!\,A_3}{p^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}.$$

Далее, к обеим сторонам уравнения (4.4.6) действуя S_{11}^{+}- интегральным преобразованием, с учётом следствия 2.8.2. получим

$$-pZ(p) + z^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} + A_0 Z(p) +$$

$$+\left(\frac{A_1}{-p} + \frac{1!\,A_2}{(-p)^2} + \frac{2!\,A_3}{(-p)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{(-p)^n}\right) Z(p) = G(p)$$

или при предположении $z^*\left(\frac{x}{1-x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0$, имеем

$$\left(-p + A_0 + \frac{A_1}{-p} + \frac{1!\,A_2}{(-p)^2} + \frac{2!\,A_3}{(-p)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{(-p)^n}\right) Z(p) = G(p).$$

Отсюда, можно преобразовать последнее равенство следующим образом:

$$Z(p) = \frac{(-p)^n}{(-p)^{n+1} + A_0(-p)^n + A_1(-p)^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n} G(p), \quad (4.4.7)$$

где знаменатель равенства при обращении его к нулю, т.е.

$$(-p)^{n+1} + A_0(-p)^n + A_1(-p)^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n = 0 \quad (4.4.8)$$

даёт характеристическое уравнение для однородного уравнения

$$-D_x^{11} z + A_0 z + \int_x^1 K^*\left(\frac{t}{1-t} \cdot \frac{1-x}{x}\right) z^*\left(\frac{t}{1-t}\right) \frac{dt}{t(1-t)} = 0. \quad (4.4.9)$$

Теперь выражение

$$\Pi^{+}(-p)=\frac{(-p)^{n}}{(-p)^{n+1}+A_{0}(-p)^{n}+A_{1}(-p)^{n-1}+1!\,A_{2}(-p)^{n-2}+\cdots+(n-1)!\,A_{n}}$$

в зависимости от корней характеристического уравнения (.4.8) например, в трёх случаях можно привести к одному из следующих видов:

$$\textbf{I.}\,\Pi_{1}^{+}(-p)=\frac{N_{1}^{1}}{-p-p_{1}}+\frac{N_{2}^{1}}{-p-p_{2}}+\cdots+\frac{N_{n+1}^{1}}{-p-p_{n+1}},\qquad(4.4.10)$$

$$\textbf{II.}\,\Pi_{2}^{+}(-p)=\frac{N_{1}^{2}}{-p-p_{1}}+\frac{N_{2}^{2}}{(-p-p_{1})^{2}}+\cdots+\frac{N_{n+1}^{2}}{(-p-p_{1})^{n+1}},\qquad(4.4.11)$$

$$\textbf{III.}\,\Pi_{3}^{+}(-p)=\frac{N_{1}^{3}(-p)+N_{1}^{4}}{(-p-\alpha_{1})^{2}+\beta_{1}^{2}}+\frac{N_{2}^{3}(-p)+N_{2}^{4}}{(-p-\alpha_{2})^{2}+\beta_{2}^{2}}+\cdots+\frac{N_{k}^{3}(-p)+N_{k}^{4}}{(-p-\alpha_{k})^{2}+\beta_{k}^{2}},\qquad(4.4.12)$$

с неопределёнными коэффициентами $N_{i}^{j},\ (i=\overline{1,n+1},j=1,2),N_{l}^{j},\ (l=\overline{1,k},j=3,4)$.

I. В первом случае сначала для функции

$$\Pi_{1}^{+}(p)=\frac{N_{1}^{1}}{p-p_{1}}+\frac{N_{2}^{1}}{p-p_{2}}+\cdots+\frac{N_{n+1}^{1}}{p-p_{n+1}}$$

восстанавливаем оригинал в виде

$$\pi_{1}^{+}(x)=\pi_{1}^{*,+}\left(\frac{x}{1-x}\right)=$$

$$=N_{1}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_{1}}+N_{2}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_{2}}+\cdots+N_{n+1}^{1}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_{n+1}}.\quad(4.4.13)$$

Теперь записывая равенство (4.4.7) в виде

$$Z(p)=\left(\frac{N_{1}^{1}}{-p-p_{1}}+\frac{N_{2}^{1}}{-p-p_{2}}+\cdots+\frac{N_{n+1}^{1}}{-p-p_{n+1}}\right)G(p),$$

на основе следствия 2.8.2., с учётом того, что $g^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right)=g(t)$, для функции $Z(p)$ восстанавим оригинал в виде

$$z(x)=\int_{x}^{1}\left[N_{1}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_{1}}+N_{2}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_{2}}+\cdots+\right.$$

$$+N_{n+1}^{1}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_{n+1}}\Bigg]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \qquad (4.4.14)$$

Это решение имеет смысл для любой функции $g(x)\in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},1\right)$, только в случае, когда $p_1<p_2<\cdots<p_{n+1}<0$. Если для некоторого $i,(i=\overline{1,n+1}),p_i>0$, тогда подынтегральное выражение в (4.4.14) в верхнем пределе интегрирования имеет особенности степенного характера. Поэтому для сходимости интегралов в правой части (4.4.14) требуем, чтобы функция $g(x)$ принадлежала классу $\tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},\vec{1};\max\limits_{i}\{p_i\},0\right)$.

Далее, выясним, имеет ли однородное уравнение (4.4.9) нетривиальные решения. Чтобы это определить, подействуем дифференциальным оператором $-D_x^{11}$ на обе стороны уравнения (4.4.9) n раз и получим уравнение

$$(-D_x^{11})^{n+1}z+A_0(-D_x^{11})^{n}z+A_1(-D_x^{11})^{n-1}z+\cdots+A_n(n-1)!\,z=0. \quad (4.4.15)$$

Если искать решение уравнение (4.4.15) в виде

$$z(x)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p},$$

то для определения p получим характеристическое уравнение

$$p^{n+1}+A_0p^{n}+A_1p^{n-1}+\cdots+A_n(n-1)!=0. \qquad (4.4.16)$$

В случае, когда все корни характеристического уравнения (4.4.16) являются вещественными и разными, общее решение однородного уравнения (4.4.15) даётся формулой

$$z(x)=c_1\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}+c_2\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_2}+\cdots+c_{n+1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_{n+1}}. \qquad (4.4.17)$$

Когда все корни характеристического уравнения (4.4.16) являются вещественными и равными, то есть $p_1=p_2=\cdots p_{n+1}$, тогда общее решение однородного уравнения (4.4.15) даётся формулой

$$z(x)=c_1\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}+c_2\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)+\cdots+c_{n+1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}\ln^{n}\left(\frac{1-x}{x}\right).$$

(4.4.18)

Если $n = 2k$ чётное число и все корни характеристического уравнения (4.4.16) являются комплексно-сопряжёнными, которые обозначаем

$$p_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, p_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \cdots, p_{1,2} = \alpha_k \pm i\beta_k,$$

тогда общее решение однородного уравнения (4.4.15) выражается равенством:

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_1}\left[c_1 \cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_2 \sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] + \cdots$$
$$+\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_k}\left[c_{2k-1} \cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_{2k} \sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right]. \quad (4.4.19)$$

Далее, возвращаясь к однородному уравнению (4.4.9) выясним, что если выполняется условие $p_i > 0$ для любого i $(i = \overline{1, n+1})$, тогда решение (4.4.17) будет в то же время общим решением однородного уравнения (4.4.9),. Если для некоторых i $(i = \overline{1, n+1})$ выполняется условие $p_i < 0$, то нужно отбрасывать каждое частное решения вида

$$z_i(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_i}$$

из общего решения (4.4.17). Таким образом, например, в трёх случаях, когда

1. $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1}$, (4.4.20)
2. $p_1 < p_2 < \cdots < p_i < 0 < p_{i+1} < \cdots < p_{n+1}$ (4.4.21)

и

3. $p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1} < 0$, (4.4.22)

общее решение неоднородного сопряжённого уравнения (4.4.6) или (4.4.4) выражается соответственно формулами

$$z(x) = c_1\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1} + c_2\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_2} + \cdots + c_{n+1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_{n+1}} +$$
$$+\int_x^1 \left[N_1^1\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{p_2} + \cdots +\right.$$
$$\left. +N_{n+1}^1\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{p_{n+1}}\right] g(t)\frac{dt}{t(1-t)}, \quad (4.4.23)$$

$$z(x) = c_{i+1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_{i+1}} + c_{i+2}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_{i+2}} + \cdots + c_{n+1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_{n+1}} +$$

$$+\int_x^1 \left[N_1^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_2} + \cdots +\right.$$

$$\left. +N_{n+1}^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_{n+1}}\right] g(t)\frac{dt}{t(1-t)} \qquad (4.4.24)$$

и

$$z(x) = \int_x^1 \left[N_1^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1} + N_2^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_2} + \cdots +\right.$$

$$\left. +N_{n+1}^1\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_{n+1}}\right] g(t)\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (4.4.25)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$- являются произвольными константами.

Отсюда видно, что неоднородное уравнение (4.4.6) или (4.4.4) только в случае выполнения условия (4.4.22) имеет единственное решение, а в других случаях общее решение неоднородного уравнения (4.4.6) или (4.4.4) содержит произвольные константы.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4.4.1. *Пусть в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (4.4.4) или (4.4.6) коэффициенты* $A_0, A_1, \dots, A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.4.16) являются вещественными и разными. Кроме того, если для некоторого* i $(i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $p_i > 0$, *тогда пусть функция* $g(x) \in \tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, \vec{1}; \max_i\{p_i\}, 0\right)$. *Также* $K(t,x) \in C_{11}^{+}(R)$ *и ядро* $K(t,x) = K_1^*\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right)$ *имеет свёрточный вид (4.4.5). Тогда, в случае выполнения условий (4.4.20), (4.4.21) и (4.4.22), общее решение неоднородного уравнения (4.4.4) выражается соответственно по одной из формул (4.4.23), (4.4.24) и (4.4.25).*

II. В случае (4.4.11) сначала для функции

$$\Pi_2^+(p) = \frac{N_1^2}{p-p_1} + \frac{N_2^2}{(p-p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(p-p_1)^{n+1}}$$

восстанавливаем оригинал в виде

$$\pi_2^+(x) = \pi_2^{*,+}\left(\frac{x}{1-x}\right) = N_1^2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1} + \frac{N_2^2}{1!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) +$$

$$+ \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{n!}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{p_1}\ln^n\left(\frac{x}{1-x}\right). \quad (4.4.26)$$

Теперь, записывая равенство (4.4.7) в виде

$$Z(p) = \left(\frac{N_1^2}{-p-p_1} + \frac{N_2^2}{(-p-p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(-p-p_1)^{n+1}}\right)G(p),$$

на основе следствия 2.8.2., с учётом того что $g^*\left(\frac{t}{1-t}\right) = g(t)$, для функции $Z(p)$ восстанавливаем оригинал в виде

$$z(x) = \int_x^1 \left[N_1^2\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1} + \frac{N_2^2}{1!}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \frac{N_{n+1}^2}{n!}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1}\ln^n\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \quad (4.4.27)$$

Если $p_1 > 0$, тогда подынтегральное выражение в (4.4.27) в верхнем пределе интегрирования имеет особенности степенного характера. Поэтому для сходимости интегралов в правой части (4.4.27) требуем, чтобы функция $g(x)$ принадлежала классу $\tilde{C}_{11}^+\left(\frac{1}{2}, \vec{1}; p_1, 0\right)$.

Если $p_1 < 0$, тогда подынтегральное выражение в (4.4.27) в верхнем пределе интегрирования имеет особенности логарифмического характера. Поэтому для сходимости интегралов в правой части (4.4.27) требуем, чтобы функция $g(x)$ принадлежала классу $\tilde{C}_{11}^+\left(\frac{1}{2}, \vec{1}; \varepsilon, 0\right), (\varepsilon > 0)$.

Далее, подставляя решение (4.4.18) в однородное уравнение (4.4.9) убедимся, что оно будет решением этого уравнения, если выполняется условие $p_1 > 0$. В этом случае общее решение неоднородного уравнения (4.4.4) выражается равенством

$$z(x)=c_1\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}+c_2\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)+\cdots+c_{n+1}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}\ln^n\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

$$+\int_x^1\left[N_1^2\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1}+\frac{N_2^2}{1!}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1}\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{N_{n+1}^2}{n!}\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{p_1}\ln^n\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \qquad (4.4.28)$$

В случае $p_1<0$, однородное уравнение (4.4.9) не имеет нетривиальных решений и поэтому неоднородное уравнение (4.4.4) имеет только единственное решение и это решение выражается формулой (4.4.27).

Таким образом, доказана:

Теорема 4.4.2. *Пусть в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (4.4.4) или (4.4.6) коэффициенты* $A_0,A_1,\dots,A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.4.16) являются вещественными и равными. Кроме того, пусть при выполнении условий* $p_1>0$ *и* $p_1<0$ *функция* $g(x)$ *принадлежит соответственно классам* $\tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},\vec{1};p_1,0\right)$ *и* $\tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},\vec{1};\varepsilon,0\right),(\varepsilon>0)$. *Также* $K(t,x)\in C_{11}^{+}(R)$ *и ядро* $K(t,x)=K_1^*\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right)$ *имеет свёрточный вид (4.4.5). Тогда, в случае выполнения условий* $p_1<0$ *и* $p_1>0$, *общее решение неоднородного уравнения (4.4.4) выражается соответственно равенствами (4.4.27) и (4.4.28).*

III. В случае (4.4.12) для функции

$$\Pi_3^+(p)=\frac{N_1^3p+N_1^4}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\frac{N_2^3p+N_2^4}{(p-\alpha_2)^2+\beta_2^2}+\cdots+\frac{N_k^3p+N_k^4}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}$$

восстанавливаем оригинал. Для этого сначала функцию $\Pi_3^+(p)$приводим к виду

$$\Pi_3^+(p)=N_1^3\frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+N_1^5\frac{\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+$$

$$+N_k^3\frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}+N_k^5\frac{\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2},$$

а затем

$$\pi_3^+(x) = \pi_3^{*,+}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + N_1^5\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right] + \cdots$$
$$+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right] + N_k^5\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]\right], \tag{4.4.29}$$

где $N_i^5 = \frac{N_i^3\alpha_k + N_i^4}{\beta_i}, \left(i = \overline{1,k}\right)$

Теперь представим равенство (4.4.7) в виде

$$Z(p) = \left(\frac{N_1^3(-p) + N_1^4}{(-p-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{N_2^3(-p) + N_2^4}{(-p-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{N_k^3(-p) + N_k^4}{(-p-\alpha_k)^2 + \beta_k^2}\right)G(p),$$

и на основе следствия 2.8.2., с учётом того, что $g^*\left(\frac{t}{1-t}\right) = g(t)$, для функции $Z(p)$ восстанавливаем оригинал в виде

$$z(x) = \int_x^1 \left[\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left. + N_1^5\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right] + \cdots +$$
$$+\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right.$$
$$\left.\left. + N_k^5\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right]\right]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}. \tag{4.4.30}$$

Если в полученном решении (4.4.30) выполняется условие $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 0$, тогда интегралы в правой части (4.4.30) будут сходиться для всякой функции $g(x) \in C_{11}^+\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Если для некоторого i, $\left(i = \overline{1,k}\right), \alpha_i > 0$, тогда для сходимости интегралов в правой части (4.4.30) требуем, чтобы функция $g(x)$ принадлежала классу $\tilde{C}_{11}^+\left(\frac{1}{2}, \vec{1}; \max_i\{\alpha_i\}, 0\right)$.

Легко можно показать, что если выполняется условие $\alpha_i > 0$ для любого i $(i = \overline{1,k})$, тогда решение вида (4.4.19) будет общим решением однородного

уравнения (4.4.9). Если для некоторых i $(i = \overline{1,k})$ выполняется условие $\alpha_i < 0$, то необходимо отбросить каждое частное решения вида

$$z_i(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_i} \cos\left[\beta_i \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right], z_{i+1}(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha_i} \sin\left[\beta_i \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]$$

из общего решения (3.4.19). Таким образом, например, в трёх случаях, когда

$$1.\ 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \tag{4.4.31}$$

$$2.\ \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i < 0 < \alpha_{i+1} < \alpha_{i+2} < \cdots < \alpha_k \tag{4.4.32}$$

и

$$3.\ \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 0, \tag{4.4.33}$$

общее решение неоднородного сопряжённого уравнения (4.4.6) илио (4.4.4) выражается соответственно формулами

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_1} \left[c_1 \cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_2 \sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_k} \left[c_{2k-1} \cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_{2k} \sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] +$$
$$+ \int_x^1 \left[\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_1} \left[N_1^3 \cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left. + N_1^5 \sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)\right]\right] + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_k} \left[N_k^3 \cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)\right]\right.$$
$$\left.\left. + N_k^5 \sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)\right]\right]\right] g(t) \frac{dt}{t(1-t)}, \tag{4.4.34}$$

$$z(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_{i+1}} \left[c_{i+1} \cos\left[\beta_{i+1} \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_{i+2} \sin\left[\beta_{i+1} \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] + \cdots$$
$$+ \left(\frac{1-x}{x}\right)^{\alpha_k} \left[c_{2k-1} \cos\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] + c_{2k} \sin\left[\beta_k \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)\right]\right] +$$
$$+ \int_x^1 \left[\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_1} \left[N_1^3 \cos\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)\right]\right.\right.$$
$$\left. + N_1^5 \sin\left[\beta_1 \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{t}{1-t}\right)\right]\right] + \cdots +$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right.$$

$$\left.+N_k^5\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right]\Bigg]g(t)\frac{dt}{t(1-t)} \qquad (4.4.35)$$

и

$$z(x)=\int_x^1\Bigg[\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_1}\left[N_1^3\cos\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right.$$

$$\left.+N_1^5\sin\left[\beta_1\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right]+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)^{\alpha_k}\left[N_k^3\cos\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right.$$

$$\left.+N_k^5\sin\left[\beta_k\ln\left(\frac{1-x}{x}\cdot\frac{t}{1-t}\right)\right]\right]\Bigg]g(t)\frac{dt}{t(1-t)}, \qquad (4.4.36)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{2k}$ являются произвольными константами.

Отсюда видно, что неоднородное уравнение (4.4.6) или (4.4.4) только в случае выполнения условия (4.4.33) имеет единственное решение, а в других случаях общее решение неоднородного уравнения (4.4.6) или (4.4.4) содержит произвольные константы.

Таким образом доказана теорема:

Теорема 4.4.3. *Пусть в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (4.4.4) или (4.4.6) коэффициенты* $A_0, A_1, \dots, A_n$ *такие, что корни характеристического уравнения (4.4.16) являются комплексно-сопряжёнными. Кроме того, если для некоторого* i $(i=\overline{1,n+1})$ *выполняется условие* $\alpha_i>0$, *тогда пусть функция* $g(x)\in\tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2},\vec{1};\max_i\{\alpha_i\},0\right)$. *Также* $K(t,x)\in C_{11}^{+}(R)$ *и ядро* $K(t,x)=K_1^*\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right)$ *имеет свёрточный вид (4.4.5). Тогда, в случае выполнения условий (4.4.31), (4.4.32) и (4.4.33), общее решение неоднородного уравнения (4.4.4) выражается соответственно по одной из равенств (4.4.34), (4.4.35) и (4.4.36).*

Замечание 4.4.1. *В случае, когда среди корней характеристического уравнения (4.4.16) имеются вещественно - разные и вещественно - равные, вещественно - разные и комплексно - сопряжённые, вещественно - равные и комплексно – сопряжённые, тоже имеют место утверждения, подобные утверждениям вышеприведённой теоремы.*

Подытоживая вышеприведённые результаты, аналог теоремы Фредгольма для уравнений (4.3.3), (4.4.4) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4.4.4. (Аналог первой теоремы Фредгольма). *Если для любого* $i, (i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $Rep_i < 0$, *то, как данное интегро-дифференциальное уравнение (4.3.3), так и сопряжённое с ним уравнение (4.4.4), однозначно разрешимы при любом свободном члене* $f(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $g(x) \in \tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. *Соответствующие однородные уравнения имеют при этом только тривиальные решения.*

Теорема 4.4.5. (Аналог второй теоремы Фредгольма). *Если для некоторого* $i\ (i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $Rep_i > 0$, *то однородное интегро-дифференциальное уравнение, которое соответствует неоднородному сопряжённому уравнению (4.4.4), имеет нетривиальные решения, а однородное уравнение, которое соответствует неоднородному уравнению (4.3.3), имеет только нулевое решение. Общее число линейно - независимых решений однородного сопряжённого интегро-дифференциального уравнения, которое соответствует неоднородному уравнению (4.4.4), конечно и равно* $n+1$ *и оно достигается, когда* $Rep_i > 0, (i = \overline{1, n+1})$.

Теорема 4.4.6. (Аналог третьей теоремы Фредгольма). *Неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (4.3.3) при любом свободном члене* $f(x) \in C_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *однозначно разрешимо, а в случае, когда для некоторого* $i, (i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $Rep_i > 0$, *для разрешимости неоднородного сопряжённого уравнения(4.4.4) достаточно, чтобы его свободный член* $g(x)$ *принадлежал классу* $\tilde{C}_{11}^{+}\left(\frac{1}{2}, \vec{1}; \max_i\{Rep_i\}, 0\right)$.

Теорема 4.4.7. (Аналог четвертой теоремы Фредгольма). *Интегро-дифференциальное уравнение (4.3.3) собственных значений и собственных функций не имеет, а сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение (4.4.4) имеет континуум множества собственных чисел, максимальная кратность которых равна* $n + 1$.

Выводы по главе 4

Изучен вопрос о разрешимости интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре. Решение исследуемого уравнения приводится к решению некоторого операторно-дифференциального уравнения n – го порядка.

В параграфе 4.2. построено общее решение сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической особенностью в ядре. В трёх случаях доказаны три теоремы о разрешимости сопряжённого уравнения. Также построен аналог теоремы Фредгольма для исследуемого уравнения.

Далее, исследовано одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа сложной свёртки с логарифмическим ядром.

Доказаны три теоремы о разрешимости сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка типа сложной свёртки с логарифмическим ядром.

Выявлено, что однородное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки всегда имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение всегда имеет единственное решение. При этом сопряжённое однородное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки могут иметь нетривиальные решения, а неоднородное уравнение в зависимости от правой части уравнения либо вовсе не имеет решения, либо имеет решения, зависящие от некоторых произвольных констант.

ГЛАВА 5
ПОСТРОЕНИЕ ОСНОВ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ОСОБОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА D_x^α

В этой главе исследуются различные операторно-дифференциальные уравнения, которые построены с помощью сильно-особого дифференциального оператора $D_x^\alpha = x^\alpha \frac{d}{dx}$, где α>1. Глава состоит из восьми параграфов. В первой и второй параграфах находится общий интеграл для простейших операторно-дифференциальных уравнений, построенных с помощью дифференциального оператора D_x^α. В третьем параграфе строится аналог формулы Коши для операторно-дифференциального уравнения n-го порядка. Далее, в четвертом параграфе строятся основы операционного исчисления для нахождения общего интеграла полного операторно-дифференциального уравнения n-го порядка, которое построено при помощи дифференциального оператора D_x^α.

Пятый параграф пятой главы посвящён изучению основных свойств нового S_α – интегрального преобразования.

В шестом параграфе исследуется операторно-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами с помощью S_α- интегрального преобразования.

Далее, в седьмом параграфе пятой главы исследуется задача о разрешимости одного класса одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка типа сложной свёртки. Ядро изучаемого уравнения содержит сильную особенность порядка $n-1$ степенного характера. Основной результат этого параграфа изложен в виде теорем 5.7.1.-5.7.3.

В восьмом параграфе рассматривается сопряженное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки. Ядро сопряженного уравнения тоже содержит точки особенности степенного характера. Доказывается, что в отличие от несопряженного уравнения однородное сопряжённое уравнение всегда имеет только тривиальное решение. Результат об

однозначной разрешимости сопряженного уравнения сформулирован в виде теоремы 5.8.1. Далее, в конце этого параграфа строится аналог теоремы Фредгольма о разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки и сопряженного с ним уравнения.

§5.1. Понятие об особом дифференциальном операторе D_x^α

Во второй главе был поставлен вопрос об обобщении дифференциального оператора Эйлера $D_x = x\frac{d}{dx}$ до вида $D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$ и исследовании задачи, связанной с этим последним оператором. Оказалось, что для оператора D_x^{11} помимо классических методов, можно построить и основы операционных методов исследования. Другим вариантом обобщения дифференциального оператора Эйлера $D_x = x\frac{d}{dx}$ является оператор $D_x^\alpha = x^\alpha\frac{d}{dx}$, где $\alpha > 1$. В работах [26-А], [36-А], [45-А], [48-А] исследованы интегро-дифференциальные уравнения с оператором дифференцирования D_x^α.

В настоящей главе исследуем задачи, связанные с последним оператором, и предложим другую методику для исследования уравнений, построенных с помощью этого оператора

Пусть Г=$\{x: 0 < x < \infty\}$ - множество точек на вещественной оси. На Г рассмотрим особый дифференциальный оператор вида

$$D_x^\alpha = x^\alpha\frac{d}{dx}, \tag{5.1.1}$$

где $\alpha > 1$. В дальнейшем, если особо не оговорено, условие $\alpha > 1$ всегда считается выполненным. Высшие степени оператора (5.1.1) будем определять следующим образом

$$(D_x^\alpha)^n = D_x^\alpha(D_x^\alpha)^{n-1} = \cdots = \underbrace{D_x^\alpha\ D_x^\alpha \ldots . D_x^\alpha}_{n-\text{раз}}. \tag{5.1.2}$$

Как и для высших степеней оператора D_x^{11} условимся, что в правой части равенства (5.1.2) последний оператор действует первым, перед последним действует второй и т.д. первый оператор действует последним т.е.

$$\underbrace{D_x^\alpha\ D_x^\alpha \dots . D_x^\alpha}_{n-\text{раз}} = \underbrace{\overbrace{D_x^\alpha}^{n}\ \overbrace{D_x^\alpha}^{n-1} \dots . \overbrace{D_x^\alpha}^{2}\ \overbrace{D_x^\alpha}^{1}}_{n-\text{раз}}. \qquad (5.1.3)$$

Введем в рассмотрение функцию $\psi(x) = \omega_\alpha(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$. Действуя на функцию $\omega_\alpha(x)$ оператором D_x^α, получим:

$$D_x^\alpha\big(\omega_\alpha(x)\big) = x^\alpha\left(-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right)' = x^\alpha \cdot \frac{1}{x^\alpha} = 1.$$

Отсюда функция вида $\psi(x) = \omega_\alpha(x)$ для оператора D_x^α играет ту же роль, что обычная переменная x играет для обычного оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$.

