Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5 На правах рукописи

Абдукаримзода Муслими Кароматулло

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^m$

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик НАН Таджикистана,
доктор физ.-мат. наук, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович

Д У Ш А Н Б Е — 2 0 2 1

Содержание

Введение

Данная диссертационная работа посвящена отысканию наилучших (оптимальных) квадратурных формул для численного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и классах кривых, заданных в некоторой области из $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$. Наилучшие квадратурные формулы найдены для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности и для классов функций и кривых, норма градиента которых ограничена в пространствах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В шестидесятых годах прошлого столетия С.М.Никольский [19] поставил и решил впервые экстремальные задачи о построении наилучших (оптимальных) квадратурных формул, т.е. оптимизационная задача выбора узлов и весов квадратурной формулы из условия минимальности точной оценки ошибки формулы на заданном классе функций. В случае фиксированных узлов аналогичную задачу впервые рассмотрел американский математик А.Сард [22]. В настоящее время теория построения оптимальных квадратурных формул стала наиболее важным разделом вычислительной математики. В этом направлении современной математики получены многочисленные результаты. Отметим, что ряд наилучших квадратурных формул найден в работах Н.П.Корнейчука [7], Н.Е.Лушпайа [12], М.Левина [10], А.А.Женсыкбаева [6], Б.Д.Боянова [3], А.А.Лигуна [11], В.П.Моторного [17], В.Ф.Бабенко [2] и другие. Основные результаты этой теории приведены в монографии С.М.Никольского [20], откуда видно, что это теория получила значительное развитие, хотя в ней остаётся ряд нерешённых вопросов. Так, например, значительно менее развита теория наилучших кубатурных формул для многомерных, сингулярных и криволинейных интегралов.

Данная диссертационная работа посвящена построению наилучших квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых, заданных в некоторой области из $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Следует отметить, что наилучшие квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов найдены в небольшом количестве. Укажем только на некоторые результаты, полученные в последнее время С.Б.Вакарчуком [4], М.Ш.Шабозовым [28], М.Ш.Шабозовым и К.Тухлиевым [32], Д.С.Сангмамадовым [21], Л.Г.Файзмамадовой [25], Г.А.Юсуповым и А.А.Шабозовой [33].

Актуальность и целесообразность диссертационной работы определяются тем, что в ней изучен и найден явный вид оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода в более общей постановке по сравнению с известной постановкой С.М.Никольского.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами. Данная диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2017-2020 гг. по теме „Теория аппроксимации функций”.

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти явный вид и точную оценку погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольной расположения узлов;

- найти явный вид и точную оценку погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайными узлами;
- найти оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найти оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Основные методы исследования. В работе используются метод отыскания наилучших квадратурных формул, разработанный С.М.Никольским, метод Н.П.Корнейчука оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. Основные результаты работы:

- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольного расположения узлов;
- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайными узлами;

- найдена оптимальная квадратурная формула для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найдены оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Положения, выносимые на защиту:

- теорема о явном виде и точной оценке погрешности оптимальной квадратурной формулы вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ при произвольном расположении узлов;
- теорема о явном виде и точной оценке погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайними узлами;
- теорема о явном виде оптимальной квадратурной формулы вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- теорема о явном виде оптимальной квадратурной формулы вычисления весовых квадратурных формул для криволинейных интегралов на классе $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты диссертационной работы можно применять в теорию приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2017-2020 гг.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложений" (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научно - теоретической конференции „Компьютерный анализ проблем науки и технологии" (Душанбе, 27-28 декабря 2018 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами" (Душанбе, 10-11 октября 2019 г.);
- международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно - практической конференции „Современные проблемы теории дифференциальных уравнений" (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.).

Публикации. Основные результаты исследований автора по теме диссертации опубликованы в 12 работах, из них 1 статья опубликована в научном журнале Российской Федерации, 11 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце диссертации. Из 12 работ 5 опубликовано в журналах, входящих в список журналов ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 7 - в материалах международных и республиканских научных конференций. Из совместных с М.Ш.Шабозовым двух статей соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 45 наименований, занимает 66 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В первой главе диссертации рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности. В первом параграфе первой главы приведено определение классов функций и кривых.

