ВАЗОРАТИ МАОРИФ ВА ИЛМИ ҶУМҲУРИИ ТОҶИКИСТОН
ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ ОМӮЗГОРИИ ТОҶИКИСТОН БА НОМИ САДРИДДИН АЙНӢ

Бо ҳуқуқи дастнавис

ТДУ-517.2 (575.3)

ТКБ-22.1 (2 тоҷик)

З 91

ЗУЛФОНОВ ШАҲРИЁР МУЛОЗУЛФОНОВИЧ

ТАТБИҚИ ҲИСОБИ ОПЕРАТСИОНӢ ДАР ҲАЛЛИ БАЪЗЕ СИНФҲОИ МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ

ДИССЕРТАТСИЯ

барои дарёфти дараҷаи илмии доктори фалсафа (PhD), доктор
аз рӯйи ихтисоси 6D060100 – Математика (6D060102 -
Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ ва
идоракунии оптималӣ)

Роҳбари илмӣ:
академик АМИТ,
доктори илмҳои физикаю математика,
профессор Илолов М. И.

ДУШАНБЕ-2025

МУҚАДИМА

Мубрамияти мавзӯи таҳқиқот. Дар даҳсолаҳои охир назария ва амалияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ, ки шарҳи риёзии масъалаҳои мураккаб ва хеле муҳими руйдодҳои физика, химия, биология ва технологияи муосир мебошанд, рушду пешрафти назаррас дорад. Тарзҳои хеле мухталифи ҳалли масъалаҳои ибтидоӣ ва ибтидои-канорӣ барои ин муодилаҳо коркард шудаанд. Дар байни онҳо методи табдилотҳои интегралӣ мақоми алоҳидда дорад. Дар навбати худ муҳимтарини ин методҳо методи табдилоти интегралии Лаплас-Карсон барои муодилаҳои хаттӣ аз $n-$ тағирёбанда мебошад, ки солҳои охир дар тваҷҷӯҳ ва диққати риёзидонҳо, физикҳо ва дигар тадқиқотчиён қарор дорад. Мақолаҳо ва монографияҳои илмии Ю. А. Бричков ва А. П. Прудников [6], Р. С. Даҳия [113, 114], А. Бабаханӣ [106], Р. С. Даҳия ва Ҷ. С. Дебнат [115] ва инчунин В. А. Диткин ва А. П. Прудников [20] ба усулҳои нави ҳисоб-кунии табдилотҳои роста ва баръакси Лаплас-Карсон барои функсияҳои дутағирёбанда ва бисёртағирёбанда бахшида шудаанд.

Рисолаи диссертатсиони ба татбиқи як қатор синфҳои муодилаҳо (муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф, муодилаҳо бо ҳосилаҳои хусусии тартиби гуногун ва масъалаҳои ибтидоиву канорӣ барои онҳо) тавассути табдилоти Лаплас-Карсон бахшида шудааст. Барои пайдо кардани намуди ошкори ҳалли муодилаҳои номбурда зарурияти ҳисоббарории табдилотҳои роста ва баръакси интегралӣ аз функсияҳои бисёртағирёбанда ба миён меояд. Дар диссертатсия ҳисобкуниҳои оператсионӣ барои чунин функсияҳо пешниҳод шудаанд.

Дараҷаи коркарди илмии мавзӯи таҳқиқот. Барои классҳои на он қадар васеи муодилаҳои дифференсиалӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо истифода аз ҳисобкуниҳои оператсионӣ дар корҳои илмии Й. Фучита [117,118], М. Ф. Абдулкаримов [2], В. А. Илин [34], Е. А. Козлова [119], А. А. Дубков [23], С. С. Орлов [61], Э. И. Семенов ва А. А. Косов [79] мавриди таҳқиқ қарор гирифтаанд. Масъалаҳои ибтидоӣ ва ибтидои-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалии телеграф ва инчунин барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду дар мақолаҳои илмии М. И. Илолов, Ш. М. Зулфонов [32, 33, 38], Ш. М. Зулфонов [2 − М, 5 − М] таҳқиқ карда шудаанд. Барои чунин масъалаҳо тавассути табдилоти интегралии Лаплас-Карсон тасвири ҳалли ошкор пешниҳод карда шудааст.

Алоқаи кори таҳқиқотӣ бо барномаҳо, лоиҳаҳо ва мавзӯҳои илмӣ. Кори диссертатсионӣ дар доираи баамалбарории нақшаи перспективии корҳои илмӣ-таҳқиқотии кафедраи анализи математикии факултети математикаи Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи Садриддин Айнӣ барои солҳои 2021-2025 аз руи мавзуи “Таҳқиқот оид ба назарияи муодилаҳои дифференсиалӣ ва татбиқи он ” иҷро гардидааст.

ТАВСИФИ УМУМИИ ТАҲҚИҚОТ

Мақсади таҳқиқот. Мақсади асосии рисолаи диссертатсионӣ муайянкунии тасвири баъзе функсияҳо ва тасвири баъзе интегралҳо мебошад, ки барои ёфтани ҳалли ошкори баъзе синфҳои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда истифодашаванда буда, инчунин барои ёфтани ҳалли ошкори муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда мавриди васеи истифода қарор мегиранд. Тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки дар рисолаи диссертатсионӣ нишон додем на фақат барои ҳалли муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду истифода карда мешаванд, балки барои ёфтани ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи гармигузаронӣ ва мавҷ овардашаванда ва ғайра низ истифодашавандаанд.

Вазифаҳои таҳқиқот. Мувофиқи мақсади гузошташудаи таҳқиқот, масъалаҳои зерин мушаххас карда шудаанд:

1. Тасвири интегралҳои намуди

$$\int_{0}^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s,t-s)g(s)ds\,;$$

$$\int_{0}^{\min(x,t)} \int_{0}^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\, dsd\tau;$$

муайян карда шавад;

2. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду муайян карда шавад;

3. Муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати кач) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ҳал карда шавад;
4. Усули ҳисоби оператсионӣ дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ ва интегро-дифференсиалӣ татбиқ карда шавад.

Объекти таҳқиқот. Муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати кач) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда мебошад.

Предмети таҳқиқот. Предмети таҳқиқот муайянкунии тасвири функсияҳо, интегралҳо ва ёфтани ҳалли ошкори . муодилаи дифференсиалии телеграф, муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф ва муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду мебошад.

Навгонии илмии таҳқиқот. Дар рисолаи диссертатсионӣ натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

- ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки татбиқи васеи амали доранд муайян карда шудаанд;
- ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст;
- ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати кач) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст;
- ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда муайян карда шудааст.

Аҳамияти назариявӣ ва илмию амалии таҳқиқот. Таҳқиқоти мазкур аҳамияти назариявӣ ва амали дошта, натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ ва методҳои исботи онҳоро дар ҳолати ҷустуҷӯ намудани ҳалли масъалаҳои ибтидой-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ татбиқи худро ёфтаанд.

Нуқтаҳои ба ҳимоя пешниҳодшаванда:

- теорема дар бораи муайянкунии тасвири баъзе функсияҳо ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон;
- теорема дар бораи муайянкунии тасвири баъзе интегралҳо ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон;
- ҳалли ошкори муодилаҳои дифференсиалии хаттии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда;
- ҳалли ошкори муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда;
- ҳалли ошкори муодилаҳои интегро-дифференсиалии телеграф барои ядроҳои гуногун бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда;
- ҳалли ошкори муодилаҳои интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда.

Дараҷаи эътиборнокии натиҷаҳо. Эътиборнокии натиҷаҳои илмии рисолаи диссертатсионӣ тавассути исботҳои математикии дақиқи ҳамаи тасдиқоти дар диссертатсия овардашуда таъмин гардида, бо тадқиқоти дигар муаллифон тасдиқ карда мешавад.

Мутобиқати диссертатсия ба шиносномаи ихтисоси илмӣ Кори диссертатсионӣ аз рӯйи ихтисоси 6D060102 – Муодилаҳои дифференсиалӣ, системаҳои динамикӣ, идоракунии оптималӣ иҷро карда шуда, фасли муодилаҳои дифференсиалӣ дар банди III – и параграфи 3-и шиносномаи ихтисоси илмӣ маҳсуб мегардад.

Саҳми шахсии довталаби дарёфти дараҷаи илмӣ дар таҳқиқот. Масъалаи таҳқиқот ва интихоби методи исботҳо аз ҷониби роҳбари илмӣ пешниҳод карда шудааст ва ба ғайр аз ин роҳбари илмӣ ба муаллифи рисола кӯмаки консултатсионӣ расонидааст. Натиҷаҳои асосии кори диссертатсионӣ, ки дар банди «Навоварии илмӣ» оварда шудаанд, шахсан аз ҷониби муаллиф ба даст оварда шудаанд.

Тасвиб ва амалисозии натиҷаҳои диссертатсия. Натиҷаҳои асосии диссертатсия дар семинарҳо ва конференсияҳои зерин муҳокима гардидаанд:

I. Семинари Маркази рушди инноватситонии илм ва технологияҳои нави АМИТ “Таҳлили касрӣ ва татбиқи он” таҳти роҳбарии академики АМИТ, доктори илмҳои физикаю математика, профессор М. И. Илолов (Душанбе, солҳои 2020-2024);

II. Семинари кафедраи анализи математикии Донишгоҳи давлатии омӯзгории Тоҷикистон ба номи С. Айнӣ таҳти роҳбарии профессор Пиров Р. Н.;

III. Конференсияи илми байналмиллалӣ доир ба масъалаи “Комплексный анализ и его приложения”, бахшида ба бистсолаи омӯзиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соҳаи илму маориф ва 75 солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Қурбонов И. К. ва 70 солагии доктори илмҳои физикаю математика, профессор Ҷумъабой Сафаров, (г.Бохтар, 19 ноябиря 2022 г.), 63-65 с.;

IV. Конференсияи илми байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии академик АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физикаю математика, профессор Шабозов М. Ш., (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), 234-237 с;

V. Конференсияи илми байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии академик АМИ Тоҷикистон, доктори илмҳои физика-математика, профессор Бойматов К. Ҳ., (Таджикистан. Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).;

VI. Конференсияи илми байналмиллалӣ бахшида ба 80 солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Темур Собиров, (Таджикистан. Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) ;

VII. Конференсияи илми байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Г.Ҷангибеков, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.);

VIII. Конференсияи ҷумҳуриявӣ бахшида ба "Бистсолаи омузиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соли 2020-2040", Душанбе-2020;

IX. Конференсияи илми байналмиллалӣ бахшида ба 70 солагии доктори илмҳои физика-математика, профессор Қ. Тухлиев, (Таджикистан. Худжанд, 21-22 июня 2024 г.) 49-51 с.;

Интишорот аз рӯи мавзӯи диссертатсия. Натиҷаҳои кор аз рӯи мавзуи диссертатсия дар 10 кори илмӣ, аз он ҷумла 4 мақола дар нашрияҳои тақризшаванда, ки дар рӯйхати амалкунандаи КОА-и назди Президенти Ҷумҳурии Тоҷикистон оварда шудаанд, 6 мақола дар маводҳои конференсияҳои байналмилалӣ ва ҷумҳуриявӣ чоп шудаанд.

Сохтор ва ҳаҷми диссертатсия. Диссертатсия аз муқаддима, 3 боб, феҳристи адабиёти истифодашуда иборат аз 120 номгӯй, ҳамагӣ 137 саҳифаи компютериро дарбар гирифта, дар барномаи Microsoft Word ҳуруфчинӣ шудааст. Барои осонии кор дар диссертатсия рақамгузории секаратаи теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳо қабул карда шудааст, рақами якӯм бо рақами боб, рақами дуюм бо рақами параграф ва рақами сеюм бо рақами тартибии теоремаҳо, леммаҳо, натиҷаҳо ва формулаҳои ҳамин параграф мутобиқат мекунанд.

БОБИ 1. ҲИСОБИ ОПЕРАТСИОНӢ

1.1. Функсияҳои бисёртағирёбанда

1.1.1. Мафҳуми асосӣ

Чи тавре мо медонем бузургиҳо доимӣ ва тағирёбанда мешаванд. Бузургиҳои доими гуфта бузургиеро меноманд, ки дар раванди иҷрои амалиёт қимати он тағир намеёбад. Мисоли бузургии мазкур массаи замин ($m = 6 \cdot 10^{24}$кг), шитоби афтиши озод $\left(g = 9{,}8\,{}^{\text{м}}\!/_{\text{с}^2}\right)$, массаи як мол газ дар шароити муътадил ($1\,\text{мол} = 22{,}4\,\text{литр}$), қимати π ($\pi = 3{,}14\,\ldots$) ва ғайраҳо шуда метавонанд. Бузургиҳои тағирёбанда бошанд бузургиҳое ҳастанд, ки дар раванди иҷрои амалиёт қимати онҳо тағир меёбад ва мисоли ин бузургиҳо суръат, шитоб, масофа, қувва, масса ва ғайраҳо шуда метавонанд.

Мо мафҳуми бузургиҳои доими ва тағирёбандаро дохил намуда, вобастагии байни бузургиҳои тағирёбандаро дида баромада хуллоса карда метавонем, ки вобастагии байни ду тағирёбандаи x ва y, яъне вобастагии функсионалии $y = f(x)$ ҷой дорад. Дар ин ҷо x тағирёбандаи новобата буда ва y тағирёбандаи вобаста яъне функсия мебошад.

Барои ҳал намудани ҳар гуна масъалаҳои дар соҳаи техника, табиатшиносӣ, математика ва ғайра мавҷудбуда вобастагии байни якчанд тағирёбандаҳо лозим меояд. Мислҳои мушахасро дида мебароем.

Мисоли 1: Чи тавре маълум аст масоҳати доираи радиусаш r бо ёрии формулаи $s = \pi r^2$ муайян карда мешавад. Барои ҳар як қимати r қимати муайяни s мувофиқ меояд. Яъне s функсияи яктағирёбандаи r мебошад.

Мисоли 2: Чи гунае, ки бар мо маълум аст масоҳати росткунҷаи тарафҳояш x ва y бо ёрии формулаи $s = xy$ муайян карда мешавад. Барои ҳар як ҷуфти қиматҳои x,y қимати муайяни масоҳат S мувофиқ меояд. Яъне S функсияи дутағирёбандаи x ва y мебошад.

Мисоли 3: Чи тавре аз физика бар мо маълум аст миқдори гармие, ки ноқили чраёндор хориҷ мекунад ба ҳосили зарби квадрати ҷараён, муқовимати ноқил ва вақт баробар аст, ки формулааш $Q = i^2Rt$ мебошад. Пас миқдори гармие, ки ноқили ҷараёндор хориҷ мекунад ҳамчун функсияи сетағирёбандаи i, R ва t дида баромада мешавад.

$$Q = \varphi(i, R, t)$$

Мисоли 4: Ҳаҷми параллелипипеди росткунҷа, ки ченакҳои он x, y ва z мебошад, бо ёрии формулаи $V = xyz$ муайян карда мешавад. Яъне ҳаҷми параллелиипеди росткунҷа ҳамчун функсияи се тағирёбандаи x, y ва z дида баромада мешавад.

$$V = f(x, y, z)$$

Ҳамин тавр, масъалаҳои зиёде мавҷуд ҳастанд, ки ба функсияҳои бисёртағирёбанда оварда мерасонанд. Бояд қайд намуд, ки барои ҳалли ин гуна масъалаҳо мафҳуми интеграл васеъ татбиқшаванда мебошад. [25,30,43]

Таърифи 1: Бузургии z_ро функсияи дутағирёбандаи x ва y меноманд, агар барои ҳар як ҷуфти (x,y) аз соҳаи қиматҳои онҳо D аз руи ягон қонун қимати муайяни z мувофиқ гузошта шуда бошад ва чунин менависанд

$$\boldsymbol{z = f(x, y)}$$

дар ин ҷо x ва y тағирёбандаҳои новобаста ё аргумент ва z тағирёбандаи вобаста ё функсия номида мешавад. Маҷмуи D-ро соҳаи муайянии функсия меноманд.

Ҳамин тавр на фақат функсияи дутағирёбанда, балки функсияи сетағирёбанда, чортағирёбанда ва n-тағирёбанда $(n = 1,2,3 \ldots.)$ низ мавҷуд аст.

Таърифи 2: Бузургии ω-ро функсияи тағирёбандаҳои x, y, z, …, u,t меноманд, агар барои ҳар як системаи нуқтаҳои бисёрченакаи (x, y, z, …,

u,t) аз руи ягон қонун қимати муайяни $\boldsymbol{\omega}$ мувофиқ гузошта шуда бошад ва чунин менависанд

$$\boldsymbol{\omega = f(x, y, z, \dots, u, t)}$$

дар ин ҷо низ $\mathrm{x, y, z, \dots, u, t}$ тағирёбандаҳои новобаста буда ва ω бошад тағирёбандаи вобаста яъне функсия мебошад. (ниг $[23, 119]$)

1.1.2. Ҳосила ва дифференсиали функсияҳои бисёртағирёбанда

1. Ҳосилаи хусусӣ

Бигзор дар ягон соҳаи D функсияи дутағирёбандаи $z = f(x, y) -$ дода шуда бошад. Ихтиёри нуқта $M(x, y) -$ ро аз ин соҳа гирифта ба x афзоиши Δx мсдиҳем ва y-ро бетағйир мемонем. Он гоҳ функсияи $f(x, y)$ ба худ афзоиши

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \qquad (1.1.1)$$

-ро мегирад. Баробарии (1.1.1)-ро афзоиши хусусии функсияи $z = f(x, y)$ аз руи x меноманд. Нисбати

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (1.1.2)$$

$-$ро суръати миёнаи тағирёбии функсияи $z = f(x, y)$ аз руи x аз нуқтаи M(x,y) то нуқтаи $M'(x + \Delta x, y)$ меноманд.

Таърифи 1: Агар $\boldsymbol{lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}}$ мавҷуд буда, охирнок бошад, он гоҳ онро ҳосилаи хусусии функсияи $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ аз руи $\boldsymbol{x}$ меноманд ва бо $\boldsymbol{z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$ ишора мекунанд. Яъне

$$\boldsymbol{z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}} \qquad \boldsymbol{(1.1.3)}$$

Ба монанди ҳамин мо метавонем x –ро доими ҳисобида ба y афзоиши Δy диҳем, он гоҳ афзоиши хусусии функсия аз руи y чунин мешавад:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \qquad (1.1.4)$$

Таърифи 2: Агар $\boldsymbol{lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}}$ ***мавҷуд буда, охирнок бошад, он гоҳ онро ҳосилаи хусусии функсияи*** $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ ***аз руи*** $\boldsymbol{y}$ ***меноманд ва бо*** $\boldsymbol{z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, f'_y(x, y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$ ***ишора мекунанд. Яъне***

$$\boldsymbol{z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}} \qquad (\mathbf{1.1.5})$$

Функсияи n-тағирёбанда низ дорои ҳосилаи хусусӣ мебошад ва онро бо формулаи

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} z}{\Delta x_k} \qquad (k = 1,2,3 \ldots . n) \qquad (1.1.6)$$

ҳисоб мекунанд. [88, 89, 91]

2. Дифференсиронидашавандагӣ ва дифференсиали функсия

Мо метавонем функсияҳои бисёртағирёбандаро дар ягон соҳа дида бароем. Афзоиши пурраи функсияи дутағирёбанда дар соҳаи додашуда чунин мебошад

$$\boldsymbol{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)} \qquad (\mathbf{1.1.7})$$

Таърифи 3: Функсияи $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ ***дар нуқтаи*** $\boldsymbol{(x, y)}$ ***дифференсиронидашаванда номида мешавад, агар афзоиши пурраи онро ба намуди зерин ифода кардан мумкин бошад:***

$$\boldsymbol{\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y} \qquad (\ \mathbf{1.1.8})$$

дар ин ҷо $\boldsymbol{\alpha_1}$ ва $\boldsymbol{\alpha_2}$ ***беохир хурд мебошанд ҳангоми*** $\boldsymbol{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0.}$

Ифодаи $\boldsymbol{A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y}$***, ки нисбат ба*** $\boldsymbol{\Delta x}$ ва $\boldsymbol{\Delta y}$ ***хаттӣ мебошад, қисми асосии афзоиши пурраи функсия меноманд.***

Теоремаи 1: Агар функсияи $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***дар нуқтаи*** $\boldsymbol{(x,y)}$ ***дифференсирони-дашаванда бошад, он гоҳ вай дар ин нуқта бефосила аст.***

Теоремаи 2: Агар функсияи $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***дар нуқтаи*** $\boldsymbol{(x,y)}$ ***дифференсирони-дашаванда бошад, он гоҳ вай дар ин нуқта дорои ҳосилаҳои хусуси*** $\boldsymbol{f'_x(x,y)}$ ва $\boldsymbol{f'_y(x,y)}$ ***мебошад.***

Теоремаи 3: Агар дар ягон атрофи нуқтаи $\boldsymbol{(x,y)}$ ***ҳосилаҳои хусусии функсияи*** $\boldsymbol{z = f(x,y)}$; $\boldsymbol{f'_x(x,y)}$; $\boldsymbol{f'_y(x,y)}$ ***мавҷуд буда, дар ин нуқта бефосила бошанд, он гоҳ функсияи*** $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***дар ин нуқта дифференсиронидашаванда мебошад.***

Яъне афзоиши пурраи функсияро дар намуди зерин менависем

$$\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{f'_x(x,y)}\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f'_y(x,y)}\Delta \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\alpha_1}\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha_2}\Delta \boldsymbol{y} \qquad (\mathbf{1.1.9})$$

дар ин ҷо $\boldsymbol{A(x,y) = f'_x(x,y)}$ буда, $\boldsymbol{B(x,y) = f'_y(x,y)}$ мебошад ва нчунин $\alpha_1 \to 0, \alpha_2 \to 0$ ҳангоми $\Delta x \to 0$ ва $\Delta y \to 0$.