Далее, действуя оператором D_x^α на функцию вида $\psi(x) = e^{\omega_\alpha(x)}$, увидим, что

$$D_x^\alpha\big(e^{\omega_\alpha(x)}\big) = x^\alpha e^{\omega_\alpha(x)}\left(-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right)' = x^\alpha e^{\omega_\alpha(x)}\frac{1}{x^\alpha} = e^{\omega_\alpha(x)}$$

и поэтому функция вида $\psi(x) = e^{\omega_\alpha(x)}$ для оператора D_x^α играет ту же роль, что показательная функция $\varphi(x) = e^x$ играет для обычного оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$.

Теперь, пусть функция $f(x) \in C(0,\infty)$. Если для каждой функции этого класса делаем замену переменной по формуле $x = \omega_\alpha^{-1}(t)$, т.е.

$$f(x) = f\big(\omega_\alpha^{-1}(t)\big) = g(t) = g\big(\omega_\alpha(x)\big),$$

тогда функция $g(t)$ как функция переменной t принадлежит классу $C(-\infty,0)$. Далее, пере обозначая

$$f(x) = f^*\big(\omega_\alpha(x)\big), g(t) = g^*\big(\omega_\alpha^{-1}(t)\big),$$

через $\mathrm{C}_\alpha(0,\infty)$ обозначим класс таких сложных функций $f(x) = f^*\big(\omega_\alpha(x)\big)$, которые зависят от функции $\psi(x) = \omega_\alpha(x)$, как от аргумента. Таким же образом через $C_\alpha^n(0,\infty)$ обозначим класс таких функций $f(x)$, которые n раз D_x^α дифференцируемы и $(D_x^\alpha)^n f(x) \in \mathrm{C}_\alpha(0,\infty)$. Если $f(x) \in C_\alpha^n(0,\infty)$, тогда соответствующие функции $g(t)$, где $t = \omega_\alpha(x)$, будут принадлежать классу $C^n(0,\infty)$. Действительно,

$$D_x^\alpha f\big(\omega_\alpha(x)\big) = x^\alpha f'\big(\omega_\alpha(x)\big)\frac{1}{x^\alpha} = f'\big(\omega_\alpha(x)\big) = g'(t);$$

$$(D_x^\alpha)^{\,2} f = D_x^\alpha D_x^\alpha f = D_x^\alpha f'\big(\omega_\alpha(x)\big) = f''\big(\omega_\alpha(x)\big) = g''(t);$$

……....

$$(D_x^\alpha)^{\,n} f = D_x^\alpha (D_x^\alpha)^{\,n-1} f = D_x^\alpha f^{(n-1)}\big(\omega_\alpha(x)\big) = f^{(n)}\big(\omega_\alpha(x)\big) = g^{(n)}(t).$$

§5.2. Построение общего интеграла для простейших операторно-дифференциальных уравнений

На Г рассмотрим операторно-дифференциальное (О-Д) уравнение:

$$D_x^\alpha y = f(x), \qquad (5.2.1)$$

где $f(x) \in \mathrm{C}_\alpha(\Gamma)$. Для решения О-Д уравнения (5.2.1), прежде всего, записываем это уравнение в обычном виде и после, непосредственным интегрированием получим:

$$x^\alpha \frac{d}{dx} y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{x^\alpha} \Rightarrow y = \int f(x)\frac{dx}{x^\alpha} + c_1.$$

Или с помощью определенного интеграла

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\frac{dt}{t^\alpha} + c_1,$$

где $x_0 \in \Gamma$ – фиксированное достаточно близкое к нулю число, $x \in \Gamma$ меняется в пределах Г, c_1 - произвольная константа. Отсюда видно, что оператор

$$I_{x_0}^x(\cdot) = \int_{x_0}^{x} (\cdot)\frac{dt}{t^\alpha}$$

является обратным оператором к оператору D_x^α, который иногда обозначаем в виде $(D_x^\alpha)^{-1}$. Поскольку оператор $I_{x_0}^x$ определяется с точностью до произвольной константы c_1, поэтому данные операторы являются взаимно обратными правосторонними, но не левосторонними операторами, т.е. в общем случае

$$D_x^\alpha I_{x_0}^x f(x) \neq I_{x_0}^x D_x^\alpha f(x).$$

Они будут равными, если принять значения произвольной константы равными $f(x_0)$ т.е. $c_1 = f(x_0)$. Действительно, поскольку

$$D_x^\alpha (D_x^\alpha)^{-1} f(x) = x^\alpha \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\frac{dt}{t^\alpha} + c_1\right) =$$

$$= x^\alpha \frac{f(x)}{x^\alpha} = f(x)$$

$$(D_x^\alpha)^{-1} D_x^\alpha f(x) = \int_{x_0}^{x} t^\alpha \frac{d}{dt} f(t)\frac{dt}{t^\alpha} + c_1 = \int_{x_0}^{x} df(t) + c_1 =$$

$$= f(t)\Big|_{x_0}^{x} + c_1 = f(x) - f(x_0) + c_1,$$

тогда $D_x^\alpha I_{x_0}^x f(x) = I_{x_0}^x D_x^\alpha f(x)$, только если $c_1 = f(x_0)$.

§5.3. Построение аналога формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения n - го порядка с оператором дифференцирования D_x^α

На Г рассмотрим О-Д уравнение n - го порядка вида

$$(D_x^\alpha)^n y = f(x), \tag{5.3.1}$$

где $f(x) \in C_\alpha(Г)$. Если в (5.3.1), вместо D_x^α стоит обычный оператор дифференцирования $D_x^0 = \frac{d}{dx}$, то решение такого уравнения в каждом учебнике по теории обыкновенных дифференциальных уравнений получено в форме Коши. Построим аналог формулы Коши для уравнения (5.3.1). Очевидно, что это уравнение тоже легко интегрируется в квадратурах. Действительно, так как $(D_x^\alpha)^n y = D_x^\alpha (D_x^\alpha)^{n-1} y$, то на основе решения уравнения (5.2.1) получим

$$(D_x^\alpha)^{n-1} y = \int_{x_0}^{x} f(t_1)\frac{dt_1}{t_1^\alpha} + c_1,$$

где c_1-произвольная постоянная.

Аналогичными рассуждениями находим

$$(D_x^\alpha)^{n-2}y = \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2^\alpha}\,\frac{dt_1}{t_1^\alpha} + c_1\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(x_0)\big) + c_2\,;$$

……..

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t_1}\dots\int\limits_{x_0}^{t_{n-1}}}_{n-\text{раз}} f(t_n)\frac{dt_n}{t_n^\alpha}\,\frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}^\alpha}\dots\frac{dt_1}{t_1^\alpha} +$$

$$+\frac{c_1}{(n-1)!}\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(x_0)\big)^{n-1} + \frac{c_2}{(n-2)!}\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(x_0)\big)^{n-2} + \cdots$$

$$+\frac{c_{n-1}}{1!}\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(x_0)\big) + c_n. \qquad (5.3.2)$$

Полученное решение (5.3.2) является общим решением уравнения (5.3.1).

Здесь функция

$$y = \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t_1}\dots\int\limits_{x_0}^{t_{n-1}}}_{n-\text{раз}} f(t_n)\frac{dt_n}{t_n^\alpha}\,\frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}^\alpha}\dots\frac{dt_1}{t_1^\alpha}$$

содержит n квадратур. Можно его заменить одной квадратурой, т.е. легко можно построить аналог формула Коши. Для этого мы можем рассматривать интеграл

$$\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2^\alpha}\,\frac{dt_1}{t_1^\alpha} = \int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt_1}{t_1^\alpha}\int\limits_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2^\alpha}$$

как повторный и после, меняя порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt_1}{t_1^\alpha}\int\limits_{x_0}^{t_1} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2^\alpha} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t_2)\frac{dt_2}{t_2^\alpha}\int\limits_{t_2}^{x}\frac{dt_1}{t_1^\alpha} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} f(t_2)\omega_\alpha(t_1)\Big|_{t_2}^{x}\frac{dt_2}{t_2^\alpha} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t_2)[\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t_2)]\frac{dt_2}{t_2^\alpha} =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x}[\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t_2)]f(t_2)\frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} = |t_2 = t| =$$

$$= \int_{x_0}^{x} [\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)] f(t) \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_1} f(t_2) \frac{dt_2}{t_2(1-t_2)} \frac{dt_1}{t_1(1-t_1)} = \int_{x_0}^{x} [\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)] f(t) \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Аналогично находим:

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_1} \int_{x_0}^{t_2} f(t_3) \frac{dt_3}{t_3^\alpha} \frac{dt_2}{t_2^\alpha} \frac{dt_1}{t_1^\alpha} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{dt_1}{t_1^\alpha} \int_{x_0}^{t_1} [\omega_\alpha(t_1) - \omega_\alpha(t_2)] \cdot f(t_2) \frac{dt_2}{t_2^\alpha} =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t_2) \frac{dt_2}{t_2^\alpha} \int_{t_2}^{x} [\omega_\alpha(t_1) - \omega_\alpha(t_2)] \frac{dt_1}{t_1^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t_2)]^2 f(t_2) \frac{dt_2}{t_2^\alpha} = |t_2 = t| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} [\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)]^2 f(t) \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_1} \dots \int_{x_0}^{t_{n-1}}}_{n-\text{раз}} f(t_n) \frac{dt_n}{t_n^\alpha} \frac{dt_{n-1}}{t_{n-1}^\alpha} \dots \frac{dt_1}{t_1^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} [\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)]^{n-1} f(t) \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (5.3.1) можем представить в виде:

$$y(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{x_0}^{x}[\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)]^{n-1}f(t)\frac{dt}{t^\alpha}+$$

$$+\frac{c_1}{(n-1)!}\big(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(x_0)\big)^{n-1}+\frac{c_2}{(n-2)!}\big(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(x_0)\big)^{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{c_{n-1}}{1!}\big(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(x_0)\big)+c_n. \qquad (5.3.3)$$

Решение (5.3.3) является общим решением уравнения (5.3.1) в форме Коши.

§5.4. Построение основ операционного метода в виде S_α – интегрального преобразования

Через $P_M^n(x)$ - обозначим полином:

$$P_M^n(x)\equiv x^n+M_1x^{n-1}+\cdots+M_{n-1}x+M_n$$

и данному полиному сопоставим вырождающийся дифференциальный оператор с особым оператором дифференцирования

$$P_M^n(D_x^\alpha)\equiv(D_x^\alpha)^n+M_1(D_x^\alpha)^{n-1}+\cdots+M_{n-1}D_x^\alpha+M_n$$

где $D_x^\alpha=x^\alpha\frac{d}{dx},(\alpha>1)$ - дифференциальный оператор с сильной особенностью в точке $x=0$.

Как в первой главе, полином $P_M^n(x)$, отвечающий оператору $P_M^n(D_x^\alpha)$, будем называть символом оператора $P_M^n(D_x^\alpha)$.

Пусть на $\Gamma=\{x: 0<x<\infty\}$ задано операторно-дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$P_M^n(D_x^\alpha)y(x)=f(x), \qquad (5.4.1)$$

где $f(x)\in C_\alpha(\Gamma)$ - заданная непрерывная функция на Γ.

Уравнение вида (5.4.1) исследовано классическими методами, в работах Н.Раджабова и его учеников. Например, в работах [241]-[244], [250] были исследованы уравнения второго и третьего порядка вида (5.4.1). Некоторые случаи уравнений четвёртого и n-го порядка вида (5.4.1) тоже были исследованы классическими методами.

Для исследования дифференциальных уравнений вида (5.4.1) с постоянными коэффициентами одним из эффективных методов исследования являются операционные методы исследования.

В этом параграфе мы постараемся построить основы операционного исчисления для оператора $D_x^\alpha = x^\alpha \frac{d}{dx}, (\alpha > 1)$.

Напомним, что, если $g(t)$ является функцией оригиналом и для неё выполняется условие

$$|g(t)| \leq \begin{cases} c_1 e^{at}, & \text{если} \quad t \in (0, \infty), \\ 0, & \text{если} \quad t \notin (0, \infty), \end{cases} \tag{5.4.2}$$

тогда правостороннее интегральное преобразование Лапласа данной функции определяется по формуле

$$G(p) = \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt. \tag{5.4.3}$$

Обратное интегральное преобразование в этом случае определяется по формуле

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} G(p) dp\,, \;\; \gamma > \alpha, \tag{5.4.4}$$

где интеграл в правой части этой формулы понимается в смысле главного значения т.е. в виде предела

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\gamma - iN}^{\gamma + iN} e^{pt} G(p) dp.$$

В формулах (5.4.3), (5.4.4) произведём замену переменной по формуле

$$t = -\omega_\alpha(x), \tag{5.4.5}$$

где $\omega_\alpha(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$. Тогда соотношения (5.4.3) и (5.4.4) примут вид

$$G(p) = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} g\big(-\omega_\alpha(x)\big) \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{5.4.6}$$

и

$$g\big(-\omega_\alpha(x)\big) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)}G(p)dp. \qquad (5.4.7)$$

Вводя обозначения $f(x) = g\big(-\omega_\alpha(x)\big)$, $F(p) = G(p)$, получим следующие формулы

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} f(x)\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad (5.4.8)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)}F(p)dp. \qquad (5.4.9)$$

Определение 5.4.1. S_α - *интегральным преобразованием функции действительного переменного* $f(x)$ *называется функция комплексного переменного* $F(p)$*, определяемая формулой (5.4.8).*

Определение 5.4.2. *Обратное* S_α - *интегральным преобразованием функции комплексного переменного* $F(p)$ *называется функция действительного переменного* $f(x)$*, определяемая формулой (5.4.9).*

Для выражения S_α - интегрального преобразования функции $f(x)$ введем следующие сокращённые записи:

$$F(p) = S_\alpha\{f(x)\} = S_\alpha[f(x)](p),$$

или же, если $F(p)$ будет S_α – интегральным преобразованием функции $f(x)$, то:

$$f(x) \risingdotseq F(p).$$

Для обратного преобразования используем обозначения:

$$f(x) = (S_\alpha)^{-1}\{F(p)\} = (S_\alpha)^{-1}[F(p)](x).$$

Далее, легко можно показать, что при замене (5.4.5) условие (5.4.2) перейдёт в условие

$$|f(x)| \le \begin{cases} c_1 e^{-a\omega_\alpha(x)}, & \text{если } \ x \in (0,\infty), \\ 0, & \text{если } \ x \notin (0,\infty), \end{cases} \qquad (5.4.10)$$

Покажем, что, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5.4.10), тогда интеграл в правой части (5.4.8) абсолютно сходится, если комплексное число p

удовлетворяет условию $\operatorname{Re} p > a$, причём, в указанной полуплоскости функция $F(p)$ аналитична. Действительно, имеем:

$$\left|\int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} f(x)\frac{dx}{x^\alpha}\right| \le \int_0^\infty \left|e^{p\omega_\alpha(x)}\right||f(x)|\frac{dx}{x^\alpha} \le c_1\int_0^\infty e^{\operatorname{Re}p\omega_\alpha(x)}e^{-a\omega_\alpha(x)}\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= c_1\int_0^\infty e^{(\operatorname{Re}p-a)\omega_\alpha(x)}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{c_1}{\operatorname{Re}p-a}\int_0^\infty e^{(\operatorname{Re}p-a)\omega_\alpha(x)}d[(\operatorname{Re}p-a)\omega_\alpha(x)] =$$

$$= \frac{c_1}{\operatorname{Re}p-a}e^{(\operatorname{Re}p-a)\omega_\alpha(x)}\Big|_0^\infty = \frac{c_1}{\operatorname{Re}p-a},$$

если только $\operatorname{Re} p > a$.

Таким образом, S_α – интегральное преобразование определено для комплекснозначных функций $f(x)$, заданных на интервале $(0,\infty)$, для которых произведение $e^{p\omega_\alpha(x)}f(x) \in L_\alpha(0,\infty)$ при $\operatorname{Re} p > a$. Здесь через L_α обозначен класс таких абсолютно интегрируемых функций $f(x)$, для которых существует и конечен следующий интеграл

$$\int_0^\infty |f(x)|\frac{dx}{x^\alpha} < \infty,$$

то есть

$$L_\alpha(0,\infty) = \left\{f(x)\colon \int_0^\infty |f(x)|\frac{dx}{x^\alpha} < \infty\right\}.$$

Через $\tilde{C}_\alpha(0,\infty)$ обозначим класс таких функций $f(x) \in C_\alpha(0,\infty)$, которые удовлетворяют условию (5.4.10) и будем называть его функцией – оригиналом. S_α – преобразование функции класса $\tilde{C}_\alpha(0,\infty)$ будем называть просто изображением. Также в условии (5.4.10) число a будем называть показателем роста функции $f(x)$ в интервале $(0,\infty)$.

Далее, как в первой главе, построим аналог основных теорем и свойств интегрального преобразования Лапласа для S_α – интегрального преобразования.

§5.5. Основные свойства и теоремы S_α – интегрального преобразования

Предположим, что в дальнейших выкладках всегда функция $f(x)$ удовлетворяет условию (5.4.10) с показателем роста a. Приводим основные свойства S_α - интегрального преобразования в виде следующей теоремы:

Теорема 5.5.1. (Свойство линейности). *Если* $f_1(x) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(x) \risingdotseq F_2(p)$, *то для любых* $A, B \in R$ *имеем:*

$$Af_1(x) \pm Bf_2(x) \risingdotseq AF_1(p) \pm BF_2(p),$$

где $Re\, p = \gamma > max\{a_0^1,\ a_0^2\}$, a_0^1, a_0^2 *- показатели роста функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *на интервале* $(0, \infty)$.

Доказательство: На основе определения S_α −интегрального преобразования и свойства определённых интегралов имеем:

$$S_\alpha\{Af_1(x) \pm Bf_2(x)\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}[Af_1(x) \pm Bf_2(x)]\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= A\int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}f_1(x)\frac{dx}{x^\alpha} \pm B\int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}f_2(x)\frac{dx}{x^\alpha} = F_1(p) \pm BF_2(p).$$

Теорема 5.5.2. (Теорема подобия). *Если* $g\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq G(p)$ *и* $k > 0$, *то при* $Re\ \frac{p}{k} > a$ *справедливо равенство*

$$g\big(-k\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq \frac{1}{k}\ G\left(\frac{p}{k}\right).$$

Доказательство: Действительно, имеем:

$$S_\alpha\big\{g\big(-k\omega_\alpha(x)\big)\big\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}g\big(-k\omega_\alpha(x)\big)\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} -k\omega_\alpha(x) = -\omega_\alpha(y),\ \ x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ \dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dy}{y^\alpha}\ ,\ \ x = \infty \Rightarrow y = \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{\frac{p}{k}\omega_\alpha(y)}g\big(-\omega_\alpha(y)\big)\frac{dy}{y^\alpha} = \frac{1}{k}\ G\left(\frac{p}{k}\right),$$

если только $\mathrm{Re}\,\frac{p}{k} > a$.

Теорема 5.5.3. (Теорема смещения). *Если* $f(x) \risingdotseq F(p)$ *и* k *- любое действительное или комплексное число, то*

$$e^{-k\omega_\alpha(x)} f(x) \risingdotseq F(p-k),$$

при $Re(p-k) > a$.

Доказательство: Действительно, имеем:

$$S_\alpha\{e^{-k\omega_\alpha(x)} f(x)\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} e^{-k\omega_\alpha(x)} f(x) \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty e^{(p-k)\omega_\alpha(x)} f(x) \frac{dx}{x^\alpha} = F(p-k),$$

где последний несобственный интеграл существует, если

$$\mathrm{Re}(p-k) > a \qquad \text{или} \qquad \mathrm{Re}\,p > a + \mathrm{Re}\,k.$$

Из этого свойства следует, что

$$e^{k\omega_\alpha(x)} f(x) \risingdotseq F(p+k),$$

при $\mathrm{Re}(p+k) > a$ или $\mathrm{Re}\,p > a - \mathrm{Re}\,k$.

Теорема 5.5.4. (Теорема о дифференцировании оригинала). *Если* $f(x) \risingdotseq F(p)$ *и* $D_x^\alpha f(x)$ *- оригинал, то*

$$D_x^\alpha f(x) \risingdotseq -pF(p) + f(\infty).$$

Доказательство: Найдём S_α- преобразования функции $D_x^\alpha f(x)$

$$S_\alpha\{D_x^\alpha f(x)\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} D_x^\alpha f(x) \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} df(x) =$$

$$= e^{p\omega_\alpha(x)} f(x)\Big|_0^\infty - p\int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} f(x) \frac{dx}{x^\alpha} = -pS_\alpha(p) + f(\infty)$$

Здесь мы учли, что

$$\lim_{x\to 0} e^{p\omega_\alpha(x)} f(x) = 0,$$

т. к.

$$\left|e^{p\omega_\alpha(x)} f(x)\right| \le e^{\mathrm{Re}p\omega_\alpha(x)} |f(x)| \le$$

$$\leq Me^{\mathrm{Re}p\omega_\alpha(x)}e^{-a\omega_\alpha(x)} = Me^{(\mathrm{Re}p-a)\omega_\alpha(x)} \to 0$$

при $x \to 0$, если $\mathrm{Re}\, p = \gamma > a$.

Из этой теоремы вытекают следующие следствия:

Следствия 5.5.1. *Если* $f(x) \risingdotseq F(p)$ *и* $D_x^\alpha f(x)$, $(D_x^\alpha)^2 f(x), \ldots,$ $(D_x^\alpha)^n f(x)$ *являются оригиналами, тогда*

$$(D_x^\alpha)^n f(x) \risingdotseq (-p)^n F(p) + (-p)^{n-1} f(x)|_{x=\infty} + (-p)^{n-2} D_x^\alpha f(x)|_{x=\infty} + \cdots +$$
$$+(-p)(D_x^\alpha)^{n-2} f(x)|_{x=\infty} + (D_x^\alpha)^{n-1} f(x)|_{x=\infty}\,.$$

Если $f(x)|_{x=\infty} = D_x^\alpha f(x)|_{x=\infty} = \cdots = (D_x^\alpha)^{n-1} f(x)|_{x=\infty} = 0$, то приведённые формулы упрощаются т.е.

$$f(x) \risingdotseq F(p),$$
$$D_x^\alpha f(x) \risingdotseq (-p)\, F(p),$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$(D_x^\alpha)^n f(x) \risingdotseq (-p)^n F(p).$$

Теорема 5.5.5. (Теорема об интегрировании оригинала). *Если* $f(x) \risingdotseq F(p)$ *и* $Re\ p > a > 0$, *тогда*

$$\int_x^\infty f(t)\frac{dt}{t^\alpha} \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство: Пусть $\mathrm{Re}\, p > a > 0$, тогда на основе определения $S_\alpha(p)$ - интегрального преобразования и формулы изменения порядка интегрирования имеем:

$$S_\alpha\left\{\int_x^\infty f(t)\frac{dt}{t^\alpha}\right\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}\int_x^\infty f(t)\frac{dt}{t^\alpha}\frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t^\alpha}\int_0^t e^{p\omega_\alpha(x)}\frac{dx}{x^\alpha} =$$
$$= \int_0^\infty f(t)\left(\frac{1}{p}\, e^{p\omega_\alpha(x)}\Big|_0^t\right)\frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(t)} f(t)\frac{dt}{t^\alpha} = \frac{F(p)}{p}.$$

Теорема 5.5.6. (Теорема о дифференцировании изображения). *Если* $f(x) \risingdotseq F(p)$, *тогда*

$$\omega_\alpha(x) f(x) \risingdotseq \frac{d}{dp}F(p).$$

Доказательство: Действительно, производную аналитической функции $F(p)$ в области её определения $\operatorname{Re} p = \gamma > a$ можно вычислить, дифференцируя подынтегральную функцию в несобственном интеграле по параметру, т.е.

$$\frac{d}{dp}F(p) = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}\omega_\alpha(x)f(x)\frac{dx}{x^\alpha} \risingdotseq S_\alpha\{\omega_\alpha(x)f(x)\},$$

где учтено, что, если $f(x)$ - оригинал, то $\omega_\alpha(x)f(x)$ тоже будет оригиналом.

Применяя доказанную теорему n раз, получим

$$[\omega_\alpha(x)]^n f(x) \risingdotseq \frac{d^n}{dp^n}F(p)$$

или

$$\frac{d^n}{dp^n}F(p) \risingdotseq [\omega_\alpha(x)]^n\, f(x).$$

Определение 5.5.1. *Сложной свёрткой двух функций* $f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)$ *и* $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)$ *называется функция* $h^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)$*, определяемая соотношением*

$$h^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = \int_x^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \int_x^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha}$$

которая обозначается в виде $(f_1^* * f_2^*)\big(-\omega_\alpha(x)\big)$.

Теорема 5.5.7. (Теорема о сложной свёртке). *Если* $f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_1(p)$ *и* $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_2(p)$*, то*

$$h^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = \int_x^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha} \risingdotseq F_1(p)F_2(p),$$

где $Rep = \gamma > max\{a_0^1, a_0^2\}$.

Доказательство: Имеем

$$S_\alpha\big\{h^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)\big\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}h^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} \int_x^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big) f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha}\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha} \int_0^t e^{p\omega_\alpha(x)} f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big) \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} -\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t) = -\omega_\alpha(y), & x=0 \Rightarrow y=0 \\ \dfrac{dx}{x^\alpha} = \dfrac{dy}{y^\alpha}, & x=t \Rightarrow y=\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha} \int_0^\infty e^{p(\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(y))} f_2^*\big(-\omega_\alpha(y)\big) \frac{dy}{y^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(t)} f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha} \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(y)} f_2^*\big(-\omega_\alpha(y)\big) \frac{dy}{y^\alpha} = F_1(p)F_2(p).$$

На основе этой теоремы находим, что сложной свёрткой двух функций f_1 и f_2 в пространстве оригиналов является обычное произведение их S_α- преобразования в пространстве изображений.

Имеет место и обратное утверждение:

Теорема 5.5.8. *Если* $f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_1(p)$ *и* $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_2(p)$, *то обратное* S_α *- интегральное преобразование от обычного произведения функций* $F_1(p)$ *и* $F_2(p)$ *в пространстве изображений равно сложной свёртке оригиналов этих функций в пространстве оригиналов т.е.*

$$(S_\alpha)^{-1}\{F_1(p)F_2(p)\} = (S_\alpha)^{-1}[F_1(p)F_2(p)]\big(\omega_\alpha(x)\big) = (f_1^* * f_2^*)\big(-\omega_\alpha(x)\big)$$

где $\mathrm{Re}p = \gamma > \max\{a_0^1, a_0^2\}$.