Через $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ обозначим класс функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_m)$, определённых на кривых $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и для любых двух точек $\mathscr{M}', \mathscr{M}'' \in \mathscr{L}$ удовлетворяющих условию

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega(\rho_p(\mathscr{M}', \mathscr{M}'')).$$

Таким образом, будем писать $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, если для любых двух точек $\mathscr{M}', \mathscr{M}'' \in \mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $t', t'' \in [0, L]$ выполняется неравенство

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\Big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\Big|^p\right\}^{1/p}\right) \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t' - t''|\right)\right\}^{1/p}\right).$$

Через $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких кривых $\mathscr{L} \subset R^m$, заданных параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\ (0 \le t \le L),$$

у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in \mathscr{H}^{\omega_i}[0, L],\ i = \overline{1, m}.$

Во втором параграфе первой главы доказывается следующая общая

Теорема 1.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$J(\mathcal{F}; \mathscr{L}) \approx \mathcal{L}_N(\mathcal{F}; \mathscr{L}; \mathscr{P}, \mathscr{T}) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, \mathcal{F}\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big) \quad (0.0.1)$$

с произвольными векторами-коэффициентами и узлами $(\mathscr{P}, \mathscr{T})$, $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$, $\mathscr{T} = \{t_k :\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L\}$ *наилучшей для класса функций* $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и класса кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(\mathcal{F}; \mathscr{L}). \quad (0.0.2)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (0.0.2) на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (0.0.3)$$

В частности, из (0.0.3) при $p=\infty$ *имеем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,\infty};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\max_{1\le i\le m}\omega_i(t)\right)dt.$$

Из теоремы 1.2.1 выводится ряд следствий. Например, при $m=2,\ p=2,\ \omega(t)=t$ получим результат из работы М.Ш.Шабозова, Ф.М.Мирпоччоева [31], а при $m\in\mathbb{N},\ m\ge 2,\ \omega(t)=t$ - результат, приведенный в работе М.Ш.Шабозова, К.Тухлиева [32].

В третьем параграфе первой главы, наряду с квадратурной фрмулой (0.0.1), параллельно вводится в рассмотрение следующую квадратурную формулу типа Маркова:

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt =$$
$$= p_0\mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\,\ldots,\,\varphi_m(0)\right) + p_N\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\,\ldots,\,\varphi_m(L)\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{N-1} p_k\mathcal{F}\left(\varphi_1(t_k),\,\ldots,\,\varphi_m(t_k)\right) + R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}) \qquad (0.0.4)$$

с произвольными векторами коэффициентов $\mathscr{P}=\{p_k\}_{k=0}^{N}$ и векторами узлов

$$\mathscr{T}=\{t_k\}_{k=0}^{N}:\ 0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_N=L.$$

Далее исследуем квадратурные формулы вида (0.0.4), где заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка: $t_0=0,\ t_N=L$, а узлы $t_1,\,t_2,\ldots,t_{N-1}$ и коэффициенты $p_k\,(k=0,\,1,...,N)$ нужно выбрать оптимальным образом. Имеет место следующая общая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида (0.0.4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов* $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$:

$$\mathscr{P}=\{p_k\}_{k=0}^{N},\ \ \mathscr{T}=\{t_k: 0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=L\},$$

наилучшей для класса функций $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *и класса кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула вида трапеций*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_m(t)\right)dt=$$

$$=\frac{L}{2N}\left\{\mathcal{F}(\varphi_1(0),\ \varphi_2(0),...,\varphi_m(0))+\mathcal{F}(\varphi_1(L),\ \varphi_2(L),...,\varphi_m(L)\right\}+$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right),\ \ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right)+R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \tag{0.0.5}$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (0.0.5) на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=(2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{0.0.6}$$

Теоремы 1.3.1 как частный случай содержит результаты из работы М.Ш.Шабозова, К.Тухлиева [32].

Во второй главе диссертации рассматривается оптимизация приближенного вычисления весовых криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функций и кривых малой гладкости. В первом параграфе второй главы приводится постановка задачи отыскания наилучших квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода.