Қоида: Қисми асосии афзоиши пурраи функсияро дифференсиали пурраи функсияи $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***дар нуқтаи*** $\boldsymbol{(x,y)}$ ***меноманд ва чунин ифода мекунанд: (ниг*** $[\mathbf{91}], [\mathbf{113}]$***)***

$$\boldsymbol{dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy} \qquad (\mathbf{1.1.10})$$

ё

$$\boldsymbol{dz = \frac{df(x,y)}{dx}dx + \frac{df(x,y)}{dy}dy} \qquad (\mathbf{1.1.11})$$

1.2. Табдилоти Лаплас-Карсон

Доир ба мафҳуми ҳисоби оператсионӣ олимони зиёд таҳқиқотҳои илми кардаанд. Аз ҷумла Б.Ж.Фуре, П.С.Лаплас, О.Хевисайд, Я.Меллин, Ҷ. Карсон ва ғайраҳо мебошанд. [20, 24, 63, 101] Ҳангоми татбиқ намудани ҳисоби оператсионӣ дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ табдилоти Лаплас барои функсияҳои бисёртағирёбанда истифода бурда мешавад. (ниг [20, 24, 108, 113])

Формулаи умумии табдилоти Лаплас барои функсияҳои биёртағирёбанда намуди зеринро дорад

$$F(p_1,p_2,\dots p_n)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty} e^{-\sum_{k=1}^{n}p_kx_k}f(x_1,x_2,\dots x_n)dx_1dx_2\dots dx_n; \qquad (1.2.1)$$

дар ин ҷо $F(p_1,p_2,\dots p_n)-$ функсияи тасвир (изображения) ва $f(x_1,x_2,\dots x_n)-$функсияи оригинал мебошад. [106,108,113] Бори нахуст олими Амрико Ҷон Карсон табдилоти Лаплас-ро тадқиқ намуда табдилотеро барои ёфтани тасвири функсияҳои яктағирбанда ва дутағирёбанда кашф намуд, ки ин табдилот ҳоло бо номи табдилоти Лаплас-Карсон машҳур аст. (ниг [20], [21], [63]) Формулаи умумии табдилоти Лаплас-Карсон чунин мебошад:

$$F(p)=p\int_0^{\infty}e^{-px}f(x)dx \qquad (1.2.2)$$

$$F(p,q)=pq\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-px-qy}f(x,y)dxdy \qquad (1.2.3)$$

дар ин ҷо $f(x), f(x,y)-$ функсияи оригинал (функсияи тағирбандааш ҳақиқӣ) буда, $F(p), F(p,q)$- тасвир (изображения) мебошад. $F(p,q)$- тасвири функсияи тағирёбандааш ҳақиқӣ дар фазои зудӣ мебошад, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш комплексӣ амал мекунад. (ниг [39,46,52,85]) Ҳамаи хосиятҳои функсияи ҳақиқӣ ва функсияи тасвир, ки дар табдилоти

Лаплас ба мо маълум аст (ниг $[20],[71],[90],\ [91],[108]$) барои табдилоти Лаплас-Карсон низ ҷой доранд. Баъзеи хосиятҳоро меорем:

1. Қоидаи монандӣ: Агар $f(x,y) \rightrightarrows F(p,q)$ бошад он гоҳ $f(ax,by) \rightrightarrows F\left(\frac{p}{a},\frac{q}{b}\right)$ мешавад. $(a>0, b>0)$
2. Қоидаи дифференсиронӣ: Агар $f(x,y) \rightrightarrows F(p,q)$ бошад он гоҳ $(f(x,y))'_x \rightrightarrows p[F(p,q)-F_1(q)]$ ва $(f(x,y))'_y \rightrightarrows q[F(p,q)-F_2(p)]$

мешавад. Дар ин ҷо $F_1(q) \leftarrow f_1(y)=f(0,y)$ ва $F_2(p) \leftarrow f_2(x)=f(x,0)$ мебошад. (ниг $[4],[20],[26]$)

Инчунин барои функсияи дутағирёбанда низ теорема оид ба печида ҷой дорад, ки онро баён хоҳем кард: (ниг $[3],[20],[42],[78],[108]$)

Теорема: Тасвири печида гуфта ҳосили зарби тасвири ду функсияи ҳақиқии $\boldsymbol{f_1(x,y)}$ ва $\boldsymbol{f_2(x,y)}$ ***-ро меноманд, ки намуди он чунин аст:***

$$\boldsymbol{f_1(x,y) * f_2(x,y) = \int_0^x \int_0^y f_1(\xi,\eta)\, f_2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta}$$

$$\boldsymbol{\rightrightarrows \frac{1}{pq} F_1(p,q) F_2(p,q)} \qquad \boldsymbol{(1.2.4)}$$

Метавонем ҳар яке аз ин тағйирёбандаҳоро дар алоҳиддаги низ ифода кунем:

$$f_1(x,y) \ * \ f_2(x,y) = \int_0^x f_1(\xi,y)\, f_2(x-\xi,y) d\xi$$

$$f_1(x,y) \ * \ f_2(x,y) = \int_0^y f_1(x,\eta)\, f_2(x,y-\eta) d\eta$$

Ҳаминро бояд қайд намуд, ки исботи теоремаи мазкур барои мо маълум аст. (ниг $[20],[71]$)

1.2.1. Тасвири баъзе функсияҳо

Бо истифода аз табдилоти Лаплас-Карсон тасвири баъзе функсияҳоро меёбем

Тасвири функсияи $\boldsymbol{e^{-cx}\varphi'_t(t-x)+\varphi(0)e^{-cx}\delta(t-x)}$ ***–ро дида мебароем.***

Саравал бояд қайд намуд, ки c –адади ҳақиқии ихтиёри мебошад. Барои ёфтани тасвир формулаи (1.2.3) –ро истифода мебарем

$$pq\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-px-qt}(e^{-cx}\varphi_t'(t-x)+\varphi(0)e^{-cx}\delta(t-x))dxdt$$

Гузориши $t-x=z; t=z+x; dt=dz$-ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-px-qz-qx-cx}[\varphi_z{}'(z)+\varphi(0)\delta(z)]dxdz=$$

$$\left(q\int_0^{\infty} e^{-qz}[\varphi_z{}'(z)+\varphi(0)\delta(z)]dz\right)\left(p\int_0^{\infty} e^{-px-qx-cx}dx\right)=$$

$$\left(q\int\limits_0^{\infty} e^{-qz}\,\varphi_z{}'(z)dz+\varphi(0)q\int\limits_0^{\infty} e^{-qz}\,\delta(z)dz\right)\left(p\int_0^{\infty} e^{-(p+q+c)x}dx\right)=$$

$$\big(q\Phi(q)-q\varphi(0)+q\varphi(0)\big)\left(p\lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-(p+q+c)x}dx\right)=$$

$$q\Phi(q)\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{pe^{-(p+q+c)x}}{p+q+c}\right)\Bigg|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}=$$

$$q\Phi(q)\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{pe^{-(p+q+c)R}}{p+q+c}+\frac{pe^{-(p+q+c)\cdot 0}}{p+q+c}\right)=\frac{pq\Phi(q)}{p+q+c}$$

Яъне

$$e^{-cx}\varphi_t'(t-x)+\varphi(0)e^{-cx}\delta(t-x)\rightrightarrows\frac{pq\Phi(q)}{p+q+c} \qquad (1.2.5)$$

Зикр кардан бо маврид аст, ки исботи формулаи мазкур дар ҳолати $c=0$ ва $\varphi(0)=0$ будан аз тарафи олимон низ муайян карда шудааст. (ниг [20, 66, 71, 75, 108])

Тасвири функсияи $e^{-mt}{u_0}_x'(x-t)+u_0(0)e^{-mt}\delta(x-t)$ –ро дида мебароем.

Дар ибтидо ҳаминро қайд менамоем, ки m –адади ҳақиқии ихтиёри мебошад. Барои ёфтани тасвир формулаи (1.2.3) –ро истифода мебарем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}(e^{-mt}{u_0}_x'(x-t)+u_0(0)e^{-mt}\delta(x-t))dxdt$$

Гузориши $x-t=z; x=z+t; dx=dz$-ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-p(z+t)-qt-mt}\big(u_0'(z)+u_0(0)\delta(z)\big)dzdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-pz-pt-qt-mt}\big(u_0'(z)+u_0(0)\delta(z)\big)dtdz=$$

$$\left(p\int_0^\infty e^{-pz}\big(u_0'(z)+u_0(0)\delta(z)\big)dz\right)\left(q\int_0^\infty e^{-pt-qt-mt}dt\right)=$$

$$\left(p\int_0^\infty e^{-pz}u_0'(z)dz+u_0(0)p\int_0^\infty e^{-pz}\delta(z)dz\right)\left(q\int_0^\infty e^{-pt-qt-mt}dt\right)=$$

$$\big(pU_0(p)-pu_0(0)+pu_0(0)\big)\left(q\int_0^\infty e^{-(p+q+m)t}dt\right)=$$

$$pqU_0(p)\cdot\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-(p+q+m)t}dx\right)=$$

$$pqU_0(p)\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q+m)t}}{p+q+m}\right)\Bigg|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}=pqU_0(p)\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q+m)\cdot R}}{p+q+m}+\frac{1}{p+q+m}\right)$$

$$=pqU_0(p)\cdot\left(-\frac{e^{-(p+q+m)\cdot\infty}}{p+q+m}+\frac{1}{p+q+m}\right)=\frac{pqU_0(p)}{p+q+m}$$

Яъне

$$e^{-mt}u_{0}{}'_{x}(x-t)+u_0(0)e^{-mt}\delta(x-t)\rightrightarrows\frac{pqU_0(p)}{p+q+m} \qquad (1.2.6)$$

Бояд ёдовар шуд, ки исботи формулаи мазкур дар ҳолати $m=0,\ u_0(0)=0$ будан аз тарафи олимон муайян карда шудааст. (ниг $[20],[71],[75],[108]$) Ва инчунин ҳангоми яктағирёбанда будан низ тасвири функсия аз тарафи олимон муайян карда шудааст. (ниг $[63],[67],[37]$)

Тасвири функсияи $e^{-bt-cx}f(t-x)$ –ро дида мебароем

Формулаи (1.2.3)-ро истифода намуда тасвири функсияи мазкурро меёбем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\cdot e^{-bt-cx}f(t-x)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(p+c)x-(q+b)t}f(t-x)dxdt$$

Гузориши $t-x=z; dt=dz$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^\infty e^{-(p+c)x-(q+b)(z+x)}pf(z)dz=$$

$$pq\int\limits_0^\infty e^{-(q+b)z}f(z)dz\int\limits_0^\infty e^{-(p+c)x-(q+b)x}dx=$$

$$=\frac{pq}{q+b}\left((q+b)\int\limits_0^\infty e^{-(q+b)z}f(z)dz\right)\int\limits_0^\infty e^{-(p+q+b+c)x}dx$$

$$=\frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)}$$

Яъне

$$e^{-bt-cx}f(t-x)\rightrightarrows\frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)} \qquad (1.2.7)$$

Тасвири функсияи $e^{-bt-cx}f(x-t)$ –ро дида мебароем

Формулаи (1.2.3)-ро истифода намуда тасвири функсияи мазкурро меёбем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\cdot e^{-bt-cx}f(x-t)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(p+c)x-(q+b)t}f(x-t)dxdt=$$

Гузориши $x-t=z; dx=dz$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(p+c)(z+t)-(q+b)t}f(z)dz=$$

$$pq\int_0^\infty e^{-(p+c)z}f(z)dz\int_0^\infty e^{-(p+c)t-(q+b)t}dt=$$

$$=\frac{pq}{p+c}\left((p+c)\int_0^\infty e^{-(p+c)z}f(z)dz\right)\int_0^\infty e^{-(p+q+b+c)t}dt$$

$$=\frac{pqF(p+c)}{(p+c)(p+q+b+c)}$$

Яъне

$$e^{-bt-cx}f(x-t)\rightrightarrows\frac{pqF(p+c)}{(p+c)(p+q+b+c)}\qquad(1.2.8)$$

Тасвири функсияи $e^{-bt-cx}f(|x-t|)$ –ро дида мебароем

Чи тавре мо медонем (ниг [71])

$$e^{-bt-cx}f(|x-t|)=e^{-bt-cx}\big(f(x-t)+f(t-x)\big)$$

мебошад. Бинобар ин формулаҳои $(1.2.7),(1.2.8)$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$e^{-bt-cx}f(|x-t|) \rightrightarrows \frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)} + \frac{pqF(p+c)}{(p+c)(p+q+b+c)}$$

Яъне

$$e^{-bt-cx}f(|x-t|) = \frac{pq}{p+q+b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b} + \frac{F(p+c)}{(p+c)}\right) \qquad (1.2.9)$$

Ҳангоми $c = 0$ будан баробарии (1.2.9) чунин намуд мегирад:

$$e^{-bt}f(|x-t|) \rightrightarrows \frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b)} + \frac{pqF(p)}{p(p+q+b)}$$

$$= \frac{q}{q+b} \cdot \frac{pF(q+b) + (q+b)F(p)}{p+q+b}$$

Яъне

$$e^{-bt}f(|x-t|) \rightrightarrows \frac{q}{q+b} \cdot \frac{pF(q+b) + (q+b)F(p)}{p+q+b} \qquad (1.2.10)$$

Тасвири функсияи $e^{-bt-cx}f(x+t)$ –ро дида мебароем

Формулаи (1.2.3)-ро истифода намуда тасвири функсияи мазкурро меёбем

$$pq\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-qt} \cdot e^{-bt-cx} f(t+x)dxdt =$$

$$pq\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p+c)x-(q+b)t} f(t+x)dxdt =$$

Гузориши $t + x = z; dx = dz$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^\infty \int_0^z e^{-(p+c)(z-t)-(q+b)t} f(z)dzdt =$$

$$pq\int_0^\infty e^{-(p+c)z} f(z)dz \int_0^z e^{(p-q-b+c)t}dt =$$

$$=\frac{pq}{p+c}\left((p+c)\int\limits_0^\infty e^{-(p+c)z}f(z)dz\right)\left(\frac{e^{(p-q-b+c)t}}{p-q-b+c}\bigg|\begin{matrix}z\\0\end{matrix}\right)=$$

Формулаи (1.2.2) ва формулаи Нютон-Лейбнитс-ро истифода нмуда ҳосил мекунем

$$\frac{pq}{p-q-b+c}\left(\int\limits_0^\infty e^{-(p+c)z}\left(e^{(p-q-b+c)z}-1\right)f(z)dz\right)=$$

$$\frac{pq}{p-q-b+c}\left(\int\limits_0^\infty \left(e^{-(q+b)z}-e^{-(p+c)z}\right)f(z)dz\right)=$$

$$=\frac{pq}{p-q-b+c}\cdot\frac{1}{q+b}\left((q+b)\int\limits_0^\infty e^{-(q+b)z}f(z)dz\right)-$$

$$-\frac{pq}{p-q-b+c}\cdot\frac{1}{p+c}\left((p+c)\int\limits_0^\infty e^{-(p+c)z}f(z)dz\right)=$$

$$=\frac{pq}{p-q-b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b}-\frac{F(p+c)}{p+c}\right)$$

Яъне

$$e^{-bt-cx}f(t+x)\rightrightarrows\frac{pq}{p-q-b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b}-\frac{F(p+c)}{p+c}\right)\qquad(1.2.11)$$

Ҳангоми $c=0$ –будан ҳосил мекунем

$$e^{-bt}f(t+x)\rightrightarrows\frac{q}{q+b}\cdot\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}\qquad(1.2.12)$$

Ҳаминро қайд менамоем, ки баробариҳои (1.2.7), (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) дар роҳнамоҳои ҳисоби операционӣ дар шаклҳои гуногун бе исбот оварда шудааст ва дар рисолаи мазкур исботи ҳар яке аз ин формулаҳоро дар намуди умумӣ дар алоҳиддаги нишон додем. (ниг [21], [37], [38])

Ҷадвали 1: Тасвири баъзе функсияҳо

	$f(x,t) \qquad (x > 0; t > 0)$	$F(p,q)$
1	$e^{-lt}u_1(x-t)$	$\frac{qU_1(p)}{p+q+l}$
2	$e^{-mt}u_{0}{}'_{x}(x-t)+u_0(0)e^{-mt}\delta(x-t)$	$\frac{pqU_0(p)}{p+q+m}$
3	$e^{-bx}\varphi_2(t-x)$	$\frac{p\Phi_2(q)}{p+q+b}$
4	$e^{-cx}\varphi_t'(t-x)+\varphi(0)e^{-cx}\delta(t-x)$	$\frac{pq\Phi(q)}{p+q+c}$
5	$e^{-bt-cx}f(t+x)$	$\frac{pq}{p-q-b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b}-\frac{F(p+c)}{p+c}\right)$
6	$e^{-bt}f(\lvert x-t\rvert)$	$\frac{q}{q+b}\cdot\frac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+q+b}$
7	$e^{-bt-cx}f(\lvert x-t\rvert)$	$\frac{pq}{p+q+b+c}\left(\frac{F(q+b)}{q+b}+\frac{F(p+c)}{(p+c)}\right)$
8	$e^{-bt-cx}f(x-t)$	$\frac{pqF(p+c)}{(p+c)(p+q+b+c)}$
9	$e^{-bt-cx}f(t-x)$	$\frac{pqF(q+b)}{(q+b)(p+q+b+c)}$

1.2.2. Тасвири баъзе интегралҳо

Бо истифода аз табдилоти Лаплас-Карсон на фақат тасвири функсияҳо балки тасвири интегралҳоро низ ёфтан мумкин аст. (ниг [32], [108], [102], [17], [34], [69]) Олими рус В. А. Диткин ва дигарон барои муайянкунии тасвири баъзе функсияҳо ва интегралҳо тадқиқотҳои илми кардаанд. (ниг [108], [14]) Тасвири баъзе интегралҳоеро дида мебароем, ки то ҳол аз тарафи олимон муайян карда нашудааст.

Тасвири интеграли намуди $\int_0^t a(t-\tau)\, u(x,\tau)\partial\tau$-ро дида мебароем.

Зикр кардан бо маврид аст, ки тасвири интеграли мазкур ҳангоми $u(x,\tau)$- функсияи яктағирёбанда будан аз тарафи олимон тавассути табдилоти Лаплас муайян карда шудааст (ниг $[63], [71], [49]$) ва ҳоло мо тасвири интеграли мазкурро тавассути табдилоти Лаплас-Карсон муайян хоҳем кард.

Теорема 1.2.1: Бигзор функсияҳои $a(t), u(x,t)$ шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноаткунанда бошанд, он гоҳ ҳангоми $x > 0, t > 0$ будан тасвири интеграли мазкур чунин мешавад:

$$\int_0^t a(t-\tau)\, u(x,\tau)\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)U(p,q)$$

Исбот: Барои исботи теоремаи мазкур тасвири интеграли додашударо бо воситаи табдилоти Лаплас –Карсон муайян мекунем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\int_0^t a(t-\tau)\, u(x,\tau)\partial\tau\right)\partial x\partial t =$$

$$= pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px}u(x,\tau)\left(\int_\tau^\infty a(t-\tau)e^{-qt}\,\partial t\right)\partial x\partial\tau =$$

гузориши $t-\tau = z; t = z+\tau;\ dt = dz$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$= pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-q\tau}u(x,\tau)\left(\int_0^\infty a(z)e^{-qz}\,\partial z\right)\partial x\partial\tau =$$

$$\left(pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-q\tau}u(x,\tau)\partial x\partial\tau\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\left(q\int_0^\infty a(z)e^{-qz}\,\partial z\right)\right) =$$

тасвири функсияҳои дар ҳар ду қавс мавҷудбуда барои мо аз баробариҳои (1.2.3), (1.2.2) маълум аст (ниг $[20],[108]$*) онҳоро ба баробари гузошта ҳосил мекунем*

$$\left(pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-q\tau}u(x,\tau)\partial x\partial\tau\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\left(q\int_0^\infty a(z)e^{-qz}\,\partial z\right)\right)=\frac{1}{q}A(q)U(p,q)$$

Яъне

$$\int_0^t a(t-\tau)\,u(x,\tau)\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)U(p,q) \qquad (1.2.13)$$

мебошад.

Ҳамин тавр теорема исбот шуд.

Чи тавре мо медонем (ниг $[21]$)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightrightarrows p[U(p,q)-\Phi(q)]$$

мебошад. Бинобар ин ҳангоми $u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ будан баробарии $(1.2.13)$ намуди зеринро мегирад:

$$\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}\cdot A(q)\cdot p[U(p,q)-\Phi(q)] \qquad (1.2.14)$$

Ҳаминро бояд қайд намуд, ки дар ҳолати $u(x,t)=u_1(x)u_2(t)$ будан баробарии (1.2.13) чунин мешавад:

$$\int_0^t a(t-\tau)\,u_1(x)u_2(t)\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}\cdot A(q)\cdot U_1(p)\cdot U_2(q) \qquad (1.2.15)$$

ва инчунин ҳангоми $u(x,t)=u_3(t)$ будан ҳосил мекунем

$$\int_0^t a(t-\tau)\,u_3(\tau)\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)U_3(q) \qquad (1.2.16)$$

Тасвири интеграли намуди

$$\int_{0}^{min(x,t)} \boldsymbol{f_1(s)\, f_2(x-s,t-s)\partial s}$$

-ро дида мебароем

Сараввал ҳаминро қайд бояд кард, ки тасвири интеграли мазкур тавассути табдилоти Лаплас дутағирёбанда аз тарафи олимон муайян карда шудааст (ниг [20]) ва ҳоло мо тавассути табдилоти Лаплас-Карсон муайян хоҳем кард.

Теорема 1.2.2: Бигзор функсияҳои $f_1(x), f_1(t), f_2(x,t)$ *шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноаткунанда бошанд, он гоҳ ҳангоми* $x > 0, t > 0$ *будан тасвири интеграли мазкур чунин мешавад:*

$$\int_{0}^{min(x,t)} f_1(s) f_2(x-s,t-s)\partial s \rightrightarrows \frac{F_1(p+q)F_2(p,q)}{p+q}$$

Исбот: Барои исботи теоремаи мазкур тасвири интеграли додашударо бо воситаи табдилоти Лаплас –Карсон муайян мекунем

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int_{0}^{min(x,t)} f_1(s)f_2(x-s,t-s)\partial s\right)dxdt =$$

барои идома ёфтани амалиёт гузориши $t-s=v; x-s=u$ *-ро истифода намуда ҳосил мекунем*

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_{0}^{\infty} f_1(s)\, f_2(u;v)ds\right)dudv =$$

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-pu-qv} f_2(u;v)dudv\int_{0}^{\infty} e^{-(p+q)s}\, f_1(s)ds =$$

$$\left(pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty}e^{-pu-qv}f_2(u;v)dudv\right)\cdot\frac{1}{p+q}\left((p+q)\int_0^{\infty}e^{-(p+q)s}f_1(s)ds\right)=$$

формулаҳои (1.2.2) ва (1.2.3) –ро истифода намуда ҳосил менамоем

$$F_2(p,q)\cdot\frac{1}{p+q}\cdot F_1(p+q)=\frac{F_1(p+q)F_2(p,q)}{p+q}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{min(x,t)} f_1(s)f_2(x-s,t-s)\partial s\rightrightarrows\frac{F_1(p+q)F_2(p,q)}{p+q} \qquad (1.2.17)$$

Баробарии (1.2.17)-ро дар шакли муфассал чунин менависанд:

$$\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{min(x,t)}} \boldsymbol{f_1(s)f_2(x-s,t-s)\partial s}=$$

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{\boldsymbol 0}^{\boldsymbol t}\boldsymbol{f_1(s)f_2(x-s,t-s)\partial s} & \text{ҳангоми } \boldsymbol{x>t}\\ \displaystyle\int_{\boldsymbol 0}^{\boldsymbol x}\boldsymbol{f_1(s)f_2(x-s,t-s)\partial s} & \text{ҳангоми } \boldsymbol{x<t}\end{cases}$$

Чи тавре мо медонем (ниг [21], [75], [72])

$$e^{-bt}\to\frac{p}{p+b}$$

мебошад. Бинобар ин ҳангоми$f_1(s)=e^{-bs}$ будан баробарии (1.2.17) намуди зеринро мегирад:

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}f(x-s,t-s)\partial s\rightrightarrows\frac{\frac{p+q}{p+q+b}F(p,q)}{p+q}=$$

$$\frac{(p+q)F(p,q)}{(p+q)(p+q+b)}=\frac{F(p,q)}{p+q+b}$$

Яъне

$$\int_{0}^{min(x,t)} e^{-bs}f(x-s,t-s)\partial s \rightrightarrows \frac{F(p,q)}{p+q+b} \qquad (1.2.18)$$

Баробарии (1.2.18) дар ҳолати $b=0$ будан аз тарафи олимон бо дигар тарзу усул муайян карда шудааст. (ниг [20]) Мо метавонем бо истифода аз тадбиқи теоремаи зарб (умножения) ва теоремаи кучиш (сдвига) баробарии (1.2.18)-ро аз баръакс дида бароем ва ҳоло мо барои ихтиёри ададӣ ҳақиқии b функсияи ҳақиқи ҷустуҷӯ хоҳем кард. Барои ёфтани функсияи ҳақиқии ба тасвири функсияи $\frac{F(p,q)}{p+q+b}$ мувофиқбуда яке аз тағирёбандаҳоро доими шуморида бо истифода аз теоремаи зарб (умножения) ҳосил мекунем (ниг [108]):

$$\frac{F(p,q)}{p+q+b}=\frac{p}{p+q+b}\overbrace{\dot{*}}^{x}\frac{F(p,q)}{p}=e^{-(q+b)x}\overbrace{\dot{*}}^{x}F(x,q)=$$

$$=\int_{0}^{x} e^{-(q+b)s}\,F(x-s,q)ds$$

акнун теоремаи кучиш (сдвига)-ро истифода намуда хуллосаи зерин мебарорем. (ниг [20], [26])

$$e^{-(q+b)s}F(x-s,q)=$$

$$=e^{-bs}e^{-qs}F(x-s,q)\rightarrow\begin{cases}0 & \text{барои } t<s\\ e^{-bs}f(x-s,t-s) & \text{барои } t>s\end{cases}$$

аз руи ин хуллосаҳо формулаи умумиро ҳосил мекунем

$$\boldsymbol{\frac{F(p,q)}{p+q+b}\leftleftarrows\int_{0}^{min(x,t)} e^{-bs}f(x-s,t-s)ds}$$

Ҳамин тавр тавассути ду тарз низ якхел натиҷа ба даст овардем.

Тасвири интеграли зеринро меёбем, ки намуди умумии он чунин аст:

$$\boldsymbol{\int\limits_{0}^{\min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau}$$

Сараввал таъкид менамоям, ки тасвири интеграли мазкур то ҳол аз тарафи ягон олим муайян карда нашудааст.