Доказательство: Эту теорему легко можно доказать в виде следующей цепочки равенств

$$(S_\alpha)^{-1}\{F_1(p)F_2(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)} F_1(p)F_2(p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)} F_2(p)dp \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(t)} f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}F_2(p)dp =$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \int_x^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha} = (f_1^* * f_2^*)\big(-\omega_\alpha(x)\big).$$

Последняя часть данного равенства верна, так как аргумент функции $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)$ при $0 < t < x$ будет меньше нуля, т.е. $-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t) < 0$ и как финитная функция $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big) = 0$ при $-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t) < 0$.

Таким образом, из этой теоремы выходит, что функции

$$\int_x^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)+\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha}, F_1(p)F_2(p)$$

являются парой S_α - преобразований.

Следствие 5.5.2. *Если* $f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_1(p)$ *и* $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_2(p)$, *тогда*

$$(S_\alpha)^{-1}\{F_1(p)F_2(-p)\} = \int_0^x f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(x)\big)\frac{dt}{t^\alpha},$$

где $\mathrm{Re}p = \gamma > \max\{a_0^1, a_0^2\}$.

Доказательство: Действительно, имеем:

$$(S_\alpha)^{-1}\{F_1(p)F_2(-p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)}F_1(p)F_2(-p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_2(-p)e^{-p\omega_\alpha(x)}dp\int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(t)}f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-p\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}F_2(-p)dp = |-p = q|$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{-q\left(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)\right)}F_2(q)dq =$$

$$= \int_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(x)\big)\frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^x f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(x)\big)\frac{dt}{t^\alpha}.$$

Последняя часть верна потому, что при $x < t < \infty$, $-\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(x) < 0$, следовательно $f_2^*\big(-\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(x)\big) = 0$.

Таким образом, из следствия 5.5.2 вытекает, что функции

$$\int_0^x f_1^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(t)+\omega_\alpha(x)\big)\frac{dt}{t^\alpha}, F_1(p)F_2(-p)$$

являются парой S_α - преобразований.

Далее, определим операцию свёртки в пространстве изображений в виде:

$$(F_1 * F_2)(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(r)F_2(p-r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F_1(p-r)F_2(r)dr. \qquad (5.5.1)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема 5.5.9. *Если* $f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_1(p)$ *и* $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_2(p)$, *то*

$$f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq (F_1 * F_2)(p),$$

где $\mathrm{Re}(p-r) = \max\{a_0^1, a_0^2\}$.

Доказательство: Действительно, имеем

$$S_\alpha\{f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)\frac{dx}{x^\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-r\omega_\alpha(x)}F_1(r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r)dr \int\limits_0^{\infty} e^{(p-r)\omega_\alpha(x)} f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r)F_2(p-r)dr = (F_1 * F_2)(p).$$

Имеет место и обратное утверждение:

Теорема 5.5.10. *Если* $f_1^*\big(\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_1(p)$ *и* $f_2^*\big(\omega_\alpha(x)\big) \risingdotseq F_2(p)$, *то*

$$H(p) = (F_1 * F_2)(p) \risingdotseq f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \cdot f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big).$$

Доказательство: Находим обратное S_α - преобразование от функции $H(p)$

$$(S_\alpha)^{-1}\{H(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)} H(p)dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r)F_2(p-r)drdp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r)dr \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-p\omega_\alpha(x)} F_2(p-r)dp =$$

$$= \begin{vmatrix} p - r = q \\ dp = dq \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r)dr \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-(q+r)\omega_\alpha(x)} F_2(q)dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-r\omega_\alpha(x)} F_1(r)dr \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - r - i\infty}^{\gamma - r + i\infty} e^{-q\omega_\alpha(x)} F_2(q)dq =$$

$$= f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \cdot f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big).$$

Если определим операцию свёртки в пространстве изображений в виде (5.5.1), тогда имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r)F_2(p-r)dr =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r) dr \int\limits_0^\infty e^{(p-r)\omega_\alpha(x)} f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \frac{dx}{x^\alpha} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-r\omega_\alpha(x)} F_1(r) dr =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \cdot f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Из данного равенства при $p = 0$ получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r) F_2(-r) dr = \int\limits_0^\infty f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \cdot f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Далее, подчинив функции $f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)$ и $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)$ равенству $f_2^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = \overline{f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big)}$, приходим к равенству Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(r) F_1(-r) dr = \int\limits_0^\infty \left| f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \right|^2 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

В данном равенстве положив $\gamma = 0$, $r = i\sigma$ и, замечая, что $F_1(-i\sigma) = \overline{F_1(\iota\sigma)}$, приходим к более симметричному виду равенства Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_1(i\sigma)|^2 d\sigma = \int\limits_0^\infty \left| f_1^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) \right|^2 \frac{dx}{x^\alpha}.$$

§5.6. Интегрирование линейных операторно-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью S_α - интегрального преобразования

Пусть требуется найти решение операторно-дифференциального уравнения n-го порядка

$$P_M^n(D_x^\alpha)y(x) \equiv (D_x^\alpha)^n y + M_1(D_x^\alpha)^{n-1}y + \cdots + M_n y = f(x), \quad (5.6.1)$$

где коэффициенты M_i $(i = \overline{1,n})$ - постоянные числа, $f(x)$ - заданная функция класса $\tilde{C}_\alpha(0,\infty)$, т.е. является оригиналом (имеет S_α - изображение).

Решение уравнения (5.6.1) будем искать в класса функции-оригиналов $y \in \tilde{C}_\alpha^n(0,\infty)$.

Пусть уравнение (5.6.1) задано совместно с нулевыми начальными условиями на бесконечно удалённой точке

$$y(x)\Big|_{x=\infty} = 0, D_x^\alpha\, y(x)\Big|_{x=\infty} = 0, .., (D_x^\alpha)^{n-1}\, y(x)\Big|_{x=\infty} = 0. \quad (5.6.2)$$

На основе теоремы 5.5.4. для S_α - интегрального преобразования оператора $R_M^n(D_x^\alpha)y(x)$ с учётом условия (5.6.2), получим:

$$S_\alpha\{P_M^n(D_x^\alpha)y(x)\} = P_M^n(-p)Y(p).$$

Отсюда, пусть обе стороны уравнения (5.6.1) S_α - преобразуемы, тогда применяя к обеим сторонам уравнения S_α - интегральное преобразование, получим:

$$S_\alpha\{P_M^n(D_x^\alpha)y(x)\} = S_\alpha\{f(x)\},$$

$$P_M^n(-p)Y(p) = F(p)$$

или

$$Y(p) = \Pi(p)F(p), \quad (5.6.3)$$

где

$$\Pi(p) = \frac{1}{P_M^n(-p)} = \frac{1}{(-p)^n + M_1(-p)^{n-1} + \cdots + M_{n-1}(-p) + M_n}.$$

Отсюда, в зависимости от корней характеристического уравнения

$$P_M^n(-p) \equiv (-p)^n + M_1(-p)^{n-1} + \cdots + M_{n-1}(-p) + M_n = 0, \quad (5.6.4)$$

восстанавим оригинал для передаточной функции с помощью S_α - интегрального преобразования. Рассмотрим следующие случаи:

I. Пусть корни характеристического уравнения (5.6.4) являются вещественными и разными, и они обозначены через $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тогда передаточную функцию можем записать в виде

$$\Pi(p) = -\frac{N_1^1}{p+p_1} - \frac{N_2^1}{p+p_2} - \dots - \frac{N_n^1}{p+p_n},$$

где N_i^1 $(i = \overline{1,n})$ – пока неопределённые коэффициенты.

На основе свойства S_α - интегрального преобразования вначале восстанавливаем оригинал для функции $\Pi(p)$, т.е.

$$\Pi(p) = -\frac{N_1^1}{p+p_1} - \frac{N_2^1}{p+p_2} - \dots - \frac{N_n^1}{p+p_n} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -N_1^1 e^{p_1\omega_\alpha(x)} - N_2^1 e^{p_2\omega_\alpha(x)} - \dots - N_n^1 e^{p_n\omega_\alpha(x)} = \pi^*\big(-\omega_\alpha(x)\big).$$

Далее, взяв обратное S_α - интегральное преобразование от обеих сторон равенства (5.6.3) на основе теоремы 5.5.7, решение $y(x)$ неоднородного уравнения (5.6.1), удовлетворяющее условию (5.6.2), находим в виде:

$$y(x) = -\int_x^\infty \Big[N_1^1 e^{p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)} + N_2^1 e^{p_2\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)} + \dots$$

$$+ N_n^1 e^{p_n\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\Big] f\big(-\omega_\alpha(t)\big)\frac{dt}{t^\alpha}, \qquad (5.6.5)$$

где неопределённые коэффициенты N_i^1 $(i = \overline{1,n})$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} N_1^1 + N_2^1 + \dots + N_n^1 = 0, \\ p_1 N_1^1 + p_2 N_2^1 + \dots + p_n N_n^1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_1^{n-2} N_1^1 + p_2^{n-2} N_2^1 + \dots + p_n^{n-2} N_n^1 = 0, \\ p_1^{n-1} N_1^1 + p_2^{n-1} N_2^1 + \dots + p_n^{n-1} N_n^1 = 1. \end{cases} \qquad (5.6.6)$$

Таким образом, о разрешимости задачи (5.6.1) – (5.6.2) имеет место следующая теорема:

Теорема 5.6.1. *Пусть в уравнении (5.6.1) коэффициенты* M_i^1 $(i=\overline{1,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения (5.6.4) являются вещественными и разными. Кроме того, пусть функция* $f(x)\in\tilde{C}_\alpha(0,\infty)$. *Тогда задача (5.6.1) – (5.6.2) в классе* $\tilde{C}_\alpha^n(0,\infty)$ *однозначно разрешима и её единственное решение даётся по формуле (5.6.5), где коэффициенты* N_i^1 $(i=\overline{1,n})$ *определяются единственным образом из системы алгебраических уравнений (5.6.6).*

Далее, непосредственной проверкой легко можно убедиться, что каждая функция вида

$$\pi_i^*\big(\omega_\alpha(x)\big)=e^{p_i\omega_\alpha(x)},(i=\overline{1,n})$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$(D_x^\alpha)^n y+M_1(D_x^\alpha)^{n-1}y+\cdots+M_n y=0. \qquad (5.6.7)$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения (5.6.7) выражается равенством

$$y(x)=c_1^1e^{p_1\omega_\alpha(x)}+c_2^1e^{p_2\omega_\alpha(x)}+\cdots+c_n^1e^{p_n\omega_\alpha(x)},$$

где $c_1^1,c_2^1,\dots,c_n^1$ – произвольные постоянные константы.

Добавляя к нему частное решение неоднородного уравнения (5.6.1), с учётом того, что $f^*\big(-\omega_\alpha(t)\big)=f(t)$, общее решение неоднородного уравнения (5.6.1) получим в виде

$$y(x)=c_1^1e^{p_1\omega_\alpha(x)}+c_2^1e^{p_2\omega_\alpha(x)}+\cdots+c_n^1e^{p_n\omega_\alpha(x)}-$$
$$-\int_x^\infty\Big[N_1^1e^{p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+N_2^1e^{p_2\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+\cdots$$
$$+N_2^1e^{p_2\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\Big]f(t)\frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (5.6.8)$$

II. Пусть все корни характеристического уравнения (5.6.4) являются вещественными и равными, т.е. $p_1=p_2=\cdots=p_n$. Тогда передаточная функция имеет вид:

$$\Pi(p) = \frac{1}{(-p-p_1)^n} = \frac{(-1)^n}{(p+p_1)^n}.$$

Вначале для функции

$$\Pi(p) = \frac{(-1)^n}{(p+p_1)^n}.$$

восстанавливаем оригинал. С этой целью, прежде всего, покажем, что имеет место формула

$$e^{a\omega_\alpha(x)} \risingdotseq \frac{1}{p+a}, (\mathrm{Re}\, p > -a > 0). \qquad (5.6.9)$$

Действительно, на основе определения S_α – преобразования получим:

$$S_\alpha\{e^{a\omega_\alpha(x)}\} = \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)} e^{a\omega_\alpha(x)} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_0^\infty e^{(p+a)\omega_\alpha(x)} \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{p+a} e^{(p+a)\omega_\alpha(x)}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p+a}, \text{при } \mathrm{Re}\, p > -a > 0.$$

Теперь, последовательно дифференцируя обе стороны равенства (5.6.9) по a, получим:

$$\omega_\alpha(x) e^{a\omega_\alpha(x)} \risingdotseq (-1)\frac{1}{(p+a)^2},$$

$$[\omega_\alpha(x)]^2 e^{a\omega_\alpha(x)} \risingdotseq (-1)^2 \frac{2!}{(p+a)^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$[\omega_\alpha(x)]^{n-1} e^{a\omega_\alpha(x)} \risingdotseq (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(p+a)^n},$$

или же

$$\frac{1}{(n-1)!}[\omega_\alpha(x)]^{n-1} e^{a\omega_\alpha(x)} \risingdotseq \frac{(-1)^{n-1}}{(p+a)^n}.$$

Отсюда с учётом полученных равенств оригинал для передаточной функции $\Pi(p)$ восстанавливаем в виде:

$$\pi^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = -\frac{1}{(n-1)!}[\omega_\alpha(x)]^{n-1} e^{p_1\omega_\alpha(x)}.$$

Таким образом, на основе теоремы 5.5.7. решение $y(x)$ неоднородного уравнения (5.6.1), удовлетворяющее условию (5.6.2), находим в виде:

$$y(x) = -\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty \left(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\right)^{n-1} e^{p_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))} f^*\left(-\omega_\alpha(t)\right)\frac{dt}{t^\alpha}.$$

(5.6.10)

Теорема 5.6.2. *Пусть в уравнении (5.6.1) коэффициенты* M_i^1 $(i = \overline{1,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения (5.6.4) являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_\alpha(0,\infty)$. *Тогда задача (5.6.1) – (5.6.2) в классе* $\tilde{C}_\alpha^n(0,\infty)$ *однозначно разрешима и его единственное решение выражается равенством (5.6.10).*

Далее, легко можно проверить, что система n – функций

$$e^{p_1\omega_\alpha(x)}, \omega_\alpha(x)e^{p_1\omega_\alpha(x)}, \dots, \omega_\alpha^{n-1}(x)e^{p_1\omega_\alpha(x)}$$

являются линейно - независимой и каждая из них будет решением однородного уравнения (5.6.7). Поэтому общее решение однородного уравнения (5.6.7) примет вид:

$$y(x) = e^{p_1\omega_\alpha(x)}[c_1^2 + c_2^2\omega_\alpha(x) + \dots + c_n^2\omega_\alpha^{n-1}(x)].$$

Добавляя к данному решению частное решение (5.6.10) неоднородного уравнения (5.6.1), с учётом того, что $f^*\left(-\omega_\alpha(t)\right) = f(t)$, общее решение неоднородного уравнения (5.6.1) получим в виде:

$$y(x) = e^{p_1\omega_\alpha(x)}[c_1^2 + c_2^2\omega_\alpha(x) + \dots + c_n^2\omega_\alpha^{n-1}(x)] -$$

$$-\frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty \left(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\right)^{n-1} e^{p_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))} f(t)\frac{dt}{t^\alpha}. \quad (5.6.11)$$

III. Пусть $n = 2k$ – чётное число и все корни характеристического уравнения (5.6.4) являются комплексно-сопряжёнными, которые обозначим :

$$-p_{1,2} = \alpha_1 \pm i\beta_1, -p_{3,4} = \alpha_2 \pm i\beta_2, \dots, -p_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm i\beta_k,$$

В этом случае передаточная функция уравнения (5.6.1) приводится к виду:

$$\Pi(p) = \frac{N_1^2(-p) + N_1^3}{(-p-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{N_2^2(-p) + N_2^3}{(-p-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \dots + \frac{N_k^2(-p) + N_k^3}{(-p-\alpha_k)^2 + \beta_k^2},$$

или

$$\Pi(p) = \frac{-N_1^2 p + N_1^3}{(p+\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{-N_2^2 p + N_2^3}{(p+\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{-N_k^2 p + N_k^3}{(p+\alpha_k)^2 + \beta_k^2}.$$

С другой стороны, поскольку $e^{a\omega_\alpha(x)} \risingdotseq \frac{1}{p+a}$, тогда

$$\sin[b\omega_\alpha(x)] = \frac{e^{ib\omega_\alpha(x)} - e^{-ib\omega_\alpha(x)}}{2i} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p+ib} - \frac{1}{p-ib}\right) = \frac{-b}{p^2+b^2}.$$

Аналогично можно найти операционное соотношение:

$$\cos[b\omega_\alpha(x)] \risingdotseq \frac{p}{p^2+b^2}.$$

Теперь, применяя к полученным соотношениям теорему смещения, найдём изображения функций $e^{a\omega_\alpha(x)}\sin[b\omega_\alpha(x)]$, $e^{a\omega_\alpha(x)}\cos[b\omega_\alpha(x)]$:

$$e^{a\omega_\alpha(x)}\sin[b\omega_\alpha(x)] \risingdotseq \frac{-b}{(p+a)^2+b^2},$$

$$e^{a\omega_\alpha(x)}\cos[b\omega_\alpha(x)] \risingdotseq \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}.$$

С учётом полученных формул восстанавливаем оригинал для передаточной функции:

$$\Pi(p) = \frac{-N_1^2 p + N_1^3}{(p+\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{-N_2^2 p + N_2^3}{(p+\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{-N_k^2 p + N_k^3}{(p+\alpha_k)^2 + \beta_k^2} =$$

$$= -N_1^2 \frac{p+\alpha_1}{(p+\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{N_1^3 + N_1^2\alpha_1}{-\beta_1}\frac{-\beta_1}{(p+\alpha_1)^2+\beta_1^2} - \cdots -$$

$$-N_k^2 \frac{p+\alpha_k}{(p+\alpha_k)^2+\beta_k^2} + \frac{N_k^3 + N_k^2\alpha_k}{-\beta_k}\frac{-\beta_k}{(p+\alpha_k)^2+\beta_k^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq -N_1^2\, e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)] + N_1^4\, e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)] - \cdots -$$

$$-N_k^2\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)] + N_k^4\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)] = \pi^*\big(\omega_\alpha(x)\big),$$

где

$$N_i^4 = \frac{N_i^3 + N_i^2\alpha_i}{-\beta_i}\ \big(i = \overline{1,k}\big).$$

Далее, записывая оригинал для функции $\Pi(p)$ в виде

$$\pi^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = -N_1^2\, e^{-\alpha_1(-\omega_\alpha(x))}\cos\big[\beta_1\big(-\omega_\alpha(x)\big)\big] -$$

$$-N_1^4\, e^{-\alpha_1(-\omega_\alpha(x))}\sin\left[\beta_1\left(-\omega_\alpha(x)\right)\right]-\cdots-$$

$$-N_k^2\, e^{-\alpha_k(-\omega_\alpha(x))}\cos[\beta_k(-\omega_\alpha(x))]-N_k^4\, e^{-\alpha_k(-\omega_\alpha(x))}\sin[\beta_k(-\omega_\alpha(x))]$$

на основе теоремы 5.5.7. решение неоднородного уравнения (5.6.1) находим в виде:

$$y(x)=-\int_x^\infty\Big\{e^{\alpha_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))}\left[N_1^2\cos\left[\beta_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-N_1^4\sin\left[\beta_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right]+\cdots$$

$$+e^{\alpha_k(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))}\left[N_k^2\cos\left[\beta_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]-\right.$$

$$\left.-N_k^4\sin\left[\beta_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right]\Big\}f^*\left(\omega_\alpha(t)\right)\frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (5.6.12)$$

Для определения коэффициентов N_i^2, N_i^4 $\left(i=\overline{1,k}\right)$, прежде всего, вводим следующие аппараты:

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{+,1}\{a,b\}=\alpha a-\beta b,\Lambda_{\alpha\beta}^{-,1}\{a,b\}=\alpha b+\beta a,$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{\pm,k}=\Lambda_{\alpha\beta}^{\pm,1}\left\{\Lambda_{\alpha\beta}^{+,k-1},\Lambda_{\alpha\beta}^{-,k-1}\right\},$$

тогда неопределённые коэффициенты N_i^2, N_i^4 $\left(i=\overline{1,k}\right)$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases}1\cdot N_1^2-0\cdot N_1^4+\cdots+1\cdot N_k^2-0\cdot N_k^4=0\\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,1}\cdot N_1^2-\Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{-,1}\cdot N_1^4+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,1}\cdot N_k^2-\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{-,1}\cdot N_k^4=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-2}\cdot N_1^2-\Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{-,2k-2}\cdot N_1^4+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-2}\cdot N_k^2-\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{-,2k-2}\cdot N_k^4=0\\ \Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{+,2k-1}\cdot N_1^2-\Lambda_{\alpha_1\beta_1}^{-,2k-1}\cdot N_1^4+\cdots+\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{+,2k-1}\cdot N_k^2-\Lambda_{\alpha_k\beta_k}^{-,2k-1}\cdot N_k^4=1\end{cases} \qquad (5.6.13)$$

где $\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{\pm,1}=\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{\pm,1}\{1,0\},\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{\pm,k}=\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{\pm,k}\left\{\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{+,k-1},\Lambda_{\alpha_i\beta_i}^{-,k-1}\right\}$.

Определитель системы уравнений (5.6.13) отличен от нуля, потому что он является вронскианом системы линейно-независимых функций

$y_1(x)=N_1^2\, e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)]\,,y_2(x)=N_1^4\, e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)],$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{2k-1}(x)=N_k^2\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)]\,,y_{2k}(x)=N_k^4\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)]$$

в точке $x = \infty$. Следовательно, алгебраическая система уравнений (5.6.13) имеет единственное решение, которое можно найти известными способами высшей алгебры.

Таким образом, доказана:

Теорема 5.6.3. *Пусть в уравнении (5.6.1) коэффициенты* M_i^1 $(i = \overline{1,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения (5.6.4) являются комплексно-сопряжёнными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_\alpha(0,\infty)$. *Тогда задача (5.6.1) – (5.6.2) в классе* $\tilde{C}_\alpha^n(0,\infty)$ *однозначно разрешима и её единственное решение выражается равенством (5.6.12), где коэффициенты* N_i^2, N_i^4 $(i = \overline{1,n})$ *определяются единственным образом из системы алгебраических уравнений (5.6.13).*

Заметим, что поскольку каждая функция из системы *2k* – линейно-независимых функций $y_j(x)$ $\left(j = \overline{1,2k}\right)$ является частным решением однородного уравнения (5.6.7), поэтому общее решение однородного уравнения (5.6.7) имеет вид:

$$y_{\text{oo}}(x) = e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\left[c_1^3\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)] + c_2^3\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)]\right] + \cdots$$
$$+ e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\left[c_{2k-1}^3\cos[\beta_k\,\omega_\alpha(x)] + c_{2k}^3\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)]\right].$$

Добавляя к этому решению частное решение неоднородного уравнения (5.6.1) получим общее решение неоднородного уравнения (5.6.1) в виде:

$$y(x) = e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\left[c_1^3\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)] + c_2^3\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)]\right] + \cdots$$
$$+ e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\left[c_{2k-1}^3\cos[\beta_k\,\omega_\alpha(x)] + c_{2k}^3\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)]\right] +$$
$$-\int_x^\infty \left\{e^{\alpha_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))}\left[N_1^2\cos\left[\beta_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right] - -N_1^4\sin\left[\beta_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right]\right.$$
$$+\cdots$$
$$+ e^{\alpha_k(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))}\left[N_k^2\cos\left[\beta_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right] -\right.$$
$$\left.\left.- N_k^4\sin\left[\beta_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right]\right\} f(t)\frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (5.6.14)$$

§5.7. Одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа сложной свёртки со степенным особым ядром

Пусть $\Gamma = \{x: 0 < x < \infty\}$ множество точек на вещественной оси.

Через $C_\alpha(\vec{0}, \infty; \lambda, 0)$, где $\lambda > 0$, обозначим класс непрерывных на интервале $(0, \infty)$ сложных функций $f(x)$, которые зависят от функции $\psi(x) = \omega_\alpha(x)$, как от аргумента и в точке $x = 0$ обращаются в нуль с ассимптотическим поведением

$$f(x) = o\left[e^{\delta\omega_\alpha(x)}\right], \delta > \lambda, x \to 0, \qquad (5.7.1)$$

а при $x < 0$, $f(x) = 0$.

Через $C_\alpha^{(n)}(\vec{0}, \infty; \lambda, 0)$ $\left(C_\alpha^{(0)}(\vec{0}, \infty; \lambda, 0) = C_\alpha(\vec{0}, \infty; \lambda, 0)\right)$ обозначим класс функций $f(x)$, которые имеют непрерывные D_x^α – производные до порядка n включительно и, для которых $(D_x^\alpha)^n f(x) \in C_\alpha(\vec{0}, \infty; \lambda, 0)$ для $\forall n \in N$.

Далее, через $C_\alpha^{(n)}(0, \infty)$ обозначим класс функций имеющий D_x^α – производные до порядка n включительно.

Поскольку функции класса $C_\alpha^{(n)}(\vec{0}, \infty; \lambda, 0)$ или $C_\alpha^{(n)}(0, \infty)$ зависят от функции $\omega_\alpha(x)$ как от аргумента, поэтому иногда ради удобства в нужные места, вместо $f(x)$ записываем $f^*(\omega_\alpha(x))$.

На Г рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с особым ядром

$$D_x^\alpha y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t^\alpha} y(t)dt = f(x), \qquad (5.7.2)$$

где $D_x^\alpha = x^\alpha \frac{d}{dx}$ – сильно-особый дифференциальный оператор первого порядка, $f(x) \in C_\alpha(\Gamma)$ – заданная непрерывная функция на Г, $K(x,t)$ - заданная функция на

прямоугольнике $R = \{(x,t): 0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty\}$, которая имеет степенную особенность свёрточного вида

$$K(x,t) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) + \cdots + A_n\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big)^{n-1}, \quad (5.7.3)$$

причём $K(0,0) \neq 0$ и $K(x) \in C_\alpha(\Gamma)$. Решение уравнения (5.7.2) будем искать в классе $C'_\alpha\big(\vec{0}, \infty; \alpha - 1, 0\big)$.