Во втором параграфе решена задача Колмогорова - Никольского для весовых квадратурных формул для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$. Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) + R_N(\mathcal{F};\, \gamma;\, \mathscr{L}). \tag{0.0.7}$$

наилучшей для классов функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) \mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{\Phi(0)}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), ..., \varphi_m(\tau_k)) + R_N(\gamma;\, \mathcal{F};\, \mathscr{L}), \tag{0.0.8}$$

где

$$\Phi(\tau) = \int\limits_\tau^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)) dt,$$

а узлы τ_k *определяются из системы уравнений*

$$\Phi(\tau_k) = \frac{2N - 2k + 1}{2N} \cdot \Phi(0),\ (k = \overline{1, N}).$$

При этом для погрешности формулы (0.0.8) на классах $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ *и* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}\left(\gamma;\, \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L)\right) =$$

$$= \frac{\mathscr{M}}{2N}\Phi(0) = \frac{\mathscr{M}}{2N} \int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)) dt.$$

В этом же параграфе приводится обобщение теоремы 2.2.1 для более широких классов функций и кривых.

В третьем параграфе второй главы найдены наилучшие весовые квадратурные формулы в смысле Сарда для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченым градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2$. Основными результатами третьего параграфа второй главы являются следующие утверждения.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathscr{T} := \{\tau_k : 0 \le \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_N \le L\}_{k=1}^N$ *- произвольная система узлов, а коэффициенты* $\mathscr{P} = \{p_k\}$ *квадратурной формулы (0.0.7) имеют вид* $p_k = d_k - d_{k+1},\ k = \overline{1, N},\ d_{N+1} = 0$. *Тогда для погрешности наилучшей по коэффициентам формулы имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q); \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^0) =$$

$$= \mathscr{M}\left\{\int\limits_0^L\left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right)dt\right)^2 d\tau - \sum_{k=1}^N D_k d_k^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$d_k = \sum_{i=k}^N p_i,\ \ D_k = \tau_k^0 - \tau_{k-1}^0,\ \ k = \overline{1, N}.$$

Из теоремы 2.3.1, в частности, для конкретных весовых функций, находится явный вид наилучших квадратурных формул и их точных оценок погрешности на классах функций и кривых.

Глава I. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$

В этой главе найдены наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций и кривых в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ и для классов функций и кривых задаваемых модулями непрерывности от $l_p\,(1 \leq p \leq \infty)$ -расстояние между точками кривой $\mathscr{L}$ с параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, m}\,;\ 0 \leq t \leq L$ в двух случаях, когда узлы расположены произвольно на отрезке $[0,\, L]$:

$$a)\ 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_N \leq L,\ \ N \geq 2;$$

и когда крайные точки отрезка $[0,\, L]$ входят в число узлов:

$$b)\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = L.$$

В обоих случаях указан явный вид квадратурных формул и вычислена точная оценка погрешности на указанных классах функций и кривых.

§1.1. Классы функций и кривых

Приведем определение классов функций и кривых, нужные нам для дальнейшего изложения наших результатов.

Пусть $C[a,\, b]$ - пространство непреривных на $[a,\, b]$ функций $\mathcal{F}(t)$ с чебышевской нормой $\|\mathcal{F}\|_{C[a,\, b]} = \max_{a\le t\le b}|\mathcal{F}(t)|$. Как обычно, через $C^{(r)}[a,\, b]$ обозначим класс функций $\mathcal{F}(t)$, имеющих на отрезке $[a,\, b]$ непрерывные производные вплоть до порядка $r(r\in\mathbb{N})$, где $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.

Всюду далее $\mathscr{H}^{\omega} := \mathscr{H}^{\omega}[a,\, b]$ – множество функций $\mathcal{F}(t)\in C[a,\, b]$, удовлетворяющих условию

$$|\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \le \omega\left(|t'-t''|\right),\ t', t'' \in [a,\, b],$$

где $\omega(\delta)$ – заданный на отрезке $[a,\, b]$ модуль непрерывности, то есть непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на $[a,\, b]$ функция, в нуле равная нулю. При $\omega(t) = t^{\alpha},\ 0<\alpha\le 1$, класс $\mathscr{H}^{\omega}[a,\, b]$ превращается в класс Гёльдера $\mathscr{H}^{\alpha}[a,\, b]$:

$$|\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \le |t'-t''|^{\alpha},\ \ \forall\, t',\, t'' \in [a,\, b].$$