Теорема 1.2.3: Бигзор функсияҳои $a(t), f(x,t)$ *шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноаткунанда бошанд, он гоҳ ҳангоми* $x > 0, t > 0$ *будан тасвири интеграли мазкур чунин мешавад:*

$$\int\limits_{0}^{min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau \rightrightarrows \frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$$

Исбот: Бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем, ки то ҳол аз тарафи олимон муайян карда нашудааст

$$pq\int\limits_{0}^{\propto}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int\limits_{0}^{min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\right)dxdt =$$

гузориши $x - s = u; t - s = v$ *–ро истифода карда ҳосил мекунем*

$$pq\int\limits_{0}^{\propto}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\right)dudv =$$

$$pq\int\limits_{0}^{\propto}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int\limits_{0}^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)d\tau\right)dudv\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\,ds =$$

чи тавре аз баробарии (1.2.17) мебинем

$$\int_0^v a(v-\tau)\, f(u;\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)F(p,q)$$

мебошад, бинобар ин бо истифода аз баробарии зерин ҳосил мекунем

$$\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q+a_1)s}}{p+q+a_1}\right|\left.\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\right)=\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot\frac{1}{p+q+a_1}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\, dsd\tau \rightrightarrows \frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)} \qquad (1.2.19)$$

Зикр кардан бо маврид аст, ки баробарии (1.2.19) дар ҳолати хусусӣ намуди зеринро мегирал:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\, f(x-s)g(\tau)e^{-a_1 s}dsd\tau \rightrightarrows \frac{F(p)G(q)A(q)}{q(p+q+a_1)} \qquad (1.2.20)$$

Тасвири интеграли намуди

$$\int_0^t \boldsymbol{e^{-(b_0 t+a_0 s)}u_0(x-s)ds}$$

-ро дида мебароем

Формулаи умумии табдилоти Лаплас-Карсон барои функсияи дутағирёбандаро истифода намуда тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\int_0^t e^{-(b_0 t+a_0 s)}u_0(x-s)ds\right)dxdt =$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\int_0^t e^{-b_0(t-s)-b_0s-a_0s}u_0(x-s)ds\right)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\int_0^t e^{-b_0(t-s)}\cdot e^{-b_0s-a_0s}u_0(x-s)ds\right)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-b_0s-a_0s}u_0(x-s)\left(\int_s^\infty e^{-b_0(t-s)}\cdot e^{-qt}dt\right)dxds=$$

гузориши $\mathrm{t}-\mathrm{s}=\mathrm{z}, \mathrm{dt}=\mathrm{dz}$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qs}\cdot e^{-b_0s-a_0s}u_0(x-s)\left(\int_0^\infty e^{-b_0z}\cdot e^{-qz}dz\right)dxds=$$

$$\left(pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qs}\cdot e^{-(a_0+b_0)s}u_0(x-s)dxds\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\left(q\int_0^\infty e^{-qz}\cdot e^{-b_0z}dz\right)\right)$$

тасвири функсияи дар ҳар ду қавс мавҷудбуда алакай бар мо маълум аст (ниг $[32],[63],[38]$) ва онҳоро дар ҷойҳояшон гузошта ҳосил мекунем

$$=\left(\frac{q}{p+q+a_0+b_0}U_0(p)\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{q+b_0}\right)=\frac{qU_0(p)}{(q+b_0)(p+q+a_0+b_0)}$$

ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум карда шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^t e^{-(b_0t+a_0s)}u_0(x-s)ds\rightrightarrows\frac{qU_0(p)}{(q+b_0)(p+q+a_0+b_0)}\qquad(1.2.21)$$

Тасвири интеграли намуди

$$\boldsymbol{r_1(x,t)=\frac{1}{c}\int_0^t\left(e^{-ls}-e^{-ct+(c-l)s}\right)u_0(x-s)ds\,;c\neq 0}$$

-ро дида мебароем

Формулаи умумии табдилотро оварда тасвири интеграли додашударо меёбем ва чи гунае, ки аён аст интеграли мазкур аз параметр вобаста мебошад. (ниг [16])

$$R_1(p,q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}r_1(x,t)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\frac{1}{c}\int_0^t\left(e^{-ls}-e^{-ct+(c-l)s}\right)u_0(x-s)ds\right)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\frac{1}{c}\int_0^t e^{-ls}\left(1-e^{-c(t-s)}\right)u_0(x-s)ds\right)dxdt=$$

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-ls}u_0(x-s)\left(\int_s^\infty\frac{1-e^{-c(t-s)}}{c}\cdot e^{-qt}dt\right)dxds=$$

Ҳамин тавр интеграли каратии ғайрихосро пайдо намудем (ниг [8], [11]) ва барои ҳисоб намудани интеграли мазкур гузориши $\mathrm{t-s=z,dt=dz}$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qs}\cdot e^{-ls}u_0(x-s)\left(\int_0^\infty\left(\frac{1-e^{-cz}}{c}\right)\cdot e^{-qz}dz\right)dxds=$$

$$\left[pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qs}\cdot e^{-ls}u_0(x-s)dxds\right]\cdot\left[\frac{1}{q}\left(q\int_0^\infty e^{-qz}\cdot\left(\frac{1-e^{-cz}}{c}\right)dz\right)\right]=$$

тасвири функсияи дар ҳар ду қавси мавҷудбуда алакай бар мо маълум аст (ниг $[71],[21]$) ва онҳоро дар ҷойҳояшон гузошта ҳосил мекунем

$$\left[\frac{qU_0(p)}{p+q+l}\right]\cdot\left[\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{q+c}\right]=\frac{1}{q(q+c)}\cdot\frac{qU_0(p)}{p+q+l}=\frac{U_0(p)}{(q+c)(p+q+l)}$$

ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур низ маълум карда шуд, ки он чунин аст:

$$\frac{1}{\text{c}}\int_0^t(e^{-ls}-e^{-ct+(c-l)s})u_0(x-s)ds\rightrightarrows\frac{1}{(q+c)(p+q+l)}U_0(p)\qquad(1.2.22)$$

дар ин ҷо c, l- ададҳои ҳақиқии ихтиёри буда, инчунин $c\neq 0$ аст.

Тасвири интеграли зеринро меёбем

$$\int_0^t\big(\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})+\boldsymbol{bh}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})\big)\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{bs}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s})\boldsymbol{ds}$$

Дар ин ҷо $\delta(t),h(t)$- функсияи умумикардашуда мебошанд. (ниг $[54],[56]$)

Теорема 1.2.4: Бигзор функсияҳои $f(x)$ *шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноаткунанда бошанд, он гоҳ ҳангоми* $x>0,t>0$ *будан тасвири интеграли мазкур чунин мешавад:*

$$\int_0^t\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(x+s)ds\rightrightarrows\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$$

Исбот: Формулаи умумии табдилоти Лаплас-Карсон барои функсияи дутағирёбандаро истифода намуда тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qt}\left(\int_0^t(\delta(t-s)+bh(t-s))e^{-bs}f(x+s)ds\right)dxdt$$

гузориши $t - s = z; dt = dz$ *–ро истифода намуда ҳосил мекунем*

$$\left(pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qs}\cdot e^{-bs}f(x+s)\,dxds\right)\cdot\left(\frac{1}{q}\left(q\int_0^\infty\big(\delta(z)+bh(z)\big)\,e^{-qz}dz\right)\right)$$

Ҳамин тавр интегралҳои ғайрихосро пайдо кардем. (ниг [27], [28]*) Чи тавре мо медонем тасвири функсияи қавси дуюм бар мо маълум мебошад (ниг*[38], [24], [108]*) ва тасвири функсияи қавси якум аз формулаи (1.2.12) бар мо маълум аст. (ба ҷадвали 1 ва 2 нигаред) Ҳамин тавр тасвирҳоро гузошта ҳосил мекунем*

$$\left(\frac{q}{q+b}\cdot\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}\right)\cdot\left(\frac{q+b}{q}\right)=\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$$

Яъне

$$\int_0^t\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(x+s)ds \rightrightarrows \frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)} \quad (1.2.23)$$

Тасвири интеграли зеринро меёбем

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{min}(x,t)}\boldsymbol{\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(x-s)ds}$$

Чи тавре аз баробарии (1.2.17) мо мебинем

$$\int_0^{min(x,t)} f_1(s)f_2(x-s)f_3(t-s)\partial s \rightrightarrows \frac{F_1(p+q)F_2(p)F_3(q)}{p+q} \quad (1.2.24)$$

мебошад. Дар интеграле, ки мо тасвирашро ҷустуҷӯ карда истодаем

$$f_1(t)=e^{-bt}\to\frac{q}{q+b}$$

$$f_2(x)=f(x)\to F(p)$$

$$f_3(t) = \big(\delta(t) + bh(t)\big) \to q + b$$

мебошад. (ниг [20], [75], [5]) Тасвирҳоро ба баробарии (1.2.24) гузошта ҳосил мекунем:

$$\int_0^{\min(x,t)} \big(\delta(t-s) + bh(t-s)\big)e^{-bs} f(x-s)ds \rightrightarrows (q+b) \cdot \frac{p+q}{p+q+b} \cdot \frac{F(p)}{p+q}$$

$$= \frac{(q+b)F(p)}{p+q+b}$$

Яъне

$$\int_0^{min(x,t)} \big(\delta(t-s) + bh(t-s)\big)e^{-bs} f(x-s)ds \rightrightarrows \frac{(q+b)F(p)}{p+q+b} \qquad (1.2.25)$$

Оё тасвири интеграли мазкур дуруст навишта шудааст?

$$\boldsymbol{\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds - \int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds \rightrightarrows \frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)}}$$

Барои ҷавоб гуфтан ба ин савол масъаларо аз баръакс таҳлил мекунем ва ҳамин тавр ифодаро содда намуда ҳосил мекунем

$$\frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)} = \frac{\Phi_2(q)}{q+b} - \frac{\Phi_2(q)}{p+q+b} = \frac{\Phi_2(q)}{q+b} - \frac{H(p)\Phi_2(q)}{p+q+b}$$

Чи тавре аз баробарии (1.2.24) мо мебинем тасвири интеграли зерин

$$\int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds$$

чунин аст:

$$\int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds \rightrightarrows \frac{H(p)\Phi_2(q)}{p+q+b}$$

дар ин ҷо $h(x)$ – функсияи Хевисайд буда, (ниг [56]) тасвири он тавассути табдилоти Лаплас-Карсон чунин мебошад:

$$h(x) \to 1 = H(p)$$

ва инчунин чи гунае, ки аз баробарии (1.2.24) мо мебинем

$$\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds \rightrightarrows \frac{\Phi_2(q)}{q+b}$$

мебошад. (ниг [31], [32])

Яъне

$$\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds - \int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds \rightrightarrows$$

$$\frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)} \tag{1.2.26}$$

мешавад. Ҳамин тавр маълум шуд, ки тасвири интеграли мазкур дуруст навишта шудааст.

Тасвири интеграли зеринро меёбем

$$\boldsymbol{\int_0^t \big(\delta(t-s) + bh(t-s)\big)e^{-bs} f(s)ds}$$

Формулаи табдилоти Лаплас-Карсон барои функсияҳои яктағирбандаро истифода намуда (ниг [71]) тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$q\int_0^\infty e^{-qt}\left(\int_0^t \big(\delta(t-s) + bh(t-s)\big)e^{-bs} f(s)ds\right)dt =$$

гузориши $t - s = z; dt = dz$ –ро истифода намуда ҳосил мекунем

$$q\int_0^\infty e^{-q(z+s)}\int_s^t \big(\delta(z)+bh(z)\big)e^{-bs}f(s)ds\,dz=$$

$$\left[q\int_0^\infty e^{-qz}\big(\delta(z)+bh(z)\big)dz\right]\cdot\left[\int_0^\infty e^{-(q+b)s}f(s)ds\right]=$$

$$(q+b)\int_0^\infty e^{-(q+b)s}f(s)ds=F(q+b)$$

Яъне

$$\int_0^t \big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(s)ds\to F(q+b) \qquad (1.2.27)$$

Тасвири интеграли зеринро меёбем

$$\int_0^t a(t-\tau)\,e^{-b\tau}u_1(x+\tau)\partial\tau$$

Чи тавре аз баробарии (1.2.13) мебинем

$$\int_0^t a(t-\tau)\,u(x,\tau)\partial\tau\rightrightarrows\frac{1}{q}\cdot A(q)U(p,q)$$

мебошад. Интеграле, ки мо тасвирашро ҷустуҷӯ карда истодаем ҳолати хусусӣ барои интеграли (1.2.13) буда, дар ин ҷо

$$u(x,\tau)=e^{-b\tau}u_1(x+\tau)$$

мебошад, ки тасвири он чунин аст: (ниг [75])

$$e^{-b\tau}u_1(x+\tau)\rightrightarrows\frac{pq}{p-(q+b)}\cdot\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p(q+b)}$$

Тасвири ядро $a(t)$ ва функсияи $u(x,\tau)$-ро ба баробари гузошта ҳосил мекунем

$$= \left(\frac{pq}{p-(q+b)} \cdot \frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p(q+b)}\right) \cdot \frac{A(q)}{q}$$

$$= \frac{A(q)}{q+b} \cdot \frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$$

Яъне

$$\int_0^t a(t-\tau)\, e^{-b\tau} u_1(x+\tau)\partial\tau \rightrightarrows \frac{A(q)}{q+b} \cdot \frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)} \qquad (1.2.28)$$

мешавад.

Тасвири интеграли зеринро меёбем

$$\boldsymbol{\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)} \cdot e^{-a_1 s} \cdot f(x-s;t-s)ds}$$

Ҳудуди интеграли мазкур аз тағирёбандаҳо иборат буда, инчунин интеграл аз параметир низ вобаста аст. (ниг [79], [118], [48]) Чи тавре маълум аст дар ҳолати $a_0 = 0\,, a_1 = 0$ будан тасвири интеграли мазкур аз тарафи олимон муайян шудааст (ниг [71]) ва дар ҳолати $a_0\,, a_1 -$ ихтиёри адади ҳақиқи будан бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)} \cdot e^{-a_1 s} \cdot f(x-s;t-s)ds\right)dxdt =$$

гузориши $x - s = u; t - s = v$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty} e^{-a_0 v} \cdot e^{-a_1 s} \cdot f(u;v)ds\right)dudv =$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-(q+a_0)v} f(u;v)dudv \int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s} \cdot ds =$$

$$\frac{q}{q+a_0}\cdot\left(p(q+a_0)\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-(q+a_0)v}f(u;v)dudv\right)\cdot\left(\int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\,ds\right)=$$

$$\frac{q}{q+a_0}\cdot F(p;q+a_0)\cdot\lim_{R\to\infty}\left(-\left.\frac{e^{-(p+q+a_1)s}}{p+q+a_1}\right|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\right)=$$

$$=\frac{q}{q+a_0}\cdot F(p;q+a_0)\cdot\frac{1}{p+q+a_1}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{min(x,t)} e^{-a_0(t-s)-a_1s}f(x-s;t-s)ds \rightrightarrows \frac{qF(p;q+a_0)}{(p+q+a_1)(q+a_0)} \qquad (1.2.29)$$

Ҳамаи формулаҳои ҳосилшударо дар шакли ҷадвал нишон медиҳам ва то ҷое огоҳ ҳастам дар таърихи риёзиёт то ҳол ин гуна формулаҳо аз тарафи олимон барраси карда нашудааст.

Ҷадвал 2: Тасвири баъзе интегралҳо

	$f(x,t)\qquad(x>0;\ \ t>0)$	$F(p,q)$
1	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as}f(x-s,t-s)ds$	$\frac{F(p,q)}{p+q+a}$
2	$\frac{1}{c}\int_0^t(e^{-ls}-e^{-ct+(c-l)s})u_0(x-s)ds;\ c\neq 0$	$\frac{1}{(q+c)(p+q+l)}U_0(p)$
3	$\int_0^t e^{-(b_0t+a_0s)}u_0(x-s)ds$	$\frac{q}{(q+b_0)(p+q+a_0+b_0)}U_0(p)$
4	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1s}\,dsd\tau$	$\frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)}$

5	$\int_0^t \mathrm{e}^{-(\mathrm{bt}+\mathrm{s})}\mathrm{u}_0(x-\mathrm{s})\mathrm{ds}$	$\frac{\mathrm{q}}{(\mathrm{q}+\mathrm{b})(\mathrm{p}+\mathrm{q}+1+\mathrm{b})}\mathrm{U}_0(\mathrm{p})$
6	$\int_0^t a(t-\tau)u(x,\tau)d\,\tau$	$\frac{1}{q}A(q)U(p,q)$
7	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} e^{-a_2(t-s-\tau)}f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau$	$\frac{F(p;q)}{(q+a_2)(p+q+a_1)}$
8	$\int_0^{\min(x,t)}\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(x-s)ds$	$\frac{(q+b)F(p)}{p+q+b}$
9	$\int_0^t\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(x+s)ds$	$\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$
10	$\int_0^t\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(\lvert x-s\rvert)ds$	$\frac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+q+b}$
11	$\int_0^t\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(s)ds$	$F(q+b)$
12	$\int_0^t a(t-\tau)\,e^{-b\tau}f(x+\tau)\partial\tau$	$\frac{A(q)}{q+b}\cdot\frac{pF(q+b)-(q+b)F(p)}{p-(q+b)}$
13	$\int_0^t a(t-\tau)\,e^{-b\tau}f(\lvert x-\tau\rvert)\partial\tau$	$\frac{A(q)}{q+b}\cdot\frac{pF(q+b)+(q+b)F(p)}{p+(q+b)}$
14	$\int_0^t a(t-\tau)\,e^{-b\tau}\big(f(x+\tau)+f(\lvert x-\tau\rvert)\big)\partial\tau$	$\frac{2A(q)}{q+b}\cdot\frac{p^2F(q+b)-(q+b)^2F(p)}{p^2-(q+b)^2}$
15	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_0(t-s)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot f(x-s;t-s)ds$	$\frac{qF(p;q+a_0)}{(p+q+a_1)(q+a_0)}$

16	$\int_0^t e^{-a_0(t-s)} \cdot e^{-a_1 s} \cdot \delta(x-s)u_0(t-s)ds;\ \ x>t$	$\frac{q}{q+a_0}\cdot\frac{pU_0(q+a_0)}{p+q+a_1}$
17	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-a_1 t}\cdot u_0(x+t-2s)ds$	$\frac{q}{q+a_1}\cdot\frac{pU_0(q+a_1)-(q+a_1)U_0(p)}{p^2-(q+a_1)^2}$
18	$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(x-s)\, f_2(\tau)dsd\tau$	$\frac{F_1(p)F_2(q)A(q)}{q(p+q+a_1)}$
19	$\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds-$ $-\int_0^{min(x;t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds$	$\frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)}$
20	$\int_0^{\min(x,t)} e^{-as}f(x-s,t-s)g(s)ds$	$\frac{G(p+q+a)F(p,q)}{p+q+a}$

Бояд қайд намуд, ки дар ин ҷо функсияи $F(p,q)$ −функсияи тағирёбандааш комплексӣ мебошад. (ниг [96], [97], [98], [99])

БОБИ 2. МУОДИЛАҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛИ БО ҲОСИЛАҲОИ ХУСУСӢ

2.1. Муодилаҳои дифференсиали бо ҳосилаҳои хусусӣ

2.1.1 Мафҳуми асосӣ

Дар самтҳои мухталифи илм ва техника масъалаҳое дучор мешаванд, ки барои ҳалли онҳо муодилаҳои дифференсиали бо ҳосилаҳои хусусӣ истифодашаванда мебошанд. Муодилаҳои дифференсиали бо ҳосилаҳои хусусӣ ҳангоми таҳқиқи ҳодисаҳои механикӣ, ҳодисаҳои ҳароратӣ, ҳодисаҳои электрикӣ, ҳодисаҳои оптикӣ, акустика ва ғайраҳо татбиқи васеи амали доранд. (ниг $[87, 104]$)

Ба монанди муодилаҳои дифференсиалии оддӣ, муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ низ дорои тартиби муайян мебошанд. Тартиби муодилаи дифференсиалӣ гуфта дараҷаи калонтарини ҳосиларо, ки дар муодилаи дифференсиалии додашуда мавҷуд аст мегуянд. Масалан $u_x = y, \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \dots -$муодилаҳои дифференсиали бо ҳосилаи хусусии тартиби як буда, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x}{y}$; $u_{xx} = xy$; $u_{yy} = \ln(x + y)$... муодилаҳои дифференсиали бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду мебошанд. Ҳаминро қайд кардан зарур аст, ки муодилаҳои дифференсиалӣ на фақат тартиби як, ду балки тартиби $n -$ низ шуда метавонанд. $(n = 1,2,3, . .)$ Зикр кардан бо маврид аст, ки ба ғайр аз муодилаҳои дифференсиалии тартибашон бутун муодилаҳои дифференсиалии тартиби касри низ мавҷуд аст.

Муодилаи дифференсиали бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду ба се навъ ҷудо мешавад: гиперболӣ, параболӣ ва элипсӣ. (ниг $[26], [18]$)

Намуди умумии муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусии тартиби ду чунин аст:

$$A(x, y, u)u_{xx} + 2B(x, y, u)u_{xy} + C(x, y, u)u_{yy} + F\big(x, y. u. u_x, u_y\big) = 0 \quad (2.1.1)$$

дар ин ҷо A, B, C функсияҳои маълуми аз x, y, u вобаста буда, инчунин адад хам низ шуда метавонанд ва u(x.y) функсияи ҷустуҷӯшаванда мебошад.

Таъриф. Функсияи u(x.y) ҳалли муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ номида мешавад агар онро ҳангоми ба муодила гузоштан ҳар ду тарафи баробари ба айният табдил ёбад.

1) Ҳангоми $AC - B^2 < 0$ будан муодила дорои навъи гиперболӣ буда бо истифода аз гузориши x=x($\alpha.\beta$), y=y($\alpha.\beta$) муодила ба намуди

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta. u. u_\alpha, u_\beta)$$

табдил меёбад, ки онро намуди умумии муодилаи навъи гиперболӣ меноманд. (ниг [16]) Яке аз мисолҳои муодилаи навъи гиперболӣ муодилаи мавҷ мебошад, ки намуди зеринро дорад:

$$u_{tt} = \text{a}^2 u_{xx}$$

2) Ҳангоми $AC - B^2 = 0$ будан муодила дорои навъи параболӣ буда бо истифода аз гузориши x=x($\alpha;\ \beta$), y=y($\alpha;\ \beta$) муодила ба намуди

$$u_{\alpha\alpha} = \Phi_2(\alpha, \beta. u. u_\alpha, u_\beta)$$

табдил меёбад, ки онро намуди умумии муодилаи навъи параболӣ меноманд. Яке аз мисолҳои муодилаи навъи параболӣ муодилаи гармигузаронӣ мебошад, ки намуди умумии муодилаи мазкур чунин мебошад:

$$u_t = \text{a}^2 u_{xx}$$

3) Хангоми $AC - B^2 > 0$ будан муодила дорои навъи элипсӣ буда бо истифода аз гузориши x=x($\alpha.\beta$), y=y($\alpha.\beta$) муодила ба намуди

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi_3(\alpha, \beta. u. u_\alpha, u_\beta)$$

табдил меёбад, ки онро намуди умумии муодилаи навъи элипсӣ меноманд. (ниг [18])

2.1.2 Муодилаи дифференсиали бо ҳосилаи хусусии тартиби як

Бигзор функсияи $u = u(x, y, z)$ аз се тағирбанда иборат бошад

Таъриф: Муодилаи намуди

$$\boldsymbol{P(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z,u)\frac{\partial u}{\partial z}=T(x,y,z,u)} \quad \mathbf{(2.1.2)}$$

муодилаи квазихаттӣ бо ҳосилаи хусусии тартиби як номида мешавад, ки дар ин ҷо $\boldsymbol{P,Q,R,T}$ − функсияҳои додашуда буд, $\boldsymbol{u(x,y,z)}$ −функсияи ҷустуҷӯшаванда мебошад.