Исследованию интегральных уравнений первого и второго рода типа Фредгольма и Вольтера посвящены многочисленные работы. Также после восьмидесятых годов двадцатого столетия активно развивалась теория интегральных уравнений с однородными и биоднородными ядрами [73], [88], [120], [189]-[192]. Важно подчеркнуть, что одним из малоизученных направлений в теории интегральных уравнений является теория интегральных уравнений третьего рода. Данному направлению посвящено сравнительно мало исследований. Из наиболее значимых можно указать две работы G.R.Bart [5], [6], а также работы N.Sukavanam [64], Р.Р.Замалиева [140], Н.Н.Габбасова, Р.Р.Замалиева [115], Н.А.Магницкого [183], В.С.Рогожина, С.Н.Расламбекова [288] и т.д. Из отечественной литературы укажем работы Н.Раджабова [246]- [262] и Н.Раджабова, Л.Н.Раджабовой [247], [272], [274]. Исследованию интегро-дифференциальных уравнений третьего рода посвящены работы [12-А]-[19-А], [22-А]-[31-А], [38-А]-[56-А], а также монография [1-А].

Для изучения уравнения (5.7.2) запишем его в подходящей форме для применения следствия теоремы о сложной свёртке, т.е.

$$D_x^\alpha y + A_0 y + \int_0^x K^*\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) y^*\big(-\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha} = f(x). \quad (5.7.4)$$

Вначале находим S_α – изображение от функции

$$K^*\big(-\omega_\alpha(x)\big) = A_1 - A_2\omega_\alpha(x) + \cdots + (-1)^{n-1} A_n \omega_\alpha^{n-1}(x).$$

Имеем

$$S_\alpha\{K^*(-\omega_\alpha(x))\} =$$

$$= \int_0^\infty e^{p\omega_\alpha(x)}[A_1 - A_2\omega_\alpha(x) + \cdots + (-1)^{n-1}A_n\omega_\alpha^{n-1}(x)]\frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= |n-1 - \text{раз интегрируем по частям}| =$$

$$= \frac{A_1}{p} + \frac{1!\,A_2}{p^2} + \frac{2!\,A_3}{p^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}.$$

Далее, к обеим сторонам уравнения (5.7.4) действуя S_α - интегральным преобразованием, с учётом следствия 5.5.2. получим :

$$(-p)S_\alpha(p) + y^*(\omega_\alpha(x))\big|_{x=\infty} + A_0S_\alpha(p) +$$

$$+\left(\frac{A_1}{-p} + \frac{1!\,A_2}{(-p)^2} + \frac{2!\,A_3}{(-p)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{(-p)^n}\right)S_\alpha(p) = F(p)$$

или при предположении $y^*(\omega_\alpha(x))\big|_{x=\infty} = 0$, имеем

$$\left(-p + A_0 + \frac{A_1}{-p} + \frac{1!\,A_2}{(-p)^2} + \frac{2!\,A_3}{(-p)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!\,A_n}{(-p)^n}\right)S_\alpha(p) = F(p).$$

Можно преобразовать последнее равенство следующим образом:

$$S_\alpha(p) = \frac{(-p)^n}{(-p)^{n+1} + A_0(-p)^n + A_1(-p)^{n-1} + 1!A_2(-p)^{n-2} + \cdots + (n-1)!A_n}F(p). \qquad (5.7.5)$$

Известными способами алгебры функцию

$$\Pi^-(-p) = \frac{(-p)^n}{(-p)^{n+1} + A_0(-p)^n + A_1(-p)^{n-1} + 1!\,A_2(-p)^{n-2} + \cdots + (n-1)!\,A_n}$$

в зависимости от корней алгебраического уравнения

$$(-p)^{n+1} + A_0(-p)^n + A_1(-p)^{n-1} + 1!\,A_2(-p)^{n-2} + \cdots + (n-1)!\,A_n = 0 \tag{5.7.6}$$

например, в трёх случаях можно привести к одному из следующих видов

$$\Pi_1^-(-p) = \frac{N_1^1}{-p-p_1} + \frac{N_2^1}{-p-p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{-p-p_{n+1}}, \tag{5.7.7}$$

$$\Pi_2^-(-p) = \frac{N_1^2}{-p-p_1} + \frac{N_2^2}{(-p-p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(-p-p_1)^{n+1}}, \tag{5.7.8}$$

$$\Pi_3^-(-p) = \frac{N_1^3 p + N_1^4}{(-p-\alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{N_2^3 p + N_2^4}{(-p-\alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{N_k^3 p + N_k^4}{(-p-\alpha_k)^2 + \beta_k^2}, \tag{5.7.9}$$

с неопределёнными коэффициентами N_i^j, $(i = \overline{1, n+1}, j = 1,2), N_l^j$, $(l = \overline{1,k}, j = 3,4)$.

В случае (5.7.7) вначале для функции

$$\Pi_1^-(p) = \frac{N_1^1}{p-p_1} + \frac{N_2^1}{p-p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{p-p_{n+1}}, \tag{5.7.7}$$

восстановим оригинал в виде

$$\pi_1^-(x) = \pi_1^{*,-}\big(-\omega_\alpha(x)\big) =$$
$$= N_1^1 e^{-p_1\omega_\alpha(x)} + N_2^1 e^{-p_2\omega_\alpha(x)} + \cdots + N_{n+1}^1 e^{-p_{n+1}\omega_\alpha(x)}. \tag{5.7.10}$$

Далее, записывая равенство (5.7.5) в виде

$$S_\alpha(p) = \left(\frac{N_1^1}{-p-p_1} + \frac{N_2^1}{-p-p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{-p-p_{n+1}}\right) F(p),$$

на основе следствия 5.5.2 решение уравнения (5.7.4) получим в виде

$$y(x)=\int_0^x\left[N_1^1e^{p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+N_2^1e^{p_2\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+N_{n+1}^1e^{p_{n+1}\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\right]f(t)\frac{dt}{t^\alpha}\equiv E_1^+[f(x)]. \quad (5.7.11)$$

Данное решение для любой функции $f(x)\in C_\alpha(0,\infty)$ имеет смысл только в случае, когда $p_1<p_2<\cdots<p_{n+1}<0$. Если для некоторого $i,(i=\overline{1,n+1}),\ p_i>0$, тогда подынтегральное выражение в (5.7.11) в нижнем пределе интегрирования имеет особенности экспоненциального характера. Поэтому для сходимости интегралов в правой части (5.7.11) требуем, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $C_\alpha\left(\vec{0},\infty;\max\limits_i\{p_i\},0\right)$.

Осталось выяснить, имеет ли однородное уравнение

$$D_x^\alpha y+A_0y+\int_0^x K^*\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)y^*\left(-\omega_\alpha(x)\right)\frac{dt}{t^\alpha}=0, \qquad (5.7.12)$$

нетривиальные решения. Если предположить принадлежность функции $y(x)$ классу $C_\alpha^{(n+1)}(0,\infty)$, тогда задача решения однородного уравнения (5.7.12) эквивалентна задаче решения уравнения

$$(D_x^\alpha)^{n+1}y+A_0(D_x^\alpha)^ny+A_1(D_x^\alpha)^{n-1}y+\cdots+(n-1)!\,A_ny=0. \quad (5.7.13)$$

без потери решения однородного уравнения (5.7.12), но, может быть, с появлением посторонних для него решений. Если искать решение однородного уравнения (5.7.13) в виде

$$y(x)=e^{p\omega_\alpha(x)},$$

тогда для определения p получим характеристическое уравнение

$$p^{n+1}+A_0p^n+A_1p^{n-1}+1!\,A_2p^{n-2}+\cdots+(n-1)!\,A_n=0. \qquad (5.7.14)$$

Отсюда прямая подстановка покажет, что функция вида

$$y_1^{-,1}(x) = c_1^1 e^{p_1\omega_\alpha(x)} + c_2^1 e^{p_2\omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^1 e^{p_{n+1}\omega_\alpha(x)}. \qquad (5.7.15)$$

с произвольными коэффициентами $c_1^1, c_2^1, \cdots, c_{n+1}^1$ является общим решением однородного уравнения (5.7.13). С другой стороны, если между корнями характеристического уравнения (5.7.14) выполняется соотношение

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1}, \qquad (5.7.16)$$

тогда каждая функция вида

$$y_i = e^{p_i\omega_\alpha(x)}, (i = \overline{1, n+1})$$

является частным решением однородного уравнения (5.7.12), а его общее решение задаётся формулой (5.7.15).

В случае выполнения условия

$$p_1 < p_2 < p_k < 0 < p_{k+1} < \cdots < p_{n+1}, \qquad (5.7.17)$$

общее решение однородного уравнения (5.7.12) имеет вид

$$y_1^{-,2}(x) = c_{k+1}^1 e^{p_{k+1}\omega_\alpha(x)} + c_{k+2}^1 e^{p_{k+2}\omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^1 e^{p_{n+1}\omega_\alpha(x)}, \qquad (5.7.18)$$

а в случае выполнения условия

$$p_1 < p_2 < p_{n+1} < 0, \qquad (5.7.19)$$

однородное уравнение (5.7.12), кроме нулевого решения, других решений не имеет.

Таким образом, доказана:

Теорема 5.7.1. *Пусть в уравнении (5.7.2) ядро имеет свёрточный вид (5.7.3), а коэффициенты* A_i $(i = \overline{0, n})$ *такие, что корни характеристического уравнения* (5.7.14) *являются вещественными и разными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_\alpha(0, \infty)$, *а в случае* $p_{n+1} > 0$, $f(x) \in C_\alpha(\vec{0}, \infty; p_{n+1}, 0)$. *Тогда при выполнении условий (5.7.16), (5.7.17) и (5.7.19), общее решение неоднородного уравнения (5.7.2) из класса* $C'_\alpha(\vec{0}, \infty; \alpha - 1, 0)$ *задаётся соответственно по формулам*

$$y_1^1(x) = c_1^1 e^{p_1\omega_\alpha(x)} + c_2^1 e^{p_2\omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^1 e^{p_{n+1}\omega_\alpha(x)} + E_1^+[f(x)],$$

$$y_1^2(x) = c_{k+1}^1 e^{p_{k+1}\omega_\alpha(x)} + c_{k+2}^1 e^{p_{k+2}\omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^1 e^{p_{n+1}\omega_\alpha(x)} + E_1^+[f(x)]$$

и

$$y_1^3(x) = E_1^+[f(x)].$$

В случае (5.7.8) вначале для $\Pi_2^-(p)$ восстанавим оригинал в виде

$$\pi_2^-(x) = \pi_2^{*,-}\big(-\omega_\alpha(x)\big) = N_1^2 e^{-p_1\omega_\alpha(x)} + N_2^2[-\omega_\alpha(x)]e^{-p_1\omega_\alpha(x)} + \\ \ldots + N_{n+1}^1[-\omega_\alpha(x)]^n e^{-p_1\omega_\alpha(x)}. \quad (5.7.20)$$

Отсюда, записывая равенство (5.7.5) в виде

$$S_\alpha(p) = \left(\frac{N_1^2}{-p-p_1} + \frac{N_2^2}{(-p-p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(-p-p_1)^{n+1}}\right)F(p),$$

на основе следствия 5.5.2. решение уравнения (5.7.4) получим в виде

$$y(x) = \int_0^x \Big[N_1^2 e^{p_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))} + N_2^2 e^{p_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))}\big(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\big) + \cdots \\ + N_{n+1}^2 e^{p_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))}\big(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\big)^n\Big] f(t)\frac{dt}{t^\alpha} \equiv E_2^+[f(x)]. \qquad (5.7.21)$$

В этом случае также легко можно показать, что каждая функция вида

$$y_i = e^{p_1\omega_\alpha(x)}\big(\omega_\alpha(x)\big)^{i-1}, (i = \overline{1, n+1})$$

в случае $p_1 > 0$ является частным решением однородного уравнения (5.7.12) и поэтому общее решение однородного уравнения (5.7.12) имеет вид

$$y_2^{-,1}(x) = c_1^2 e^{p_1\omega_\alpha(x)} + c_2^2\omega_\alpha(x)e^{p_1\omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^2\omega_\alpha^n(x)e^{p_1\omega_\alpha(x)}, (5.7.22)$$

а в случае $p_1 < 0$ уравнение (5.7.12) имеет только нулевое решение и неоднородное уравнение (5.7.4) или (5.7.2) всегда имеет единственное решение, которое выражается равенством (5.7.21).

Итак, доказано:

Теорема 5.7.2. *Пусть в уравнении (5.7.2) ядро имеет свёрточный вид (5.7.3), а коэффициенты* A_i $(i = \overline{0,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения* (5.7.14) *являются вещественными и равными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_\alpha(0,\infty)$, *в случае* $p_1 > 0$ $f(x) \in C_\alpha(\vec{0},\infty; p_1, 0)$. *Тогда в случае* $p_1 > 0$ и $p_1 < 0$ *общее решение неоднородного уравнения (5.7.2) из класса* $C'_\alpha(\vec{0},\infty; \alpha - 1, 0)$ *задаётся соответственно равенствами*

$$y_2^1(x) = c_1^2 e^{p_1\omega_\alpha(x)} + c_2^2\omega_\alpha(x)e^{p_1\omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^2\omega_\alpha^n(x)e^{p_1\omega_\alpha(x)} + E_2^+[f(x)],$$

и

$$y_2^1(x) = E_2^+[f(x)].$$

В случае (5.7.9) для восстановления оригинала для $\Pi_3^-(p)$ в первую очередь представим его в виде

$$\Pi_3^-(p) = N_1^3\frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \frac{N_1^4 + N_1^3\alpha_1}{-\beta_1}\frac{-\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots +$$
$$+N_k^3\frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + \frac{N_k^4 + N_k^3\alpha_k}{-\beta_k}\frac{-\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}.$$

Отсюда

$$\pi_3^-(x) = N_1^3 e^{-\alpha_1\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)] + N_1^5\, e^{-\alpha_1\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)] + \cdots$$
$$N_k^3 e^{-\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)] + N_k^5\, e^{-\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)], \qquad (4.7.23)$$

где

$$N_i^5 = \frac{N_i^4 + N_i^3\alpha_i}{-\beta_i}\ \left(i = \overline{1,k}\right).$$

Теперь, записывая равенство (5.7.5) в виде

$$S_\alpha(p) = \left(N_1^3\frac{p-\alpha_1}{(-p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + N_1^5\frac{-\beta_1}{(-p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots\right.$$
$$\left. + N_k^3\frac{p-\alpha_k}{(-p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + N_k^5\frac{-\beta_k}{(-p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\right)F(p),$$

на основе обратной теоремы к теореме о сложной свёртке, с учётом (5.7.16) решение уравнения (5.7.4) получим в виде

$$y(x) = \int_0^x \Big\{e^{\alpha_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\left[N_1^3\cos\left[\beta_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right.$$
$$\left. - N_1^5\sin\left[\beta_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right] + \cdots$$
$$+ e^{\alpha_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\left[N_k^3\cos\left[\beta_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right.$$
$$\left. - N_k^5\sin\left[\beta_k\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)\right]\right]\Big\}f(t)\frac{dt}{t^\alpha} \equiv E_3^+[f(x)]. \qquad (5.7.24)$$

Подобно предыдущим случаям, в этом случае при выполнении условий

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k, \qquad (5.7.25)$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i < 0 < \alpha_{i+1} < \alpha_{i+2} < \cdots < \alpha_k \qquad (5.7.26)$$

и

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k < 0 \qquad (5.7.27)$$

общее решение однородного уравнения (5.7.12) соответственно представимо в виде:

$$y_3^{-,1}(x) = c_1^3 e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)] + c_1^5\, e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)] + \cdots$$
$$c_k^3 e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)] + c_k^5\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)],$$
$$y_3^{-,2}(x) = c_{i+1}^3 e^{\alpha_{i+1}\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_{i+1}\omega_\alpha(x)] + c_{i+1}^5\, e^{\alpha_{i+1}\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_{i+1}\omega_\alpha(x)] + \cdots$$
$$c_k^3 e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)] + c_k^5\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)],$$

и

$$y_3^{-,3}(x) = 0.$$

На основе вышеприведенных рассуждений справедлива теорема:

Теорема 5.7.3. *Пусть в уравнении (5.7.2) ядро имеет свёрточный вид (5.7.3), а коэффициенты* A_i $(i = \overline{0,n})$ *такие, что корни характеристического уравнения* (5.7.14) *являются комплнксно-сопряжёнными. Кроме того, пусть функция* $f(x) \in C_\alpha(0,\infty)$, *в случае* $\alpha_k > 0$, $f(x) \in C_\alpha\left(\vec{0},\infty;\alpha_k,0\right)$. *Тогда при выполнении условий (5.7.25), (5.7.26) и (5.7.27), общее решение неоднородного уравнения (5.7.2) из класса* $C'_\alpha\left(\vec{0},\infty;\alpha-1,0\right)$ *задаётся соответственно равенствами*

$$y_3^1(x) = c_1^3 e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)] + c_1^5\, e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)] + \cdots$$
$$c_k^3 e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)] + c_k^5\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)] + E_3^+[f(x)],$$
$$y_3^2(x) = c_{i+1}^3 e^{\alpha_{i+1}\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_{i+1}\omega_\alpha(x)] + c_{i+1}^5\, e^{\alpha_{i+1}\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_{i+1}\omega_\alpha(x)] + \cdots$$
$$c_k^3 e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)] + c_k^5\, e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)] + E_3^+[f(x)],$$

и

$$y_3^3(x) = E_3^+[f(x)].$$

Замечание 5.7.1. *В случае, когда среди корней характеристического уравнения (5.7.6) имеются вещественно - разные и вещественно - равные, вещественно - разные и комплексно- сопряжённые, вещественно - равные и комплексно- сопряжённые, также имеют место утверждения, подобные утверждениям теоремы 5.7.1.*

§5.8. Одномерное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки со степенным особым ядром

Рассмотрим оператор

$$L[y] \equiv D_x^\alpha y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t^\alpha} y(t)dt \qquad (5.8.1)$$

с ядром вида

$$K(x,t) = K^*\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) + \cdots$$
$$+A_n\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big)^{n-1}. \qquad (5.8.2)$$

Найдем такой оператор $L^*[z]$, который будет сопряжённым к оператору $L[y]$. С этой целью для двух функций $f, g \in C_\alpha(0,\infty)$ вводим их скалярное произведение в виде

$$(f,g) = \int_0^\infty f(x)g(x)\frac{dx}{x^\alpha}$$

и рассмотрим скалярное произведение вида

$$(L[y],z) = \int_0^\infty \left[D_t^\alpha y + A_0 y + \int_0^t \frac{K(t,\tau)}{\tau^\alpha} y(\tau)d\tau\right] z(t)\frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \int_0^\infty z(t)dy(t) + A_0\int_0^\infty y(t)z(t)\frac{dt}{t^\alpha} + \int_0^\infty z(t)\frac{dt}{t^\alpha}\int_0^t \frac{K(t,\tau)}{\tau^\alpha} y(\tau)d\tau =$$

$$= z(t)y(t)|_0^\infty - \int_0^\infty y(t)dz(t) + A_0 \int_0^\infty z(t)y(t)\frac{dt}{t^\alpha} + \int_0^\infty y(\tau)\frac{d\tau}{\tau^\alpha}\int_\tau^\infty \frac{K(t,\tau)}{t^\alpha} z(t)dt =$$

$$= |\tau = t| = z(\infty)y(\infty) - z(0)y(0) - \int_0^\infty y(t)D_t^\alpha z(t)\frac{dt}{t^\alpha} +$$

$$+A_0 \int_0^\infty z(t)y(t)\frac{dt}{t^\alpha} + \int_0^\infty y(t)\frac{dt}{t^\alpha}\int_t^\infty \frac{K(\tau,t)}{\tau^\alpha} z(\tau)d\tau = z(\infty)y(\infty) - z(0)y(0) +$$

$$+\int_0^\infty y(t)\left[-D_t^\alpha z + A_0 z + \int_t^\infty \frac{K(\tau,t)}{\tau^\alpha} z(\tau)d\tau\right]\frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= z(\infty)y(\infty) - z(0)y(0) + (\,y, L^*[z]).$$

Т.е.

$$(\,L[y], z) = z(\infty)y(\infty) - z(0)y(0) + (\,y, L^*[z]),$$

где

$$L^*[z] \equiv -D_x^\alpha z + A_0 z + \int_x^\infty \frac{K(t,x)}{t^\alpha} z(t)dt.$$

Таким образом, оператор

$$L^*[z] \equiv -D_x^\alpha z + A_0 z + \int_x^\infty \frac{K(t,x)}{t^\alpha} z(t)dt$$

будет сопряжённый оператор к оператору $L[y]$.

Отсюда интегро-дифференциальному уравнению

$$D_x^\alpha y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t^\alpha} y(t)dt = f(x), \qquad (5.8.3)$$

с ядром

$$K(x,t) = K^*\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) + \cdots$$
$$+A_n\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big)^{n-1} \qquad (5.8.4)$$

соответствует сопряжённое уравнение

$$-D_x^\alpha z + A_0 z + \int_x^\infty \frac{K(t,x)}{t^\alpha} z(t)dt = g(x). \qquad (5.8.5)$$

с ядром вида

$$K(t,x) = K^*\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big) + \cdots$$
$$+A_n\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big)^{n-1}. \qquad (5.8.6)$$

Уравнение (5.8.5) необходимо исследовать в классе сопряжённых функций $\tilde{C}_\alpha\big(\vec{0},\infty;\lambda,\infty\big)$. Класс функций $\tilde{C}_\alpha\big(\vec{0},\infty;\lambda,\infty\big)$ является классом непрерывных на интервале $(0,\infty)$ сложных функций $g(x)$, зависящих от функции $\psi(x) = \omega_\alpha(x)$, как от аргумента и в точке $x = 0$ обращающихся в бесконечность с ассимптотическим поведением:

$$g(x) = O\big[e^{-\delta\omega_\alpha(x)}\big], \delta > \lambda > 0, x \to 0, \qquad (5.8.6')$$

а при $x < 0$ $g(x) = 0$. В этом классе функций вместо оператора дифференцирования D_x^α всегда действует сопряжённый дифференциальный оператор $-D_x^\alpha$. Т.е. через $\tilde{C}_\alpha^{(n)}\big(\vec{0},\infty;\lambda,\infty\big)$ $\Big(\tilde{C}_\alpha^{(0)}\big(\vec{0},\infty;\lambda,\infty\big) = \tilde{C}_\alpha\big(\vec{0},\infty;\lambda,\infty\big)\Big)$ обозначим класс сопряжённых функций $g(x)$, которые имеют непрерывные $-D_x^\alpha$ – производные до порядка n включительно и, для которых $(-D_x^\alpha)^n g(x) \in \tilde{C}_\alpha\big(\vec{0},\infty;\lambda,\infty\big)$ для $\forall n \in N$. Если для данного класса функций выполнение условия (4.8.6′) не обязательно, то тогда его обозначим через $\tilde{C}_\alpha^{(n)}(0,\infty)$. Также заметим,

что поскольку функции класса $\tilde{C}_{\alpha}^{(n)}(\vec{0},\infty;\lambda,\infty)$ или $\tilde{C}_{\alpha}^{(n)}(0,\infty)$ зависят от функции $\omega_{\alpha}(x)$, как от аргумента, поэтому иногда в случае необходимости вместо $g(x)$ будем писать $g^{*}(\omega_{\alpha}(x))$.

Решение сопряжённого уравнения (5.8.5), легко можно получить без всякого интегрирования на основе следствия 5.5.2. из соответствующего решения уравнения (5.8.3) при замене пределов интегрирования от x до бесконечности и замене $\omega_{\alpha}(x)-\omega_{\alpha}(t)$ на $\omega_{\alpha}(t)-\omega_{\alpha}(x)$.

Действительно, действуя к обеим сторонам уравнения (5.8.5) S_{α} – интегральным преобразованием, приходим к равенству

$$pS_{\alpha}(p)+y^{*}(\omega_{\alpha}(x))\big|_{x=\infty}+A_0S_{\alpha}(p)+$$
$$+\left(\frac{A_1}{p}+\frac{1!\,A_2}{p^2}+\frac{2!\,A_3}{p^3}+\cdots+\frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}\right)S_{\alpha}(p)=F(p)$$

или при предположении $y^{*}(\omega_{\alpha}(x))\big|_{x=\infty}=0$, имеем

$$\left(p+A_0+\frac{A_1}{p}+\frac{1!\,A_2}{p^2}+\frac{2!\,A_3}{p^3}+\cdots+\frac{(n-1)!\,A_n}{p^n}\right)S_{\alpha}(p)=F(p).$$

Можно преобразовать полученное равенство следующим образом:

$$S_{\alpha}(p)=\frac{p^n}{p^{n+1}+A_0p^n+A_1p^{n-1}+1!\,A_2p^{n-2}+\cdots+(n-1)!\,A_n}F(p). \quad (5.8.7)$$

Известными способами алгебры функцию

$$\Pi^{+}(p)=\frac{p^n}{p^{n+1}+A_0p^n+A_1p^{n-1}+1!\,A_2p^{n-2}+\cdots+(n-1)!\,A_n}$$

в зависимости от корней характеристического уравнения

$$p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + 1!\, A_2 p^{n-2} + \cdots + (n-1)!\, A_n = 0 \qquad (5.8.8)$$

например, в трёх случаях можно привести к одному из видов

$$\Pi_1^+(p) = \frac{N_1^1}{p - p_1} + \frac{N_2^1}{p - p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{p - p_{n+1}}, \qquad (5.8.9)$$

$$\Pi_2^+(p) = \frac{N_1^2}{p - p_1} + \frac{N_2^2}{(p - p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(p - p_1)^{n+1}}, \qquad (5.8.10)$$

$$\Pi_3^+(p) = \frac{N_1^3 p + N_1^4}{(p - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{N_2^3 p + N_2^4}{(p - \alpha_2)^2 + \beta_2^2} + \cdots + \frac{N_k^3 p + N_k^4}{(p - \alpha_k)^2 + \beta_k^2}, \qquad (5.8.11)$$

с неопределёнными коэффициентами N_i^j, $(i = \overline{1, n+1}, j = 1,2), N_l^j$, $(l = \overline{1, k}, j = 3,4)$.

I. Пусть корни характеристического уравнения (5.8.8) являются вещественными и разными. В этом случае оригинал для $\Pi_1^+(p)$ легко можем восстановить в виде

$$\pi_1^+(x) = N_1^1 e^{p_1 \omega_\alpha(x)} + N_2^1 e^{p_2 \omega_\alpha(x)} + \cdots + N_{n+1}^1 e^{p_{n+1} \omega_\alpha(x)}. \qquad (5.8.12)$$

Далее, записывая равенство (5.8.7) в виде

$$S_\alpha(p) = \left(\frac{N_1^1}{p - p_1} + \frac{N_2^1}{p - p_2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^1}{p - p_{n+1}} \right) F(p),$$

на основе теоремы 5.5.8 о сложной свёртке, с учётом (5.8.12), решение сопряжённого уравнения (5.8.5) получим в виде

$$z(x)=\int_x^\infty \left[N_1^1 e^{p_1\left(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)\right)}+N_2^1 e^{p_2\left(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+N_{n+1}^1 e^{p_{n+1}\left(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)\right)}\right] g^*\left(\omega_\alpha(t)\right)\frac{dt}{t^\alpha},$$

или с учётом того, что $g^*\left(\omega_\alpha(t)\right)=g(t)$,

$$z(x)=\int_x^\infty \left[N_1^1 e^{-p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+N_2^1 e^{-p_2\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+N_{n+1}^1 e^{-p_{n+1}\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\right] g(t)\frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (5.8.13)$$

Далее, в отличие от уравнения (5.8.3), однородное сопряжённое уравнение

$$-D_x^\alpha z+A_0 z+\int_x^\infty K^*\left(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x)\right) z^*\left(\omega_\alpha(x)\right)\frac{dt}{t^\alpha}=0, \qquad (5.8.14)$$

не может иметь ненулевые решения.