$\mathscr{H}^{1}[a,\, b]$ - класс Липшица функций с константой 1 и порядка $\alpha\equiv 1$, удовлетворяющих условию

$$\mathscr{H}^{1}[a,\, b] = \left\{\mathcal{F}:\ |\mathcal{F}(t') - \mathcal{F}(t'')| \le |t'-t''|,\ \ \forall\, t',\, t'' \in [a,\, b]\right\}.$$

Через $\mathcal{L}_p[a,\, b]$ $(1\le p\le\infty)$ обозначим пространство суммируемых на $[a,\, b]$ в p - й $(1\le p<\infty)$ степени или измеримых существенно ограниченых $(p=\infty)$ на $[a,\, b]$ функций $\mathcal{F}(t)$ с конечной нормой, соответсвенно

$$\|\mathcal{F}\|_p := \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}_p} := \left(\int\limits_a^b |\mathcal{F}(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty,$$

$$\|\mathcal{F}\|_\infty := \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}_\infty} := supvrai\,\{|\mathcal{F}(t)|:\ a \le t \le b\}\,.$$

Пусть $\mathscr{L}$ - произвольная спрямляемая кривая, лежащая в евклидовом пространстве R^m размерности m, заданная параметрическими уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\ (a \le t \le b). \tag{1.1.1}$$

Через $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[a,\,b]$ обозначим класс гладких кривых $\mathscr{L} \subset R^m$, заданных параметрическими уравнениями (1.1.1), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in \mathscr{H}^{\omega_i}[a,\,b],\ i = \overline{1,m}$. В случае, когда $\omega_i(t) = \omega(t)$ $(i = \overline{1,m})$, соответствующий класс функций обозначим через $\mathscr{H}^{m,\omega}$.

§1.2. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций и кривых задаваемых, модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$

В этом параграфе рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности.

Пусть функция $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\mathscr{L} \subset R^m$ и

$$J(\mathcal{F};\mathscr{L}) := \int\limits_{\mathscr{L}} \mathcal{F}(\mathscr{M})dt = \int\limits_{\mathscr{L}} \mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1.2.1}$$

Предположим, что на кривой $\mathscr{L}$ установлено положительное направление так, что положение точки $\mathscr{M} = \mathscr{M}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \smile{\mathscr{A}\mathscr{M}}$, отсчитываемой от начальной точки $\mathscr{A}$. Тогда как хорошо известно, кривая $\mathscr{L}$ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\ (0 \leq t \leq L), \tag{1.2.2}$$

а функция $\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $\mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right)$ от переменной t. Известно, что в этом случае интеграл (1.2.1) запишется в виде следующего определённого интеграла

$$J(\mathcal{F};\mathscr{L}) = \int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right)dt. \tag{1.2.3}$$

Очевидно, что всякая квадратурная формула вида

$$J(\mathcal{F};\mathscr{L}) \approx \mathcal{L}_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T}) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, \mathcal{F}\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big) \tag{1.2.4}$$

для приближённого вычисления интеграла (1.2.3) задаётся векторами коэффициентов $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $\mathscr{T} = \{t_k : \ 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le L\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (1.2.4) обозначим

$$\Big|R_N(\mathcal{F};\mathscr{L})\Big| := \Big|R_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T})\Big| = \Big|J(\mathcal{F};\mathscr{L}) - \mathcal{L}_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T})\Big|.$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{\mathcal{F}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, определённых в точках кривой $\mathscr{L}$ и интегрируемых как сложных функций параметра t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T}) = \sup\left\{ \Big|R_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T})\Big| : \mathcal{F} \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых $\mathscr{L}$ с длиною L, заданных параметрическими уравнениями (1.2.2). Наибольшую погрешность квадратурной формулы (1.2.4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L);\mathscr{P},\mathscr{T}) = \sup\Big\{R_N(\mathfrak{M};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T}) : \mathscr{L} \subset \mathfrak{N}(L)\Big\}.$$

Для того чтобы получить оптимальную квадратурную формулу на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$ потребуем, чтобы формула (1.2.4) была точной для функции $\mathcal{F}(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) = \mathrm{const}$, то есть чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_0^L dt = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Через $\mathscr{B}$ обозначим множество векторов коэффициентов и узлов $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$, для которых квадратурная формула (1.2.4) имеет смысл. Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L)) = \inf_{(\mathscr{P},\mathscr{T})}\{R_N(\mathfrak{M};\mathfrak{N}(L),\mathscr{P},\ \mathscr{T}),(\mathscr{P},\ \mathscr{T}) \in \mathscr{B}\}, \qquad (1.2.5)$$

по аналогии с определением из монографии [20], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (1.2.4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$. Если существует вектор $(\mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0) \in \mathscr{B}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L), \mathscr{P}_0, \mathscr{T}_0),$$

то указанный вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (1.2.4) в смысле С.М.Никольского [19] на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$.