Дар ҳолати функсияҳои додашуда $\mathrm{P,Q,R,T}$ аз u вобаста набудан муодилаи $(1.2.2)$ −ро хаттӣ меноманд. Инчунин дар ҳолати $\mathrm{T}=0-$ будан муодилаи $(1.2.2)-$ якҷинса номида мешавад. (ниг [26])

Ҳангоми ҳалли муодилаи дифференсиалии (1.2.2) тартиб додани муодилаи характеристики ҳатми мебошад, ки намуди умумии он чунин аст:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{T} \qquad (2.1.3)$$

Мисол: Муодиларо ҳал кунед $\boldsymbol{x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0}$

Ҳал: Сараввал муодилаи характеристикиро тартиб медиҳем

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{0}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\leftrightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\leftrightarrow \ln y=\ln x+C_1\leftrightarrow\frac{y}{x}=C_1$$

инчунин $du=0\leftrightarrow u=C_2$ мешавад. Яъне

$$\lambda\left(\frac{y}{x},u\right)=0$$

мебошад. Ҳамин тавр ҳалли умумии муодила $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ мешавад. Дар ин ҷо функсияи φ −ихтиёри функсияи дифференсиронидашаванда аст.

2.1.3 Муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусии тартиби ду

Бигзор $u(x,y)-$ функсияи дутағирёбанда ва A,B,C,a,b,c,f −функсияҳои додашуда бошанд.

Таъриф: Муодилаи намуди

$$\boldsymbol{A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f(x,y)} \qquad (\mathbf{2.1.4})$$

муодилаи дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаи хусусии тартиби ду номида мешавад. Дар ин ҷо $\boldsymbol{A(x,y), B(x,y), C(x,y), a(x,y), b(x,y), c(x,y), f(x,y)}$ – функсияҳои додашуда ва $\boldsymbol{u(x,y)}$ – функсияи ҷустуҷӯшаванда мебошад.

Агар функсияи A, B, C, a, b, c, f – ба ғайр аз x, y инчунин аз u низ вобаста бошанд он гоҳ муодилаи $(\mathbf{1.2.4})$ – **квазихаттӣ** номида мешавад.

Муодилаи намуди

$$Ady^2-2Bdxdy+Cdx^2=0$$

муодилаи характеристикӣ ном дорад.

Мисол: Муодиларо ҳал кунед

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Ҳал: Тағирёбандаи нав дохил намуда муодиларо ҳал мекунем $\varepsilon=x+y$; $\eta=x-y$

$$u_x=u_\varepsilon\varepsilon_x+u_\eta\eta_x=u_\varepsilon+u_\eta;\quad u_y=u_\varepsilon\varepsilon_y+u_\eta\eta_y=u_\varepsilon-u_\eta$$

$$u_{xx}=(u_x)_\varepsilon\varepsilon_x+(u_x)_\eta\eta_x=\left(u_\varepsilon+u_\eta\right)_\varepsilon+\left(u_\varepsilon+u_\eta\right)_\eta=u_{\varepsilon\varepsilon}+2u_{\eta\varepsilon}+u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy}=\left(u_y\right)_\varepsilon\varepsilon_y+\left(u_y\right)_\eta\eta_y=\left(u_\varepsilon-u_\eta\right)_\varepsilon-\left(u_\varepsilon-u_\eta\right)_\eta=u_{\varepsilon\varepsilon}-2u_{\eta\varepsilon}+u_{\eta\eta}$$

акнун ифодаҳои ҳосилшударо ба муодила мегузорем

$$u_{\varepsilon\varepsilon}+2u_{\eta\varepsilon}+u_{\eta\eta}=u_{\varepsilon\varepsilon}-2u_{\eta\varepsilon}+u_{\eta\eta}$$

Дар ин ҷо

$$u_{\eta\varepsilon}=0$$

мешавад. Ҳалли муодилаи ҳосилшуда чунин аст:

$$u=\varphi_1(\varepsilon)+\varphi_2(\eta)$$

ҳамин тавр ҳалли умумии муодила

$$u(x, y) = \varphi_1(x + y) + \varphi_2(x - y)$$

мебошад.

2.2. Татбиқи табдилоти Лаплас-Карсон дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ

Мо метавонем усули ҳисоби оператсиониро дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ, муодилаҳои интегралӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ тадбиқ намоем. Бояд қайд намуд, ки бо истифода аз табдилоти Лаплас бисёртағирёбанда баъзе синфи ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ, муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ дида баромада шудааст. (ниг $[116, 59, 36]$) Бо истифода аз татбиқи табдилоти Лаплас-Карсон масъалаҳои мушахасро дида мебароем, ки яке аз он масъалаҳо муодилаи транспорт бо манбаи хаттӣ ба шумор меравад.

2.2.1 Муодилаи транспорт бо манбаи хаттӣ

Олимон барои ҳал намудани муодилаи дифференсиали бо ҳосилаи хусусӣ тарзҳои гуногуни ҳалро истифода мекунанд. Ҳаминро қайд кардан зарур аст, ки усули ҳисоби оператсионӣ дар ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ истифодашаванда мебошад. Табдилоти Лаплас-Карсон –ро татбиқ намуда ҳалли муодилаи зеринро ҷустуҷӯ мекунем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + au = f(x, t) \qquad (2.2.1)$$

Шартҳои ибтидоӣ ва канориро меорем: $\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x); & x > 0 \\ u(0, t) = \varphi(t); & t > 0 \end{cases}$ (2.2.2)

Дар ҳолати $a = 0$ будан ҳалли муодилаи мазкур бо истифода аз усули ҳисоби оператсионӣ аз тарафи олимон дида баромада шудааст (ниг $[20]$) ва ҳоло мо барои ихтиёрии адади ҳақиқии a ҳалли умумии муодилаи (2.3.1)-ро бо шартҳои додашудаи (2.3.2) дида мебароем. **Ҳаминро қайд кардан зарур аст, ки ҳар яке аз ин функсияҳо бефосила ва дифференсиронидашаванда**

нисбат ба ҳарду тағирёбанда бошанд ва инчунин шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноат кунанд. (ниг $[102, 81]$) Сараввал тасвири функсияҳо ва ҳосилаҳоро меорем (ниг [20,21,32])

$$u(x,t) \rightrightarrows U(p,q); u(x,0) = u_0(x) \to U_0(p);\ u(0,t) = \varphi(t) \to \Phi(q);$$

$$f(x,t) \rightrightarrows F(p,q);\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \rightrightarrows q[U(p,q) - U_0(p)];\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \rightrightarrows p[U(p,q) - \Phi(q)]$$

акнун тасвирҳоро ба муодилаи (2.3.1) гузошта ҳосил мекунем

$$p[U(p,q) - \Phi(q)] + q[U(p,q) - U_0(p)] + aU(p,q) = F(p,q)$$

$$U(p,q) = \frac{F(p,q) + p\Phi(q) + qU_0(p)}{p+q+a}$$

$$U(p,q) = \left\{\frac{F(p,q)}{p+q+a}\right\} + \left\{\frac{p\Phi(q)}{p+q+a}\right\} + \left\{\frac{qU_0(p)}{p+q+a}\right\} \quad (2.2.3)$$

Баробарии (2.2.3) ҳалли умумии муодилаи (2.2.1) дар фазои зудӣ буда, функсияи тағирёбандааш комплексӣ ба шумор меравад ва аз се ҷамъшавандаи қавсҳо иборат аст. (ниг $[74], [88], [51]$) Чи тавре мо медонем функсияҳои ҳақиқии барои тасвирҳои дар баробарии (2.2.3) мавҷудбуда алакай бар мо маълум аст. (Ба ҷадвали 1 ва 2 нигаред)

1) $\left\{\frac{F(p,q)}{p+q+a}\right\} \leftrightarrows \int_0^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s, t-s) ds$

2) $\left\{\dfrac{p\Phi(q)}{p+q+a}\right\} \leftrightarrows e^{-ax}\varphi(t-x)$

3) $\left\{\dfrac{qU_0(p)}{p+q+a}\right\} \leftrightarrows e^{-at}u_0(x-t)$

акнун ҳалли умумии муодиларо менависем

$$u(x,t) = e^{-ax}\varphi(t-x) + e^{-at}u_0(x-t) + \int\limits_0^{\min(x,t)} e^{-as} f(x-s, t-s) ds$$

Ҳалли мазкурро дар шакли муфассал чунин менависанд:

$$u(x,t) = \begin{cases} e^{-\mathrm{at}} u_0(x-t) + \int\limits_0^t e^{-as} f(x-s, t-s) ds \text{ барои } x > t \\ e^{-ax} \varphi(t-x) + \int\limits_0^x e^{-as} f(x-s, t-s) ds \text{ барои } x < t \end{cases} \quad (2.2.4)$$

2.2.2 *Муодилаи дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби ду*

Муодилаи зеринро дида мебароем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial t} + bu = f(x,t) \quad (2.2.5)$$

Гузориши масъала:

Шартҳои ибтидоӣ $\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ u_t'(x,0) = u_1(x) \end{cases}$ $\quad (2.2.6_1)$

буда ва шартҳои канорӣ $\begin{cases} u(0,t) = \varphi_1(t) \\ u_x'(0,t) = \varphi_2(t) \end{cases}$ $\quad (2.2.6_2)$

мебошад.

Бояд қайд намуд, ки муодилаи (2.2.5)-ро бо шартҳои додашудаи (2.2.6) ҳангоми $a = 0; b = 1; f(x,t) = \sqrt{x+t}$ ва

$$u(x,0) = u(0,t) = u_x'(0,t) = u_t'(x,0) = 0$$

будан олими амрико Р. С. Даҳия ва олими эрон Ҷаъфар Собирӣ бо истифода аз усули табдилоти Лаплас дутағирёбанда ҳал намудаанд. (ниг [108], [109], [110]) Ҳоло мо дар ҳолати умуми барои $a,\ b -$ дилхоҳ ададиҳақиқи будан ва дилхоҳ функсияҳо $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ ки ҳар яке аз инҳо шартҳои мувофиқатиро барои муодилаи (2.2.5) қаноат мекунанд ва инчунин шартҳои табдилоти Лаплас-ро низ қаноат менамоянд (ниг[20], [54] [63]) дида мебароем.

Ҳамин тавр бо истифода аз татбиқи табдилоти Лаплас-Карсон муодилаи

(2.2.5)-ро ҳал мекунем. Ҳаминро талаб кардан зарур аст, ки ҳар яке аз ин функсияҳо бефосила ва дифференсиронидашаванда нисбат ба ҳарду тағирёбанда бошанд ва инчунин шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноат кунанд (ниг $[22],[108]$). Пеш аз ҳалли масъала тасвири ҳосилаи функсияҳо ва функсияҳоро меорем (ниг $[20,53]$).

$$u(x,0)=u_0(x)\to U_0(p);\ u(0,t)=\varphi_1(t)\to \Phi_1(q);$$

$$u\,'_x(0,t)=\varphi_2(t)\to \Phi_2(q);\ u'_t(x,0)=u_1(x)\to U_1(p);\ u(x,t)\rightrightarrows U(p,q);$$

$$f(x,t)\rightrightarrows F(p,q)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\rightrightarrows p^2[U(p,q)-\Phi_1(q)]-p\Phi_2(q);\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rightrightarrows q^2[U(p,q)-U_0(p)]-qU_1(p);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\rightrightarrows pq[U(p,q)-\Phi_1(q)-U_0(p)+u(0,0)];\ \frac{\partial u}{\partial x}\rightrightarrows p[U(p,q)-\Phi_1(q)];$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rightrightarrows q[U(p,q)-U_0(p)]$$

акнун ҳар яке аз ин тасвирҳоро ба муодилаи (2.3.5) гузошта ҳосил мекунем

$$p^2[U(p,q)-\Phi_1(q)]-p\Phi_2(q)+q^2[U(p,q)-U_0(p)]-qU_1(p)+$$

$$+2pq[U(p,q)-\Phi_1(q)-U_0(p)+u(0,0)]+ap[U(p,q)-\Phi_1(q)]+$$

$$+aq[U(p,q)-U_0(p)]+bU(p,q)=F(p,q)$$

$$p^2U(p,q)-p^2\Phi_1(q)-p\Phi_2(q)+q^2U(p,q)-q^2U_0(p)-qU_1(p)+2pqU(p,q)$$

$$-2pq\Phi_1(q)-2pqU_0(p)+2pqu(0,0)+apU(p,q)-ap\Phi_1(q)+aqU(p,q)-$$

$$-aqU_0(p)+bU(p,q)=F(p,q)$$

$$(p^2+q^2+2pq+ap+aq+b)U(p,q)=F(p,q)+p^2\Phi_1(q)+p\Phi_2(q)+$$

$$+q^2U_0(p)+qU_1(p)+2pq\Phi_1(q)+2pqU_0(p)-2pqu(0,0)+ap\Phi_1(q)+$$

$$+aqU_0(p)$$

Ҳамин тавр ҳалли муодиларо дар фазои зудӣ менависем

$$U(p,q)=\frac{F(p,q)+p^2\Phi_1(q)+p\Phi_2(q)+q^2U_0(p)+qU_1(p)+2pq\Phi_1(q)}{p^2+q^2+2pq+ap+aq+b}+$$

$$+\frac{2pqU_0(p)-2pqu(0,0)+ap\Phi_1(q)+aqU_0(p)}{p^2+q^2+2pq+ap+aq+b} \qquad (2.2.7)$$

Махраҷи баробарии (2.3.7)-ро ба зарбшавандаҳо ҷудо намуда сипас амалро идома медиҳем

$$p^2+q^2+2pq+ap+aq+b=(p+q)^2+a(p+q)+b=$$

$$(p+q)^2+2\cdot(p+q)\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+b=\left(p+q+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)^2$$

$$=\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)$$

Ҳалли муодиларо дар шакли муфассал менависем

$$U(p,q)=\left\{\frac{F(p,q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}+$$

$$\left\{\frac{[p^2+2pq+ap]\Phi_1(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}+$$

$$\left\{\frac{p\Phi_2(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}+$$

$$\left\{\frac{[q^2+2pq+aq]U_0(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}+$$

$$\left\{\frac{qU_1(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}+$$

$$\left\{\frac{-2pqu(0,0)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\} \qquad (2.2.8)$$

Аз баски табдилоти Лаплас-Карсона тасвири функсияи ҳақиқии дар фазои вақт мавҷудбударо дар фазои зудӣ нишон медиҳад бинобар ин баробарии (2.2.8) ҳалли умумии муодилаи (2.2.5) дар фазои зудӣ буда функсияи тағирёбандааш комплексӣ ба шумор меравад. (ниг [85], [86], [119], [120]) Чи тавре мебинем баробарии (2.2.8) аз шаш ҷамъшавандаи қавсҳо иборат аст. Аз баски барои мо ҳалли умумии муодилаи (2.2.5) дар фазои вақт, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш ҳақиқӣ амал мекунад лозим аст, бинобар ин бо истифода аз табдилоти баъакси Лаплас-Карсон барои ҳар як функсияи дар қавсҳо мавҷудбуда функсияи ҳақиқӣ ҷустуҷӯ мекунем.

$$1.\left\{\frac{F(p,q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}\leftleftarrows$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^{min(x,t)}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds$$

сараввал ифодаро содда мекунем

$$\frac{F(p,q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}=$$

$$\frac{F(p,q)}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}-\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}{(p+q)^2+a(p+q)+b}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{F(p,q)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{F(p,q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)$$

чи тавре маълум аст (нигаред ба ҷадвали 2)

$$\frac{F(p,q)}{p+q+a_0}\leftleftarrows\int_0^{min(x,t)}e^{-a_0s}f(x-s,t-s)ds \qquad (2.2.9)$$

мебошад. Бо истифода аз татбиқи формулаи мазкур барои функсияи дар қавси якум мавҷудбуда функсияи ҳақиқӣ менависем

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{F(p,q)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{F(p,q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)\leftleftarrows$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^{min(x,t)}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}f(x-s,t-s)ds-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^{\min(x,t)} e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s} f(x-s,t-s)ds$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^{min(x,t)} \left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right) f(x-s,t-s)ds$$

$$2.\left\{\frac{[p^2+2pq+ap]\Phi_1(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}$$

ифодаро содда намуда ҳосил мекунем

$$\frac{[p^2+2pq+ap]\Phi_1(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}=$$

$$\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{pq\Phi_1(q)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}+$$

$$+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{pq\Phi_1(q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-$$

$$-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}$$

Чи тавре аз **ҷадвали 2** барои мо маълум аст тасвири функсияҳои $e^{-a_1x}\varphi_1{}'_t(t-x)+\varphi_1(0)e^{-a_1x}\delta(t-x)$ ва $e^{-a_2x}\varphi_1(t-x)$ чунин мебошанд:

$$\left(e^{-a_1x}\varphi_1{}'_t(t-x)+\varphi_1(0)e^{-a_1x}\delta(t-x)\right)\rightrightarrows\frac{pq\Phi_1(q)}{p+q+a_1} \qquad (2.2.10)$$

$$e^{-a_2 x}\varphi_1(t-x) \rightrightarrows \frac{p\Phi_1(q)}{p+q+a_2} \tag{2.2.11}$$

Бо истифода аз формулаҳои (2.2.10) ва (2.2.11) функсияи ҳақиқии тасвири дар қавси дуюм мавҷудбударо меёбем

$$\left(\frac{[p^2+2pq+ap]\Phi_1(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right) \leftleftarrows$$

$$e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x) + \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}{\varphi_1}'_t(t-x) +$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(0)e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x) +$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}} \cdot e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x) -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}{\varphi_1}'_t(t-x) -$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x) -$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)$$

3. $\left\{\frac{p\Phi_2(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}\leftleftarrows$

$$(a^2-4b)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\varphi_2(t-x)$$

ифодаро содда намуда ҳосил мекунем

$$\frac{p\Phi_2(q)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{p\Phi_2(q)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{p\Phi_2(q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)$$

Ҳамин тавр бо истифода аз формулаи (2.2.11) барои функсияи сеюм хуллоса мебарорем

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{p\Phi_2(q)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{p\Phi_2(q)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)\leftleftarrows$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_2(t-x)-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_2(t-x)\right)=$$

$$=(a^2-4b)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\varphi_2(t-x)$$

$$4.\left\{\frac{[q^2+2pq+aq]U_0(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}$$

ифодаро содда намуда ҳосил мекунем

$$\frac{[q^2+2pq+aq]U_0(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}=$$

$$\frac{qU_0(p)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{qpU_0(p)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{q\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)U_0(p)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{qpU_0(p)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{q\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)U_0(p)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}$$

Чи тавре аз **ҷадвали 1** ва **ҷадвали 2** мо мебинем тасвири функсияҳои $e^{-a_3t}u_0{}'_x(x-t)+u_0(0)e^{-a_3t}\delta(x-t)$ ва $e^{-a_4t}u_0(x-t)$ чунин мебошанд:

$$\left(e^{-a_3t}u_0{}'_x(x-t)+u_0(0)e^{-a_3t}\delta(x-t)\right)\rightrightarrows\frac{pqU_0(p)}{p+q+a_3} \qquad (2.2.12)$$

$$e^{-a_4t}u_0(x-t)\rightrightarrows\frac{qU_0(p)}{p+q+a_4} \qquad (2.2.13)$$

Бо истифода аз формулаҳои (2.2.12) ва (2.2.13) барои тасвири дар қавси чорум мавҷудбуда функсияи ҳақиқи меёбем.

$$\left(\frac{[q^2+2pq+aq]U_0(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right)\leftleftarrows$$

$$e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)$$

$$5.\left\{\frac{qU_1(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}\leftleftarrows$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)$$

ифодаро содда намуда ҳосил мекунем

$$\frac{qU_1(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{qU_1(p)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{qU_1(p)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{qU_1(p)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{qU_1(p)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}$$

Чи тавре аз формулаи (2.2.13) барои мо маълум аст $\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_1(x-t)-\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_1(x-t)=$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)$$

Яъне

$$\left(\frac{qU_1(p)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right)\leftleftarrows$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)$$

мебошад.

$$6.\left\{\frac{-2pqu(0,0)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}\right\}\leftleftarrows 0$$

саравval ифодаро содда мекунем

$$\frac{-2pqu(0,0)}{\left(p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\left(p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{pqu(0,0)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\frac{pqu(0,0)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}$$

формулаҳои (2.2.11) ва (2.2.13) -ро истифода карда нисбати ин функсияҳо хуллоса мебарорем ва чи тавре ба мо маълум аст функсияи Дирак чунин аст: (ниг [54], [56], [57])

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{ҳангоми } t=0\\ 0 & \text{ҳангоми } t\neq 0\end{cases}$$

тасвири функсияи Дирак $\delta(t)\to q$ мебошад. (ниг [1], [78])

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\cdot\left(\frac{pqu(0,0)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{pqu(0,0)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)\leftleftarrows$$

$$\frac{u(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x)-\frac{u(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x)=$$

$$\frac{u(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\delta(t-x)$$

ё

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(\frac{pqu(0,0)}{p+q+\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}-\frac{pqu(0,0)}{p+q+\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\right)\leftleftarrows$$

$$\frac{u(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)-\frac{u(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)=$$

$$\frac{u(0,0)}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)\delta(x-t)$$

$$\delta(x-t)=\delta(t-x)=\left\{\begin{array}{ll}\infty & \text{при}\, x=t\\ 0 & \text{при}\, x\neq t\end{array}\right. \qquad (2.2.14)$$

Ҳалли умумии муодилаи (2.2.5) бо шартҳои додашудаи (2.2.6) чунин аст: (ниг [4 – M])

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1{}'_t(t-x)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^{\min(x,t)}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds+$$

$$e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(0)e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}*e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}{\varphi_1}'_t(t-x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\delta(t-x)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)+$$

$$(a^2-4b)^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\varphi_2(t-x)$$

$$+e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(0)e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\delta(x-t)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)$$

Кадами 1: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x > t$ будан менависем

$$u(x,t)=e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}{u_0}'_x(x-t)-$$

$$-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}u_0(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)t}\right)u_1(x-t)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int\limits_0^t\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds \quad (2.2.15)$$

Кадами 2: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x < t$ будан менависем

$$u(x,t)=e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}{\varphi_1}'_t(t-x)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}{\varphi_1}'_t(t-x)-$$

$$-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\varphi_1(t-x)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)x}\right)\varphi_2(t-x)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^x\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds \quad (2.2.16)$$

Баробариҳои (2.2.15) ва (2.2.16) ҳалли умумии муодилаи (2.2.5) бо шартҳои додашудаи (2.2.6) мебошанд, ки дар ин баробариҳо $\left(\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}\neq\boldsymbol{b}\right)$ аст.

(ниг [**4** – М])

Бо истифода аз формулаи (2.2.15) шарти ибтидоии масъаларо ҳосил намудан мумкин аст, ки он чунин аст:

$$u(x,0)=e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_{0_x}'(x-0)$$

$$+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_{0_x}'(x-0)-$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}u_0(x-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\right)u_1(x-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^0\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(x-s,t-s)ds=$$

$$u_0(x)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{u_0}'_x(x)+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(x)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{u_0}'_x(x)-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}u_0(x)=u_0(x)$$

Бо истифода аз формулаи (2.2.16) шарти канории масъаларо ҳосил намудан мумкин аст, ки онро менависем

$$u(0,t)=e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\varphi_1(t-0)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}{\varphi_1}'_t(t-0)+$$

$$\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\varphi_1(t-0)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}{\varphi_1}'_t(t-0)-$$

$$-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\varphi_1(t-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)\cdot 0}\right)\varphi_2(t-0)+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\int_0^0\left(e^{-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}-e^{-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}\right)s}\right)f(0-s,t-s)ds=$$

$$\varphi_1(t)+\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1{}'_t(t)+\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(t)-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1{}'_t(t)-\frac{\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-b}}\varphi_1(t)=\varphi_1(t)$$

Мисол: Муодиларо ҳал кунед

$$u_{xx}+u_{tt}+2u_{xt}+u=\sqrt{x+t}\quad (t>x)$$

Шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ чунин мебошанд:

$$u(x,0)=u(0,t)=u'(x,0)=u'(0,t)=u(0,0)=0$$

Ҳал: Маълум аст, ки муодилаи додашуда ҳолати хусусии муодилаи (2.2.5) буда дар ин ҷо a=0, b=1, *f(x,t)*= $\sqrt{x+t}$ ва инчунин шартҳои ибтидоӣ ва канорӣ баробари нол мебошанд. Аз баски ҳалли муодилаи додашударо мо ҳангоми $(t>x)$ ҷустуҷу карда истодаем бинобар ин баробарии (2.2.16)-ро истифода намуда ҳалли муодилаи додашударо меёбем

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^x\left(e^{-(-\sqrt{-1})s}-e^{-(+\sqrt{-1})s}\right)\sqrt{x-s+t-s}ds=$$

$$=\int_0^x \frac{e^{is}-e^{-is}}{2i}\sqrt{x+t-2s}ds$$

Бо истифода аз формулаи Эйлер баробариро табдил медиҳем

$$u(x,t)=\int_0^x \sin s\sqrt{x+t-2s}ds$$

Ҳамин тавр ҳалли муодила маълум гардид. (ниг $[38]$)

2.3. Муодилаи телеграф

Доир ба ҳалли муодилаи дифференсиалии телеграф олимони зиёд саҳми худро гузоштаанд, аз ҷумла В. А. Илин, Е. И. Моисеев, Е. А. Козлова, М. Абдулкаримов ва ғайраҳо мебошанд. Ҳаминро бояд қайд намуд, ки муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда то ҳол ҳалли умуми ва ошкори худро пайдо накардааст. Чи тавре мо медонем (ниг $[2],[49],[95]$) муодилаи дифференсиалии телеграф намуди зеринро дорад:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t) \qquad (2.3.1)$$

Гузориши масъала: Шартҳои ибтидоӣ $u(x,0)=u_0(x),u_t'(x,0)=u_1(x)$ буда ва шартҳои канорӣ бошад $u(0,t)=\varphi_1(t),u_x'(0,t)=\varphi_2(t)$ мебошад.

