ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Зарифзода Сарвара Кахрамона **«Исследование некоторых классов сингулярных интегро-дифференциальных уравнений операционными методами»**, представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

1. Актуальность темы исследования.

Как известно, в работах Чаплыгина С.А., Трикоми Ф., Франкля Ф.И., Келдыша М.В., Векуа И.Н., Лаврентьева М.А., Бабенко К.И., Бицадзе А.В. и других были исследованы краевые задачи для вырождающихся дифференциальных уравнений эллиптического, гиперболического и смешанных типов из-за важных приложений в газовой динамике, теории малых изгибаний поверхностей, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, теории плазмы и в других областях науки и техники. Такие уравнения часто сводятся к вырождающимся обыкновенным дифференциальным уравнениям, поэтому разработка методов разрешимости таких уравнений является актуальной задачей. Были мало исследованы обыкновенные дифференциальные уравнения с двумя особыми точками

$$D_x^{11} \equiv x(1-x)\frac{d}{dx},$$

также интегро-дифференциальные уравнения с особыми ядрами.

Представленная диссертационная работа Зарифзода С.К. как раз и посвящена этим проблемам. Ранее в работах Раджабова Н.Р. и его учеников изучались интегральные уравнения с особыми и сильно-особыми ядрами и были исследованы обыкновенные дифференциальные уравнения с оператором

$$x^\alpha \frac{d}{dx}, \quad \alpha > 1.$$

2. Основные результаты и научная новизна.

В **первой главе** приведен достаточно полный обзор работ, посвященных теме исследований, и анализ методов решения вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений с особыми ядрами.

Во **второй главе** строятся общие решения дифференциальных уравнений:

$$(D_x^{11})^n y(x) = f(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$D_x^{11} y + M_1 y = f(x), \quad M_1 \in \mathbb{R},$$

$$P_M^n(D_x^{11})y(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$P_M^n(x) = M_0 + M_1 x + ... + M_n x^n$$

– многочлен с постоянными коэффициентами M_i, $i = \overline{0,n}$.

Красивые результаты получены для общего дифференциального уравнения (1) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$P_M^n(\lambda) = 0. \tag{2}$$

В трех случаях: когда все корни уравнения (2) вещественные и различные, все корни вещественные и равны между собою и при четном n корни комплексно-сопряженные, построены в явном виде общие решения дифференциального уравнения (1).

В этой же главе на основе теории преобразований Лапласа вводятся интегральные преобразования

$$S_{11}f = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{-p} f(x)\frac{dx}{x(1-x)} = F(p),$$

$$S_{11}^{-1}F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{p} f(x)F(p)dp = f(x)$$

в классе функций

$$|f(x)| \le \begin{cases} C_1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right); \\ \\ C_2\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\beta}, & x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \end{cases} \tag{3}$$

где $0 < \alpha < \beta$, $\alpha < Re\ p < \beta$, $\alpha < \gamma < \beta$, C_1 и C_2 – положительные постоянные, и правосторонняя $S_{11}^{+}f$ (здесь в (3) $C_2 = 0$) и левосторонняя $S_{11}^{-}f$ (здесь в (3) $C_1 = 0$) преобразования.

Далее установлены свойства преобразования S_{11}^{+} и S_{11}^{-}, аналогичные свойствам преобразования Лапласа, и показаны их применения при решении задачи Коши для операторного уравнения (1) в зависимости от корней характеристического уравнения (2).

В **третьей главе** строится теория построения решений интегро-дифференциальных уравнений

$$D_x^{11}y + \int\limits_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)}y(t)dt = f(x), \tag{4}$$

$K(x,t)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции, $K(0,0) \neq 0$,

$$-D_x^{11}z + \int\limits_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)}z(t)dt = g(x), \tag{5}$$

$K(t,x)$ и $g(x)$ – заданные непрерывные функции, $K(1,1) \neq 0$.

Предварительно изучается случай, когда $K(x,t) = \text{const} = K$ и в зависимости от знака K строится общее решение уравнения (4). Затем, применяя метод регуляризации Раджабова Н., изучается уже само уравнение (4) с учетом знака $K(0,0)$ и сводится к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода со слабой особенностью в ядре. После этого исследуется уравнение (5), сопряженное с уравнением (4). В этом случае в зависимости от знака $K(1,1)$ строится общее решение уравнения (5).

В этой же главе изучаются пара взаимно сопряженных уравнений

$$D_x^{11}y + Ay + \lambda\int\limits_0^x \frac{y(t)}{t(1-t)}y(t)dt = f(x), \quad A, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$D_x^{11}z + Az + \lambda \int\limits_1^x \frac{z(t)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x),$$

для которых построен аналог теории Фредгольма для интегральных уравнений 2-го рода с некоторым отличием с четвертой его теоремой.

В **главе 4** изучается пара интегро-дифференциальных уравнений

$$D_x^{11}y + A_0 y + \int\limits_0^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x), \tag{6}$$

где $K(x,t)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции, $A_0 \in \mathbb{R}$,

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int\limits_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x), \tag{7}$$

когда ядро $K(x,t)$ имеет логарифмическую особенность

$$K(x,t) = A_1 + A_2 \ln \frac{x(1-t)}{(1-x)z} + ... + A_n \ln^{n-1} \frac{x(1-t)}{(1-x)z}, \tag{8}$$

$n \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$.