Здесь исследуется квадратурная формула (1.2.4) с произвольными векторами коэффициентов $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов

$$\mathscr{T} = \left\{t_k :\ 0 \le t_1 < t_2 \ldots < t_N \le L\right\}.$$

Обозначим через $\mathscr{H}^\omega := \mathscr{H}^\omega[0, L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \le \omega\left(|t' - t''|\right),\ t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \le \omega(t'') - \omega(t') \le \omega(t'' - t'),\ \ 0 \le t' \le t'' \le L,\ \ \omega(0) = 0.$$

Через $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких кривых $\mathscr{L} \subset R^m$, заданных параметрическими уравнениями (1.2.2), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in \mathscr{H}^{\omega_i}[0, L],\ i = \overline{1, m}$.

В евклидовом пространстве R^m для любых двух точек $\mathscr{M}' = \mathscr{M}(x_1', x_2', \ldots, x_m')$, $\mathscr{M}'' = \mathscr{M}(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ введём в рассмотрение следующее l_p $(1 \le p \le \infty)$-расстояние

$$\rho_p(\mathscr{M}', \mathscr{M}'') = \left\{\sum_{i=1}^m |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p},\ 1 \le p < \infty,$$

$$\rho_\infty(\mathscr{M}',\mathscr{M}'') = \max_{1\le i\le m} |x_i' - x_i''|,\ \ p=\infty.$$

Через $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим класс функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = \mathcal{F}(x_1,\ldots,x_m)$, определённых на кривых $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и для любых двух точек $\mathscr{M}',\mathscr{M}'' \in \mathscr{L}$ удовлетворяющих условию

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega(\rho_p(\mathscr{M}',\mathscr{M}'')).$$

Таким образом, будем писать $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$, если для любых двух точек $\mathscr{M}',\mathscr{M}'' \in \mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ и $t',t'' \in [0,L]$ выполняется неравенство

$$\Big|\mathcal{F}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}(\mathscr{M}'')\Big| \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \Big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\Big|^p\right\}^{1/p}\right) \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(|t'-t''|\right)\right\}^{1/p}\right).$$

Отметим, что класс $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ в случае $\omega(t) = t,\ m = 2$ и $p = 2$ ранее в связи с отысканием точной оценки погрешности криволинейных интегралов вида

$$\int\limits_{\mathscr{L}} \mathcal{F}(x,\, y)dt,$$

когда кривая $\mathscr{L}$ задаётся параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ 0 \le t \le L$, изучен в работе Ф.М.Мирпоччоева [13], а в случае $\omega(t) = t,\ m \ge 2$ - произвольное $(1 \le p \le \infty)$ в работах М.Ш.Шабозова [28] и М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [32], а в случае определённых интегралов в работе [29].

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 1.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида (1.2.4) с произвольными векторами-коэффициентами и узлами* $(\mathscr{P},\mathscr{T})$, $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$, $\mathscr{T} = \{t_k:\ 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L\}$ *наилучшей для класса функций* $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$

$(1 \le p \le \infty)$ *и класса кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t)\right)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\dots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \qquad (1.2.6)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (1.2.6) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (1.2.7)$$

Для доказательства теоремы 1.2.1 нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма A [7, с.177]. *Пусть в области* $D \in R^m$ *фиксирована произвольная система точек* $\mathscr{M}_1, \mathscr{M}_2, ..., \mathscr{M}_\nu$ *и функция* $\mathrm{g}(\mathscr{M})$ *определена равенством*

$$\mathrm{g}(\mathscr{M}) = \min_{1\le j\le\nu}\varphi[\rho(\mathscr{M},\mathscr{M}_j)], \quad \mathscr{M}\in D,$$

где $\varphi(t)$ *– неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям*

$$0 \le \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \le \varphi(t_2 - t_1), \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le \theta,$$