Ҳангоми $\alpha=0,\beta=0$ будан муодилаи мазкур аз тарафи олимон дида баромада шудааст (ниг $[20],[34],[35]$) ва дар ҳолати $\alpha=0,\beta=-q(x,t)$ будан низ (ниг $[2]$) муодилаи мазкурро олимон ҳал намудаанд. Бояд қайд кард, ки дар ҳолати $\alpha=0,\beta$ —адади ҳақиқии мусбат будан низ ҳалли муодилаи мазкур аз тарафи олимон дида баромада шудааст. (ниг $[34],[35],[36],[44],[81],[108],[109]$) Ҳоло мо ҳалли умумии муодилаи $(2.3.1)$-ро бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда бо истифода аз татбиқи ҳисоби оператсионӣ ҳангоми $\alpha -$ адади ҳақиқии ихтиёри ва $\beta = \frac{\alpha^2}{4}$ будан меёбем. Табдилоти Лаплас-Карсонро татбиқ намуда муодилаи $(2.3.1)$ –ро ҳал мекунем. Ҳаминро талаб кардан зарур аст, ки ҳар яке аз ин функсияҳо бефосила ва дифференсиронидашаванда нисбат ба ҳарду тағирёбанда бошанд ва инчунин шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноат кунанд (ниг $[17], [40]$). Пеш аз ҳалли масъала тасвири ҳосилаи функсия ва функсияҳоро меорем (ниг $[20]$)

$$u(x,0) = u_0(x) \to U_0(p), u(0,t) = \varphi_1(t) \to \Phi_1(q),$$

$$u\,'_x(0,t) = \varphi_2(t) \to \Phi_2(q), u'_t(x,0) = u_1(x) \to U_1(p),$$
$$u(x,t) \rightrightarrows U(p,q), f(t) \to F(q)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightrightarrows p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q); \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightrightarrows q^2[U(p,q) - U_0(p)] - qU_1(p);$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightrightarrows q[U(p,q) - U_0(p)]$$

акнун ҳар яке аз ин тасвирҳоро ба муодилаи (2.3.1) гузошта ҳосил мекунем

$$q^2[U(p,q) - U_0(p)] - qU_1(p) + \alpha q[U(p,q) - U_0(p)] + \frac{1}{4}\alpha^2 U(p,q)$$
$$= p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q) + F(q)$$

$$q^2U(p,q) - q^2U_0(p) - qU_1(p) + \alpha qU(p,q) - \alpha qU_0(p) + \frac{1}{4}\alpha^2 U(p,q)$$
$$= p^2U(p,q) - p^2\Phi_1(q) - p\Phi_2(q) + F(q)$$

$$\left(q^2 + \alpha q + \frac{1}{4}\alpha^2 - p^2\right)U(p,q)$$

$$= (q^2 + \alpha q)U_0(p) + qU_1(p) - p^2\Phi_1(q) - p\Phi_2(q) + F(q)$$

$$U(p,q) = \frac{(q^2 + \alpha q)U_0(p) + qU_1(p) - p^2\Phi_1(q) - p\Phi_2(q) + F(q)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} \quad (2.3.2)$$

Маълум аст, ки дар ҳолати $p_1 = q + \frac{\alpha}{2}$, $p_2 = -\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)$ будан махраҷ нол мешавад ва аз баски решаи дуюм ба соҳаи наздикшавии интеграли Лаплас таааллуқ надорад бинобар ин онро решаи бегона шуморида дар ҳолати $p = q + \frac{\alpha}{2}$ будан сурат кай нол мешавад муайян мекунем

$$(q^2 + \alpha q)U_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) + qU_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 \Phi_1(q)$$

$$-\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\Phi_2(q) + F(q) = 0$$

$$\frac{(q^2 + \alpha q)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}U_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{q}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}U_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q) - \Phi_2(q)$$

$$+\frac{1}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)}F(q) = 0$$

$$\Phi_2(q) = \frac{(q^2 + \alpha q)}{q + \frac{\alpha}{2}}U_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{q}{q + \frac{\alpha}{2}}U_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q) +$$

$$+\frac{F(q)}{q + \frac{\alpha}{2}} \qquad (2.3.3)$$

Баробарии (2. 3. 3)-ро ба баробарии (2. 3. 2) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p, q) = \frac{(q^2 + \alpha q)U_0(p) + qU_1(p) - p^2\Phi_1(q) + F(q)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} +$$

$$\frac{-p\left(\frac{(q^2 + \alpha q)}{q + \frac{\alpha}{2}}U_0\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{q}{q + \frac{\alpha}{2}}U_1\left(q + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(q + \frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q) + \frac{F(q)}{q + \frac{\alpha}{2}}\right)}{\left(q + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - p^2} \qquad (2.3.4)$$

Акнун баробарии (2. 3. 4) –ро содда мекунем

$$U(p;q)=\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)(q^2+\alpha q)U_0(p)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}+$$

$$\frac{q\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_1(p)-p^2\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q)+\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}+$$

$$+\frac{-p\left((q^2+\alpha q)U_0\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)+qU_1\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2\Phi_1(q)+F(q)\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}$$

Ҳамин тавр ҳалли муодиларо метавон чунин навишт:

$$U(p,q)=\left\{\frac{q^2+\alpha q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_0(p)-pU_0\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_1(p)-pU_1\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{p\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}\right\}+$$

$$\left\{\frac{\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}\right\}\qquad(2.3.5)$$

Аз баски табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияи ҳақиқии дар фазои вақт мавҷудбударо дар фазои зудӣ нишон медиҳад бинобар ин баробарии (2.3.5) ҳалли умумии муодилаи (2.3.1) дар фазои зудӣ буда, функсияи тағирёбандааш комплекси ба шумор меравад ва фуксияҳои аз параметр вобаста мебошад. (ниг [65], [110], [111]) Чи тавре мебинем баробарии (2.3.5) аз чор ҷамъшавандаи қавсҳо иборат аст. Аз баски барои мо ҳалли умумии муодилаи (2.3.1) дар фазои вақт, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш ҳақиқӣ (ниг [64,65]) амал мекунад лозим аст, бинобар ин бо истифода аз табдилоти баъакси Лаплас-Карсон барои ҳар як функсияи дар қавсҳо мавҷудбуда функсияи ҳақиқи ҷустуҷӯ мекунем

$$1)\ \left\{\frac{q^2+\alpha q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_0(p)-pU_0\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}\right\}\leftleftarrows$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta'(t-s-\tau)\,u_0(x-s+\tau)e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\,dsd\tau$$

$$+\alpha\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_0(x-s+\tau)e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\,dsd\tau;$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{min(x,t)} e^{-a_1 s}f(x-s,t-s)ds\rightrightarrows\frac{F(p,q)}{p+q+a_1};\qquad(2.3.6)$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\rightrightarrows\frac{A(q)F(p;q)}{q(p+q+a_1)};\qquad(2.3.7)$$

мебошад.

Бо ёрии формулаҳои (2. 3. 6) ва (2. 3. 7) тасвири интеграли зеринро меёбем

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau$$

$$\rightrightarrows\frac{A(q)}{q+b}\cdot\frac{pU_1(q+b)-(q+b)U_1(p)}{p^2-(q+b)^2};\qquad(2.3.8)$$

Инчунин формулаи зеринро низ барасси хоҳем намуд

$$\frac{q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_1(p)-pU_1\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}$$

$$\leftleftarrows \int\limits_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t}u_1(x+t-2s)ds \qquad (2.3.9)$$

Баробариҳои (2. 3. 8), (2. 3. 9)-ро истифода намуда функсияи ҳақиқии қавси якуми дар баробарии (2. 3. 5) мавҷудбударо ҳосил мекунем

$$\left\{\frac{q^2+\alpha q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_0(p)-pU_0\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}\right\}\leftleftarrows$$

$$\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\delta'(t-s-\tau)\,u_0(x-s+\tau)e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\,dsd\tau$$

$$+\alpha\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_0(x-s+\tau)e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\,dsd\tau;$$

$$2)\ \left\{\frac{q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_1(p)-pU_1\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}\right\}\leftleftarrows\int\limits_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cdot u_1(x+t-2s)ds$$

Бо истифода аз татбиқи баробарии (2. 3. 9) функсияи ҳақиқии ба тасвири дар қавси мазкур мувофиқояндаро менависем

$$\frac{q}{q+\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)U_1(p)-pU_1\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2}\leftleftarrows\int\limits_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cdot u_1(x+t-2s)ds$$

$$3)\ \left\{\frac{p\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}\right\}=\left\{\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+\frac{\alpha}{2}}\right\}\leftleftarrows e^{-\frac{\alpha}{2}x}\varphi_1(t-x)$$

Сараввал ифодаи дар дохили қавс мавҷудбударо содда мекунем

$$\frac{p\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\Phi_1(q)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}=\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+\frac{\alpha}{2}}$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 1 нигаред)

$$\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+\frac{\alpha}{2}}\leftrightarrows e^{-\frac{\alpha}{2}x}\varphi_1(t-x)$$

мебошад. (ниг [38])

4) $\left\{\frac{\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}\right\}\leftrightarrows\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{\frac{-\alpha}{2}(t-\tau)}\,h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau$

Сараввал ифодаи дар дохили қавс мавҷудбударо содда мекунем

$$\frac{\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)^2-p^2\right)}=\frac{\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)-p\right)\left(\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)+p\right)}$$
$$=\frac{H(p)F(q)}{\left(q+\frac{\alpha}{2}\right)\left(p+q+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли намуди

$$\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}a(t-s-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(x-s)\,f_2(\tau)dsd\tau$$

-ро меёбем

$$pq\int\limits_0^{\propto}\int\limits_0^{\infty}e^{-px-qt}\left(\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}a(t-s-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(x-s)\,f_2(\tau)dsd\tau\right)dxdt$$

Гузориши $x-s=u; t-s=v$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} a(v-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(u)\, f_2(\tau)dsd\tau\right)dudv =$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} a(v-\tau)f_2(\tau)d\tau\right)f_1(u)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\,ds =$$

$$=\left(p\int_0^{\infty} e^{-pu}\, f_1(u)du\right)\left(q\int_0^{\infty} e^{-qv}\left(\int_0^{v} a(v-\tau)f_2(\tau)d\tau\right)dv\right)\cdot\frac{1}{p+q+a_1}=$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{v} a(v-\tau)f_2(\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)\cdot F_2(q)$$

Мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем

$$=F_1(p)\cdot\frac{1}{q}A(q)\cdot F_2(q)\cdot\frac{1}{p+q+a_1}=\frac{F_1(p)F_2(q)A(q)}{q(p+q+a_1)}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд.

Яъне

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\cdot e^{-a_1 s}\cdot f_1(x-s)\, f_2(\tau)dsd\tau \rightrightarrows \frac{F_1(p)F_2(q)A(q)}{q(p+q+a_1)} \quad (2.3.10)$$

Дар ҳолати $a(t)=e^{-\frac{\alpha}{2}t}$ ва $f_1(x)=h(x)$ −функсияи Хевисайд будан баробарии (2. 3. 10) намуди зеринро мегирад

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-s-\tau)}\cdot e^{-a_1 s}\cdot h(x-s)\, f_2(\tau)dsd\tau \rightrightarrows$$

$$\frac{H(p)F_2(q)}{(q+\frac{\alpha}{2})(p+q+a_1)} \qquad (2.3.11)$$

Ҳамин тавр барои ҳамаи қавсҳои дар баробарии (2. 3. 5) мавҷудбуда функсияи ҳақиқӣ муайян кардем, акнун ҳалли умумии муодилаи (2. 3. 1)-ро бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда менависем

$$u(x,t) = \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, dsd\tau$$

$$+\alpha \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$+ \int_0^{\min(x,t)} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot u_1(x+t-2s)ds +$$

$$+e^{-\frac{\alpha}{2}x}\varphi_1(t-x) + \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-\tau)}\, h(x-s)\, f(\tau)dsd\tau \qquad (2.3.12)$$

Қадами 1: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x > t$ будан менависем

$$u(x,t) = \int_0^{t} \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$\alpha \int_0^{t} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, dsd\tau +$$

$$+ \int_0^{t} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot u_1(x+t-2s)ds +$$

$$+ \int_0^{t} \int_0^{t-s} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-\tau)}\, h(x-s)\, f(\tau)dsd\tau \quad (2.3.13)$$

Қадами 2: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x < t$ будан менависем

$$u(x,t) = \int_0^x \int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+\alpha \int_0^x \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_0(x-s+\tau) e^{-\frac{\alpha}{2}(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+\int_0^x e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot u_1(x+t-2s) ds +$$

$$+e^{-\frac{\alpha}{2}x}\varphi_1(t-x) + \int_0^x \int_0^{t-s} e^{\frac{-\alpha}{2}(t-\tau)}\, h(x-s)\, f(\tau) ds d\tau \qquad (2.3.14)$$

БОБИ 3. МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛӢ

3.1. Муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ

Чи гунае, ки ба мо маълум аст дар табиат ва ҳаёти инсоният масъалаҳое вуҷуд доранд, ки барои ҳалли онҳо муодилаҳои дифференсиалӣ лозиманд ба монанди ҳисобкунии суръати ҳаракати ҷисм, ҳисобкунии шитоб, муайянкунии энергия ва ҳоказо. Инчунин ҳодисаҳое мавҷуданд, ки барои шарҳи онҳо ва ҳал намудани масъалаҳои ба онҳо тааллуқдошта муодилаи дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ истифодашаванда мебошад ба монанди масъалаи гармигузаронӣ, ҳаракати лаппиш, паҳншавии лаппиш яъне мавҷ, ҳодисааи диффузия ва ҳоказо. Инчунин масъалаҳое низ дар ҳаёт мавҷуданд, ки ҳалли онҳо моро ба муодилаҳои интегралӣ меоранд масалан масъалаи таутохране, ки онро бори нахуст олим Абел тадқиқ намудааст, ҳар гуна масъалаҳое, ки ба муодилаи дифференсиалии хаттӣ овардашаванда мебошанд ва ҳоказо. (ниг [83], [89], [95])

Таъриф 1: Муодилаи намуди

$$\boldsymbol{u(x,t) = \int_0^t k(t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t)} \qquad \boldsymbol{(3.1.1)}$$

муодилаи интегралии хаттии ҷинси ду номида мешавад. Дар ин ҷо $\boldsymbol{k(t,\tau), f(x,t)}$ −функсияҳои маълум буда, $\boldsymbol{u(x,t)}$ −функсияи ҷустуҷӯшаванда мебошад.

Ҳаминро қайд кардан зарур аст, ки $k(t,\tau)$ −ядрои муодилаи интеграли номида мешавад. (ниг [73], [89]) Дар ҳолати $f(x,t) = 0 -$ будан муодилаи (3.1.1) −ро муодилаи якҷинса мекоманд.

Таъриф 2: Муодилаи намуди

$$\boldsymbol{\int_0^t k(t,\tau)u(x,\tau)d\tau = f(x,t)} \qquad \boldsymbol{(3.1.2)}$$

муодилаи интегралии хаттии ҷинси як номида мешавад. Дар ин ҷо $\boldsymbol{k(t,\tau)}, \boldsymbol{f(x,t)}$ –функсияҳои маълум буда, $\boldsymbol{u(x,t)}$ –функсияи ҷустуҷӯшаванда мебошад.

Дар ҳаёт боз ҳодисаҳое мавҷуданд, ки барои шарҳи онҳо на фақат муодилаи дифференсиалӣ ва муодилаи интегралӣ лозим аст, балки муодилае лозим аст, ки хосиятҳои ин ду мафҳумро дар бар гирад ва ин гуна муодила муодилаи интегро-дифференсиалӣ мебошад. Яъне муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ муодилаҳое мебошанд, ки функсияи номаълум дар як вақт ҳам дар зери аломати ҳосила ва ҳам дар зери аломати интеграл қарор дорад. Дар тадқиқ намудани муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ олимони зеиёде кор ва фаъолияти илми намудаанд (ниг $[44], [60], [61]$) аз ҷумла М.Гуртин, В.Пипкин ва ғайраҳо. Бори нахуст олимон М.Гуртин ва В.Пипкин масъалаи гармигузаронӣ бо ҳофизаи онро тадқиқ намуда дар натиҷа муодилаи интегро-дифференсиалӣ ро ҳосил карданд, ки ҳоло муодилаи мазкур ба номи ин ду олим машҳур аст.

Таъриф 3: Муодилаҳое, ки функсияи номаълумашон аз ду ва зиёда тағирёбанда иборат буда ва он функсияи номаълум дар як вақт ҳам дар зери аломати ҳосила ва ҳам дар зери аломати интеграл қарор дорад муодилаи интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ номида мешавад.

Ба мисли муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаи хусусӣ, муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ низ дорои навъи параболӣ, гиперболӣ ва элипсӣ мебошанд, ки намудҳои онҳо чунинанд:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + bu = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau + f(x,t) \qquad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + bu = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau + f(x,t) \qquad (3.1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}a\frac{\partial u}{\partial t}+bu=\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau+f(x,t) \qquad (3.1.5)$$

3.2. Муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф

3.2.1 Мафҳуми асосӣ

Сараввал ҳаминро қайд менамоем, ки то ҳол дар дунё ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф аз тарафи олимон дида баромада нашудааст. Барои ҳамин мо дар назди худ вазифа гузоштем, ки муодилаи интегро-дифференсиалии телеграфро бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда бо истифода аз усули ҳисоби оператсионӣ ҳал намоем. Намуди умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф чунин аст:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(2b+1)\frac{\partial u}{\partial t}+b^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}d\tau+f(t) \qquad (3.2.1)$$

Гузориши масъала: Шартҳои ибтидоӣ

$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x)\\ u_t'(x,0)=u_1(x)\end{cases} \qquad (3.2.2_1)$$

буда ва шартҳои канорӣ бошад

$$\begin{cases} u(0,t)=\varphi_1(t)\\ u_x'(0,t)=\varphi_2(t)\end{cases} \qquad (3.2.2_2)$$

мебошад.

Табдилоти Лаплас-Карсонро татбиқ намуда муодилаи (3. 2. 1)-ро бо шартҳои додашудаи (3. 2. 2) ҳал мекунем. Ҳаминро талаб кардан зарур аст, ки ҳар яке аз ин функсияҳо $u_0(x), u_1(x), \varphi_1(t), \varphi_2(t), f(t)$ бефосила ва дифференсиронидашаванда нисбат ба ҳарду тағирёбанда бошанд ва инчунин шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноат кунанд (ниг $[78], [93]$). Пеш аз ҳалли масъала тасвири ҳосила, интеграл ва функсияҳоро меорем (ниг [20], [108]) $u(x,0) = u_0(x) \to U_0(p), u(0,t) = \varphi_1(t) \to \Phi_1(q)$,

$u\,'_x(0,t) = \varphi_2(t) \to \Phi_2(q), u'_t(x,0) = u_1(x) \to U_1(p)$,
$u(x,t) \rightrightarrows U(p,q), f(t) \to F(q)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightrightarrows p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q);\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightrightarrows q^2[U(p,q) - U_0(p)] - qU_1(p);$$

$$u_t \rightrightarrows q[U(p,q) - U_0(p)]$$

$$\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)\{p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q)\}$$

ҳар яке аз ин тасвирҳоро ба муодилаи (3. 2. 1) гузошта баробарии зеринро ҳосил мекунем

$$q^2[U(p,q) - U_0(p)] - qU_1(p) + (2b+1)q[U(p,q) - U_0(p)] + b^2U(p,q) =$$

$$p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q) + \frac{1}{q}A(q)\{p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q)\} + F(q)$$

$$q^2U(p,q) - q^2U_0(p) - qU_1(p) + (2b+1)qU(p,q) - (2b+1)qU_0(p) + b^2U(p,q)$$

$$= p^2U(p,q) - p^2\Phi_1(q) - p\Phi_2(q) + \left[\frac{1}{q}A(q)p^2U(p,q) - \frac{1}{q}A(q)p^2\Phi_1(q)\right] - \frac{1}{q}A(q)p\Phi_2(q) + F(q);$$

$$\left(q^2 + (2b+1)q + b^2 - p^2 - \frac{1}{q}A(q)p^2\right)U(p,q)$$

$$= \big(q^2 + q(2b+1)\big)U_0(p) + qU_1(p) - \left(1 + \frac{1}{q}A(q)\right)p^2\Phi_1(q)$$

$$- \left(1 + \frac{1}{q}A(q)\right)p\Phi_2(q) + F(q)$$

Яъне

$$U(p,q) = \frac{-\left(1 + \frac{1}{q}A(q)\right)p^2\Phi_1(q) - \left(1 + \frac{1}{q}A(q)\right)p\Phi_2(q)}{q^2 + (2b+1)q + b^2 - p^2 - \frac{1}{q}A(q)p^2} +$$

$$+ \frac{(q^2 + (2b+1)q)U_0(p) + qU_1(p) + F(q)}{q^2 + (2b+1)q + b^2 - p^2 - \frac{1}{q}A(q)p^2} \qquad (3.2.3)$$

мешавад. Баробарии (3. 2. 3) ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ихтиёри ядро дар фазои зудӣ, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш комплексӣ амал мекунад номида мешавад.