Действительно, если предположить принадлежность функции $z(x)$ классу $\tilde{C}_\alpha^{(n+1)}(0,\infty)$, тогда задача решения однородного уравнения (5.8.14) эквивалентна задаче решения сопряжённого операторно-дифференциального уравнения

$$(-D_x^\alpha)^{n+1}z+A_0(-D_x^\alpha)^n z+A_1(-D_x^\alpha)^{n-1}z+\cdots+(n-1)!\,A_n z=0. \qquad (5.8.14')$$

Если искать решение однородного уравнения (5.8.14′) в виде

$$z(x)=e^{-p\omega_\alpha(x)},$$

тогда для определения p получим характеристическое уравнение

$$p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + 1!\, A_2 p^{n-2} + \cdots + (n-1)!\, A_n = 0. \quad (5.8.14'')$$

Отсюда прямая подстановка покажет, что функция вида

$$z_1^{-,1}(x) = c_1^1 e^{-p_1 \omega_\alpha(x)} + c_2^1 e^{-p_2 \omega_\alpha(x)} + \cdots + c_{n+1}^1 e^{-p_{n+1} \omega_\alpha(x)}$$

с произвольными коэффициентами $c_1^1, c_2^1, \cdots, c_{n+1}^1$ является общим решением однородного уравнения (5.8.14′), но не является общим решением однородного уравнения (5.8.14). Отсюда следует, что однородное уравнение (5.8.14) кроме нулевых решений, других решений не имеет.

II. Пусть корни характеристического уравнения (5.8.8) являются вещественными и равными т. е. $p_1 = p_2 = \cdots = p_{n+1}$. В этом случае оригинал для $\Pi_2^+(p)$ можем восстановить в виде

$$\pi_2^+(x) = N_1^1 e^{p_1 \omega_\alpha(x)} + N_2^1 \omega_\alpha(x) e^{p_1 \omega_\alpha(x)} + \cdots + N_{n+1}^1 \omega_\alpha^n(x) e^{p_1 \omega_\alpha(x)}. \quad (5.8.17)$$

Далее, записывая равенство (5.8.7) в виде

$$S_\alpha(p) = \left(\frac{N_1^2}{p - p_1} + \frac{N_2^2}{(p - p_1)^2} + \cdots + \frac{N_{n+1}^2}{(p - p_1)^{n+1}} \right) F(p),$$

на основе теоремы 5.5.8, с учётом (5.8.17) решение сопряжённого уравнения (5.8.5) получим в виде

$$z(x) = \int_x^\infty \Big[N_1^1 e^{p_1(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x))} + N_2^1 \big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big) e^{p_1(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x))} + \cdots$$

$$+ N_{n+1}^1 \big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big)^n e^{p_1(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x))} \Big] g^*\big(\omega_\alpha(t)\big) \frac{dt}{t^\alpha},$$

или

$$z(x)=\int_x^{\infty}\left[N_1^1 e^{-p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}-N_2^1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)e^{-p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n N_{n+1}^1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)^n e^{-p_1\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)}\right]g(t)\frac{dt}{t^\alpha}. \qquad (5.8.19)$$

В данном случае также легко можно показать, что каждая функция вида

$$y_i=e^{-p_1\omega_\alpha(x)}\left(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t)\right)^{i-1},(i=\overline{1,n+1})$$

не является частным решением однородного уравнения (5.8.14) и поэтому однородное уравнение (5.8.14) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (5.8.5) всегда имеет единственное решение, которое выражается равенством (5.8.19).

III. Пусть в уравнении (5.8.5) $n=2k$ – чётное число и все корни характеристического уравнения (5.8.8) являются комплексно-сопряжёнными. В этом случае для восстановления оригинала для $\Pi_3^+(p)$, в первую очередь, запишем изображения $\Pi_3^+(p)$ в виде

$$\Pi_3^+(p)=N_1^3\frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\frac{N_1^4+N_1^3\alpha_1}{-\beta_1}\frac{-\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\cdots+$$

$$+N_k^3\frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}+\frac{N_k^4+N_k^3\alpha_k}{-\beta_k}\frac{-\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2}.$$

Тогда оригинал для $\Pi_3^+(p)$ восстанавливается в виде

$$\pi_3^+(x)=N_1^3 e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_1\omega_\alpha(x)]+N_1^5\,e^{\alpha_1\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_1\omega_\alpha(x)]+\cdots$$

$$+N_k^3 e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\cos[\beta_k\omega_\alpha(x)]+N_k^5\,e^{\alpha_k\omega_\alpha(x)}\sin[\beta_k\omega_\alpha(x)], \qquad (5.8.21)$$

где

$$N_i^5=\frac{N_i^4+N_i^3\alpha_i}{-\beta_i}\ \left(i=\overline{1,k}\right).$$

Теперь, записывая равенство (5.8.7) в виде

$$S_\alpha(p) = \left(N_1^3 \frac{p-\alpha_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + N_1^5 \frac{-\beta_1}{(p-\alpha_1)^2+\beta_1^2} + \cdots + \right.$$
$$\left. + N_k^3 \frac{p-\alpha_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} + N_k^5 \frac{-\beta_k}{(p-\alpha_k)^2+\beta_k^2} \right) F(p),$$

на основе теоремы 5.5.7, с учётом (5.8.21), решение сопряжённого уравнения (5.8.5) получим в виде

$$z(x) = \int_x^\infty \left\{ e^{\alpha_1(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x))} \begin{bmatrix} N_1^3 \cos[\beta_1(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x))] + \\ + N_1^5 \sin[\beta_1(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x))] \end{bmatrix} + \cdots \right.$$
$$\left. + e^{\alpha_k(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x))} \begin{bmatrix} N_k^3 \cos[\beta_k(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x))] + \\ + N_k^5 \sin[\beta_k(\omega_\alpha(t)-\omega_\alpha(x))] \end{bmatrix} \right\} g^*(\omega_\alpha(t)) \frac{dt}{t^\alpha},$$

или

$$z(x) = \int_x^\infty \left\{ e^{-\alpha_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))} \begin{bmatrix} N_1^3 \cos[\beta_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))] - \\ - N_1^5 \sin[\beta_1(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))] \end{bmatrix} + \cdots \right.$$
$$\left. + e^{-\alpha_k(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))} \begin{bmatrix} N_k^3 \cos[\beta_k(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))] - \\ - N_k^5 \sin[\beta_k(\omega_\alpha(x)-\omega_\alpha(t))] \end{bmatrix} \right\} g(t) \frac{dt}{t^\alpha}. \tag{5.8.22}$$

Подобно предыдущим случаям, в этом случае также однородное уравнение (5.8.14) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (5.8.5) всегда имеет единственное решение, которое представимо равенством (5.8.22).

Таким образом, доказана:

Теорема 5.8.1. *Пусть в сопряжённом интегро-дифференциальном уравнении (5.8.5)* $g(x) \in \tilde{C}_\alpha(0,\infty)$, $K(t,x) \in \tilde{C}_\alpha(R)$ *и ядро* $K(t,x)$ *имеет свёрточный вид (5.8.6). Тогда однородное уравнение (5.8.14) всегда имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение (5.8.5) всегда имеет единственное*

решение, которое в зависимости от корней характеристического уравнения (5.8.8) выражается по одному из равенств (5.8.13), (5.8.19) или (5.8.22).

Замечание 5.8.1. *В случае, когда среди корней характеристического уравнения (5.8.8) имеются вещественно - разные и вещественно - равные, вещественно - разные и комплексно - сопряжённые, вещественно - равные и комплексно – сопряжённые, также имеют место утверждения, подобные утверждениям теорем 5.8.1.*

Подытоживая вышеприведённые результаты, аналог теоремы Фредгольма для уравнения (5.8.3), (5.8.5) можно построить следующим образом:

Теорема 5.8.2. (Аналог первой теоремы Фредгольма). *Если для любого* $i, (i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $Rep_i < 0$, *то, как данное интегро-дифференциальное уравнение (5.8.3), так и сопряжённое с ним уравнение (5.8.5), однозначно разрешимы при любом свободном члене* $f(x) \in C_\alpha(0, \infty)$ и $g(x) \in \tilde{C}_\alpha(0, \infty)$. *Соответствующие однородные уравнения имеют при этом только тривиальные решения.*

Теорема 5.8.3. (Аналог второй теоремы Фредгольма). *Если для некоторого* $i, (i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $Rep_i > 0$, *тогда однородное интегро-дифференциальное уравнение, которое соответствует неоднородному уравнению (5.8.3), имеет нетривиальные решения, а сопряжённое однородное уравнение (5.8.14), имеет только нулевое решение. Общее число линейно-независимых решений однородного интегро-дифференциального уравнения, которое соответствует неоднородному уравнению (4.8.3), конечно и равно* $n + 1$ *и оно достигается, когда* $Rep_i > 0, (i = \overline{1, n+1})$.

Теорема 5.8.4. (Аналог третьей теоремы Фредгольма). *Неоднородное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение (5.8.5) при любом свободном члене* $g(x) \in \tilde{C}_\alpha(0, \infty)$ *однозначно разрешимо, а в случае, когда для некоторого* $i, (i = \overline{1, n+1})$ *выполняется условие* $Rep_i > 0$, *для разрешимости неоднородного уравнения (5.8.3) достаточно, чтобы его свободный член* $f(x)$ *принадлежал классу* $C_\alpha(\vec{0}, \infty; max\{Rep_i\}, 0)$.

Теорема 5.8.5. (Аналог четвертой теоремы Фредгольма). *Сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение (4.8.5) собственных значений и собственных функций не имеет, а интегро-дифференциальное уравнение (4.8.3) имеет континуум множества собственных чисел, максимальная кратность которых равна* $n+1$.

Выводы по главе 5

Введён сильно-особый дифференциальный оператор D_x^α и исследованы операторно-дифференциальные уравнения, которые построены с помощью данного оператора.

Построен аналог формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения n-го порядка, которой построен с помощью дифференциального оператора D_x^α.

Построены основы операционного исчисления для исследования особых операторно-дифференциальных уравнений, которые построены с помощью дифференциального оператора D_x^α.

Введено понятие S_α – интегрального преобразования и доказаны основные теоремы, касающиеся данного интегрального преобразования.

Исследованы некоторые линейные операторно-дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами методом S_α – интегрального преобразования.

Исследован некоторый класс особых интегро-дифференциальных уравнений, а также сопряжённых с ним уравнений, которые имеют особенности степенного характера в их ядре. Эти классы уравнений исследованы с помощью математического аппарата S_α – интегрального преобразования, особенно с помощью теоремы о сложной свёртке и следствия из этой теоремы. Также построен аналог теоремы Фредгольма для данных классов интегро-дифференциальных уравнений.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данном разделе проводим короткий анализ полученных результатов в диссертационной работе.

В первой главе диссертации приводится краткий обзор достижений в области вырождающихся дифференциальных уравнений, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с различными видами сингулярности. Также даётся краткий обзор о различных видах интегральных преобразований.

Во **второй главе** диссертационной работы вводится двухточечный дифференциальный оператор вида

$$D_x^{11} = x(1-x)\frac{d}{dx}$$

с двумя особыми точками 0 и 1. С помощью данного оператора строятся и исследуются простейшие операторно-дифференциальные уравнения вида

$$D_x^{11} y = f(x),$$

$$D_x^{11} y + M_1 y = f(x).$$

$$(D_x^{11})^n y = f(x).$$

Например, для последнего уравнения строится аналог формулы Коши в виде

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\,\frac{1-t}{t}\right) f(t)\frac{dt}{t(1-t)} +$$

$$+\frac{c_1}{(n-1)!}\ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right) + \frac{c_2}{(n-2)!}\ln^{n-2}\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{c_{n-1}}{1!}\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-x_0}{x_0}\right) + c_n.$$

Далее, в пятом параграфе классическими методами находится общее решение общего операторно-дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$P_M^n(D_x^{11})y(x) = f(x),$$

где

$$P_M^n(D_x^{11}) \equiv (D_x^{11})^n + M_1(D_x^{11})^{n-1} + \cdots + M_{n-1}D_x^{11} + M_n.$$

О разрешимости последнего уравнения доказаны три теоремы (Теоремы 2.6.1., 2.6.2 и 2.6.3.).

При изучении дифференциальных уравнений одной из важных методик исследования является операционные методы исследования. На основе операционного метода исследований лежит понятие интегральных преобразований. В математике известно десятки различных интегральных преобразований, при помощи которых исследуются разнообразные дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения. Поскольку для особого дифференциального оператора D_x^{11} соответствующее интегральное преобразование до настоящего времени не было построено, поэтому вопрос о построении таково нового интегрального преобразования приобретает важное значение. Этот вопрос нашёл своей положительный ответ в работе [35-А]. В данной работе построены основы операционного метода для оператора дифференцирования D_x^{11} в виде S_{11} - интегрального преобразования.

В седьмом параграфе второй главы подробно изучается S_{11} - интегральное преобразование. Приводятся основные свойства S_{11} - интегрального преобразования. Отдельно изучаются правостороннее и левостороннее S_{11} - интегральное преобразование.

На основе введённого интегрального преобразования в девятом параграфе исследуется общее операторно-дифференциальное уравнение (2.5.1) методом

операционного исчисления. Результаты этого параграфа согласуются с результатами пятого параграфа, когда уравнение (2.5.1) исследуется классическими методами. Сравнение результатов данных параграфов показывает, что операционный метод исследования без громоздких вычислений быстро приводит нас к ожидаемым результатам.

Далее, во второй главе вводится понятие правосторонней и левосторонней сложной свёртки двух функций соответственно в виде следующих операций:

$$h^{+}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x} f_1^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}$$

и

$$h^{-}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}} f_1^{*}\left(\frac{t}{1-t}\right) f_2^{*}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right)\frac{dt}{t(1-t)}.$$

Доказаны соответствующие теоремы о сложном свёртке двух функций (Теоремы 2.8.7 и 2.10.6, также следствие 2.8.2).

Теоремы 2.8.7 и 2.10.6 дали нам возможность в дальнейшем исследовать интегро-дифференциальные уравнения типа сложной свёртки.

В **третьей главе** диссертационной работы исследуется класс одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с особым двухточечным ядром и сопряженное с ним уравнение.

Вначале исследуется модельное интегро-дифференциальное уравнение

$$D_x^{11}y+\int\limits_{0}^{x}\frac{K}{t(1-t)}y(t)dt=f(x),$$

затем на основе полученных результатов для модельного уравнения исследуется немодельное уравнение.

$$D_x^{11}y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x).$$

Для исследования вышеназванных классов уравнений вводится класс функций $y(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, 0)$, которые зависит от функции $\psi(x) = \frac{x}{1-x}$, как от аргумента и в точке $x = 0$ $(x = 1)$ обращается в нуль (бесконечность) с ассимптотическим поведением

$$y(x) = o[x^{\delta}], \delta > \lambda, x \to 0,$$

$$\left(y(x) = O\left[(1-x)^{-\delta}\right], \delta > \lambda, x \to 1\right).$$

Подобный класс функций был рассмотрен в монографии Н.Раджабова [240]. В данной монографии решение интегрального уравнения типа Вольтерра

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t-a} \varphi(t)dt = f(x).$$

ищется в классе функций $\varphi(x) \in C[a,b]$, обращающихся в нуль с асимптотическим поведением

$$\varphi(x) = o[(x-a)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0.$$

В отличие от приведённого класса функций, поведение функции $f(x) \in C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, 0)$ сразу определяется в двух точках $x = 0$ и $x = 1$, причём в точке $x = 0$ функции из класса $C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, 0)$ обрашаются в нуль, а в точке $x = 1$ обрашаются в бесконечность. Класс функций $C_{11}(\vec{0}, 1; \lambda, 0)$ был введён в работе [30-А].

Далее, в третьем параграфе третьей главы исследуется модельное сопряженное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K}{t(1-t)} z(t)dt = g(x).$$

Сопряженное уравнение исследуется в классе сопряженных функций $z(x) \in \tilde{C}_{11}\left(0, \vec{1}; \lambda, 0\right)\left(\tilde{C}_{11}\left(\vec{0}, 1; \lambda, \infty\right)\right)$, которые зависят от функции $\tilde{\psi}(x) = \frac{1-x}{x}$, как от аргумента и в точке $x = 1$ $(x = 0)$ обращаются в нуль(бесконечность) с ассимптотическим поведением

$$z(x) = o\left[(1-x)^{\delta}\right], \delta > \lambda, x \to 1,$$
$$\left(z(x) = O\left[x^{-\delta}\right], \delta > \lambda, x \to 0\right).$$

В четвёртом параграфе исследуется немодельное сопряженное интегро-дифференциальное уравенение

$$-D_x^{11}z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x).$$

О разрешимости последних двух сопряженных уравнений доказаны теоремы 3.2.1, 3.2.2 и теоремы 3.4.1, 3.4.2.

Пятый параграф третьей главы посвящён исследованию интегро-дифференциального уравнения с полным характеристическим уравнением вида

$$D_x^{11}y + Ay + \int_0^x \frac{\lambda}{t(1-t)} y(t)dt = f(x) \qquad (1.1)$$

и сопряженного с ним уравнения вида

$$-D_x^{11}z + Az + \int_x^1 \frac{\lambda}{t(1-t)} z(t)dt = g(x). \qquad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2), считая λ параметром, ставится задача о наличии собственных значений и собственных функций.

Например, в случае вещественно-разных корней характеристического уравнения

$$k^2 + Ak + \lambda = 0, \qquad (1.3)$$

те значения параметра λ, для которых выполняется неравенство $0 < k_1 < k_2$, составляют двукратные собственные точки уравнения (1.1). Данные значения параметра λ в то же время составляют двукратные собственные значения и для сопряжённого уравнения (1.2). Очевидно, что количество таких значений параметра λ составляет множество мощности континуума.

Функции, соответствующие собственным значениям, составляют собственные функции для уравнений (1.1) и (1.2). Важно заметить, что, хотя число собственных функций однородных уравнений

$$D_x^{11}y + Ay + \int_0^x \frac{\lambda}{t(1-t)} y(t)dt = 0 \qquad (1.4)$$

и

$$-D_x^{11}z + Az + \int_x^1 \frac{\lambda}{t(1-t)} z(t)dt = 0 \qquad (1.5)$$

бесконечно, но число линейно-независимых решений данных уравнений не превышает двух, то есть размерность пространства линейно-независимых решений уравнений (1.4) и (1.5) конечна, и она меньше либо равна двум.

Вышеперечисленные результаты дали возможность построить аналог теоремы Фредгольма для уравнений (1.1) и (1.2) (Теоремы 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3., 3.5.4). Также, данные результаты изложены в виде аналога об альтернативе Фредгольма (Теоремы 3.5.5, 3.5.6).

В четвёртой главе диссертации исследуются интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра с логарифмической особенностью в ядрах. В первом параграфе находятся явные решения интегро-дифференциального уравнения вида

$$D_x^{11}y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x), \qquad (1.6)$$

где ядро $K(x,t)$ имеет логарифмическую особенность порядка $n-1$ вида

$$K(x,t) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right).$$

Решение данного класса уравнений ищется в классе функций $y(x) \in C_{11}\left(\vec{0}, 1; \varepsilon, 0\right), (\varepsilon > 0)$, для которых $D_x^{11}y \in C_{11}(0,1)$.

Исследование уравнения (1.6) приводится к исследованию операторно-дифференциального уравнения $n+1$-го порядка вида

$$(D_x^{11})^{n+1}y + A_0(D_x^{11})^n y + \cdots + (n-1)!\,A_n y = (D_x^{11})^n f(x). \qquad (1.7)$$

Затем из полученных решений уравнения (1.7) строится общее решение интегро-дифференциального уравнения (1.6).

В этом параграфе в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\lambda^{n+1} + A_0\lambda^n + 0!\,A_1\lambda^{n-1} + \cdots + (n-1)!\,A_n = 0$$

в трёх случаях о разрешимости уравнения (1.6) доказаны три теоремы (Теоремы 4.1.2, 4.1.3 и 4.1.4).

Во втором параграфе четвёртой главы исследуется сопряжённое одномерное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x), \qquad (1.8)$$

с сопряженным логарифмическим ядром

$$K(t,x) = A_1 + A_2 \ln\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right) + \cdots + A_n \ln^{n-1}\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right).$$

Решение уравнения (1.8) ищется в классе сопряжённых функций $z(x) \in \tilde{C}_{11}\left(0,\vec{1};\varepsilon,0\right)$, для которых $D_x^{11}z \in \tilde{C}_{11}(0,1)$.

В этом случае решение сопряжённого уравнения (1.8) заменяется на решение сопряженного операторно-дифференциального уравнения

$$(-D_x^{11})^{n+1}z + A_0(-D_x^{11})^n z - A_1(-D_x^{11})^{n-1}z + \cdots + (n-1)!\,A_n z = \\ = (-D_x^{11})^n g(x). \quad (1.9)$$

Как и в предыдущем параграфе, о разрешимости сопряжённого уравнения (1.8) доказаны три теоремы (Теоремы 4.2.2, 4.2.3 и 4.2.4).

В конце второго параграфа исследуется задача о наличии собственных значений и собственных функций для однородного уравнения

$$D_x^{11}y + \mu y + \int\limits_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = 0 \qquad (1.10)$$

и сопряжённого с ним уравнения

$$-D_x^{11}z + \mu z + \int\limits_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = 0. \qquad (1.11)$$

В этом случае оказывается, что те значения параметра μ, для которых выполняются неравенства $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n+1}$, составляют $n+1$-кратные собственные значения уравнения (1.10). Данные значения параметра μ в то же время будут $n+1$-кратными собственными значениями и для сопряжённого уравнения (1.11). Очевидно, что в этом случае количество таких значений параметра μ также составляет множество мощности континуума.

Функции, соответствующие собственным значениям, составляют собственные функции для уравнений (1.10) и (1.11). В этом случае число линейно-независимых решений однородных уравнений (1.10) и (1.11) не превышает $n+1$, то есть размерность пространства линейно-независимых решений уравнений (1.10) и (1.11) конечна, и она меньше либо равна $n+1$.

Результаты второго параграфа подытожены в виде аналога теорем Фредгольма (Теоремы 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8). Также, данные результаты изложены в виде аналога об альтернативе Фредгольма (Теоремы 4.5.5, 4.5.6).

В третьем параграфе четвёртой главы исследуется особое интегро-дифференциальное уравнение первого порядка типа сложной свёртки вида

$$D_x^{11}y + A_0 y + \int\limits_{\frac{1}{2}}^x K^*\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1-t}{t}\right) y^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = f(x). \qquad (1.12)$$

Уравнение (1.12) исследуется на основе теоремы о сложной свёртке (Теорема 2.8.7). Например, когда корни характеристического уравнения

$$p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + \cdots + (n-1)!\, A_n = 0 \tag{1.13}$$

являются вещественными и разными, на основе теоремы о сложной свёртке единственное решение уравнения (1.12) находится в виде

$$y(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} \left[N_1^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{p_1} + N_2^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{p_2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + N_{n+1}^1 \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right)^{p_{n+1}} \right] f(t) \frac{dt}{t(1-t)}.$$

В отличие от результатов предыдущих глав, окажется, что однородное интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки

$$D_x^{11} y + A_0 y + \int_{\frac{1}{2}}^{x} K^* \left(\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1-t}{t} \right) y^* \left(\frac{x}{1-x} \right) \frac{dt}{t(1-t)} = 0, \tag{1.14}$$

кроме нулевых решений, других решений не имеет. С другой стороны, такой результат вполне ожидаемый и согласуется с общей теорией интегро-дифференциальных уравнений с регулярными ядрами. Действительно, поскольку пределы интегрирования в уравнении (1.14) изменятся в пределах от $\frac{1}{2}$ до x и в данных пределах ядро уравнения не имеет особенность, поэтому однородное уравнение (1.14) должно иметь только нулевое решение, а неоднородное уравнение (1.12) единственное решение.

Подобные результаты получены в случае, когда корни характеристического уравнения (1.13) являются вещественными и равными и комплексно-сопряженными (Теорема 4.3.1).

В четвертом параграфе четвёртой главы исследуется одномерное сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение типа сложной свёртки вида

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 K^*\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right) z^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = g(x), \qquad (1.15)$$

Оказывается, что в отличие от несопряженного уравнения (1.12), сопряженное уравнение (1.15) неоднозначно разрешимо. То есть, в этом случае однородное сопряжённое уравнение

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int_x^1 K^*\left(\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1-x}{x}\right) z^*\left(\frac{t}{1-t}\right)\frac{dt}{t(1-t)} = 0. \qquad (1.16)$$

имеет нетривиальные решения. Например, функции вида

$$z_1(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_1}, z_1(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_2}, \cdots, z_1(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{p_{n+1}},$$

в случае

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_{n+1}$$

являются частными решениями однородного уравнения (1.16). Результаты четвертого параграфа сформулированы в виде теорем 4.4.4.-4.4.7.

В **пятой главе** диссертации исследуется вопрос о построении основ операционного исчисления для дифференциального оператора $D_x^\alpha = x^\alpha \frac{d}{dx}$, затем

на основе построенного математического аппарата находится общее решение некоторых классов операторно-дифференциальных и сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.

В параграфах 1-3 пятой главы находится общее решение простейших операторно-дифференциальных уравнений, которые построены с помощью дифференциального оператора D_x^α. Подобные уравнения раньше были исследованы в работах Н.Раджабова [233], [235], [239], [262] и Н.Раджабова, Г.М.Кодирова [241]-[244], [250]. В работах Л.Н.Раджабовой при исследовании двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра [274]-[280], а также при исследовании дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка [263]-[272] были использованы дифференциальные операторы D_x^α и D_x^β с левой и правой сильно-особой точкой.

В отличие от вышеназванных работ в диссертационной работе строится операционный метод исследования операторно-дифференциальных уравнений, которые построены с помощью оператора дифференцирования D_x^α.