В зависимости от корней характеристического уравнения

$$\lambda^{n+1} + A_0\lambda^n + 0!A_1\lambda^{n-1} + 1!A_2\lambda^{n-2} + ... + (n-1)!A_n = 0$$

строится общее решение уравнений (6) и (7). В случае вещественных различных корней доказаны аналоги теорем Фредгольма.

В этой главе дополнительно исследуется пара взаимно сопряженных уравнений

$$D_x^{11}y + A_0 y + \int\limits_{1/2}^x \frac{K(x,t)}{t(1-t)} y(t)dt = f(x),$$

$$-D_x^{11}z + A_0 z + \int\limits_x^1 \frac{K(t,x)}{t(1-t)} z(t)dt = g(x),$$

где ядро $K(x,t)$ имеет вид (8), с применением интегрального преобразования S_{11}^+ и в зависимости от корней характеристического многочлена строятся их общие решения и доказаны аналоги теорем Фредгольма.

Пятая глава посвящена изучению уравнений вида

$$\left(D_x^\alpha\right)^n y = f(x), \quad D_x^\alpha = x^\alpha \frac{d}{dx}, \quad \alpha > 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$P_M^n(D_x^\alpha)y = f(x), \quad x > 0,$$

$$D_y^\alpha y + A_0 y + \int\limits_0^x \frac{K(x,t)}{t^\alpha} y(t)dt = f(x), \quad x > 0, \tag{9}$$

$K(x,t)$ и $f(x)$ - заданные непрерывные функции,

$$-D_x^\alpha z + A_0 z + \int\limits_x^\infty \frac{K(t,x)}{t^\alpha} z(t)dt = g(x) \tag{10}$$

и аналогично выше в зависимости от корней характеристического уравнения строятся их общие решения и для уравнений (9) и (10) установлены аналоги теорем Фредгольма.

Все отмеченные выше результаты являются новыми и несомненно представляют интерес для специалистов в области дифференциальных и интегральных уравнений.

3. Теоретическая и практическая значимость результатов.

Результаты, полученные Зарифзода С.К., имеют как теоретическое, так и практическое значение. Они вносят существенный вклад в теории вырождающихся обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования полученных результатов для дальнейшей разработки теории таких более общих уравнений и применения их при решении конкретных задач естествознания, а также при чтении спецкурсов для студентов, аспирантов и докторантов.

4. Достоверность.

Основные результаты диссертации обоснованы с приведением строгих математических доказательств и правильным применением методов обыкновенных дифференциальных уравнений и операционного исчисления.

5. Апробация результатов.

Основные результаты диссертации в достаточной мере опубликованы в научных журналах (в том числе из перечня ВАК Республики Таджикистан и зарубежных стран, входящих в базу данных Scopus и WoS) и трудах международных и республиканских научных конференций. Полученные результаты докладывались и обсуждались на многих конференциях и научных семинарах.

6. Диссертация и автореферат написаны ясным научным математически грамотным языком. Оформление диссертации и автореферата соответствует предъявленным к ним требованиям.

7. Замечания и пожелания по работе

1. В автореферате не приведены пояснения классов решений, что затрудняет понимание полученных результатов, хотя в диссертации все определения классов решений имеются.

2. Во многих утверждениях приводятся достаточные условия относительно заданных функций для обоснования существования решений интегро-дифференциальных уравнений, но при этом не исследуются вопросы о существенности этих условий, т.е. насколько они близки к необходимым условиям.

3. В основном изучены интегро-дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, что будет когда эти коэффициенты являются переменными.

4. Имеются ряд грамматических ошибок в диссертации и автореферате; есть замечания по оформлению диссертации, имеются повторы, можно было более лаконично изложить полученные результаты.

8. Заключение по диссертации

Оценивая работу в целом, считаю, что диссертация Зарифзода С.К. является законченной научно-исследовательской работой, выполненной соискателем на достаточно высоком научном уровне, в которой получены новые результаты, вносящие существенный вклад

в развитие теории вырождающихся обыкновенных и интегро-дифференциальных уравнений. Разработаны методы решения таких уравнений с постоянными коэффициентами. Представленные в работе основные результаты достоверны, выводы и положения строго обоснованы.

Приведенные выше замечания носят характер пожеланий на будущие исследования соискателя.

Исходя из вышеизложенного, считаю, что диссертационная работа Зарифзода С.К. **«Исследование некоторых классов сингулярных интегро-дифференциальных уравнений операционными методами»** соответствует специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление и удовлетворяет всем требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, а автор Зарифзода Сарвар Кахрамон, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
д.ф.-.м.н., проф., чл.-корр. АН Республики Башкортостан,
старший научный сотрудник Института математики
с вычислительным центром Уфимского
федерального исследовательского центра РАН Сабитов К.Б.

Подпись К.Б. Сабитова заверяю
Секретарь ИМВЦ УФИЦ РАН
Ильдамова Р.