3.2.2 Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ

Ҳалли умумии муодиларо барои ядрои $a(t) = b^2t + (2b+1)$ дида мебароем ва чи тавре мо медонем (ниг $[20] - [23]$) тасвири ядро

$$A(q) = (2b+1) + \frac{b^2}{q}$$

мебошад. Ҳамин тавр тасвири ядроро ба баробарии (3. 2. 3) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q) = \frac{q^2(q^2 + (2b+1)q)U_0(p) + q^3U_1(p)}{q^2(q^2 + (2b+1)q + b^2) - p^2(q^2 + (2b+1)q + b^2)} +$$

$$\frac{-\left(q^2+q\left((2b+1)+\frac{b^2}{q}\right)\right)p^2\Phi_1(q)-\left(q^2+q\left((2b+1)+\frac{b^2}{q}\right)\right)p\Phi_2(q)}{q^2(q^2+(2b+1)q+b^2)-p^2(q^2+(2b+1)q+b^2)}$$

$$+\frac{q^2F(q)}{q^2(q^2+(2b+1)q+b^2)-p^2(q^2+(2b+1)q+b^2)}$$

$$=\frac{q^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q^3U_1(p)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}+$$

$$\frac{-(q^2+(2b+1)q+b^2)p^2\Phi_1(q)-(q^2+(2b+1)q+b^2)p\Phi_2(q)}{(q^2+\alpha q+\beta)(q^2-p^2)}$$

$$+\frac{q^2F(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}$$

Яъне

$$U(p,q)=\ \frac{q^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q^3U_1(p)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}+$$

$$\frac{-(q^2+(2b+1)q+b^2)p^2\Phi_1(q)-(q^2+(2b+1)\alpha q+b^2)p\Phi_2(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}+$$

$$\frac{q^2F(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)} \qquad (3.2.4)$$

Маълум аст, ки дар ҳолати $p=\pm q$ будан махраҷ нол мешавад ва дар ҳолати $p=q$ будан сурат кай нол мешавад муайян мекунем

$$q^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q^3U_1(p)-(q^2+(2b+1)q+b^2)p^2\Phi_1(q) \\ -(q^2+(2b+1)q+b^2)p\Phi_2(q)+q^2F(q)=0$$

$$q^2(q^2+(2b+1)q)U_0(q)+q^3U_1(q)-(q^2+(2b+1)q+b^2)q^2\Phi_1(q)$$

$$-(q^2+(2b+1)q+b^2)q\Phi_2(q)+q^2F(q)=0$$

$$\frac{q^2(q^2+(2b+1)q)}{q(q^2+(2b+1)q+b^2)}U_0(q)+\frac{q^3}{q(q^2+(2b+1)q+b^2)}U_1(q)-q\Phi_1(q)$$

$$-\Phi_2(q)+\frac{q^2}{q(q^2+(2b+1)q+b^2)}F(q)=0$$

$$\Phi_2(q)=\frac{q(q^2+(2b+1)q)}{q^2+(2b+1)q+b^2}U_0(q)+\frac{q^2}{q^2+(2b+1)q+b^2}U_1(q)+$$

$$+\frac{q^2F(q)}{q^2+(2b+1)q+b^2}-q\Phi_1(q) \qquad (3.2.5)$$

Баробарии (3. 2. 5)-ро ба баробарии (3. 2. 4) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q)=\ \frac{q^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q^3U_1(p)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}+$$

$$+\frac{-(q^2+(2b+1)q+b^2)p^2\Phi_1(q)+q^2F(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}+$$

$$+\frac{-p\big(q(q^2+(2b+1)q)U_0(q)+q^2U_1(q)-q(q^2+(2b+1)q+b^2)\Phi_1(q)+qF(q)\big)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}$$

Яъне

$$U(p,q)=\left\{\frac{q^2+(2b+1)q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{q^2U_0(p)-pqU_0(q)}{q^2-p^2}\right\}+$$

$$\left\{\frac{q^2}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{qU_1(p)-pU_1(q)}{q^2-p^2}\right\}+$$

$$\left\{\frac{(pq-p^2)\Phi_1(q)}{q^2-p^2}\right\}+\left\{\frac{(q^2-pq)F(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}\right\} \qquad (3.2.6)$$

Бинобар сабаби он, ки табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияи ҳақиқии дар фазои вақт мавҷудбударо дар фазои зудӣ нишон медиҳад бинобар ин баробарии (3. 2. 6) ҳалли умумии муодилаи (3. 2. 1) дар фазои зудӣ буда, функсияи тағирёбандааш комплекси ба шумор меравад. (ниг

[19], [112], [114]) Чи тавре мебинем баробарии (3. 2. 6) аз чор ҷамъшавандаи қавсҳо иборат аст. Аз баски барои мо ҳалли умумии муодилаи (3. 2. 1) дар фазои вақт, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш ҳақиқи амал мекунад лозим аст бинобар ин бо истифода аз табдилоти баъакси Лаплас-Карсон барои ҳар як функсияи дар қавсҳо мавҷудбуда функсияи ҳақиқӣ ҷустуҷӯ мекунем:

$$1.\left\{\frac{q^2+(2b+1)q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{q^2U_0(p)-pqU_0(q)}{q^2-p^2}\right\}\leftleftarrows$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta'(t-s-\tau)\,u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$-M\cdot\left(\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau\right.$$

$$\left.-\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau\right)$$

дар ин ҷо

$$M=\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$$

мебошад.

саравval ифодаро содда мекунем

$$\frac{q^2+(2b+1)q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{q^2U_0(p)-pqU_0(q)}{q^2-p^2}=$$

$$\frac{q^2+(2b+1)q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{q^2U_0(p)-pqU_0(q)}{q^2-p^2}$$

$$=\frac{q^2+(2b+1)q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{q}{p+q}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}$$

<u>Тасвири интеграли зеринро меёбем, ки намуди умумии он чунин аст:</u>

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\frac{b^2}{2\sqrt{b+0,25}}\delta(t-s-\tau)u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$-$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}M\delta(t-s-\tau)u_0(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}M\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau=$$

бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем, ки дар ин ҷо $M=\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$ мебошад. (ниг [62], [63])

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty}e^{-px-qt}\left(\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1s}\,dsd\tau\right)dxdt=$$

Гузориши $x-s=u; t-s=v$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\right)dudv =$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\,ds =$$

бигзор $a_1 = 0$ бошад

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} \boldsymbol{\delta}'(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\tau})\,u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds +$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} \frac{b^2}{2\sqrt{b+0{,}25}}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\tau})u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds -$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} \frac{N_1 b^2}{2\sqrt{b+0{,}25}}e^{-N_1(v-\tau)}\,u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds -$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} \frac{0{,}5b^2}{\sqrt{b+0{,}25}}\delta(v-\tau)u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds +$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} \frac{0{,}5N_2 b^2}{\sqrt{b+0{,}25}}e^{-N_2(v-\tau)}u_0(u+\tau)\,d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds =$$

Дар ин ҷо $N_{1,2} = b+\frac{1}{2}\pm\sqrt{b+\frac{1}{4}}$ мебошад. Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 1 ва 2 нигаред)

$$\int_0^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)F(p,q)$$

мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем

$$\frac{1}{q}\cdot q^2\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}\cdot\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q)s}}{p+q}\right|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{q}\cdot\frac{b^2}{2\sqrt{b+0{,}25}}\cdot(q-\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)q}{q+b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}})\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}\cdot\frac{1}{p+q}-$$

$$-\frac{1}{q}\cdot\frac{b^2}{2\sqrt{b+0{,}25}}\cdot\left(q-\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)q}{q+b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}\cdot\frac{1}{p+q}=$$

$$=\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}\left(q-\frac{qb^2}{q^2+2bq+b^2+q}\right)$$

$$=\frac{q^3+(2b+1)q^2}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}$$

ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$-M\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$+M\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau$$

$$\rightrightarrows \frac{q^3+(2b+1)q^2}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}\ ;\left(M=\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)$$

$$2.\left\{\frac{q^2}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{qU_1(p)-pU_1(q)}{q^2-p^2}\right\}\leftleftarrows$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau$$

Сараввал ифодаи дар дохили қавс мавҷудбударо содда мекунем

$$\frac{q^2}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{qU_1(p)-pU_1(q)}{q^2-p^2}$$
$$=\frac{q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{q}{p+q}\cdot\frac{pU_1(q)-qU_1(p)}{p-q}$$

Тасвири интеграли зеринро меёбем, ки намуди умумии он чунин аст:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_0(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^{2}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_{0}^{\min(x,t)}\int_{0}^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^{2}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_{0}^{\min(x,t)}\int_{0}^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau$$

бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int_{0}^{\min(x,t)}\int_{0}^{t-s} a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\right)dxdt =$$

Гузориши $x-s=u; t-s=v$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)e^{-a_1 s}\,dsd\tau\right)dudv =$$

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_{0}^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)d\tau\right)dudv\int_{0}^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\,ds =$$

бигзор $a_1=0$ бошад

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_{0}^{v} \delta(v-\tau)\,u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_{0}^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds +$$

$$pq\int_{0}^{\propto}\int_{0}^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_{0}^{v} M_1\,e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)}u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_{0}^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds -$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} M_2\, e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)} u_0(u+\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\, ds =$$

Дар ин ҷо $M_{1,2}=\frac{\left(b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$ мебошад. Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{v} a(v-\tau)\, f(u;\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)F(p,q)$$

мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем

$$\frac{1}{q}\cdot q\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}\cdot\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-(p+q)s}}{p+q}\bigg|\begin{matrix}R\\0\end{matrix}\right)+$$

$$+\frac{1}{q}\cdot\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{q}{q+b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}\cdot\frac{1}{p+q}-$$

$$-\frac{1}{q}\cdot\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{q}{q+b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p-q}\cdot\frac{1}{p+q}=$$

$$\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\left(\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{q+b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}-\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{q+b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)+$$

$$+\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}=\frac{q^2}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_0(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau$$

$$\rightrightarrows\frac{q^2}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q)-qU_0(p)}{p^2-q^2}$$

$$3.\left\{\frac{(pq-p^2)\Phi_1(q)}{q^2-p^2}\right\}=\left\{\frac{p\Phi_1(q)}{p+q}\right\}\leftleftarrows\varphi_1(t-x)$$

Сараввал ифодаи дар дохили қавс мавҷудбударо содда мекунем

$$\frac{(pq-p^2)\Phi_1(q)}{q^2-p^2}=\frac{p(p-q)\Phi_1(q)}{(p-q)(p+q)}=\frac{p\Phi_1(q)}{p+q}$$

Чи тавре бар мо маълум аст (ниг [20], [38])

$$\frac{p\Phi_1(q)}{p+q}\leftleftarrows\varphi_1(t-x)$$

мебошад.

$$4.\left\{\frac{(q^2-pq)F(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}\right\}\leftleftarrows$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau$$

$$\frac{-1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int\limits_{0}^{\min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau$$

Барои тасвири функсияи дар қавси (4) мавҷудбуда функсияи ҳақиқи ҷустуҷӯ мекунем

$$\frac{(q^2-pq)F(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(q^2-p^2)}=\frac{qF(q)}{(q^2+(2b+1)q+b^2)(p+q)}$$
$$=\frac{q}{q^2+(2b+1)q+b^2}\cdot\frac{H(p)F(q)}{p+q}$$

<u>Тасвири интегралҳои зеринро меёбем, ки намуди умумии онҳо чунин аст:</u>

$$\int\limits_{0}^{\min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s}\left(\frac{\frac{1}{2}b^2\left(b+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}}{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}-\frac{b+\frac{1}{2}}{\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau$$

$$+\int\limits_{0}^{\min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau$$

Чи тавре мебинем барои ёфтани тасвири интегралҳо ва функсияҳо табдилотҳои интегрони истифодашаванда мебошанд. (ниг [1], [21], [22]) Бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int\limits_{0}^{\propto}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-px-qt}\left(\int\limits_{0}^{\min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s}K_1\,e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau\right)dxdt+$$

$$pq\int\limits_{0}^{\propto}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-px-qt}\left(\int\limits_{0}^{\min(x,t)}\int\limits_{0}^{t-s}K_2\,e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau\right)dxdt=$$

Дар ин ҷо $K_{1,2} = \frac{\pm b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)} \mp \frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$ мебошад.

Гузориши $x-s=u; t-s=v$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} K_1\, e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)} h(u)f(\tau)\,dsd\tau\right)dudv+$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} K_2\, e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)} h(u)f(\tau)\,dsd\tau\right)dudv=$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} K_1 e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)}\, h(u)f(\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds+$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} K_2 e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)}\, h(u)f(\tau)d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q)s}\,ds=$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{v} a(v-\tau)\,f(u;\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)F(p,q)$$

мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем

$$\left(\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)}-\frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{\frac{1}{q}\cdot q\cdot H(p)F(q)}{q+b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{p+q}+$$

$$\left(\frac{-b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)}+\frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{q+b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{H(p)F(q)}{p+q}$$

$$= \left(\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)} - \frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{H(p)F(q)}{q+b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{p+q}+$$

$$+\left(\frac{-b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)} + \frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)\cdot\frac{H(p)F(q)}{q+b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{p+q}=$$

$$=\frac{q}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{H(p)F(q)}{p+q}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} K_1\, e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\, f(\tau)dsd\tau +$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s} K_2\, e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\, dsd\tau \rightrightarrows$$

$$\frac{q}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{H(p)F(q)}{p+q}\ ;\ \left(K_{1,2}=\frac{\pm b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)}\mp\frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)$$

дар ин ҷо

$$K_1=\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)}-\frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$$

ва

$$K_2=\frac{-b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}\left(b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)}+\frac{2b+1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$$

мебошад.

Ҳамин тавр барои ҳамаи қавсҳои дар баробарии (3. 2. 6) мавҷудбуда функсияи ҳақиқи муайян кардем, акнун ҳалли умумии муодилаи (3. 2. 1)-ро барои ядрои $a(t) = b^2t + 2b + 1$ менависем

$$u(x;t) = \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} (\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau -$$

$$b^2 \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0,25}}\right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau +$$

$$b^2 \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau +$$

$$\int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)dsd\tau + \varphi_1(t-x) +$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\int_0^{\min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau +$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau \quad (3.2.7)$$

Ҳамин тавр ҳалли умумии муодилаи (3. 2. 1)-ро ҳангоми ядро функсияи хаттӣ будан муайян намудем ва ҳоло баробарии (3. 2. 7)-ро шарҳ медиҳем

Ҳалли муодиларо ҳангоми $x > \mathrm{t}$ будан менависем

$$u(x;t)=\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)dsd\tau-$$

$$b^2\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$b^2\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)dsd\tau+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\mathrm{t}}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{t}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)ds d\tau+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{t}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,ds d\tau$$

Ҳалли муодиларо ҳангоми $x < t$ будан менависем

$$u(x;t)=\int_0^{x}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau))u_0(x+\tau-s)ds d\tau-$$

$$b^2\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+0{,}25}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,ds d\tau+$$

$$b^2\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(\frac{b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_0(x+\tau-s)\,ds d\tau+$$

$$\int_0^{x}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x+\tau-s)ds d\tau+\varphi_1(t-x)+$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,ds d\tau-$$

$$\frac{\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{x}\int_0^{t-s}e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,ds d\tau-$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)ds d\tau+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{x}\int_0^{t-s}\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,ds d\tau$$

3.2.3 Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои $\boldsymbol{a(t)=(1-bt)e^{-bt}}$

Ҳамин тавр ҳалли умумии муодилаи (3. 2. 1)-ро бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда барои ядрои $a(t)=(1-bt)e^{-bt}$ дида мебароем ва чи тавре аён аст ядро функсияи якта\u0493ирёбанда мебошад. (ниг $[65],[103]$) Чи гунае, ки мо медонем (ниг $[20],[21]$) тасвири ядро $A(q)=\left(\frac{q}{q+b}\right)^2$ мебошад. Ҳамин тавр тасвири ядроро ба баробарии (3. 2. 3) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q)=\frac{(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+qU_1(p)}{q^2+(2b+1)q+b^2-p^2-\frac{q}{(q+b)^2}p^2}$$

$$\frac{-\left(1+\frac{q}{(q+b)^2}\right)p^2\Phi_1(q)-\left(1+\frac{q}{(q+b)^2}\right)p\Phi_2(q)+F(q)}{q^2+(2b+1)q+b^2-p^2-\frac{q}{(q+b)^2}p^2}$$

$$=\frac{(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q(q+b)^2U_1(p)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

$$\frac{-((q+b)^2+q)p^2\Phi_1(q)-((q+b)^2+q)p\Phi_2(q)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

$$\frac{(q+b)^2F(q)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

Яъне

$$U(p,q)=\frac{(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q(q+b)^2U_1(p)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}+$$

$$\frac{-((q+b)^2+q)p^2\Phi_1(q)-((q+b)^2+q)p\Phi_2(q)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}+$$

$$\frac{(q+b)^2F(q)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)} \qquad (3.2.8)$$

мешавад.

Маълум аст, ки дар ҳолати $p=\pm(q+b)$ будан махраҷ нол мешавад ва аз баски $p=-(q+b)$ ба соҳаи наздикшавии интеграли Лаплас тааллуқ надорад (ниг [63]) бинобар ин онро решаи бегона мешуморем ва дар ҳолати $p=q+b$ будан сурат кай нол мешавад муайян мекунем

$$(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)U_0(q+b)+q(q+b)^2U_1(q+b)$$
$$-((q+b)^2+q)(q+b)^2\Phi_1(q)-((q+b)^2+q)(q+b)\Phi_2(q)+$$
$$(q+b)^2F(q)=0$$

$$(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)U_0(q+b)+q(q+b)^2U_1(q+b)$$
$$-((q+b)^2+q)(q+b)^2\Phi_1(q)-((q+b)^2+q)(q+b)\Phi_2(q)$$
$$+(q+b)^2F(q)=0$$

$$\frac{(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)}{((q+b)^2+q)(q+b)}U_0(q+b)+\frac{q(q+b)^2}{((q+b)^2+q)(q+b)}U_1(q+b)$$
$$-\frac{((q+b)^2+q)}{((q+b)^2+q)(q+b)}(q+b)^2\Phi_1(q)-\Phi_2(q)$$
$$+\frac{(q+b)^2}{((q+b)^2+q)(q+b)}F(q)=0$$

$$\Phi_2(q)=\frac{(q+b)(q^2+(2b+1)q)}{((q+b)^2+q)}U_0(q+b)+\frac{q(q+b)}{((q+b)^2+q)}U_1(q+b)$$
$$-(q+b)\Phi_1(q)+\frac{(q+b)}{((q+b)^2+q)}F(q) \qquad (3.2.9)$$

Баробарии (3. 2. 9)-ро ба (3. 2. 8) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q)=\frac{(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q(q+b)^2U_1(p)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}+$$

$$\frac{-((q+b)^2+q)p^2\Phi_1(q)+(q+b)^2F(q)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}-$$

$$-\frac{((q+b)^2+q)p\left(\frac{(q+b)(q^2+(2b+1)q)U_0(q+b)}{((q+b)^2+q)}+\frac{(q+b)F(q)}{((q+b)^2+q)}\right)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}+$$

$$\frac{((q+b)^2+q)p\left(\frac{q(q+b)U_1(q+b)}{((q+b)^2+q)}-(q+b)\Phi_1(q)\right)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

Яъне

$$U(p,q)=\frac{(q+b)^2(q^2+(2b+1)q)U_0(p)+q(q+b)^2U_1(p)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

$$\frac{-((q+b)^2+q)p^2\Phi_1(q)+(q+b)^2F(q)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}-$$

$$-\frac{p\big((q+b)(q^2+(2b+1)q)U_0(q+b)+(q+b)F(q)\big)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

$$+\frac{p\big(q(q+b)U_1(q+b)-(q+b)((q+b)^2+q)\Phi_1(q)\big)}{((q+b)^2+q)((q+b)^2-p^2)}$$

мешавад. Ҳамин тавр ҳалро бо тартиби муайян менависем

$$U(p,q)=\left\{\frac{(q+b)(q^2+(2b+1)q)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{(q+b)U_0(p)-pU_0(q+b)}{(q+b)^2-p^2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{q(q+b)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{(q+b)U_1(p)-pU_1(q+b)}{(q+b)^2-p^2}\right\}+\left\{\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+b}\right\}$$

$$+\left\{\frac{q+b}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{F(q)}{p+q+b}\right\} \qquad (3.2.10)$$

Барои ҳар яке аз қафсҳои дар баробарии (3. 2. 10) мавҷудбуда дар алоҳиддаги функсияи ҳақиқи ҷустуҷу мекунем

$$1.\ \left\{\frac{(q+b)(q^2+(2b+1)q)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{(q+b)U_0(p)-pU_0(q+b)}{(q+b)^2-p^2}\right\}\leftrightarrows$$

$$\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau)+2b\delta(t-s-\tau))\,u_0(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\left(e^{-l_1(t-s-\tau)}-e^{-l_2(t-s-\tau)}\right)u_0(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau$$

Дар ин ҷо $l_{1,2}=b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}$ мебошад.

Барои ёфтани функсияи ҳақии ба тасвир қавси якум мувофиқбуда тасвири интеграли зеринро меёбем, ки намуди умумии он чунин аст:

$$\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1s}\,dsd\tau$$

бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int\limits_0^{\propto}\int\limits_0^{\infty}e^{-px-qt}\left(\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}a(t-s-\tau)\,f(x-s;\tau)e^{-a_1s}\,dsd\tau\right)dxdt=$$

Гузориши $x-s=u;t-s=v$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} a(v-\tau)\, f(u;\tau)e^{-a_1 s}\, ds d\tau\right)dudv =$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} a(v-\tau)\, u_0(u+\tau)e^{-b\tau}d\tau\right)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\, ds =$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{v} a(v-\tau)\, u_0(u+\tau)e^{-b\tau}d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)\cdot\frac{q}{q+b}\cdot\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p-(q+b)}$$

мебошад, бинобар ин ҳангоми $a_1 = b$ будан ҳосил мекунем

$$\frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot\left(-\frac{e^{-(p+q+b)s}}{p+q+a_1}\Bigg|\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right) = \frac{1}{q}A(q)F(p,q)\cdot\frac{1}{p+q+b}$$

Дар ҳолати

$$a(t) = \delta'(t) + 2b\delta(t) + \frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\left(e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)t} - e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)t}\right)$$

будан баробарии мазкур намуди зеринро мегирад

$$\frac{A(q)}{q+b}\cdot\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p^2-(q+b)^2} =$$

$$\frac{1}{q+b}\left(q^2+2bq+\frac{qb^2}{\left(q+b+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}\right)\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p^2-(q+b)^2} =$$

$$\frac{q}{q+b}\cdot\left(q+2b+\frac{b^2}{(q+b)^2+q}\right)\cdot\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p^2-(q+b)^2}=$$

$$\frac{q}{q+b}\cdot\frac{(q+b)^2(q+2b+1)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p^2-(q+b)^2}=$$

$$\frac{(q+b)(q^2+(2b+1)q)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p^2-(q+b)^2}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд, ки он чунин аст:

$$\frac{(q+b)(q^2+(2b+1)q)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{pU_0(q+b)-(q+b)U_0(p)}{p^2-(q+b)^2}\leftleftarrows$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\delta'(t-s-\tau)+2b\delta(t-s-\tau)\right)u_0(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(e^{-l_1(t-s-\tau)}-e^{-l_2(t-s-\tau)}\right)u_0(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau$$

дар ин ҷо $l_{1,2}=b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}$ мебошад.

Ҳамин тавр ба монанди қавси якум барои қавси дуюм низ функсияи ҳақиқи ҷустуҷӯ мекунем.

$$2.\left\{\frac{q(q+b)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{(q+b)U_1(p)-pU_1(q+b)}{(q+b)^2-p^2}\right\}\leftleftarrows$$

$$\leftleftarrows\left(\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau-\right.$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\left.\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau\right)$$

$$3.\left\{\frac{p\Phi_1(q)}{p+q+b}\right\}\leftleftarrows e^{-bx}\varphi_1(t-x)$$

Функсияи ҳақиқии дар қавси мазкур мавҷудбуда алакай бар мо маълум мебошад. (ниг [37], [38])

$$4.\left\{\frac{q+b}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{F(q)}{p+q+b}\right\}\leftleftarrows$$

$$\left(\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+\right.$$

$$\left.\int_0^{\min(x,t)}\left(\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\right)e^{-bs}\,h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau\right)$$

Барои ёфтани функсияи ҳақии ба тасвир қавси чорум мувофиқбуда тасвири интеграли зеринро меёбем, ки намуди умумии он чунин аст:

$$\int_0^{\min(x,t)}\left(\int_0^{t-s}l_1'e^{-l_1(t-s-\tau)}+l_2'e^{-l_2(t-s-\tau)}\right)e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau$$

дар ин ҷо $l_{1,2}=b+\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}$ ва $l_{1,2}'=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$ мебошад.