В четвёртом параграфе приводятся определение и основные свойства S_α - интегрального преобразования. Доказана теорема 5.5.7. о сложной свёртке. Понятие S_α - интегрального преобразования впервые было введено в статье [20-А], в котором основные свойства данного интегрального преобразования были получены из соответствующих свойств интегрального преобразования Лапласа с помощью подходящей замены переменных.

Далее, в шестом параграфе четвёртой главы операционным методом находится единственное решение операторно-дифференциального уравнения

$$P_M^n(D_x^\alpha)y(x) \equiv (D_x^\alpha)^n y + M_1(D_x^\alpha)^{n-1}y + \cdots + M_n y = f(x),$$

с нулевыми начальными условиями на бесконечно удалённой точке

$$y(x)\Big|_{x=\infty} = 0, D_x^{\alpha}\, y(x)\Big|_{x=\infty} = 0, .., (D_x^{\alpha})^{n-1}\, y(x)\Big|_{x=\infty} = 0.$$

В седьмом параграфе четвёртой главы в классе функций $f(x) \in C_{\alpha}\big(\vec{0}, \infty; \lambda, 0\big)$, зависящих от функции $\psi(x) = \omega_{\alpha}(x)$ как от аргумента и в точке $x = 0$ обращаюшихся в нуль с ассимптотическим поведением

$$f(x) = o\big[e^{\delta\omega_{\alpha}(x)}\big], \delta > \lambda, x \to 0,$$

находится общее решение интегро-дифференциального уравнения

$$D_x^{\alpha} y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t^{\alpha}} y(t)dt = f(x), \qquad (1.17)$$

со сверх -сингулярным ядром. В уравнении (1.17) ядро $K(x,t)$ содержит точки с особенностями степенного характера и имеет вид

$$K(x,t) = A_1 + A_2\big(\omega_{\alpha}(x) - \omega_{\alpha}(t)\big) + \cdots + A_n\big(\omega_{\alpha}(x) - \omega_{\alpha}(t)\big)^{n-1}. \qquad (1.18)$$

Здесь важно отметить, что исследованию интегральных уравнений типа Вольтерра со сверх-сингулярным ядром посвящено малое число работ. Такие уравнения в математике называются интегральными уравнениями третьего рода. Из наболее важных работ в данном направлении можно указать работы G.R.Bart [5], [6], а также работы N.Sukavanam [64], Р.Р.Замалиева [140], Н.Н.Габбасова, Р.Р.Замалиева [115], Н.А.Магницкого [183], В.С.Рогожина, С.Н.Расламбекова [288], Л.И.Панова [208].

В работах G.R.Bart [5], [6] исследуется одного класса интегральных уравнений третьего рода типа Фредгольма, находятся обобщённые решения исследуемого класса уравнений.

Из отечественной литературы можно указать работы Л.Г.Михайлова [290]-[292], Н.Раджабова [239]- [262] и Л.Н.Раджабовой [264]- [285].

Исследованию интегральных уравнений типа Вольтерра с ядром вида (1.18) был предметом изучения статьи Н.Раджабова [50], где применяется классический метод исследования.

В отличие от вышеназванных исследований, в седьмом параграфе общее решение уравнения (1.18) находится операционным методом, с помощью созданного математического аппарата S_α - интегрального преобразования. Здесь в зависимости от корней характеристического уравнения

$$p^{n+1} + A_0 p^n + A_1 p^{n-1} + 1!\, A_2 p^{n-2} + \cdots + (n-1)!\, A_n = 0$$

в трёх случаях о разрешимости уравнения (1.17) доказаны три теоремы (Теоремы 5.7.1, 5.7.2, 5.7.3).

В восьмом параграфе четвёртой главы доказана теорема 5.8.1 о разрешимости сопряженного интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки со степенным особым ядром. В этом параграфе сначала для интегро-дифференциального оператора

$$L[y] \equiv D_x^\alpha y + A_0 y + \int_0^x \frac{K(x,t)}{t^\alpha} y(t)dt$$

с ядром вида

$$K(x,t) = K^*\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big) + \cdots$$
$$+A_n\big(\omega_\alpha(x) - \omega_\alpha(t)\big)^{n-1}.$$

строится сопряжённый оператор в виде

$$L^*[z] \equiv -D_x^\alpha z + A_0 z + \int_x^\infty \frac{K(t,x)}{t^\alpha} z(t)dt$$

затем исследуется сопряжённое интегро-дифференциальное уравнение

$$-D_x^\alpha z + A_0 z + \int_x^\infty \frac{K(t,x)}{t^\alpha} z(t)dt = g(x) \qquad (1.19)$$

с ядром вида

$$K(t,x) = K^*\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big) = A_1 + A_2\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big) + \cdots$$
$$+A_n\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big)^{n-1}. \qquad (1.20)$$

Решение уравнения (1.19) ищется в классе сопряжённых функций $z(x) \in \tilde{C}_\alpha\big(\vec{0}, \infty; \lambda, \infty\big)$, зависящие от функции $\psi(x) = \omega_\alpha(x)$ как от аргумента и в точке $x = 0$ обращающихся в бесконечность с ассимптотическим поведением

$$z(x) = O\big[e^{-\delta\omega_\alpha(x)}\big], \delta > \lambda > 0, x \to 0,$$

а при $x < 0$, $z(x) = 0$.

В восьмом параграфе доказывается, что уравнение (1.19) всегда имеет единственное решение, то есть в отличие от уравнения (1.17) однородное сопряженное уравнение

$$-D_x^\alpha z + A_0 z + \int_x^\infty K^*\big(\omega_\alpha(t) - \omega_\alpha(x)\big) z^*\big(\omega_\alpha(x)\big) \frac{dt}{t^\alpha} = 0, \qquad (1.21)$$

всегда имеет тривиальное решение.

Отсюда, если рассмотреть совместно уравнение (1.17) и сопряжённое с ним уравнение (1.19), то об их разрешимости сформулированы аналоги теоремы Фредгольма в виде теорем 5.8.2.-5.8.5. При формулировке теорем5.8.2.-5.8.5 были использованы результаты статей [22-А], [23-А].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Результаты диссертационной работы являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено интегральное представление многообразия решений для линейного обыкновенного операторно-дифференциального уравнения n-го порядка, в трёх случаях, в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения. Предложена упрощённая методика нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения [32-А], [34-А], [53-А];
- предложено новое S_{11} – интегральное преобразование и на его основе построены основы нового операционного исчисления для особого дифференциального оператора D_x^{11}. Введено понятие левостороннего и правостороннего S_{11} – интегральных преобразований и изучены основные свойства данных преобразований [35-А];
- исследованы некоторые классы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений классическими и современными методами. Для модельного уравнения получено интегральное представление многообразия решений в явном виде. При исследовании немодельных уравнений широко применяется метод, подобный методу регуляризации [1-А], [10-А], [12-А]-[19-А], [22-А]-[31-А], [33-А], [40-А]-[51-А], [54-А]-[56-А];
- построен аналог теорем Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения первого порядка и сопряжённого с ним уравнения. Выявлено, что в отличие от интегральных уравнений типа Вольтера с регулярным ядром, для исследуемого класса уравнений можно ставить задачу о наличии собственных значений и собственных функций [22-А], [23-А];

- построен аналог теорем Фредгольма для особого интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмическим ядром и сопряжённого с ним уравнения. Для данного класса уравнений разрешается задача о наличии спектра [14-A], [19-A] [25-A], [26-A], [27-A], [40-A], [43-A], [47-A], [51-A], [54-A], [55-A];
- предложено новое S_α – интегральное преобразование и на его основе построены основы операционного исчисления для особого дифференциального оператора D_x^α [20-A], [21-A];
- исследованы некоторые классы операторно-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования D_x^α. Построен аналог формулы Коши для неполного операторно-дифференциального уравнения n-го порядка [34-A], [35-A], [36-A], [38-A], [52-A], [53-A];
- исследованы некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений типа сложной свёртки и сопряжённого с ним уравнения [55-A], [56-A];
- построен аналог теорем Фредгольма для одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа сложной свёртки. Установлено, что для данных классов уравнений вторая, третья и четвёртая теорема Фредгольма отличаются от классической теоремы Фредгольма [22-A], [23-A].

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ РЕЗУЛЬТАТОВ

Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории немодельных интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и сверх -сингулярными ядрами, для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными и сверх -сингулярными ядрами, а также в других разделах прикладной математики, механики и физики.

Материалы данной диссертационной работы могут быть использованы для чтения специальных курсов для студентов, магистрантов и докторантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Alimov Sh.A. Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation [Text] / Sh.A. Alimov, R.R. Ashurov // Journl of Inverse Ill-Posed Problems. – 2020. – Vol. 28. – No. 5. – PP. 651-658.

[2]. Al-Jaber S.M. Application of Exponential Kernel to Laplace Transform [Text] / S.M. Al-Jaber // Journal of Applied Mathematics and Physics. – 2019. – No. 7. – PP. 1126-1130.

[3]. Al-Hayani W. Solving $n-$th Order Integro-Differentical Equations Using the Combined Laplace Transform-Adomian Decomposition Method [Text] / W. Al-Hayani // Applied Mathematics. – 2013. – No.4. – PP. 882-886.

[4]. Ashurov R.R. Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations [Text] / R.R. Ashurov, S. Umarov // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2020. – Vol. 23. – No. 6. – PP. 1647-1662.

[5]. Bart G.R. Three Theorems on Third-Kind Linear integral Equations [Text] / G.R. Bart // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1981. – No. 79. – PP. 48-57.

[6]. Bart G.R. Linear Integral Equations of the Third Kind [Text] / / G.R. Bart, R.L. Warnock // SIAM J. Math. Anal. – 1973. – No. 4. – PP. 609-622.

[7]. Behiry S.H. Nonlinear Integro-differential Equations by Differential Transform Method with Adomian Polynomials [Text] / S.H. Behiry // Mathematical Science Letters. – 2013. – No. 3. – PP. 209-221.

[8]. Burton T.A. Volterra Integral and Differential Equations [Text]. / T.A. Burton. – New York, 1983. – 313p.

[9]. Buschman R.G. An inversion integral for a Legendre transformation [Text] / R.G. Buschman // Amer. Math. Monthly. – 1962. – Vol. 69. – No. 4. – PP. 288-289.

[10]. Carroll R.W. Transmutation and operator differential equations [Text] / R.W. Carroll. – Amsterdam-New York-Oxford: North. Holland. – 1979.

[11]. Carroll R.W. Singular and Degenerate Cauchy Problems [Text] / / R.W. Carroll, R.E. Showalter // Academic Press, New York, San Francisco, London. – 1976. – 333p.

[12]. Cont R. Integro-differential equations for option prices in exponential Levy models [Text] / R. Cont, E. Voltchkova // Finance and Stochastics. – 2005. – No. 5. – PP. 299-325.

[13]. Diaz J.B. A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson equation [Text] / J.B. Diaz, H.F. Weinberger // Proc. Am. Math. Soc. – 1953. – No. 4. – PP. 703-715.

[14]. Dimovski I. Convolutional calculus [Text] / I.Dimovski. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – 1990.

[15]. Elzaki T.M. The New Integral Transform «Elzaki Transform» [Text] / T.M.Elzaki // Global Journal of Pure and Applied Mathematics and Technology. – 2011. No. 1. – PP. 57-64.

[16]. Favini A. Singular Integro-Differential Equations of Parabolic Type [Text] / A. Favini, A. Lorenzi, H. Tanabe // Adv. Diff. Eqs. – 2002. – Vol. 7. – PP. 769-798.

[17]. Fedotov A.I. Approximation of Solutions to Singular Integro-Differential Equation by Hermite-Fejer Polynomials [Text] / A.I. Fedotov // Ufa Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 10. – No. 2. – PP.109-117.

[18]. Feng P. Inverse source problems for time-fractional mixed parabolic-hyperbolic type equations [Text] / P. Feng, E.T. Karimov // Journal of Inverse and Ill-posed problems. – 2015. – Vol. 23. – No. 4. – PP. 339-353.

[19]. Filiz A. Numerical Solution of Nonlinear Integro-differential Equation in Biological Sciences [Text] / A. Filiz, A. Isik // Advances in Computational Mathematics and its Applications. – 2013. – Vol. 2. – No 4. – PP. 341-346.

[20]. Gilbert R.P. Integral operator methods for generalized axially symmetric potentials in $n+1$ variables [Text] / R.P. Gilbert // J. Austrial Math. Soc. – 1905. – No. 5. – PP. 331-348.

[21]. Gilbert R.P. Poissons equation and generalized axially symmetric potential theory [Text] / R.P. Gilbert // Annali di Mathematica Pura Appe. – 1963. – Vol. 51. – PP. 337-348.

[22]. Gowers W.T. Generalization of Fourier analysis and how to apply them [Text] / W.T. Gowers // Bulletin of the American Mathematical Society. – 2017. – Vol. 54. No. 1. – PP. 1-44.

[23]. Hamma E.l. Jacobi Transform of (ν, γ, p) –Jacoby-Lipschitz Functions in the Space $L^P\left(R^+,\ \Delta_{(\alpha,\beta)}(t)dt\right)$ [Text] / E.l. Hamma, S. Lafdal, N. Djellap // Ural Mathematical Journal. – 2019. – Vol.5. – No. 1. – PP. 53-58.

[24]. Karp D. Hypergeometric functions as generalized Stieltjes transforms [Text] / D. Karp, E. Prilepkina // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – Vol. 393. – No. 2. – PP. 348-359.

[25]. Kilbas A.A. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on *Lv,r*-spaces [Text] / A.A. Kilbas, O.V. Skoromnik // Integral Transforms Spec. Funct. – 2009. – Vol. 20. – No. 9. – PP. 653-672.

[26]. Kilbas A.A. Euler-type non-homogeneous differential equations with three Liouville fractional derivatives [Text] / A.A. Kilbas, N.V. Zhukovskaya // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – Vol. 12. – No. 2. – PP. 205-234.

[27]. Kilicman A. A note on Mellin Transform and Distributions [Text] / A. Kilicman // Mathematical and Computational Application. – 2004. – Vol. 9. – No.1. – PP. 65-72.

[28]. Morita T. Solution of Differential Equation with the Aid of an Analytic Continuation of Laplace Transform [Text] / T. Morita, K. Sato // Applied Mathematics. – 2014. – No.5. – PP. 1229-1239.

[29]. Olkkonen H. Computation of Hilbert Transform via Discrete Cosine Transform [Text] / H.Olkkonen, P.Pesola, J.T.Olkkonen // Journal of Signal and Information Processing. – 2010. – No. 1. – PP. 18-23.

[30]. Rajabov N. Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov. – TSNU. Dushanbe, 1998. – 158 p.

[31]. Rajabov N. Higher order ordinary differential equation with singular and super singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Seventh International Scientific Kravchuk Conference. Kyiv. – 1998. – PP. 425.

[32]. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary differential equation with super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // International congress of Mathematicians. Berlin. – 1988. – PP. 186.

[33]. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order ordinary system of linear differential equation with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Proceeding of the Second ISAAC Congress. Kluwer Academic Publishing. – 2000. – PP. 175-183.

[34]. Rajabov N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Abstract ISAAC Congress. University of Delaware. New York, USA. – 1997.

[35]. Rajabov N. An introduction to the theory of partial differential equations with super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // – Tehran, 1997. – 230 p.

[36]. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the first order linear ordinary system differential equation with singular and super-singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Abstract of Plenary and invited Lectures Delivered at the second ISAAC Congress. –Fukuoka, Japan. – 1999. – PP. 16-21.

[37]. Rajabov N. Higher ordinary differential equation with super-singular points [Text] / N. Rajabov // Kluwer Academic Publishers. – 1999.

[38]. Rajabov N. Linear conjugate boundary value problems for the general first order linear ordinary system differential equation with singular and super-singular points [Text] / N. Rajabov // Abstract «Third European Congress of Mathematics». – Barcelona, 2000. – 8/7.

[39]. Rajabov N. On explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super-singular kernels [Text] / N. Rajabov // Proceeding of the international Craz workshop «Functional Analytic and

complex methods, their Interactions and applications to Partial Differential Equations». – Graz, Austria. – 2001. – PP. 313-329.

[40]. Rajabov N. About one class of complex two dimensional linear system integral equation with boundary fixed singular of super- singular kernels in half-line [Text] / N. Rajabov // ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equations and Related Topics. Yerevan, Armenia. – 2002. – PP. 51-52.

[41]. Rajabov N. Integral representations and boundary value problems for some linear elliptic system of second order with regular and singular coefficients [Text] / N. Rajabov // Presiding International Conference «Complex Analysis and Applications». – Varna, 2008. – PP. 431-441.

[42]. Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super- singularity kernels and their application [Text] / N. Rajabov // Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2011. – 282 p.

[43]. Rajabov N. Investigation of a class of two-dimensional conjugate integral equation with fixed super-singular kernels [Text] / N.Rajabov, M.Ronto // Mathematical Notes. – 2011. – Vol. 12. – No. 2. – PP. 237-244.

[44]. Rajabov N. To theory one class Linear Model Neoclassical Volterra Type Integral Equation with left Boundary Singular Point [Text] / N.Rajabov // Applied Mathematics. – 2013. – No. 4. – PP. 1301-1312.

[45]. Rajabov N. About New Class of Volterra Type Integral Equation with Two Boundary Singularity in Kernels [Text] / N. Rajabov, S. Saidov // Proceedings of the 2014 International conference on Pure Mathematics - Applied Mathematic. Venice, Italy. – 2014. – No. 4. – PP. 214-217.

[46]. Rajabov N., To theory Volterra type integral Equation with two boundary singularity in Kernels [Text] / N. Rajabov, S. Saidov // Международный научно-практической конференции «Современные концепции научных исследований». – Москва, 2014. – No. 6. – PP. 37-42.

[47]. Rajabov N. New Methods for Investigating a New Class of the Volterra Type Integral Equation with a Boundary Singularity in the Kernel [Text] / N. Rajabov

// The 3rd Annual International Conference «Mathematical Science and its Applications». Abu Dhabi University. – 2014. – PP. 69-72.

[48]. Rajabov N. Integral representation of the manifold solution for new class of the Volterra type integral equation with a boundary singularity in kernels for odd power [Text] / N. Rajabov // 10th International ISAAC Congress. University of Macau. – 2015. – PP. 56-57.

[49]. Rajabov N. Integral Representation of the Manifold Solution for New Class of the Volterra Type Integral Equation with a Boundary Singularity in the Case, When Kernels Contain Logarithmic Singularity and its Power [Text] / N. Rajabov // Journal of Mathematics and System Science. – 2016. – No. 6. – PP. 23-37.

[50]. Rajabov N. Volterra type integral equation with super- singular kernels [Text] / N. Rajabov // Functional analysis in interdisciplinary applications. Astana, Kazakhstan. – 2017. – Vol. 216. – PP. 333-340.

[51]. Rajabov N. Volterra type integral equation with super singular kernels [Text] / N. Rajabov // Abstracts of Vl Congress of the Turkic World Mathematical Society. – Astana, 2017. – No. 6. – PP. 220.

[52]. Rajabov N. New Methods for Volterra Type Integral Equations with Boundary Singular Point [Text] / N. Rajabov // In books «New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications» (Selected Contributions of the 10th ISAAC Congress). – Birkhauser, 2017. – No. 6. – PP. 121-127.

[53]. Rajabova L. The explicit Representation of Manifold solutions for a third order equation with super singular point [Text] / L. Rajabova // Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems. – New Jersey, London, Hong Gong, 2000. – PP. 150-154.

[54]. Rajabova L. About class, two-dimensional linear Volterra type integral Equation with boundary fixed singular Kernels [Text] / L. Rajabova, N. Rajabov // ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equation and Related Topics. – Yerevan, Armenia, 2002. – PP. 5-53.

[55]. Rajabova L. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super singularity [Text] / L. Rajabova, M. Ronto, N. Rajabov // Mathematical Notes. – 2003. – Vol. 4. – No. 1. – PP. 65-76.

[56]. Rajabova L. Theory of a class of two-dimensional Volterra type integral equation with two super singular lines [Text] / L. Rajabova // 6-th International ISAAC Congress, Middle East Technical University. – Turkey, 2007. – PP. 35-36.

[57]. Rajabova L. Theory of a class of two – dimensional Volterra type integral equation with two super – singular lines [Text] / L. Rajabova // 6-th International ISAAC Congress, Middle East Technical University. – Turkey, 2007. – PP. 35-36.

[58]. Rajabova L. Investigation one class of two – dimensional conjugation integral equation with fixed singular kernels in connection with hyperbolic equation [Text] / L. Rajabova // Abstracts of the International Conference «Inverse Problems: modeling an Simulation». – Turkey, 2008. – PP. 158-159.

[59]. Rajabova L. A study about one kind of two dimensional Integral Equation of Volterra type with two interior singular lines [Text] / L. Rajabova // Proceedings of the 7th International ISAAC Congress «Progress in Analysis and its applications». – World Scientific, 2010. – PP. 96-104.

[60]. Rehman H.U. A Computational Quadruple Laplace Transform for the Solution of Partial Differential Equation [Text] / H.U. Rehman // Applied Mathematics. – 2014. – No. 5. – PP. 3372-3382.

[61]. Salakhitdinov M.S. Uniqueness of inverse source nonlocal problem for fractional order mixed type equation [Text] / M.S. Salakhitdinov, E.T. Karimov // Eurasian Mathematical Journal. – 2016. – Vol. 7. – No. 1. – PP. 74-83.

[62]. Sato T. Sur l′equation integrale [Text] / T. Sato // J. Math. Soc. Japan. –2016. – Vol. 5. – No. 2. – PP. 145-153.

[63]. Shishkina E.L. Singular Cauchy problem for the general Euler-Poisson-Darboux equation [Text] / E.L. Shishkina // Open Math. – 2018. – No. 16. – PP. 23-31.

[64]. Sukavanam N. A Fredholm-Type Theory for Third-Kind Linear Integral Equations [Text] / N. Sukavanam // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1984. – No. 100. – PP. 478-485.

[65]. Tahery S. q −Laplasce Transform [Text] / S. Tahery, M.S. Asil // Advances in Pure Mathematics. – 2016. – No. 6. – PP.16-20.

[66]. Takesada T. On the singular point of integral equations of Volterra type [Text] / T. Takesada // J. Math.Soc Japan. – 1955. – Vol. 7. – No. 2. – PP.123-136.

[67]. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations [Text] / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer. – 2003.

[68]. Watugula G.K. Sumudu Transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems [Text] / G.K. Watugula // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 1993. – No. 24. – PP. 35-43.

[69]. Watugula G.K. The Sumudu transform for functions of two variables [Text] / G.K. Watugula // Mathematical Engineering in Industry and Technology. – 2002. – No. 8. – PP. 293-302.

[70]. Weinstein A. Discontinuous integrals and generalized theory of potential [Text] / A. Weinstein // Trans. Am. Math. Soc. – 1948. – Vol. 63. – No. 2. – PP. 342-354.

[71]. Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory [Text] / A. Weinstein // Bull. Am. Math. Soc. – 1953. – No. 59. – PP. 20-38.

[72]. Абжандадзе З.Л. Преобразование Фурье-Френеля и некоторые его приложения [Текст] / З.Л. Абжандадзе, В.Ф. Осипов // СПб.: Изд-во С. Петерб. ун-та. – 2000. – 221 с.

[73]. Авсянкин О.Г. Развитие теории многомерных интегральных операторов с однородными и биоднородными ядрами [Текст] / О.Г. Авсянкин // Авт. конд. дисс. – Ростов-на-Дону, 2009. – 32с.

[74]. Агранович М.С. Эллиптические псевдо-дифференциальные операторы [Текст] / М.С. Агранович. – М.: 2003, 2004. – Ч. 1, 2.

[75]. Алимов Ш.А. Об одной краевой задаче для эллиптического оператора [Текст] / Ш.А. Алимов // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 253. – № 2. – С. 265-266.

[76]. Алимов Ш.А. Об одной спектральной задаче типа Бицадзе-Самарского [Текст] / Ш.А. Алимов // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 287. – № 6. – С. 1289-1290.

[77]. Амирджанян А.А. Сингулярные интегральные уравнения с логарифмической особенностью в правой части [Текст] / А.А. Амирджанян, А.В. Саакян // Международная школа-конференция «Механика». – 2016. – С. 20-24.

[78]. Апаков Ю.П. Трехмерный аналог задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения [Текст] / Ю.П. Апаков // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14. – № 2. – С. 34-44.

[79]. Арутюнян Р.В. Исследование интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Р.В. Арутюнян // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16. – № 1. – С.5-12.

[80]. Ашуров Р.Р. Асимптотическая оценка спектральной функции эллиптического оператора [Текст] / Р.Р. Ашуров // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 276. – № 2. – С. 265-267.

[81]. Ахиезер Н.И. Лекции об интегральных преобразованиях [Текст] / Н.И. Ахиезер. Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те. – 1984.

[82]. Ахмадиев М.Г. Приближённые методы решения интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / М.Г. Ахмадиев, Ю.Х. Хасанов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. – № 3. – С. 192-197.

[83]. Байзаев С. Ограниченные решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [Текст] / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политика. – 2010. – №1. – С. 108-112.

[84]. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов [Текст] / А.Г. Баскаков. – Воронеж: ВГУ, 1987. – 164 с.

[85]. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики [Текст] / Л. Берс. – М.: Иностр. Лит. – 1961. – 208 с.

[86]. Березанский Ю.М. Разложения по собственным функциям самосопряжённых операторов [Текст] / Ю.М. Березанский. Киев: Наукова думка. – 1965. – 799 с.

[87]. Бердышев А.С. Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в области с отходом от характеристики [Текст] / А.С. Бердышев // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 12. – С. 2117-2124.

[88]. Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1 [Текст] / Б.М. Бильман // В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1969. – С. 19-40.

[89]. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1966. – 448 с.

[90]. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164с.

[91]. Бицадзе А.В. К теории уравнений Максвелла-Эйнштейна [Текст] / А.В. Бицадзе, В.И. Пашковский // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 216. – № 2. – С. 9-10.

[92]. Бободжонов А.А. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами [Текст] / А.А. Бободжонов, В.Ф. Сафонов // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 7. – С. 47-70.

[93]. Брычков Ю.А. Интегральные преобразования обобщённых функций [Текст] / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1977. – 288 с.

[94]. Бойматов К.Х. Коэрцитивные свойства сильно вырождающихся эллиптических уравнений [Текст] / К.Х.Бойматов // Доклады АН СССР. – 1993. –Т.330. –№ 4. –С. 409-414.