(θ *– диаметр области* D*) функция, а* $\rho(\mathscr{M},\mathscr{M}_j)$ *– расстояние между точками* $\mathscr{M}$ *и* $\mathscr{M}_j$*. Тогда для любых точек* $\mathscr{M}'$ *и* $\mathscr{M}''$ *из* D *имеет место неравенство*

$$|\mathrm{g}(\mathscr{M}') - \mathrm{g}(\mathscr{M}'')| \le \varphi[\rho(\mathscr{M}',\mathscr{M}'')].$$

Следующее утверждение является следствием леммы 8.2.9 Н.П.Корнейчука из [7, с.369-370], доказательство которого несложно проводится по той же схеме.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $\psi_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ *– неубывающие и неотрицательные для* $0\le t\le L$ *функции и при фиксированном* $N=1,2,\ldots$ *вектору*

$$\mathscr{T}=\{t_k:\ 0\le t_1<t_2<\ldots<t_N\le L\}$$

сопоставлена функция

$$\Phi_{1,p}(\mathscr{T},t)=\omega\left(\min_{1\le k\le N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p}\right),\ 0\le t\le L,\ 1\le p\le\infty.$$

Тогда выполняется неравенство

$$\int\limits_0^L\Phi_{1,p}(\mathscr{T},t)dt\ge\int\limits_0^L\Phi_{1,p}(\mathscr{T}_0,t)dt,\tag{1.2.8}$$

где вектор $\mathscr{T}_0$ *определяется координатами* $\tau_k=(2k-1)L/(2N),(k=\overline{1,N})$.

Доказательство. В самом деле, если положить

$$z_0=0,\ \ z_k=\frac{t_k+t_{k+1}}{2},\ \ k=\overline{1,N-1},\ \ z_N=L,$$

то в силу моннотоности функции $\psi_i,\ \ i=\overline{1,m}$ функцию $\Phi_{1,p}(\mathscr{T},t)$ запишем в виде

$$\Phi_{1,p}(\mathscr{T},t)=\omega\left(\min_{1\le k\le N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p}\right)=$$

$$=\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p}\right),\ \ z_{k-1}\le t\le z_k,\ \ k=\overline{1,N}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^L\Phi_{1,p}(\mathscr{T},t)dt=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\psi_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p}\right)dt=$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{z_{k-1}}^{t_k} + \int\limits_{t_k}^{z_k} \right) \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \psi_i^p(|t - t_k|) \right\}^{1/p} \right) dt =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2N} \int\limits_{0}^{\alpha_\nu} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \psi_i^p(u) \right\}^{1/p} \right) du = \sum_{\nu=1}^{2N} \Psi(\alpha_\nu),$$

где, ради краткости положено

$$\alpha_1 = t_1 - z_0, \;\; \alpha_2 = z_1 - t_1, \;\; \alpha_3 = t_2 - z_1, \;\; \alpha_4 = z_2 - t_2, ...$$

$$..., \alpha_{2N-1} = t_N - z_{N-1}, \; \alpha_{2N} = z_N - t_N,$$

причём

$$\sum_{\nu=1}^{2N} \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{2N} = L.$$

Функция $\Psi(t)$ выпукла вниз и в силу неравенства Иенсена (см, например, [27, с.92])

$$\sum_{\nu=1}^{2N} \Psi(\alpha_\nu) \geq 2N\Psi \left(\frac{1}{2N} \sum_{\nu=1}^{2N} \alpha_\nu \right) = 2N\Psi \left(\frac{L}{2N} \right). \tag{1.2.9}$$

Теперь, учитывая равенство (1.2.9), будем иметь

$$\int\limits_0^L \Phi_{1,p}(\mathscr{T}, t)dt \geq 2N\Psi \left(\frac{L}{2N} \right) = \int\limits_0^L \Phi_{1,p}(\mathscr{T}_0, t)dt,$$

откуда и следует утверждение леммы 1.2.1.