Бо истифода аз табдилоти Лаплас –Карсон тасвири интеграли мазкурро меёбем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} l_1' e^{-l_1(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau\right)dxdt+$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-px-qt}\left(\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} l_2' e^{-l_2(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau\right)dxdt=$$

гузориши $\mathrm{x}-\mathrm{s}=\mathrm{u};\mathrm{t}-\mathrm{s}=\mathrm{v}$ –ро истифода карда ҳосил мекунем

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} l_1' e^{-l_1(v-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(u)\,f(\tau)dsd\tau\right)dudv+$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-p(u+s)-q(v+s)}\left(\int_0^{\infty}\int_0^{v} l_2' e^{-l_2(v-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(u)\,f(\tau)dsd\tau\right)dudv=$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} l_1' e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(v-\tau)}f(\tau)d\tau\right)h(u)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q+b)s}\,ds+$$

$$pq\int_0^{\propto}\int_0^{\infty} e^{-pu-qv}\left(\int_0^{v} l_2' e^{-l_2(v-\tau)}f(\tau)d\tau\right)h(u)dudv\int_0^{\infty} e^{-(p+q+a_1)s}\,ds=$$

$$\left(p\int_0^{\infty} e^{-pu}\,h(u)du\right)\left(q\int_0^{\infty} e^{-qv}\left(\int_0^{v} l_1' e^{-l_1(v-\tau)}f(\tau)d\tau\right)dv\right)\int_0^{\infty} e^{-(p+q+b)s}\,ds+$$

$$\left(p\int_0^{\infty} e^{-pu}\,h(u)du\right)\left(q\int_0^{\infty} e^{-qv}\left(\int_0^{v} l_2' e^{-l_2(v-\tau)}f(\tau)d\tau\right)dv\right)\int_0^{\infty} e^{-(p+q+b)s}\,ds=$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^v a(v-\tau)f_2(x,\tau)d\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)\cdot F_2(p,q)$$

мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем

$$=\frac{H(p)}{q}\left(\frac{l_1'q}{q+b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}}+\frac{l_2'q}{q+b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)\frac{F(q)}{p+q+b}=$$

$$\left(\frac{0{,}5q}{q+l_1}-\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{q}{q+l_1}+\frac{0{,}5q}{q+l_2}+\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\cdot\frac{q}{q+l_2}\right)\frac{H(p)F(q)}{q(p+q+b)}=$$

$$\frac{q\left(q+b+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}q}{\left(q+b+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)^2}\cdot\frac{H(p)F(q)}{q(p+q+b)}=\frac{q(q+b)}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{H(p)F(q)}{q(p+q+b)}=$$

$$\frac{q+b}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{H(p)F(q)}{q(p+q+b)}=\frac{q+b}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{F(q)}{q(p+q+b)}$$

Ҳамин тавр тасвири интеграли мазкур маълум шуд.

$$\left(\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-bs}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+\right.$$

$$\left.\int_0^{\min(x,t)}\left(\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\right)e^{-bs}\,h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau\right)$$

$$\rightrightarrows\frac{q+b}{(q+b)^2+q}\cdot\frac{H(p)F(q)}{q(p+q+b)}\qquad(3.2.11)$$

дар ин ҷо $l_{1,2} = b + \frac{1}{2} \mp \sqrt{b + \frac{1}{4}}$ ва $l'_{1,2} = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}}$ мебошад.

Дар баробарии (3. 2. 11) $H(p)$ тасвири функсияи Хевисайд мебошад, ки он чунин маъно дорад: (ниг $[16], [63]$)

$$H(p) \to h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{ё} \quad h(t) = 1 \to H(p); \;\; t > 0$$

Ҳамин тавр барои ҳамаи қавсҳои дар баробарии (3. 2. 10) мавҷудбуда функсияи ҳақиқи ёфтем акнун ҳалли умумии муодилаи (3. 2. 1)-ро барои ядрои $a(t) = (1 - bt)e^{-bt}$ бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда менависем

$$u(x,t) = e^{-bx}\varphi_1(t - x) +$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \delta(t - s - \tau)\, u_1(x - s + \tau)e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} (\delta'(t - s - \tau) + 2b\delta(t - s - \tau))\, u_0(x - s + \tau)\, e^{-b(s+\tau)} ds d\tau +$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b + \frac{1}{4}}} \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2} - \sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bt} \cdot u_0(x - s + \tau)\, ds d\tau -$$

$$\frac{b^2}{2\sqrt{b + \frac{1}{4}}} \int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} e^{-\left(\frac{1}{2} + \sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bt}\, u_0(x - s + \tau)\, ds d\tau -$$

$$\int_0^{min(x,t)} \int_0^{t-s} \left(\frac{2b + 1}{4\sqrt{b + \frac{1}{4}}} + \frac{1}{2} \right) e^{-\left(b + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b}\right)(t-s-\tau)}\, u_1(x - s + \tau)e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$\int\limits_0^{min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} \left(\frac{2b+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{2} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+b}\right)(t-s-\tau)} u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$\int\limits_0^{min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \right) e^{-\left(b+\frac{1}{2}-\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bs} \cdot h(x-s)\, f(\tau) ds d\tau +$$

$$\frac{2\sqrt{b+\frac{1}{4}}+1}{4\sqrt{b+\frac{1}{4}}} \int\limits_0^{min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} e^{-\left(b+\frac{1}{2}+\sqrt{b+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} \cdot e^{-bs}\, h(x-s) f(\tau) ds d\tau \quad (3.2.12)$$

Зикр кардан бо маврид аст, ки дар ҳолати $b = 0$ будан ядроҳои муодила бо ҳам баробар мешаванд. Яъне $a(t) = 1$ мешавад. Модоме, ки ядроҳо бо ҳам баробар шуданд пас ҳалҳо низ бояд бо ҳам баробар бошанд ва инро нишон медиҳем.

Дар ҳолати $b = 0$ будан баробарии (3. 2. 7) чунин намуд мегирад

$$u(x;t) = \int\limits_0^{\min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} (\delta'(t-s-\tau)) u_0(x+\tau-s) ds d\tau -$$

$$0^2 \cdot \int\limits_0^{\min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} \left(\frac{0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{0+0{,}25}} \right) e^{-\left(0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\, ds d\tau +$$

$$0^2 \cdot \int\limits_0^{\min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} \left(\frac{0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}} \right) e^{-\left(0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)} u_0(x+\tau-s)\, ds d\tau +$$

$$\int\limits_0^{\min(x,t)} \int\limits_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, u_1(x+\tau-s) ds d\tau + \varphi_1(t-x) +$$

$$\frac{\left(0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s} e^{-\left(0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\frac{\left(0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)^2}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s} e^{-\left(0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}u_1(x+\tau-s)\,dsd\tau -$$

$$\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\left(\frac{0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau +$$

$$\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\left(\frac{0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}h(x-s)f(\tau)\,dsd\tau\ =$$

$$\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\big(\delta'(t-s-\tau)\big)\,u_0(x-s+\tau)\cdot dsd\tau +$$

$$\varphi_1(t-x)+\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)\cdot dsd\tau +$$

$$+\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s} e^{-(t-s-\tau)}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau -$$

$$\int\limits_0^{\min(x,t)}\int\limits_0^{t-s} e^{-(t-s-\tau)}\cdot u_1(x-s+\tau)dsd\tau \qquad (3.2.13)$$

Дар ҳолати $b=0$ будан баробарии (3. 2. 12) чунин намуд мегирад

$$u(x,t)=e^{-0\cdot x}\varphi_1(t-x)+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)e^{-0\cdot(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}(\delta'(t-s-\tau)+2b\delta(t-s-\tau))\,u_0(x-s+\tau)\,e^{-0\cdot(s+\tau)}dsd\tau+$$

$$\frac{0^2}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-0\cdot t}\cdot u_0(x-s+\tau)\,dsd\tau-$$

$$\frac{0^2}{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-0\cdot t}\,u_0(x-s+\tau)\,dsd\tau-$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{2\cdot 0+1}{4\sqrt{0+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(0+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+0}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-0\cdot(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{2\cdot 0+1}{4\sqrt{0+\frac{1}{4}}}-\frac{1}{2}\right)e^{-\left(0+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+0}\right)(t-s-\tau)}\,u_1(x-s+\tau)e^{-0\cdot(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\right)e^{-\left(0+\frac{1}{2}-\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-0\cdot s}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau+$$

$$\frac{2\sqrt{0+\frac{1}{4}}+1}{4\sqrt{0+\frac{1}{4}}}\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-\left(0+\frac{1}{2}+\sqrt{0+\frac{1}{4}}\right)(t-s-\tau)}\cdot e^{-0\cdot s}\,h(x-s)f(\tau)dsd\tau\ =$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\big(\delta'(t-s-\tau)\big)\,u_0(x-s+\tau)\cdot dsd\tau+$$

$$\varphi_1(t-x)+\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)\cdot dsd\tau+$$

$$+\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-(t-s-\tau)}\cdot h(x-s)\,f(\tau)dsd\tau-$$

$$\int_0^{\min(x,t)}\int_0^{t-s}e^{-(t-s-\tau)}\cdot u_1(x-s+\tau)dsd\tau \qquad (3.2.14)$$

Ҳамин тавр дар ҳолати баробар будани ядро ҳалҳои баробарро низ пайдо намудем.

3.3. Муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда

Бори нахуст олими Япония Й. Фучита муодилаи интегро-дифференсиалии зеринро

$$u(x,t)=f(x)+\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\partial\tau \qquad (3.3.1)$$

барои ядрои $a(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ таҳқиқ намудааст, ки барои ин ядро муодилаи мазкур муодилаҳои гармигузаронӣ ва мавҷро интерполятсия менамояд. (ниг $[70],[71],[117],[118]$)

Гузориши масъала: Шарти ибтидоӣ

$$u(x,0)=f(x) \qquad (3.3.2)$$

буда ва шатҳои канорӣ бошанд чунинанд:

$$\begin{cases} u(0,t)=\varphi(t) \\ u'_x(0,t)=c(t) \end{cases} \qquad (3.3.3)$$

Чи гунае, ки дар боло зикр намудем ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1) барои ядрои

$$a(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)};\ (1 \leq \alpha \leq 2)$$

аз тарафи олимон муайян карда шудааст. (ниг $[117]$)

Ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1)-ро мо барои ядрои

$$a(t) = te^{-bt}$$

бо истифода аз тадбиқи ҳисоби оператсионӣ (табдилоти Лаплас-Карсон) дида

мебароем. Усули ҳисоби оператсионӣ барои ҳалли масъалаи мазкур қулай мебошад. (ниг $[21], [68]$) Чи гунае, ки мебинем дар ҳолати $b = 0$ будан ядро ба

$$a(t) = t$$

баробар мешавад, ки дар ин ҳолат муодилаи (3. 3. 1) ба муодилаи мавҷ табдил меёбад ва инчунин дар ҳолати $a(t) = 1$ будан мо функсияи Ламберт-ро ҳосил мекунем, (ниг $[80], [95], [104]$) ки дар ин ҳангом

$$te^{-bt} = 1$$

буда, муодилаи (3. 3. 1) ба муодилаи гармигузаронӣ табдил мебад (ниг $[11], [83], [85]$). Яъне ядрои мазкур муодиларо ҳам ба муодилаи гармигузаронӣ ва ҳам ба муодилаи мавҷ интерполятсия мекунад. Ҳоло мо ҳалли умумии муодилаи (3.3.1) –ро барои ядрои $a(t) = te^{-bt}$ дар ҳолати b – дилхоҳ адади ҳақиқӣ ва $a(t) = te^{-bt} \neq 1$ будан бо истифода аз татбиқи ҳисоби оператсионӣ дида мебароем. Пеш аз ҳалли масъала тасвири ҳосила, интеграл ва функсияҳоро меорем (ниг $[20], [3-\text{M}], [4-\text{M}]$)

$$u(x,t) \rightrightarrows U(p,q), u(x,0) = f(x) \to F(p), u(0,t) = \varphi(t) \to \phi(q),$$

$$u'_x(0,t) = c(t) \to C(q);$$

$$\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)\{p^2[U(p,q)-\Phi_1(q)]-p\Phi_2(q)\};$$

Акнун ҳар яке аз ин тасвирҳоро ба муодилаи (3. 3. 1) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q)=F(p)+\frac{1}{q}A(q)\{p^2[U(p,q)-\Phi(q)]-pC(q)\}$$

$$U(p,q)=F(p)+\frac{1}{q}A(q)p^2[U(p,q)-\Phi(q)]-\frac{1}{q}A(q)pC(q)$$

$$U(p,q)=F(p)+\frac{1}{q}A(q)p^2U(p,q)-\frac{1}{q}A(q)p^2\Phi(q)-\frac{1}{q}A(q)pC(q)$$

$$\left(1-\frac{1}{q}A(q)p^2\right)U(p,q)=F(p)-\frac{1}{q}A(q)p^2\Phi(q)-\frac{1}{q}A(q)pC(q)$$

Яъне

$$U(p,q)=\frac{F(p)-\frac{1}{q}A(q)p^2\Phi(q)-\frac{1}{q}A(q)pC(q)}{1-\frac{1}{q}A(q)p^2} \qquad (3.3.4)$$

мешавад.

Баробарии (3. 3. 4) ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1) дар фазои зудӣ мебошад, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш комплекси амал мекунад. Ҳалли умумии муодиларо дар фазои вақт барои ядрои $a(t)=te^{-bt}$ дида мебароем. Чи тавре мо медонем тасвири ядро чунин аст: $a(t)\to A(q)=\frac{q}{(q+b)^2}$ (ниг [20], [21]). Тасвири ядроро ба баробарии (3. 3. 4) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q)=\frac{F(p)-\frac{1}{q}\frac{q}{(q+b)^2}p^2\Phi(q)-\frac{1}{q}\frac{q}{(q+b)^2}pC(q)}{1-\frac{1}{q}\frac{q}{(q+b)^2}p^2}=$$

$$\frac{(q+b)^2F(p)-p^2\Phi(q)-pC(q)}{(q+b)^2-p^2}$$

Яъне

$$U(p,q)=\frac{(q+b)^2F(p)-p^2\Phi(q)-pC(q)}{(q+b)^2-p^2} \qquad (3.3.5)$$

мебошад. Чи тавре аён аст дар ҳолати $p=\pm(q+b)$ будан махраҷ ба нол баробар мешавад ва аз баски $p=-(q+b)$ ба соҳаи наздикшавии интеграли Лаплас тааллуқ надорад (ниг $[63],[6-\mathrm{M}],\ [106]$) бинобар ин мо онро решаи бегона мешуморем ва ҳангоми $p=q+b$ будан сурат кай ба нол баробар мешавад муайян хоҳем кард

$$(q+b)^2F(q+b\,)-(q+b\,)^2\Phi(q)-(q+b\,)C(q)=0$$

$$(q+b)^2F(q+b\,)-(q+b\,)^2\Phi(q)=(q+b\,)C(q)$$

$$(q+b)F(q+b\,)-(q+b)\Phi(q)=C(q)$$

$$C(q)=(q+b)F(q+b\,)-(q+b)\Phi(q) \qquad (3.3.6)$$

дар ин ҷо

$$\Phi(q)=F(q+b\,)\ -\frac{C(q)}{q+b}$$

мебошад. Бо истифода аз татбиқи **Ҷадвали 2** функсияи $u(0;t)=\varphi(t)$ –ро муайян мекунем

$$u(0;t)=\varphi(t)=\int_0^t\big(\delta(t-s)+bh(t-s)\big)e^{-bs}f(s)ds-\int_0^t e^{-b(t-s)}c(s)ds$$

Барои идомаи ҳал баробарии (3. 3. 6)-ро ба баробарии (3. 3. 5) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q)=\frac{(q+b)^2F(p)-p^2\Phi(q)-p\big((q+b)F(q+b\,)\text{-}\,(q+b)\Phi(q)\,\big)}{(q+b)^2-p^2}=$$

$$\frac{(q+b)\big((q+b)F(p)-pF(q+b\,)\big)+p\Phi(q)(q+b-p)}{(q+b)^2-p^2}=$$

$$\left\{(q+b)\frac{(q+b)F(p)-pF(q+b\,)}{(q+b)^2-p^2}\right\}+\left\{\frac{p\Phi(q)}{p+q+b}\right\}$$

Яъне

$$U(p,q)=\left\{(q+b)\frac{(q+b)F(p)-pF(q+b\,)}{(q+b)^2-p^2}\right\}+\left\{\frac{p\Phi(q)}{p+q+b}\right\} \qquad (3.3.7)$$

мебошад. Баробарии (3. 3. 7) низ ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1) дар фазои зудӣ мебошад. Аз баски баробарии (3. 3. 7) аз ду ҷамъшавандаи қавсҳо иборат аст бинобар ин ҳар яке аз ин қавсҳоро дар алоҳиддаги таҳқиқ намуда барояшон функсияи ҳақиқи ҷустуҷӯ мекунем:

$$1)\ \left\{(q+b)\frac{(q+b)F(p)-pF(q+b\,)}{(q+b)^2-p^2}\right\}\leftleftarrows$$

$$\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\delta'(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$+2b\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}\delta(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$+b^2\int\limits_0^{min(x,t)}\int\limits_0^{t-s}h(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau;$$

Сараввал ифодаи дар дохили қавс мавҷудбударо табдил медиҳем

$$(q+b)\frac{(q+b)F(p)-pF(q+b\,)}{(q+b)^2-p^2}=\frac{q^2+2bq+b^2}{q+b}\cdot\frac{(q+b)F(p)-pF(q+b\,)}{(q+b)^2-p^2}$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} a(t-s-\tau)\,u_1(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau \rightrightarrows$$

$$\frac{A(q)}{q+b}\cdot\frac{pU_1(q+b)-(q+b)U_1(p)}{p^2-(q+b)^2}; \qquad (3.3.8)$$

мебошад, бинобар ин ҳосил мекунем

$$\frac{q^2+2bq+b^2}{q+b}\cdot\frac{(q+b)F(p)-pF(q+b\,)}{(q+b)^2-p^2}\leftleftarrows$$

$$\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$+2b\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} \delta(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau+$$

$$+b^2\int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} h(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau; \qquad (3.3.9)$$

Дар ин ҷо $\delta(t)$ –функсияи Дирак буда ва $h(t)-$ функсияи Хевисайд мебошад. (ниг [16], [63])

Функсияи ҳақиқии ба тасвири дар қавси дуюм мувофиқбуда низ барои мо маълум аст. (ниг [38])

$$2)\ \left\{\frac{p\Phi(q)}{p+q+b}\right\}\leftleftarrows e^{-bx}\varphi(t-x); \qquad (3.3.10)$$

Функсияи ҳақиқии ҳар ду қавси дар баробарии (3. 3. 7) мавҷудбуда муайян карда шуд. Акнун ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1)-ро менависем

$$u(x,t) = \int_{0}^{min(x,t)} \int_{0}^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+2b \int_{0}^{min(x,t)} \int_{0}^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+b^2 \int_{0}^{min(x,t)} \int_{0}^{t-s} h(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau$$

$$+e^{-bx}\varphi(t-x); \qquad (3.3.11)$$

Қадами 1: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x > t$ *будан менависем*

$$u(x,t) = \int_{0}^{t} \int_{0}^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+2b \int_{0}^{t} \int_{0}^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+b^2 \int_{0}^{t} \int_{0}^{t-s} h(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds \qquad (3.3.12)$$

Қадами 2: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x < t$ *будан менависем*

$$u(x,t) = \int_{0}^{x} \int_{0}^{t-s} \delta'(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+2b \int_{0}^{x} \int_{0}^{t-s} \delta(t-s-\tau)\, f(x-s+\tau) e^{-b(s+\tau)}\, ds d\tau +$$

$$+b^2\int_0^x\int_0^{t-s} h(t-s-\tau)\,f(x-s+\tau)e^{-b(s+\tau)}\,dsd\tau$$

$$+e^{-bx}\varphi(t-x); \qquad (3.\ 3.13)$$

Ҳамин тавр ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1) барои ядрои $a(t) = te^{-bt}$ маълум гардид.

Бояд қайд намуд, ки дар ҳолати $b = 0$ будан аз баробарии (3.3.11) ҳалли умумии муодилаи (3. 3. 1) –ро барои ядрои $a(t) = t$ ҳосил хоҳем кард, ки он чунин аст:

$$u(x,t) = \int_0^{min(x,t)}\int_0^{t-s} \delta'(t-s-\tau)f(x-s+\tau)dsd\tau$$
$$+\varphi(t-x);$$

Мисол: Муодиларо ҳал кунед

$$u(x,t) = bx + \int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}\partial\tau$$

Дар ин ҷо шарти ибтидоӣ $u(x,0) = f(x) = bx$, буда ва шартҳои канорӣ бошанд

$$u(0,t) = \varphi_1(t),\ u'_x(0,t) = \varphi_2(t)$$

мебошанд, ки функсияҳои $a(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ –функсияҳои бефосилаи шартҳои табдилоти Лаплас-ро қаноаткунанда ба шумор меравaнд. Инчунин ядро $a(t) = te^{-bt}$ мебошад.

Ҳал: Пеш аз ҳал намудани масъалаи мазкур тасвири ҳосила, интеграл ва функсияҳоро меорем (ниг $[20], [38], [3-\text{M}]$)

$$u(x,t) \rightrightarrows U(p,q), u(x,0) = f(x) \to F(p),$$

$$u(0,t) = \varphi_1(t) \to \phi_1(q), u'_x(0,t) = \varphi_2(t) \to \Phi_2(q)$$

$$\int_0^t a(t-\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\partial\tau \rightrightarrows \frac{1}{q}A(q)\{p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q)\}$$

Акнун ҳар яке аз ин тасвирҳоро ба муодила гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q) = F(p) + \frac{1}{q}A(q)\{p^2[U(p,q) - \Phi_1(q)] - p\Phi_2(q)\}$$

$$\left(1 - \frac{1}{q}A(q)p^2\right)U(p,q) = F(p) - \frac{1}{q}A(q)p^2\Phi_1(q) - \frac{1}{q}A(q)p\Phi_2(q)$$

$$U(p,q) = \frac{F(p) - \frac{1}{q}A(q)p^2\Phi_1(q) - \frac{1}{q}A(q)p\Phi_2(q)}{1 - \frac{1}{q}A(q)p^2}$$

Баробарии ҳосилшуда ҳалли умумии муодила дар фазои зудӣ мебошад, ки дар ин фазо функсияи тағирёбандааш комплекси амал мекунад. Барои идомаи ҳал тасвири ядро ва функсияи ибтидоиро ба баробарии мазкур гузошта ҳосил мекунем ва чи тавре мо медонем тасвири ядро чунин аст: $a(t) \to A(q) = \frac{q}{(q+b)^2}$ (ниг [20]). Инчунин аз баски $f(x) = bx -$ аст бинобар ин $f(x) \to F(p) = \frac{b}{p}$ (ниг [20]) мешавад. Ҳамин тавр ҳосил мекунем

$$U(p,q) = \frac{\frac{b}{p} - \frac{1}{q}\cdot\frac{q}{(q+b)^2}p^2\Phi_1(q) - \frac{1}{q}\cdot\frac{q}{(q+b)^2}p\Phi_2(q)}{1 - \frac{1}{q}\cdot\frac{q}{(q+b)^2}p^2}$$

$$= \frac{\frac{b(q+b)^2}{p} - p^2\Phi_1(q) - p\Phi_2(q)}{(q+b)^2 - p^2}$$

Яъне

$$U(p,q)=\frac{\frac{b(q+b)^2}{p}-p^2\Phi_1(q)-p\Phi_2(q)}{(q+b)^2-p^2} \qquad (3.3.14)$$

мебошад. Чи тавре аён аст дар ҳолати $p=\pm(q+b)$ будан махраҷ ба нол баробар мешавад ва ҳангоми $p=q+b$ будан сурат кай ба нол баробар мешавад муайян мекунем

$$\frac{b(q+b)^2}{q+b}-(q+b\,)^2\Phi_1(q)-(q+b\,)\Phi_2(q)=0$$

$$\frac{b}{q+b}-\Phi_1(q)-\frac{\Phi_2(q)}{q+b}=0$$

ё

$$\Phi_1(q)=\frac{b}{q+b}-\frac{\Phi_2(q)}{q+b} \qquad (3.3.15)$$

Аз баробарии (3.3.15) мо метавонем шарти ибтидоии ҳалли муодиларо пайдо кунем

$$\Phi_1(q)=\frac{q+b-q}{q+b}-\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{q+b}\cdot\Phi_2(q)$$

$$\Phi_1(q)=1-\frac{q}{q+b}-\frac{1}{q}\cdot\frac{q}{q+b}\cdot\Phi_2(q)$$

$$\varphi_1(t)=1-e^{-bt}-\int_0^t e^{-b(t-s)}\,\varphi_2(s)ds$$

Яъне

$$u(0;t)=1-e^{-bt}-\int_0^t e^{-b(t-s)}\,\varphi_2(s)ds$$

мешавад.