[95]. Булатов М.В. Об интегро-дифференциальных системах с вырожденной матрицей перед производной [Текст] / М.В. Булатов // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 5. – С. 692-697.

[96]. Быков Я.В. К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра [Текст] / Я.В. Быков // Тр. физ.-матем. фак-та Киргиз, ун-та. – 1953. – № 2. – С. 67-83.

[97]. Валицкий Ю.Н. Об операторе преобразования для интегро-дифференциальных операторов типа Вольтера [Текст] / Ю.Н. Валицкий // В сб.: «Математическая физика». Киев: Наукова Думка. – 1965. – С. 23-36.

[98]. Васильев В.В. Об условиях А.И. Некрасова в теории линейных интегро-дифференциальных уравнений одного класса [Текст] / В.В. Васильев // Изв. Вузов. Матем. – 1963. – № 6. – С.29-38.

[99]. Вашарин А.А. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе [Текст] / А.А. Вашарин, П.И. Лизоркин // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137. – № 5. – С. 1015-1018.

[100]. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля [Текст] / И.Н. Векуа // Прикл. матем. и мех. – 1945. – Т. 9. – № 2. – С. 143-150.

[101]. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений [Текст] / И.Н. Векуа. – М. Л.: ГИТТЛ, 1948. – 296 с.

[102]. Вейнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения [Текст] / М.М. Вейнберг // Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. – 1962. – С. 5-37.

[103]. Виграненко Т.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Т.И. Виграненко // Зап. Лен.горн.ин-та. – 1956. – С.176-186.

[104]. Вирченко Н.А. О некоторых краевых задачах для простейших эллиптических уравнений с двумя линиями вырождения [Текст] / Н.А. Вирченко // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1974. – №7. – С. 582-585.

[105]. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области [Текст] / М.И. Вишик, В.В. Грушин // Мат. Сборник. – 1969. – № 80. – С. 455-491.

[106]. Вихрева О.А. О первой краевой задаче для сильно вырождающеюся обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / О.А. Вихрева // Математические заметки СВФУ. – 2018. – Т.25. – № 2. – С. 3-11.

[107]. Владимиров В.С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении [Текст] / В.С. Владимиров // Изв. АН СССР. – 1957. – № 21. – С. 3-52.

[108]. Власов В.В. Разрешимость и спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике [Текст] / В.В. Власов, Н.А. Раутиан, А.С. Шамаев // Доклады РАН. – 2010. – Т. 434. – № 1. – С. 12-15.

[109]. Волк В.Я. О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$ [Текст] / В.Я. Волк // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 111. – № 4. – С. 141-151.

[110]. Волков И.К. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / И.К. Волков, А.Н. Канатников. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.

[111]. Волкодавов В.Ф. Интегральные уравнения Вольтера первого рода с некоторыми специальными функциями в ядрах и их приложения [Текст] / В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев. Самара: Изд.-во «Самарский ун-т». – 1992.

[112]. Волкодавов В.Ф. Краевые задачи для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу [Текст] / В.Ф. Волкодавов, Н.Я. Николаев // Учебное пособие по спецкурсу «Уравнения математической физики». – Куйбышев, 1984. – 80с.

[113]. Вольтерра В. Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.

[114]. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики [Текст] / В.Н. Врагов. Новосибирск: НГУ. – 1983. – 183 с.

[115]. Габбасов Н.Н. Новый вариант метода подобластей для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре [Текст] / Н.Н. Габбасов, Р.Р. Замалиев // Изв. вузов. Математика. – 2011. – №5. – С. 12-18.

[116]. Гахов Ф.Д. Краевые задачи [Текст] / Ф.Д. Гахов. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.

[117]. Глушак А.В. О возмущении абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу [Текст] / А.В. Глушак // Мат. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 3. – С. 363-369.

[118]. Гусейнов И.М. Об одном операторе преобразования [Текст] / И.М. Гусейнов // Мат. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 2. – С. 206-215.

[119]. Гельфанд И.М. Обобщенные функции [Текст] / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Изд-во физ-мат. литер. 1958, 1959. – Вып. 1, 2, 3.

[120]. Гиль А.В. Интегральные операторы свёртки и с однородными ядрами в пространстве BMO [Текст] / А.В. Гиль // Авт конд. дисс. – Ростов- на-Дону, 2004. – 22 с.

[121]. Годунов С.К. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана [Текст] / С.К. Годунов, У.М. Султангазин // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26. – № 3(159). – С. 3-51.

[122]. Дододжонова М.Я. Интегральные представления решений и задача Коши-Рикье для уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с внутренней сингулярной точкой [Текст] / М.Я. Дододжонова, А.Г Олимов. // Современные проблемы математики и её преподавания. Специальный выпуск Учёные

записки Худжандского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014. – Ч.1. – №2. – С. 147-150.

[123]. Джангибеков Г. О явном решении одного двумерного интегрального уравнения [Текст] / Г. Джангибеков, К. Арабзода // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2017. – №3(1). – С. 19-40.

[124]. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах [Текст] / Г. Джангибеков// Матем. Заметки. – 1989. – Т. 46. – № 46. – С. 91-93.

[125]. Джамалов С.З. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка [Текст] / С.З. Джамалов, Р.Р. Ашуров // Известия вузов. Математика. – 2019. – № 6. – С. 11-22.

[126]. Джаяни Г.В. Решение некоторых задач для одного вырождающегося эллиптического уравнения и их приложения к призматическим оболочкам [Текст] / Г.В. Джаяни // – Тбилис: Изд-во Тбилис. ун-та, 1982. – 178 с.

[127]. Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области [Текст] / М.М. Джарбашян. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

[128]. Джураев А.Д. Об одном случае вырождения эллиптической системы первого порядка на плоскости [Текст] / А.Д. Джураев // Доклады АН Тадж. ССР. – 1972. – Т. 15. – № 1. – С. 3-5.

[129]. Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений [Текст] /А.Д.Джураев. – М.: Наука, 1997. – 415 с.

[130]. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [Текст] / Т.Д.Джураев. – Ташкент, 1979. – 238 с.

[131]. Джураев Т.Д. Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков [Текст] / Т.Д.Джураев, Б.В.Логинов, И.А.Малюгина // Дифференц.

уравнения мат. физики и их приложения. – Ташкент: Фан. – 1989. – С. 24-36.

[132]. Джураев Х.Ш. Об одном подходе к проблеме регуляризации задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона -Дарбу [Текст] / Х.Ш.Джураев // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 5. – С. 701-705.

[133]. Диткин В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М.: Наука, 1974. – 524 с.

[134]. Достанич М.Р. Асимптотика спектра и регуляризованный след одного сингулярного интегрального оператора [Текст] / М.Р. Достанич // Математический сборник. – 2010. – Т. 201. – № 8. – С. 31-44.

[135]. Егоров И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения [Текст] / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск: Наука, 2000. – 335 с.

[136]. Егоров Ю.В. О канонических преобразованиях псевдо-дифференциальных операторов [Текст] / Ю.В. Егоров // УМН. – 1969. – Т. 24. – С. 235-236.

[137]. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя [Текст] / Я.И. Житомирский // Мат. сборник. – 1955. – Т. 36. – № 2. – С. 299-310.

[138]. Заикина С.М. Новые интегральные преобразования в экономике, технике [Текст] / С.М. Заикина // Саратов: Актуальные проблемы и перспективы инновационной агроэкономики. – 2009. – С.58-62.

[139]. Заикина С.М. Обобщённые интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений [Текст] / С.М. Заикина. Авт. конд. дисс. – Казан, 2015. – 18с.

[140]. Замалиев Р.Р. О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре [Текст] / Р.Р. Замалиев. Авт. конд. дисс. – Казан, 2012. – 18с.

[141]. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций [Текст] / А.Г. Земанян. – М.: Наука, 1974. – 400 с.

[142]. Зикиров О.С. Разрешимость смешанной задачи с интегральным условием для гиперболического уравнения третьего порядка [Текст] / О.С. Зикиров, Д.К. Холиков // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Москва: ВИНИТИ РАН. – 2018. – Т. 144. – С. 30-38.

[143]. Ивакин В.М. Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе уравнений и систем [Текст] / В.М. Ивакин // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 2. – С. 319-324.

[144]. Иванов В.К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи [Текст] / В.К. Иванов, И.В. Мельникова, А.И. Филинков. – М.: Физматлит, 1995. – 384 с.

[145]. Игнатьев М.Ю. О восстановлении интегро-дифференциальных операторов по функции Вейля [Текст] / М.Ю. Игнатьев, С.Ю. Советникова // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. – 2017. – Т.17. – Вып 3. – С. 276-284.

[146]. Илолов М. Векторнозначные преобразования Лапласса-Стилтьеса и его приложения [Текст] / М.Илолов, Д.Н.Гулджонов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции», посвящённой 90-летию академика АН Республики Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 76-79.

[147]. Илолов М. Решение начально-краевой задачи для уравнения в частных производных второго порядка с помощью преобразования Лапласа-Карсона [Текст] / М.Илолов, Ш.Зулфонов // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60–летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-

математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича (13-14 декабря 2019 г.). – Душанбе, 2019. – С. 108-112.

[148]. Илолов М. Об одном линейном дифференциальном уравнении третьего порядка [Текст] / М.Илолов, Ш.Зулфонов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 70–летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (14-15 марта 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 108-109.

[149]. Илолов М. Интегро-дифференциальные уравнения высшего порядка в Гильбертовом пространстве [Текст] / М.Илолов, Д.Н.Гулджонов, С.Р.Наврузмамадова // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённой 70–летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (14-15 марта 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 106-107.

[150]. Исломов Б.И. Обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка в прямоугольной области [Текст] / Б.И.Исломов, У.Ш.Убайдуллаев // Известия вузов. Математика. – 2021. – № 3. – С. 29-46.

[151]. Искандаров С. Оценки снизу решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / С.Искандаров // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 9. – С. 1508-1512.

[152]. Исмати М. О разрешимости смешанных задач для уравнения, описывающего распространение звука в вязком газе. [Текст] / М.Исмати, Т.Н.Исматов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т. 61. – №4. – С. 325-330.

[153]. Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением [Текст] / С.А.Исхоков // Дифференциальные уравнения. –2003. – С. 536-542.

[154]. Кадиров Г.М. Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении четвёртого порядка, вырождающегося в левой граничной точке [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Современные проблемы математики и её преподавания. Специальный выпуск Учёные записки Худжанского госуниверситета им. академика Б. Гафурова. – 2014. – Ч. 1. – №2. – С. 172-175.

[155]. Кадиров Г.М. Об одном классе обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка с одной внутренней граничной сверх-сингулярной точкой, когда корни характеристического уравнения является вещественными и разными [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Материалы республиканской научно-теоретический конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (02 апреля 2016г). – Душанбе, 2016. – С. 57-59.

[156]. Кадиров Г.М. Интегральные представления и многообразия решений для одного класса обыкновенного дифференциального уравнения n – го порядка с одной внутренней сингулярной точкой [Текст] / Г.М.Кадиров, Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвящённой 70–летию профессора Джангибекова Гулходжа (30-31 января 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 158-161.

[157]. Кадиркулов Б.Ж. Об локальных краевых задачах с отходом от характеристики для уравнения смешанного типа [Текст] / Б.Ж.Кадиркулов // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – 1994. – № 4. – С. 3-4.

[158]. Калашников А.С. Классы единственности для интегро-дифференциальных уравнений с операторами Вольтерра типа свертки [Текст] / А. С.

Калашников // Функциональный анализ и его приложения. – 1979. – Т. 13. – № 2. – С. 83-84.

[159]. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного полуволнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя [Текст] / Ш.Т.Каримов // Изв. вузов. Сер. Мат. – 2017. – № 8. – С. 27-41.

[160]. Катрахов В.В. К теории уравнений с частными производными с сингулярными коэффициентами [Текст] / В.В.Катрахов // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 218. – № 1. – С. 17-20.

[161]. Катрахов В.В. Операторы преобразования и псевдо дифференциальные операторы [Текст] / В.В.Катрахов // Сиб. мат. журнал. – 1980. – Т. 21. – № 1. – С. 86-97.

[162]. Катрахов В.В. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений [Текст] / В.В.Катрахов, С.М.Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2018. – Т. 64. – № 2. – С. 211-428.

[163]. Кангужин Б.Б. Свёртка, преобразование Фурье и пространства Соболева порождаемые нелокальной задачей Ионкина [Текст] / Б.Б.Кангужин, Н.Е.Токмагамбетов // Уфимский математический журнал. – 2015. – Т. 7. – № 4. – С.80-92.

[164]. Келдыш Н.Б. О некоторых случаях вырождения уравнения эллиптического типа на границе области [Текст] / Н.Б.Келдыш // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77. – №1. – С. 181-183.

[165]. Князев П.Н. Интегральные преобразования [Текст] / П.Н.Князев. – Минск: Вышейшая школа, 1969. – 198 с.

[166]. Кон Дж.Дж. Алгебра псевдодифференциальных операторов [Текст] / Дж.Дж.Кон, Л.Ниренберг // В сб.: Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1967. – С. 9–62.

[167]. Копачевский Н.Д. Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: спец. курс лекций [Текст] / Н.Д.Копачевский. – Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.», 2012. – 152 с.

[168]. Крейн С.Г. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра [Текст] / С.Г.Крейн, И.В.Сапронов // Доклады РАН. – 1997. – Т. 35. – № 4. – С. 450-452.

[169]. Килбас А.А. Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра по пирамидальной области [Текст] / А.А.Килбас, О.В.Скоромник // Доклады РАН. – 2009. – Т. 429. – № 4. – С. 442-446.

[170]. Киприянов И.А. Преобразования Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов [Текст] / И.А.Киприянов // Тр. МИАН. – 1967. – Т. 89. – С. 130-213.

[171]. Киприянов И.А. Об одном классе сингулярных эллиптических уравнений [Текст] / И.А.Киприянов // Сиб. мат. журнал. – 1973. – Т. 14. – № 3. – С. 560-568.

[172]. Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений [Текст] / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Наука, 1959. – 182 с.

[173]. Кузнецов Н.В. О собственных функциях одного интегрального уравнения [Текст] / Н.В.Кузнецов // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1970. – Т. 17. – № 3. – С. 66-149.

[174]. Курбаншоев С.З. Построение нелинейных проекторов для вырождённых сингулярных дифференциальных уравнений [Текст] / С.З.Курбаншоев // Доклады АН РТ. – 2004. – Т. XLIII. – № 4. – С. 46-52.

[175]. Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала [Текст] / Н.С.Ландкоф. – М.: Наука, 1966. – 517 с.

[176]. Ларин А.А. О свойствах собственных функций некоторых сингулярных эллиптических операторов [Текст] / А.А.Ларин // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 5. – С. 849-856.

[177]. Левин Б.Я. Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / Б.Я.Левин // Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 106. – № 2. – С. 187-190.

[178]. Левитан Б.М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Б.М.Левитан. – М.: Гостехиздат, 1950. – 159 с.

[179]. Лере Ж. Обобщенное преобразование Лапласа [Текст] / Ж.Лере. – М.: Мир, 1969. – 169 с.

[180]. Лизоркин П.И. Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод [Текст] / П.И.Лизоркин, С.М.Никольский // Доклады АН СССР. – 1981. – Т. 257. – № 1. – С. 42-45.

[181]. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом [Текст] / Г.С.Литвинчук. – М.: Наука, 1977. – 448 с.

[182]. Магнарадзе Л.Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта [Текст] / Л.Г.Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1942. – Т. 3. – №6. – С. 503-508.

[183]. Магницкий Н.А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода [Текст] / Н.А.Магницкий // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970-988.

[184]. Маламуд М.М. Об операторах преобразования для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков [Текст] / М.М.Маламуд // В сб.: «Математический анализ и теория вероятностей». – Киев: Наукова думка, 1978. – С. 108-111.

[185]. Маричев О.И. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами [Текст] / О.И.Маричев, А.А.Килбас, О.А.Репин. – Самара, 2008. – 275 с.

[186]. Марченко В.А. Операторы преобразования [Текст] / В.А.Марченко // Доклады АН СССР. – 1950. – Т. 74. – № 2. – С. 185-188.

[187]. Маслов В.П. Операторные методы [Текст] / В.П.Маслов. – М.: Наука, 1973. – 543 с.

[188]. Мелешко И.Н. О приближенном решении одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / И.Н.Мелешко, П.Г.Ласый // Известия вузов. Математика. – 2011. – №5. – С. 35-43.

[189]. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения [Текст] / С.Г.Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

[190]. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 1963. – 183 с.

[191]. Михайлов Л.Г. Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками [Текст] / Л.Г.Михайлов // ДАН России. – 1994. – Т. 336. – №1. – С. 21-23.

[192]. Михайлов Л.Г. Об интегральных уравнениях с сингулярно-однородными ядрами [Текст] / Л.Г.Михайлов. – Душанбе, 2015. – 52 с.

[193]. Мирсабуров М. Задача с условиями Трикоми и Франкля на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа [Текст] / М.Мирсабуров, Ж.Худжаев // Известия вузов. Математика. – 2013. – Т. 1. – С. 41-50.

[194]. Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром [Текст] / Е.И.Моисеев. – М.: Из-во МГУ, 1988. – 49 с.

[195]. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

[196]. Мухамадиев Э.М. Об ограниченных решениях обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами [Текст] / Э.М.Мухамадиев // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посв. 50 – летию образ. ТГНУ и 60 – летию члена-корр. АН РТ, профессора Раджабова Н. – Душанбе, 1998. – С. 63.

[197]. Мухсинов А. О некоторых формулах представления решений многомерных эллиптических уравнений с сингулярными точками [Текст] / А.Мухсинов // Доклады АН РТ. – 2009. – Т. 52. – №5. – С. 344-353.

[198]. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы [Текст] / М.А.Наймарк. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[199]. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных [Текст] / А.М.Нахушев. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

[200]. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / А.И.Некрасов // ТР. Цаги. в.190. – М., 1934.

[201]. Никольский С.М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе [Текст] / С.М.Никольский // Тр. МИАН. – 1979. – Т. 150. – С. 212-238.

[202]. Николаенко В.Н. Задача Коши для интегро-дифференциального уравнения типа Фредгольма [Текст] / В.Н.Николаенко // УМН. – 1952. – Т. 7. – Вып 5(51). – С. 225-228.

[203]. Нуров И.Д. Исследования устойчивости состояния равновесия негладких динамических систем [Текст] / И.Д.Нуров, М.Ш.Халилова // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2011. –Т. 54. – №10. – С. 815-820.

[204]. Олимов А.Г. Общее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / А.Г.Олимов // Материалы республиканской конференции «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения», посв. 20-й годовщине независимости Республики Таджикистан. – Душанбе, 2011. – С. 65-69.

[205]. Олимов А.Г. Интегральное представление и задача типа Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничной слабо-сингулярной точкой [Текст] / А.Г.Олимов, М.Я.Дадоджанова // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 1. – С. 11-16.

[206]. Орлов С.С. Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах [Текст] / С.С.Орлов // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2009. – Т.2. – № 1. – С. 328-332.

[207]. Орлов С.С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядка в банаховых пространствах [Текст] / С.С.Орлов. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. – 149с.

[208]. Панов Л.И. Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка [Текст] / Л.И.Панов // Докл. АН ТаджССР. – 1967. – Т. 10. – №. 6. – С. 3-7.

[209]. Пасенчук А.Э. Абстрактные сингулярные операторы [Текст] / А.Э.Пасенчук. – Новочеркасск, 1993. – 215 с.

[210]. Петровский И.Г. Uber das Cauchysche Problem fur Systeme von partiellen Differential-gleichungen [Текст] / И.Г.Петровский // Математический сборник. – 1937. – № 2(44). – С. 815-870.

[211]. Пиров Р. О некоторых нелинейных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка [Текст] / Р.Пиров // Изв. вузов Матем. – 2017. – №1. – С. 97-100.

[212]. Полякова Д.А. О частном решении неоднородного уравнения свертки в пространствах ультра-дифференцируемых функций [Текст] / Д.А.Полякова // Владикав. матем. журн. – 2018. – Т. 20. – №4. – С. 67-75.

[213]. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений [Текст] / З.Пресдорф. – М.: Мир, 1979. – 493 с.

[214]. Прудников А.П. Вычисление интегралов и преобразование Меллина [Текст] / А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев // Итоги науки и техн. Мат. анализ. – 1989. – Т. 27. – С. 3-146.

[215]. Псху А.В. Интегральные преобразования с функцией Райта в ядре [Текст] / А.В.Псху // Доклады Адыгской (Черкесской) межд. акад. наук. – 2002. – Т. 6. – № 1. – С. 35-47.

[216]. Пулькина Л.С. Об одной неклассической задаче для вырождающегося гиперболического уравнения [Текст] / Л.С.Пулькина // Изв. вузов. Сер. Мат. – 1991. – № 11. – С. 48-51.

[217]. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе, 1985. – 157 с.

[218]. Раджабов Н. К теории линейных эллиптических систем второго порядка, для которых вся граница является сингулярной линией [Текст] / Н.Раджабов // Математический вестник (Third international symposium-complex analysis and applications). Herceg-Novi, Yugoslavia. – 1988. – №40. – С. 301-307.

[219]. Раджабов Н. Об одном методе представления многообразия решений общего линейного уравнения четвертого порядка гиперболического типа с сингулярными коэффициентами [Текст] / Н.Раджабов, С.С.Ганиев // Вестник Таджикского государственного университета имени В.И.Ленина. – 1988. – Т. 34. – №11(559). – 15 с.

[220]. Раджабов Н. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, В.В. Шевчук // Доклады АН Таджикский ССР. – 1989. – Т. 32. – №8. – С. 506-510.

[221]. Раджабов Н. Об одном классе линеных гиперболических уравнений четвертого порядка с двумя сингулярными линиями [Текст] / Н.Раджабов // Вестник Таджикского госуниверситета. – 1990. – №5. – С. 3-9.

[222]. Раджабов Н. Об одном классе линейного дифференциального уравнения третьего порядка с супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Труды международной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики и специальные функции». – Самара, 1992. – С. 207-208.

[223]. Раджабов Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков со сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Изв. АИ Республики Таджикистан. – 1994. – № 1-2(81). – С. 4-9.

[224]. Раджабов Н. Системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с n сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международная конференция «Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 1996. – С. 69.

[225]. Раджабов Н. К теории одного класса системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной

точкой [Текст] / Н.Раджабов, С.С. Ходжаев // Материалы международная конференция «Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 1996. – С. 74.

[226]. Раджабов Н. Свойство решения одного класса нелинейной сингулярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на особой точке [Текст] / Н.Раджабов // Материалы научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава Таджикского Коммерческого Института. – Душанбе, 1996. – С. 770-773.

[227]. Раджабов Н. Свойство решения одного класса нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами на особых точках [Текст] / Н.Раджабов // Тезисы международной конференции по дифференциальным уравнениям. – Киев, 1997. – С. 116-117.

[228]. Раджабов Н. Задачи типа Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Материалы научная конференция «Дифференциальное уравнения с частными производными и их приложения». – Таджикистан, Курган-Тюбе, 1997. – С. 46-47.

[229]. Раджабов Н. Интегральные представления и задачи типа Коши для сверх сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с комплексно-сопряженными характеристическими корнями [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 1998. – Т. 10. – № 41. – С. 35-40.

[230]. Раджабов Н. Задачи типов линейного сопряжения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с одной сингулярной и супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 1999. – Т. 16. – № 4. – С. 31-34.

[231]. Раджабов Н. Обобщённые задачи типа линейного сопряжения для общей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной и сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Труды 9-го международного симпозиума «Методы

дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2000). – Орёл, 2000. – С. 367-369.

[232]. Раджабов Н. Об одном интегральном уравнении Вольтерровского типа с сингулярным и сверхсингулярным ядром [Текст] / Н.Раджабов // Материалы конференции «Математическое моделирование и компьютерные эксперименты ICMMCE -2000». – 2000. – С. 57-58.

[233]. Раджабов Н. Интегральные представления для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной и супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // Доклады АН РТ. – 2000. – Т. XLIII. – №3. – С. 33-39.

[234]. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для общего линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов // В межд. Сб. статей «Дифференциальные и интегральные уравнения». – Душанбе: Изд-во ТГУ. – Вып. 3. – С. 43-55.

[235]. Раджабов Н. Свойство решения одного класса нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами на особых точках [Текст] / Н.Раджабов // Conference Materials «VIII International Scientific Kravchuk Conference». – Kyiv, 2000. – PP. 178.

[236]. Раджабов Н. Общие интегральные уравнения типов Вольтерра с левой и правой неподвижной сингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Известия Академии наук Республики Таджикистан; Отд. физ.-мат., хим. и геологических наук. – 2001. – №1. – С. 3-9.

[237]. Раджабов Н. Об одном интегральном уравнении вольтерровского типа [Текст] / Н.Раджабов // Доклады РАН. – 2002. – Т. 383. – №3. – С. 314-317.

[238]. Раджабов Н. Об одном классе двумерных линейных интегральных уравнений Вольтерровского типа с фиксированными граничными сингулярными ядрами [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова // Материалы

международной школы-конференции «Обратные задачи, теория и приложения». – Ханты-Мансийск. Россия, 2002. – С. 178.

[239]. Раджабов Н. Интегральные уравнения вольтерровского типа с внутренней неподвижной сингулярной и сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Сборник трудов Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара, 2002. – С. 279-282.

[240]. Раджабов Н. Интегральные уравнения типа Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н.Раджабов. – Душанбе, 2007. – 222 с.

[241]. Раджабов Н. Задача типа линейного сопряжения для линейной системы первого порядка с одной супер сингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М. Кадиров // Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвящённой 50 – летию образования ТГНУ и 60 – летию чл.-корр. АН РТ, профессора Раджабова Н. – Душанбе, 1998. – С. 46-47.

[242]. Раджабов Н. К теории одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Труды международной научной конференции по «Дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами». – Душанбе, 2003. – С. 128-130.

[243]. Раджабов Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнения второго порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Труды XII международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМ-2005)». – Харьков – Херсон, 2005. – С. 291-294.

[244]. Раджабов Н. К теории одного класса модельного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с левой граничной сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, Г.М.Кадиров // Материалы республиканской научной конференции «Дифференциальные и

интегральные уравнения», посвящённой 60 - летию образования ТГНУ и 70 - летию академика АН РТ Раджабова Н. – Душанбе, 2008. – С. 64-66.

[245]. Раджабов Н. К теории одного класса одномерного интегрального уравнения вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Стерлитамак – Уфа, 2011. – С. 72-74.