Положив в лемме 1.2.1 $\psi_i(t) = \omega_i(t) \;\; i = \overline{1, m}$ из утверждения её относительно этих модулей непрерывности сразу получаем

$$\int\limits_0^L \Phi_{1,p}\left(\mathscr{T}, \, t\right)dt = \int\limits_0^L \omega \left(\left\{ \min_{1\leq k\leq N} \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(|t - t_k|) \right\}^{\frac{1}{p}} \right) dt \geq$$

$$\geq (2N) \int\limits_0^{L/(2N)} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p(t) \right\}^{\frac{1}{p}} \right) dt = \int\limits_0^L \Phi_{1,p}\left(\mathscr{T}_0, \, t\right)dt.$$

Доказательство теоремы 1.2.1. Оценку снизу получим хорошо известным методом Н.П.Корнейчука [8]. Пусть $(\mathscr{P}, \mathscr{T})$ – произвольный вектор коэффициентов и узлов, для которых имеет смысл формула (1.2.4). Через $\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}}$ обозначим множество функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho}$, определённых вдоль кривой $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$, которые в узлах вектора $\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^N$ обращаются в нуль: $\mathcal{F}\left(\varphi_1(t_k),\dots,\varphi_m(t_k)\right) = 0$, $k = \overline{1,N}$. В силу того, что $\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}} \subset \mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho}$, имеем:

$$R_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m};\ \mathscr{P},\mathscr{T}\right) \ge R_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m};\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}\right).$$

Полагая

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = \inf\left\{R_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m};\ \mathscr{P},\mathscr{T}\right):\ (\mathscr{P},\mathscr{T}) \in \mathscr{B}\right\}$$

и учитывая, что для всех функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}}$ $(1 \le p \le \infty)$ квадратурная сумма справа в (1.2.6) равна нулю, будем иметь

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) \ge \mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) =$$

$$= \inf_{(\mathscr{P},\mathscr{T})\in\mathscr{B}}\ \sup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}}}\ \sup_{\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}} \left|\int_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\ \dots,\ \varphi_m(t)\right) dt\right|, \qquad (1.2.10)$$

причём правая часть неравенства (1.2.10) от коэффициентов $\{p_k\}_{k=1}^N$ не зависит. Фиксируем произвольный вектор узлов

$$\mathscr{T} = \{t_k\}_{k=1}^N \ \ (0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L)$$

и определим кривую $\mathscr{L}_0$ параметрическими уравнениями

$$x_i := \varphi_i(t) = \min_k \omega_i\Big(|t - t_k|\Big),\ i = \overline{1,m}.$$

Легко проверить, что $\varphi_i(t) \in \mathscr{H}^{\omega_i}[0,L]$ $i = \overline{1,m}$, а значит кривая $\mathscr{L}_0 \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$. Если теперь функция $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}},$ $(1 \le p \le \infty)$ то в точках

$\mathscr{M}^{(k)} = \mathscr{M}(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)) \in \mathscr{L}$ имеем $\mathcal{F}(\mathscr{M}^{(k)}) \equiv 0,\ k = \overline{1, N}$, а потому получаем

$$\left|\mathcal{F}(\mathscr{M})\right| = \left|\mathcal{F}(\mathscr{M}) - \mathcal{F}(\mathscr{M}^{(k)})\right| \le$$

$$\le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)\right|^p\right\}^{1/p}\right) \le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t - t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)$$

и, следовательно, в силу непрерывности ω, имеем

$$\mathcal{F}(\mathscr{M}) \le \min_{t_k}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)\right|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \omega\left(\min_{t_k}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\varphi_i(t) - \varphi_i(t_k)\right|^p\right\}^{1/p}\right) =$$

$$= \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_m(t)\right) := \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}). \qquad (1.2.11)$$

Функцию $\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M})$, определённую в правой части неравенства (1.2.11), в силу расположения узлов t_k $(t_k < t_{k+1}),\ k = \overline{1, N-1}$, а также монотонности всех модулей непрерывности $\omega_i(\delta),\ i = \overline{1, m}$, можно записать в виде

$$\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}) = \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t - t_k|\right)\right\}^{1/p}\right).$$

Докажем, что функция $\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p}$. Действительно, если $t', t'' \in [0, L]$, то для любых узлов $t_k \in [0, L]$, применяя лемму A, получаем

$$\left|\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}') - \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}'')\right| = \rho\Big(\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}'), \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}'')\Big) =$$

$$= \left|\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t' - t_k|\right)\right\}^{1/p}\right) - \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t'' - t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)\right| \le$$

$$\le \omega\left(\left|\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t'-t_k|\right)\right\}^{1/p}-\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t''-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right|\right)\le$$

$$\le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\omega_i\left(\min_k|t'-t_k|\right)-\omega_i\left(\min_k|t''-t_k|\right)\right|^p\right\}^{1/p}\right)\le$$

$$\le \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t'-t''|\right)\right\}^{1/p}\right),$$