Баробарии (3. 3. 15)-ро ба баробарии (3. 3. 14) гузошта ҳосил мекунем

$$U(p,q) = b\left\{\frac{(q+b)^3 - p^3}{p(q+b)((q+b)^2 - p^2)}\right\} + \left\{\frac{p\Phi_2(q)(p-q-b)}{(q+b)((q+b)^2 - p^2)}\right\}$$

Яъне

$$U(p,q) = \left\{-\frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)}\right\} + \left\{\frac{b(q+b)^3 - bp^3}{p(q+b)((q+b)^2 - p^2)}\right\} \qquad (3.3.16)$$

Акнун бо истифода аз табдилоти баъакси Лаплас-Карсон барои ҳар як функсияи дар қавсҳо мавҷудбуда функсияи ҳақиқи ҷустуҷӯ мекунем.

$$1)\ \left\{\frac{-p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)}\right\} \leftleftarrows -\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds$$

$$+\int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds$$

Сараввал ифодаи дар зери қавс мавҷудбударо содда мекунем

$$\frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)} = \frac{\Phi_2(q)}{q+b} - \frac{\Phi_2(q)}{p+q+b} = \frac{\Phi_2(q)}{q+b} - \frac{H(p)\Phi_2(q)}{p+q+b}$$

Чи тавре мо медонем (ба ҷадвали 2 нигаред)

$$\int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds \rightrightarrows \frac{H(p)\Phi_2(q)}{p+q+b}$$

$$\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds \to \frac{\Phi_2(q)}{q+b}$$

мебошад. Ҳамин тавр бо истифода аз формулаҳои мазкур функсияи ҳақиқии тасвири дар қавси якум мавҷудбударо менависем

$$\frac{p\Phi_2(q)}{(q+b)(p+q+b)} \leftleftarrows \int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds - \int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds$$

$$2)\ \left\{\frac{b(q+b)^3 - bp^3}{p(q+b)((q+b)^2-p^2)}\right\} \leftleftarrows$$

$$1 - e^{-bt} + bx - b\int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}h_1(x-s)h_2(t-s)ds$$

Саравval ифодаи дар дохили қавс мавҷудбударо содда мекунем

$$\frac{b(q+b)^3 - bp^3}{p(q+b)((q+b)^2-p^2)} = \frac{b((q+b)-p)((q+b)^2+p(q+b)+p^2)}{p(q+b)\big((q+b)-p\big)\big((q+b)+p\big)} =$$

$$= \frac{b(q+b)^2 + 2bp(q+b) + bp^2 - bp(q+b)}{p(q+b)(p+q+b)} = \frac{b(p+q+b)^2 - bp(q+b)}{p(q+b)(p+q+b)}$$

$$= \frac{bp+bq+b^2}{p(q+b)} - \frac{b}{p+q+b} = 1 - \frac{q}{q+b} + \frac{b}{p} - \frac{b}{p+q+b}$$

Яъне

$$\frac{b(q+b)^3 - bp^3}{p(q+b)((q+b)^2-p^2)} = 1 - \frac{q}{q+b} + \frac{b}{p} - \frac{bH_1(p)H_2(q)}{p+q+b}$$

Чи тавре аён аст баробарии мазкур аз чор ҷаъмшаванда иборат аст, ки функсияи ҳақиқии ҳар яке аз ин ҷаъмшавандаҳо барои мо маълум мебошад (ниг [38] ва ҷадвали 2).

$$\left(1 - \frac{q}{q+b} + \frac{b}{p} - \frac{bH_1(p)H_2(q)}{p+q+b}\right) \leftleftarrows$$

$$1 - e^{-bt} + bx - \int_0^{\min(x,t)} be^{-bs}h_1(x-s)h_2(t-s)ds$$

дар ин ҷо $h_1(x), x > 0$; $h_2(t), t > 0$ –функсияи Хевисайд мебошад. (ниг [16], [63]) Ҳамин тавр функсияи ҳақиқии ҳар ду қавси дар баробарии (3.3.16) мавҷудбуда муайян карда шуд. Акнун ҳалли умумии муодиларо бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда менависем

$$u(x,t) = -\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds + \int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds + 1 -$$

$$e^{-bt} + bx - b\int_0^{\min(x,t)} e^{-bs}h_1(x-s)h_2(t-s)ds \qquad (3.3.17)$$

Қадами 1: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x > t$ *будан менависем*

$$u(x,t) = -\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds + \int_0^t e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds + 1 - e^{-bt}$$

$$+bx - b\int_0^{\mathrm{t}} e^{-bs}h_1(x-s)h_2(t-s)ds \qquad (3.3.18)$$

Қадами 2: Ҳалли умумии муодиларо ҳангоми $x < t$ *будан менависем*

$$u(x,t) = -\int_0^t e^{-b(t-s)}\varphi_2(s)ds + \int_0^x e^{-bs}h(x-s)\varphi_2(t-s)ds + 1 - e^{-bt}$$

$$+bx - b\int_0^x e^{-bs}h_1(x-s)h_2(t-s)ds \qquad (3.3.19)$$

Ҳамин тавр ҳалли муодилаи мазкур маълум гардид. Аз баски дар ин муодила $u(x,0) = f(x) = bx$ мебошад, бинобар ин ҳангоми дар баробарии (3.3.19) ба ҷои тағирёбандаи t нол гузоштан $u(x,0) = bx$ –ро пайдо хоҳем кард.

Хулоса

1. Натиҷаҳои асосии илмии кори диссертатсионӣ

Дар рисолаи диссертатсионӣ натиҷаҳои асосии зерин ба даст оварда шудаанд:

1. Ба воситаи табдилоти Лаплас-Карсон тасвири функсияҳо ва интегралҳое, ки татбиқи васеи амали доранд муайян карда шудаанд [9-М], [10-М];
2. Ҳалли умумии муодилаи дифференсиалии телеграф бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст[2-М], [5-М];
3. Ҳалли умумии муодилаи интегро-дифференсиалии телеграф барои ядрои функсияи хаттӣ (графикаш хати рост) ва функсияи ғайрихаттӣ (графикаш хати кач) бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда муайян карда шудааст [3-М], [6-М];
4. Ҳалли умумии муодилаҳои дифференсиалии хаттӣ бо ҳосилаҳои хусусии тартиби як ва ду бо шартҳои ибтидоӣ ва канории додашуда ва ҳалли муодилаи интегро-дифференсиалии ба муодилаи мавҷ овардашаванда муайян карда шудааст [1-М], [2-М], [4-М];
5. Ҷадвали 2 то ҷое огоҳ ҳастам дар таърихи риёзиёт то ҳол вуҷуд надорад ва барои ҳалли муодилаҳои дифференсиалӣ, муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва ғайра васеъ истифодашаванда мебошад [7-М], [8-М], [10-М];

2. Тавсияҳо оид ба истифодаи амалии натиҷаҳо

Таҳқиқоти мазкур аҳамияти назариявӣ ва амали дошта, натиҷаҳои рисолаи диссертатсионӣ ва методҳои исботи онҳоро дар ҳолати ҷустуҷӯ намудани ҳали масъалаҳои ибтидоӣ-канорӣ барои муодилаҳои дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ ва муодилаҳои интегро-дифференсиалӣ бо ҳосилаҳои хусусӣ татбиқи худро ёфтаанд.

Руйхати адабиёт

А) Руйхати манбаъҳои истифодашуда

[1]. Александров В. А. Обобщенные функции, Новосибирск-2005. 46 с.

[2]. Абдулкаримов М. Ф. О разрешимости одной задачи граничного управления для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом из класса L_2. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАН Таджикистана Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), с 191-192.

[3]. Бутузов В. Ф. Несбственные интегралы. //Бутузов В. Ф., Бутузов М. В. −Москва-2016, 44 с.

[4]. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М: Наука, 1969, 234 с.

[5]. Брычков Ю. А., Таблици неопределенных интегралов, // Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П. – М: ФИЗМАТЛИТ-2003.

[6]. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций, Москва 1977, 288 с.

[7]. Бутров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление.- М: Наука, 1998, 431 с.

[8]. Сафронова М. А. Теория функций комплексной переменной. Минск БГУИР 2017, 120 с.

[9]. Волковыский Л. И. Сборник задач по теории функции комплексного переменного: // Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И.,− Учеб. пособие. 4-е изд., испр.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 312с

[10]. Василего И. П. Вычисление интегралов с помощью вычетов Оренбург-2004, 49 с.

[11]. Владимиров В. С. Уравнения математической физики –Москва 1976, 512 с.

[12]. Ван-Дер-Поль Б., Бремер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, перев. с англ., ИЛ, 1952. 243с.

[13]. Волковыский Л. И. Сборник задач по теории функции комплекс-ного переменного: // Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И.,– Учеб. пособие. 4-е изд., испр.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 312 с.

[14]. Горбузов В. Н. Математической анализ: интегралы, зависящие от параметров, Гродно-2006, 54 с.

[15]. Десянский В. Н. Кратные интегралы. // Десянский В. Н., Жидких Н. М., Григорец О.А.– Москва-2005, 78 с.

[16]. Губатенко В. П. Обобщенные функции с приложениями в теории электромагнитного поля, Саратов «Стило»-2001, 124 с.

[17]. Гредасова Н. В. Теория функций комплексного переменного. Ч 1, // Гредасова Н. В., Желонкина Н. И., Корешникова М. А., Корчемкина Л. В., Зенков В. И. –Екатеринбург-2018, 384 с.

[18]. Гредасова Н. В. Теория функций комплексного переменного. Ч 2, // Гредасова Н. В., Желонкина Н. И., Корешникова М. А., Корчемкина Л. В., Зенков В. И. –Екатеринбург-2018, 254 с.

[19]. Диткин В. А., Кузнецов П. И., Справочник по операционному исчислению, М.-Л., Гостехиздат, 1951, 520 с.

[20]. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения, Москва -1958, 176 с.

[21]. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению, Москва 1965, 523 с.

[22]. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление, Москва 1961, 524 с.

[23]. Дубков А. А., Агудов Н. В. Преобразования Лапласа, Нижний Новгород-2016, 88с.

[24]. Дубинов А. Е. W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики, // Дубинов А. Е., Дубинова И. Д., Сайков С. К.– Москва-2006, 126 с.

[25]. Дубограй И. В. Техника интегрирования. // Дубограй И. В., Коломейкина Е. В., Шишкина С. И. Москва-2010, 64 с.

[26]. Диткин В. А., К теории операционного исчисления, ДАН 123, (1958).

[27]. Диткин В. А., К теории операционного исчисления, ДАН 116, (1957).

[28]. Диткин В. А. Операционное исчисление, УМН 2, вып 6 (22), (1947).

[29]. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z–преобразование. М.: Рипол Классик. 1971, 288 с.

[30]. Ефимов А. Математический анализ, Част 1, Высшая школа,1980,279 с.

[31]. Зубрина Л. Г, Чостковская О. П Дополнительные елавы высшей математики, САМАРА-2010, с 28-29.

[32]. Илолов. М. И, Зулфонов Ш. М Решение интегро-дифференциального телеграфного уравнения методом преобразования Лапласа-Карсона //Известия НАН Таджикистана, №1 (190), 2023 г, с. 7-14.

[33]. Илолов.М. И, Зулфонов.Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. .// Доклады НАНТ, Т. 66, № 3-4, 127-135 с.

[34]. Ильин В. А. О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением (Текст)/ В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // Доклады Академии наук. -2002 –Т. 387. -№5. –С. 600-603.

[35]. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. РАН, 2004 Т. 394, №2, с. 154-158.

[36]. Ильин В. А. Граничное управление прцессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергий. / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения.-2000. Т-36. -№11.- с 1513-1528.

[37]. Илолов М. И., Зулфонов Ш. М. Современные проблемы математики и её приложении. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика АНРТ доктора физ-мат наук, профессора Илолов Мамадшо, (Таджикистан. Душанбе, 14-15 марта 2018 г. с.108)

[38]. Илолов.М.И, Зулфонов.Ш.М Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.)

[39]. Краснов М. Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости, // Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. Н. – Москва-2003, 256с.

[40]. Краснов М. Л.. Функции комплексного переменного. // Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. Н. – Москва-2003, 256с.

[41]. Корзников А. Д., Королева О. М. Операционное исчисление, Минск-2021, 240 с.

[42]. Ковалева Л. А., Чернова О. В., Интегралы, зависящие от параметра, Белгород-2018, 39 с.

[43]. Ковалева Л. А. Интегралы, зависящие от параметра, Белгород-2018, 64 с.

[44]. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике. М. : Наука, 1978, 720 с.

[45]. Конев В. В. Уравнения в частных производных, Томский политехнический университет-2007, 58 с.

[46]. Криллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, Физ. Мат. Лит-ры, 1979, 384 с.

[47]. Колмогоров А. Н. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, физ. Мат. Лит-ры., 1989, 624 с.

[48]. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972, 48с.

[49]. Крицков Л. В. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом. /Л.В.Крицков, М.Ф.Абдулкаримов// Докдады Академии Наук.- 2013.- Т 450.- с 640-643.

[50]. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплесного переменного Москва, “Наука” -1987, 736 с.

[51]. Лашкарбеков Р. М., Зулфонов Ш. М. Ҳалли системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби як бо усули оператсионӣ,// Лашкарбеков Р. М., Зулфонов Ш. М.,– Маводи конференсияи байналмиллалӣ бахшида ба 70-солагии доктори илмҳои педагогӣ, профессор Нуъмонов. М Душанбе-2019.

[52]. Лашкарбеков С. М., Зулфонов Ш. М. Ҳалли системаи муодилаҳои дифференсиалии тартиби ду бо усули оператсионӣ,// Лашкарбеков С., Зулфонов Ш. М.,– Маводи конференсияи ҷумҳуриявӣ бахшида ба “Бистсолаи омузиш ва рушди фанҳои табиатшиносӣ, дақиқ ва риёзӣ дар соли 2020-2040”, Душанбе-2020.

[53]. Лашкарбеков С. М., Решение уравнения типа Эйлера высших порядков // Лашкарбеков С. М., Лашкарбеков Р. М., Зулфонов Ш. М.–Материалы международной научной конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвященной “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования”, Душанбе-2023.

[54]. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. В 2т. Т 1: Начала теории. // Маркушевич А. И.. – СБб.: Лань, 2009. -496с.

[55]. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. В 2т. Т 2: Дальнейшее построение теории. / А. И. Маркушевич. – СБб.: Лань, 2009. -624с.

[56]. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950, 220 с.

[57]. Мартыненко В. С. Операционное исчисление. ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1968, 248 с.

[58]. Минькова Р. М. Дифференциальное исчисление функции одной переменной, Екатеринбург-2006, 56 с.

[59]. Никольский С. М. Курс математического анализа.–М.: Наука, 1983, Т 1. 468 с.

[60]. Никольский С. М. Курс математического анализа.–М.: Наука, 1983, Т 2. 448 с.

[61]. Орлов С. С. Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах (монография) Иркутск-2014, 88 с.

[62]. Подолян С. В., Юрченко И. В. Высшая математика, Операционное исчисление и его применение Могилѐв 2009, с 46-52 .

[63]. Плескунов М. А. Операционное исчисление. Екатеринбург- 2014, 146 с.

[64]. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. –М.: Наука, 1984, 432 с.

[65]. Погребной В. Д. Теория функций действительной переменной. Сумы-2012, 239с

[66]. Прудников А. П. Вычисление интегралов и преобразование Меллина, // Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.– *Итоги науки и техн. Сер. Мат. Анал.,* 1989, Том 27, с 3-146

[67]. Прудников А. П. Интегралы и ряды, // Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.– Москва -1983, Том 1, 632 с.

[68]. Прудников А. П. Интегралы и ряды, // Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.– Москва -1983, Том 2, 620 с.

[69]. Прудников А. П. Интегралы и ряды, // Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.– Москва -1983, Том 3, 624 с.

[70]. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения, (Физматлит, М., 2002), 578 с.

[71]. Полянин А. Д. Лекции по нелинейным уравнениям математической физики: Учеб. Пособие. Москва-2023, 254 с.

[72]. Полянин А. Д. Нелинейные уравнения математической физики: Учеб. Пособие, Ч 2., (ЮРАЙТ, М., 2017). 420 с.

[73]. Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифферен-циальным уравнениям (Физматлит, М., 2001), 576 с.

[74]. Румшиский Л. З. Преобразование Лапласа и позитивные функции, Учен, Зап. ХГУ 4, 21 (1949), с 101-130.

[75]. Смирнова В. Б., Морозова Л. Е. Определьённый интеграл. Санкт-Петербург, 2011, 99 с.

[76]. Смирнова В. Б., Морозова Л. Е. Неопредельённый интеграл. Санкт-Петербург, 2010, 64 с.

[77]. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функции комплексного переменного. Москва-1989, 478 с.

[78]. Самойленко А. М., Илолов М. И. К теории эволюционных уравнений с импульсным воздействием. Докл АНСССР, 1991, том 316, номер 4, с 822-825.

[79]. Семенов Э. И., Косов А. А. Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений, Известия вузов. Математика 2019, №8, с 13-20.

[80]. Сергеев С. А., Спиридонов Ф. Ф. Применение функции ламберта W в решении задачи теплопроводности, г. Бийск, 1978, 176 с.

[81]. Смирнов И. Н. Смешанные задачи для телеграфного уравнения в случае системы, состоящей из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы. Одностороннее управление. //Доклады Академии Наук, 2010, том 435, № 1, С. 22-25.

[82]. Смирнов И. Н. Формула типа Даламбера для колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности, описываемых телеграфным уравнением. //Доклады Академии Наук, 2010, том 433, № 1, С 23-29.

[83]. Субхонкулов М. А. Остаточный член в тауберовой теореме Харди-Литтльвуда-Карлемана, Известия АН СССР, 1961, Том 25, Выпуск 6, 925-934 с.

[84]. Троценко Г. А., Жукова О. Г. Операционное исчисление и его применение, Омск-2020, с 45-47.

[85]. Трацтер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физики, М., Гостехиздат., 1956, 224 с.

[86]. Толстых О. Д. , Гозбенко В. Е. Операционное исчисление и его применение, Иркутск-2008, 180 с.

[87]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Част 1. М: «Физико-математической литературы», 1969, 608 с.

[88]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Част 2 М: «Физико-математической литературы», 1969, 802 с.

[89]. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Част 3. М: «Физико-математической литературы», 1969, 658 с.

[90]. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Част 1. М: «Физико-математической литературы», 1969, 441 с.

[91]. Фихтенгольц Г. М.Основы математического анализа. Част 2. М: «Физико-математической литературы», 1968, 464 с.

[92]. Фукс Б. А., Левин В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, М.-Л.,Гостехиздат, 1951, 388 с.

[93]. Фукс Б.А., Шабат Б. В. Функции комплексного переменного и некоторые его приложения, М.-Л.,Гостехиздат, Москва-1964, 390 с.

[94]. Фок В. А. О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком, ДАН 39, (1943), с 279-283

[95]. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, ДАН 36, (1942), 147-151 с.

[96]. Хватцев А. А., Строчков И. А. Дифференциальные уравнения в частных производных, Псков-2016, 80 с.

[97]. Харкевич А. А . Неустановившиеся волновые явления, М.-Л.,Гостехиздат, 1950, 88 с.

[98]. Хиршман И. И., Уиддер Д. В., Преобразования типа свертки, М., ИЛ., 1948, 240 с.

[99]. Ҷангибеков Г. Асосҳои таҳлили функсионалӣ, Душанбе-2019, 152 с.

[100]. Шостак Р. Я. Операционное исчисление. М: Высшая школа, 1972, 279 с.

[101]. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир.- 1985, Т. 1-2, 664 с.

[102]. Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, 1937, 236 с.

[103]. Яремко Н. Н. Интегральное исчисление функции одного переменного, Пенза-2012, 332 с.

[104]. Янышев Д. С. Применение функции ламберта W в теории турбулентного трения, Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск №50, УДК 532.526:536.244

[105]. Якоб О. Премменение преобразования Лапласа к суммированию ряда Фурье и интерполяционных многочленов, ДАН 32, (1941), 390-394 с.

[106]. Ali Babakhani Theory of multidimensional Laplace transforms and boundary value problems. Iowa State University, 1989, pp 223.

[107]. Borovskikh A. V. Forvulas of boundary control of an inhomogeneous string. I//Differ. Equ., 2007., Vol. 43, no. 1. Pp 69-95.

[108]. Ditkin V. A., Prudnikov A. P., Operational Calculus in Two Variables and its Applications, Pergamon Press, New York, 1962, 176 c.

[109]. Dahiya R. S.; Jafar Saberi -Nadjafi, THEOREMS ON n-DIMENSIONAL LAPLACE TRANSFORMS AND THEIR APPLICATIONS, 15th Annual conference of Applied Mathematics. Univ of central Oklahoma, Electronic journal of differential Equations; Conference 02, 1999, pp 61−74.

[110]. Dahiya R. S. Certain Theorems on n-dimensional Operational Calculus, Compositio Mathematica, Amsterdam (Holland) 18 Fasc, 1,2, (1967).

[111]. Dahiya R. S. Computation of n-dimensional Laplace Transforms, journal of, Computational and Applied Mathematics 3 (1977).

[112]. Dahiya R. S. Calculation of Two-dimensional Laplace Transforms pairs-1, Simon Stevin, A Quarterly journal of pure and Applied Mathematics 56 (1981).

[113]. Dahiya R. S. Calculation of Two-dimensional Laplace Transforms pairs-2, Simon Stevin, A Quarterly journal of pure and Applied Mathematics (Belgium) 57 (1983).

[114]. Dahiya R. S. Laplace Transform pairs of n-dimensions, Internet. J. Math. and Math. SCI 8 (1985) .

[115]. Dahiya R. S. and Debnath J. C., Theorems on Multidimensional Laplace Transform for Solution of Boundary Value Problems, Computers Math. Applications 18 (1989), no 12.

[116]. Dahiya R. S. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation Math.27 (1990), 309-321.

[117]. Fujita Y. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation Math.27(1990), 309-323.

[118]. Fujita Y. Integro-differential equation which interpolates the heat equation and the wave equation (11).- Osaka J. Math v.27 №4, (1990), pp. 797-804.

[119]. Kozlova E. A. The control problem for the system of telegraph equations, Samara 2011, 162-166.

[120]. [120] Wright E. M. Solution of the equation $ze^{z} = a$, Proceedings of the Royal Society Edinburgh 65, 193-203 (1959).

Б) КОРҲОИ МУАЛЛИФ ОИД БА МАВЗӮИ ДИССЕРТАТСИЯ

1. Мақолаҳо дар маҷаллаҳои тақризшаванда

[1-М]. Зулфонов Ш. М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений [Текст] /Зулфонов Ш. // Доклады НАН Таджикистана, Том. 64, № 3-4, 135-141 с.

[2-М]. Зулфонов Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения. [Текст] / Зулфонов Ш. // Доклады НАН Таджикистана, Том. 66, № 1-2, 28-32 с.

[3-М]. Зулфонов Ш. М Решение интегро-дифференциального телеграфного уравнения методом преобразования Лапласа-Карсона [Текст] / М. И. Илолов, Ш. Зулфонов //Известия НАН Таджикистана, №1 (190), 2023 г, с. 7-14

[4-М]. Зулфонов. Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. [Текст] / М. И. Илолов, Ш. М. Зулфонов // Доклады НАН Таджикистана, Т. 66, № 3-4, 127-135 с.

2) Мақолаҳо ва фишурдаҳои асосии интишорот дар дигар нашрияҳо:

[5-М]. Зулфонов. Ш. М. Решение начально-краевой задачи для телеграфного уравнения. Материалы международной научной конференции, “Комплексный анализ и его приложения”, посвященной “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования”, 75-летию Заслуженного работника Таджикистана, чл.корр. НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора И.К.Курбонова и 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Дж.С.Сафарова, (г.Бохтар, 19 ноябиря 2022 г.), 63-65 с.

[6-М]. Зулфонов Ш. М. Интегро-дифференциальное уравнение телеграфа. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию академика НАНТ Шабозова Мирганда Шабозовича, (Таджикистан. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.), 234-237 с

[7-М]. Зулфонов Ш. М. Применение преобразования Лапласа-Карсона к решению начально-краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию со дня рождения академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора Бойматова Камолиддина Хамроевича., (Таджикистан. Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).

[8-М]. Илолов М. И. , Зулфонов Ш. М. Об одной начально-краевой задаче для неоднородного интегро-дифференциального уравнения в частных про-изводных. Материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Темура Собирова, (Таджикистан. Душанбе, 25-26 июня 2021 г.)

[9-М]. Илолов.М. И, Зулфонов.Ш. М. Начально- Краевая задача для уравнения в частных производных 2-го порядка. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибеков Гулходжа, (Таджикистан. Душанбе, 30-31 января 2020 г.).

[10-М]. Зулфонов.Ш. М., Илолов.М. И Двумерное преобразования Лапласа-Карсона и его риложение. Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Тухлиева Камаридина, Худжанд-2024, с.249-251.