[246]. Раджабов Н. К теории одного класса интегральных уравнений с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы республиканской научной конференции «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения», посвящённой 20- ой годовщине независимости Республики Таджикистан. – Душанбе, 2011. – С. 102-107.

[247]. Раджабов Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтера с фиксированными сингулярными и сверх – сингулярными ядрами и их приложения [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н. Раджабова. – Germany: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2012. – 502 с.

[248]. Раджабов Н. К теории общего интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Доклады АН РТ. – 2012. – Т. 55. – №7. – С. 519-525.

[249]. Раджабов Н. К теории одного класса одномерного модельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы XI Школы молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы современного анализа и информатики». – Россия,Терскол, 2013. – С. 55-58.

[250]. Раджабов Н. К теории одного класса вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения высших порядков [Текст] / Н.Раджабов, Г.М. Кадиров, А.С. Сатторов // Вестник Таджикского национального университета. – 2014. – №1/1(126). – С. 3-5.

[251]. Раджабов Н. К теории одного класса интегрального уравнения Волтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвящённой 700-летию Мир Саида Али Ҳамадони, «Году семьи» и международному десятилетию действия «вода для жизни» 2005-2015 годы. – Душанбе, 2015. – С. 475-476.

[252]. Раджабов Н. Об одном классе модельного сверхсингулярного интегрального уравнения, обобщающем одномерное интегральное уравнение Вольтерра с левой граничной сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Proceedings VII International Scientific Conference. – Aktobe, 2015. – С. 202-205.

[253]. Раджабов Н. Граничные задачи для одного класса интегральных уравнение Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Материалы республиканской научной конференции Неклассические дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения, посвящённой 3000-летию Гиссара и 50-летию механико-математического факультета. – Душанбе, 2015. – С. 81-82.

[254]. Раджабов Н. К теории одного класса интегральных уравнений Вольтера первого рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, С.Саидов // Доклады АН РТ. – 2015. – Т. 58. – №7. – С. 549-557.

[255]. Раджабов Н. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка общего вида с правой или левой сверхсингулярной точкой [Текст] / Н.Раджабов, М.Я. Дадоджонов, А.Г.Олимов // Учёные записки ХГУ. Серия естественные и экономические науки. – 2016. – №2(37). – С.22-30.

[256]. Раджабов Н. К теории одного класса сверх-сингулярного интегрального уравнения Вольтерровского типа [Текст] / Н.Раджабов // Вестник Таджикского национального Университета. – 2017. – №1/1. – С. 3-8.

[257]. Раджабов Н. К теории одного класса сингулярного интегрального уравнения по цилиндрической области [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Проблемы прикладной математики и информатики». – Актюбинский региональный Государственный Университета, имени К Жубанова, 2017. – С. 14-144.

[258]. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерра с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова, С.Саидов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и их приложения», посвящённой 70-летию образования ТНУ и 80 – летию академика АН РТ, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Н. – Душанбе, 2018. – С. 175-180.

[259]. Раджабов Н. Об одном классе трехмерного интегрального уравнения по слоевой области [Текст] / Н.Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 2. – С. 5-9.

[260]. Раджабов Н. К теории одного класса сингулярного интегрального уравнения Вольтерра третьего рода с правой логарифмической особенностью в ядре [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60–летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича (13-14 декабря 2019 г.). – Душанбе, 2019. – С. 203-205.

[261]. Раджабов Н. Двумерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра с сингулярными и сверхсингулярными линиями [Текст] / Н.Раджабов, Л.Н.Раджабова, С.Б.Зарипов. – Germany: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2019. – 108 с.

[262]. Раджабов Н. К теории одного класса сверх-сингулярного интегрального уравнения Вольтерровского типа третьего рода со сверх-сингулярным ядром [Текст] / Н.Раджабов // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70–летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича (25-26 декабря 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 246-250.

[263]. Раджабова Л.Н. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Материалы международная конференция «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции». – Самара, 1992. – С. 207-208.

[264]. Раджабова Л.Н. К теории одного уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Тез. докл. межд. научн. конф. «Вырождающиеся уравнения и уравнения смешенного типа». – Ташкент, 1993. – С. 145.

[265]. Раджабова Л.Н. О некоторых случаях для одного линейного дифференциального уравнения третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Международная конференция по математическому моделированию. – Якутск, 1994. – С. 53-54.

[266]. Раджабова Л.Н. Некоторые случаи для одного класса линейных уравнений третьего порядка с сингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Доклады АН РТ. – 1999. – Т. 17. – №4. – С. 41-49.

[267]. Раджабова Л.Н. Интегральные представления для одного класса линейных уравнений со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физике» (МДОЗ МФ – 2000). – Орел, 2000. – С. 370-373.

[268]. Раджабова Л.Н. Интегральные представления для одного случая дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвящённой 60-летию Т. Сабирова. – Душанбе, 2000. – С. 73-74.

[269]. Раджабова Л.Н. К теории дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа». – Самарканд, 2000. – С. 72.

[270]. Раджабова Л.Н. Об одном классе гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник национального университета. – 2002. – №5 (31). – С. 44-51.

[271]. Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса двумерного линейного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Самара, 2002. – С. 286-288.

[272]. Раджабова Л.Н. Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическими уравнением [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Доклады РАН. – 2003. – Т. 391. – №1. – С. 20-22.

[273]. Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса немодельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной сингулярной и одной слабо-сингулярной линией [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». – Ташкент, 2004. – Т. 4. – С. 78-80.

[274]. Раджабов Н. К теории одного класса двумерного немодельного интегрального уравнения Вольтеровского типа со сверхсингулярными

граничными линиями в ядрах [Текст] / Л.Н.Раджабова, Н.Раджабов // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400. – № 5. – С. 602-605.

[275]. Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с одной сингулярной и одной сверхсингулярной линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ – 2005). – Харьков-Херсон, 2005. – С. 303-306.

[276]. Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра со сверхсингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник национального университета. – 2005. – №2. – С. 116-123.

[277]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с сингулярными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Доклады АН РТ. – 2006. – Т. 49. – №8. – С. 710-717.

[278]. Раджабова Л.Н. Об одном классе модельного гиперболического уравнения с двумя граничными особенными линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы научной конференции «Математика и информационные технологии», посвященной 15-летию независимости Республики Таджикистан. – Душанбе, 2006. – С. 66-68.

[279]. Раджабова Л.Н. Об одном общем двумерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник ТГНУ. Серия естественных наук. – 2007. – №3(35). – С. 30-38.

[280]. Раджабова Л.Н. О некоторых случаях одного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильными особенностями на границе области [Текст] / Л.Н.Раджабова // Материалы международная научная конференция «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», посвящённой 70 – летию акад. АН РТ З.Д.Усманова. – Душанбе, 2007. – С. 94-97.

[281]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса двумерного сопряженного интегрального уравнение вольтеровского типа с граничным фиксированными сингулярными ядрами [Текст] / Л.Н.Раджабова // Труды международной

научной конференции «Дифференциальные уравнение и смежные проблемы». – Стерлитамак, 2008. – Т. 1. – С. 164-168.

[282]. Раджабова Л.Н. К теории одного класса двумерных интегральных уравнений Вольтерра с внутренними особыми линиями [Текст] / Л.Н.Раджабова // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2010. – №3(59). – С. 48-53.

[283]. Раджабова Л.Н. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст] / Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // – Доклады АН РТ. – 2019. – Т. 62. – № 9-10. – С. 533-540.

[284]. Раджабова Л.Н. О некоторых случаях симметричных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре [Текст] / Л.Н.Раджабова, Г.Шукурова // Доклады АН РТ. – 2018. – Т. 61. – № 3. – С. 231-240.

[285]. Раджабова Л.Н. К теории двумерных интегральных уравнений типа вольтерра с граничными особой и сильно-особыми линиями, когда корни характеристических уравнений вещественные и разные [Текст] / Л.Н.Раджабова, Ф.А.Ахмадов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 1. – С. 78-88.

[286]. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов [Текст] / О.А.Репин. – Самара, 1992. – 161 с.

[287]. Репин О.А. Некоторые новые обобщенные интегральные преобразования и их применение в теории дифференциальных уравнений [Текст] / О.А.Репин, С.М.Заикина // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2011. – № 2(23). – С. 8-16.

[288]. Рогожин В.С. Теория Нётера для интегральных уравнений третьего рода [Текст] / В.С.Рогожин, С.Н.Расламбеков // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – №9. – С. 1678-1686.

[289]. Рыко В.С. Композиционная структура рядов Фурье, дискретных преобразований Фурье и Меллина и вычисление их сумм [Текст] / В.С.Рыко // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. – Минск, 1987. – №87. – С. 28-26.

[290]. Рузиев М.Х. О разрешимости краевой задачи для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом [Текст] / М.Х.Рузиев // Вестник Самарский ГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (36). – С. 44-56.

[291]. Сабитов К.Б. Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом спектральным методом [Текст] / К.Б.Сабитов, Р.Р.Ильясов // Изв. вузов. Сер. Мат. – 2004. – № 2. – С. 64-71.

[292]. Сабитов К.Б. Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом [Текст] / К.Б.Сабитов, Р.М. Сафина // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2018. – Т.82. – № 2. – С. 79-112.

[293]. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа [Текст] / К.Б.Сабитов. – М.: Наука, 2016. – 272 с.

[294]. Саидов С.А. Интегральные уравнения типа Вольтера с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.А.Саидов // Дисс. кан. физ-мат наук. – Душанбе, 2019. – 105 с.

[295]. Салахитдинов М.С. Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами [Текст] / М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48. – № 4. – С. 882-893.

[296]. Салахитдинов М. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения [Текст] / М.С.Салахитдинов, А. Хасанов // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 1. – С. 110-119.

[297]. Сатторов А.С. Интегральные представления и задача типа Коши для одного квазилинейного дифференциального уравнения с двумя линиями вырождения [Текст] / С.А.Сатторов // Доклады АН РТ. – 2009. – Т. 52. – № 11. – С. 848-853.

[298]. Сафаров Д.С. Двояко периодические обобщённые аналитические функции и их приложения [Текст] / Д.С.Сафаров. – Душанбе, 2012. – 190 с.

[299]. Сафаров Ж.Ш. Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / Ж.Ш.Сафаров // Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. – 2014. – Вып. 3. – С. 75-82.

[300]. Сахнович Л.А. Спектральный анализ вольтеровских операторов и обратные задачи [Текст] / Л.А.Сахнович // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 115. – № 4. – С. 666-669.

[301]. Ситник С.М. Операторы преобразования для дифференциального выражения Бесселя [Текст] / С.М.Ситник // Деп. в ВИНИТИ. Воронеж: ВГУ. – 1986. – С. 535-587.

[302]. Ситник С.М. Операторы преобразования для сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя [Текст] / С.М.Ситник // В сб.: «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики». – Новосибирск, 1989. – С. 179-185.

[303]. Сидоров Н.А. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями [Текст] / Н.А.Сидоров // Дифференциальные уравнения. – 1968. –Т. 4. – № 7. –С. 1309-1316.

[304]. Сидоров Н.А. Об одном класса уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах. [Текст] / Н.А.Сидоров // Сибирский математический журнал. – 1983. – Т.1. – № 2 – С. 202-203.

[305]. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения [Текст] / М.М.Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292 с.

[306]. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения [Текст] / М.М.Смирнов. – Минск: Высшая школа, 1977. – 158 с.

[307]. Соболев С.Л. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений со многими независимыми переменными [Текст] / С.Л.Соболев // Доклады АН СССР. – 1937. – Т. 17. – С. 447-450.

[308]. Солдатов А.П. Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций [Текст] / А.П.Солдатов. – М.: Высшая школа, 1991. – 207 с.

[309]. Тахиров Ж.О. Об одной нелокальной задаче для нелинейного параболического уравнения [Текст] / Ж.О.Тахиров, Р.Н.Тураев // Владикавказский математический журнал. – 2014. – Т. 16. – № 1. – С. 42-49.

[310]. Тейлора М. Псевдо-дифференциальные операторы [Текст] / М.Тейлора. – М.: Мир, 1985. – 468 с.

[311]. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе [Текст] / С.А.Терсенов. – Новосибирск: НГУ, 1973. – 144 с.

[312]. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье [Текст] / Е.Титчмарш. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 419 с.

[313]. Трев Ф. Введение в теорию псевдо-дифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье [Текст] / Ф.Трев. – М.: Мир, 1984. – 400 с.

[314]. Трикоми Ф. Интегральные уравнения / Ф.Трикоми. – М.: Иностр. Лит, 1960. – 299 с.

[315]. Трубин В.Г. Решение одного вырождающегося интегро-дифференциального уравнения [Текст] / В.Г.Трубин // Журнал Дифференциальные и интегральные уравнения. – 1978. – Вып. 5. – С. 94-101.

[316]. Уринов А.К. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами [Текст] / А.К.Уринов, К.Т.Каримов // Вестник Самарск. ГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 21. – №4. – С. 665-683.

[317]. Усманов Н.У. Сингулярные краевые задачи типа Римана с непрерывными коэффициентами для системы уравнения эллиптического типа [Текст] / Н.У.Усманов, М.И.Надирова // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2021. – № 4. – С. 74-86.

[318]. Усманов З.Д. Обобщённые системы Коши-Римана с сингулярной точкой [Текст] / З.Д.Усманов. – Душанбе, 1993. – 224 с.

[319]. Фалалеев М.В. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения [Текст] / М.В.Фалалеев, С.С.Орлова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18. – № 4. – С. 286-297.

[320]. Хачатрян И.Г. Об операторах преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков [Текст] / И.Г.Хачатрян // Изв. АН Армен. ССР. Сер. Мат. – 1978. – Т. 13. – № 3. – С. 215-236.

[321]. Хасанов А. Задачи с нелокальными краевыми условиями для одного класса уравнений смешанного типа [Текст] / А.Хасанов // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 1. – С. 153-158.

[322]. Хелгсон С. Преобразование Радона [Текст] / С.Хелгсон. – М.: Мир, 1983. – 148 с.

[323]. Хёрмандер Л. Псевдо-дифференциальные операторы [Текст] / Л.Хёрмандер // В сб.: Псевдо-дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1967. – С. 63-87.

[324]. Эфрос А.М. Операционное исчисление и контурные интегралы [Текст] / А.М.Эфрос, А.М.Данилевский. – Харков, 1937. – 384 с.

[325]. Шамсудинов Ф.М. Об одной переопределеЁнной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / Ф.М.Шамсудинов // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер.1, Мат.Физ. – 2014. – №5(24). – С. 46-54.

[326]. Шевчук В.В. Об одном способе представления решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярной точкой [Текст] / В.В.Шевчук // Матер. респ. науч. конф. молод. учен. – Ленинабад, 1990. – С. 123-124.

[327]. Шишкин Г.А. Решение линейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [Текст] / Г.А.Шишкин // Дисс. канд. физ.-мат. наук. – Иркутск, 1972. – 134 с.

[328]. Шостак Р.Я. Операционное исчисление [Текст] / Р.Я.Шостак // – М.: Высшая школа, 1972. – 280 с.

[329]. Шубин М.А. Псевдо-дифференциальные операторы и спектральная теория [Текст] / М.А.Шубин. – М.: Наука, 1978. – 297 с.

[330]. Юлдашев Т.К. Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.К.Юлдашев // Вестник ВГУ. Серия: Физика, Математика. – 2015. – №2. – С. 180-189.

[331]. Юлдашев Т.К. Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра [Текст] / Т.К.Юлдашев // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – № 12. – С. 1687-1694.

[332]. Янушаускас А.И. Граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных и интегро-дифференциальные уравнения [Текст] / А.И.Янушаускас. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 1997. – 168 с.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Монографии

[1-A] Zaripov S.Q. The new type of singular integro-differential equations (Volume 1) / S.Q. Zaripov. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2016. – 120p.

[2-A] Зарипов С.К., Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами [Текст] / Н. Раджабов, Л.Н. Раджабова, С.К. Зарипов. – Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2017. – 115с.

2. Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[3-А] Зарипов С.К. Линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского государственного национального университета. – 2008. – №1(42). – С. 37-46.

[4-А] Зарипов С.К. Решение немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. – 2009. – №1(49). – С. 3-14.

[5-А] Зарипов С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2009. – №1(134). – С. 7-16.

[6-А] Зарипов С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n - го порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2010. – №2(139). – С. 7-17.

[7-А] Зарипов С.К. К теории одного класса немодельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с двумя граничными сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2010. – №3(59). – С. 103-109.

[8-А] Зарипов С.К. Об одном классе линейного гиперболического уравнения четвёртого порядка с четырьмя сингулярными линиями [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Вестник Таджикского национального университета. – 2011. – №7(71). – С. 3-9.

[9-A] Зарипов С.К. Постановка задач типа Коши для линейного дифференциального уравнения в частых производных четвёртого порядка с четырьмя сингулярными линиями [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2013. – №1/3(110). – С. 3-7.

[10-A] Зарипов С.К. Об одном классе модельного интегро-дифференциального уравнения с одной сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/4 (168). – С. 54-57.

[11-A] Зарипов С.К. Исследование устойчивости решения одного класса линейного дифференциального уравнения второго порядка с сингулярным коэффициентом [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/4 (168). – С. 28-36.

[12-A] Зарипов С.К. Об одном классе модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/3 (164). – С. 27-32.

[13-A] Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со сверх сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/6 (191). – С. 6-12.

[14-A] Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/6 (191). – С. 33-36.

[15-A] Зарипов С.К. Об одном классе немодельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. наук. – 2016. – №4(165). – С. 26-37.

[16-A] Зарипов С.К. Решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярным ядром

[Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2017. – №1/1. – С. 34-37.

[17-А] Зарипов С.К. Решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60. – №3-4. – С. 118-125.

[18-А] Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со степенной особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 1. – С. 16-21.

[19-А] Зарипов С.К. Исследование одного класса сопряжённого сингулярного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2018. – № 2. – С. 21-28.

[20-А] Зарифзода С.К. S – интегральное преобразование и его основные свойства [Текст] / С.К. Зарифзода // Вестник Таджикского национального университета. – 2019. – № 1. – С. 50-56.

[21-А] Зарифзода С.К. S – интегральное преобразование и его применения для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарифзода // Вестник Таджикского национального университета. – 2019. – № 1. – С. 100-104.

3. Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Министерстве образования и науки Российской Федерации и журналы, входящие в списки журналов SCOPUS или WEB OF SCIENCE:

[22-А] Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Томского

Государственного Университета. Математика и механика. – 2017. – №46. – С. 24-35.

[23-A] Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.-мат. Науки. – 2017. – Т. 21. – № 2. – С. 236-248.

[24-A] Зарипов С.К. Об одной новой методике решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарипов // Математическая физика и компьютерное моделирование. Волгоградский государственный университет. – 2017. – Т. 20. – №4. – С. 68-75.

[25-A] Зарифзода С.К. Исследование некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка со степенно-логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Р.Н. Одинаев // Вестник Томского Государственного Университета. Математика и механика. – 2020. – №67. – С. 40-54.

[26-A] Zarifzoda S.K. New Type Super Singular Integro-Differential Equation and Its Conjugate Equation [Text]/ T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41. – No. 6. – P. 1123-1130.

[27-A] Zarifzoda S.K. Mellin Transform and Integro-Differential Equations with Logarithmic Singularity in the Kernel [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. – 41. – No. 9. – P. 1910-1917.

[28-A] Zarifzoda S.K. On Exact Solutions of a Class of Singular Partial Integro-Differential Equations [Text] / T.K. Yuldashev, R.N. Odinaev, S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 3. – P. 676-684.

[29-A] Zarifzoda S.K. On a New Class of Singular Integro-differential Equations [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2021. – No. 1(101). – P. 138-148.

[30-A] Zarifzoda S.K. Volterra-Type Integro-Differential Equations with Two-Point Singular Differential Operator [Text] / S.K. Zarifzoda, T.K. Yuldashev, I. Djumakhon // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42. – No. 15. – P. 3784-3792.

[31-A] Zarifzoda S.K. Inverse problem for a Fredholm integro-differential equation with final redefinition conditions at the end of the interval [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2022. – Vol. 13. – No. 5. – P.483-490.

[32-A] Zarifzoda S.K. Finding the Explicit Solutions of a Second-Order Differential Equation of Riemann-type with Many Singular Points [Text] / S.K. Zarifzoda // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43. – No. 11. – P.3335-3343.

4. Статьи, опубликованные в других журналах, изданиях и сборниках:

[33-A] Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с правой сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. Душанбе. – 2017. – №3(1). – С. 40-51.

[34-A] Зарифзода С.К. Исследование одного класса операторно-дифференциального уравнения n – го порядка [Текст] / С.К. Зарифзода, У. Таманнои, Ю. Каримов // Вестник филиала московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе. Серия естественных наук. – 2019. – №1,3. – С. 14-22.

[35-A] Zarifzoda S.K. Construction of the bases of operational calculus for a differential operator with two singular points [Text] / S.K. Zarifzoda // Uzbek Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 66 – No. 4. – P.183-196.

[36-A] Зарифзода С.К. Интегрирование линейных операторно-дифференциальных уравнений с помощью S_α – интегрального преобразования [Текст] /

Зарифзода С.К. // Бюллетень Института математики. – 2022. – Т. 5. – №6. – С. 83-91.

[37-А] Зарипов С.К. Интегральные представления и краевые задачи для некоторых линейных дифференциальных уравнений с сингулярной точкой и сингулярной линией [Текст] / С.К. Зарипов // Авт. дисс. к. ф.-м. н. – Душанбе, 2015. – 21с.

5. Материалы конференций и тезисы докладов:

[38-А] Зарипов С.К. Об одном классе линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с n сингулярными точками [Текст] / С.К. Зарипов // Материалы республиканской конференции «Современные проблемы прикладной математики и информатики». – Душанбе, 2014. – С. 51-54.

[39-А] Зарипов С.К. Об одном классе немодельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Материалы республиканской научной конференции «Неклассические дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения», посвящённой 3000-летию Гиссара и 50-летию механико-математического факультета (25-26 сентября 2015г.). – Душанбе, 2015. – С. 36-39.

[40-А] Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Материалы Республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан». – Душанбе, 2016. – С. 50-52.

[41-А] Зарипов С.К. Решения одного модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка со степенной особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Тезисы докладов 81-й научно-технической конференции

профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов. Белорусский государственный технологический университет (1-12 февраля 2017г.). – Минск, Белоруссия, 2017. – С. 51-53.

[42-A] Зарипов С.К. Решения одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарипов, Н.Раджабов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» (9-13 октября 2017г.). – Самара, Российская Федерация, 2017. – С. 81-83.

[43-A] Zarifzoda S.K. On a super singular integro-differential equation and its conjugate equation [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» (12-13 марта 2020г.). – Фергана, Узбекистан, 2020. – С. 400-404.

[44-A] Zarifzoda S.K. On a Singular Integro-differential Equation [Text] / T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda // Материалы международной научной конференции «Современные метода математической физики и их приложения» (17-18 ноября 2020г.). – Ташкент, Узбекистан, 2020. – С. 461-466.

[45-A] Зарипов С.К. Решение одного модельного интегро-дифференциального уравнения с одной сверхсингулярной точкой в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы естественных наук» (24 ноября 2017 г.). Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. – Душанбе, 2017. – С. 16-18.

[46-A] Зарипов С.К. Исследование одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений [Текст] / С.К. Зарипов, Н. Раджабов // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции», посвящённой 90–летию академика АН

Республики Таджикистан, лауреата государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича (27-28 февраля 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 74-76.

[47-А] Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с логарифмической особенности в ядре [Текст] / С.К. Зарипов // Материалы XI - международной научно-теоретической конференции «Компьютерный анализ проблем науки и технологии», посвящённой 70–летию образования Таджикского национального университета и 70–летию доктора физико-математических наук, профессора Юнуси Махмадюсуф Камарзода (27-28 декабря 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 110-113.

[48-А] Зарипов С.К. Исследование одного сверх-сингулярного интегро-дифференциального уравнения в частных производных [Текст] / С.К. Зарипов // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложения (21-22 июня 2018г.). – Душанбе, 2018. – С. 37-39.

[49-А] Зарипов С.К. Исследование одного класса комплексного сингулярного интегро-дифференциального уравнения [Текст] / С.К. Зарипов // Материалы международной научно-теоретической конференции «Современные задачи математики и их приложения», посвящённой 70–летию образования Таджикского национального университета и 80–летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Раджабова Нусрата (25-26 сентября 2018 г.). – Душанбе, 2018. – С. 57-61.

[50-А] Зарифзода С.К. Исследования одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярным ядром [Текст] / С.К. Зарифзода // Материалы международной конференции «Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа», посвящённой 60–летию академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук,

профессора Рахмонова Зарулло Хусеновича и члена-корреспондента Академии наук Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Исхокова Сулаймона Абунасровича (13-14 декабря 2019 г.). – Душанбе, 2019. – С. 128-130.

[51-А] Зарифзода С.К. Исследование сопряжённых модельных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка [Текст] / С.К. Зарифзода, У. Таманнои, Ю. Каримов // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвящённой 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа (30-31 января 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 126-127.

[52-А] Зарифзода С.К. Об одном новом способе нахождения частного решения неоднородного операторно-дифференциального уравнения высшего порядка [Текст] / С.К. Зарифзода, С. Умаров // Материалы международной конференции «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 70-летию со дня рождения академика АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича (25-26 декабря 2020 г.). – Душанбе, 2020. – С. 128-130.

[53-А] Зарифзода С.К. Построение аналога формулы Коши для простейшего операторно-дифференциального уравнения n - го порядка с оператором дифференцирования D_x^α [Текст] / С.К. Зарифзода, А.К. Абдукаримзода // В сборнике: XII Ломоносовские чтения. Материалы международной научно-практической конференции, посвящённой дню таджикской науки и 30-летию установления дипломатических отношений между республикой Таджикистан и Российской Федерацией. Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе. – Душанбе, 2022. – С. 13-16.

[54-А] Зарифзода С.К. Исследование сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с логарифмической

особенностью в ядре [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Искандари // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (20-21 октября 2022 г.). – Душанбе, 2022. – С. 39-42.

[55-А] Зарифзода С.К. Исследование одного класса сопряжённого одномерного интегро-дифференциального уравнения типа сложной свёртки [Текст] / С.К. Зарифзода, Дж. Мирзоев // Материалы республиканской научно-практической конференции «Актуальные проблемы развития естественных, точных и математических наук в современных условиях». – Душанбе, 2022. – С. 221-224.

[56-А] Зарифзода С.К. Исследование одного класса одномерного интегро-дифференциального уравнение типа сложной свёртки [Текст] / С.К. Зарифзода // Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения». – Бохтар, 2022. – С. 56-59.