и так как, кроме того $\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M}^{(k)})=0,\ k=\overline{1,N}$, то $\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\mathscr{M})\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}}$ $(1\le p\le\infty)$. Это с учётом (1.2.11) приводит к соотношению

$$\sup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}}}\ \sup_{\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}}\left|R_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T})\right|=$$

$$=\sup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{M}^{\omega,p}_{\rho,\mathscr{T}}}\ \sup_{\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}}\left|\int_0^L\mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t)\right)dt\right|=$$

$$=\int_0^L\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t))dt=$$

$$=\int_0^L\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(\min_k|t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{1.2.12}$$

Пусть $\mathscr{T}_0=\left\{\tau_k^0:\ \tau_k^0=(2k-1)L/(2N),\ k=\overline{1,N}\right\}$. Теперь докажем, что каков бы не был вектор узлов $\mathscr{T}:=\{t_k:\ \ 0\le t_1<t_2<...<t_N\le L\}$ всегда выполняется неравенство

$$\int_0^L\Phi_{1,p}(\mathscr{T},\,t)dt=\int_0^L\omega\left(\min_{1\le k\le N}\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(|t-t_k|)\right\}^{1/p}\right)dt\ge$$

$$\ge\int_0^L\Phi_{1,p}(\mathscr{T}_0,\,t)dt=\int_0^L\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(|t-\tau_k|)\right\}^{1/p}\right)dt=$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right) dt.$$

В самом деле, из неравенства (1.2.8) и вышеприведённой леммы 1.2.1 сразу следует, что при всех $1 \le p \le \infty$ имеет место соотношение

$$\int\limits_0^L \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\min_k |t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right) dt = \int\limits_0^L \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^L \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}_0}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))dt = \int\limits_0^L \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\left|t-\frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right)\right\}^{1/p}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=1}^N \left\{ \int\limits_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\frac{(2k-1)L}{2N}-t\right)\right\}^{1/p}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(t-\frac{(2k-1)L}{2N}\right)\right\}^{1/p}\right) dt = \right.$$

$$= 2\sum_{k=1}^N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right) dt =$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right) dt. \qquad (1.2.13)$$

Таким образом, с учётом (1.2.12) и (1.2.13), имеем оценку снизу

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}; \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) \ge \mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p}; \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) =$$

$$= \inf_{(\mathscr{P},\mathscr{T})} \int\limits_0^L \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t))dt =$$

$$= \int\limits_0^L \mathcal{F}_{p,\mathscr{T}_0}(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t))dt = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right) dt. \quad (1.2.14)$$

Чтобы получить оценку сверху, равную правой части (1.2.14), зададим квадратурную формулу (1.2.4) векторами коэффициентов

$$\mathscr{P}_0 = \{p_k :\ p_k = L/N\}_{k=1}^N \quad (1.2.15)$$

и узлов

$$\mathscr{T}_0 = \left\{\tau_k^0 :\ \tau_k^0 = (2k-1)L/(2N),\ k = \overline{1, N}\right\}. \quad (1.2.16)$$

Тогда для произвольной функции $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ и любой кривой $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ будем иметь

$$\Big|R_N(\mathcal{F}; \mathscr{L}; \mathscr{P}_0, \mathscr{T}_0)\Big| = \Bigg|\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt -$$

$$- \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\, \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)\Bigg| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N} \Bigg|\mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots, \varphi_m(t)\right) -$$

$$- \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)\Bigg| dt \le$$

$$\le \sum_{k=1}^N \int\limits_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\left|t - \frac{(2k-1)L}{2N}\right|\right)\right\}^{1/p}\right) dt =$$

$$=2N\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (1.2.17)$$

Сравнивая неравенства (1.2.14) и (1.2.17), получаем требуемое равенство (1.2.7), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Из доказанной теоремы 1.2.1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.1 при* $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p};\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right)=(2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\left\{\sum_{i=1}^m\omega_i^p(t)\right\}^{\alpha/p}dt. \qquad (1.2.18)$$

В частности, из (1.2.18) при $\alpha=1$, *вытекает результат работы [28]. Если же в (1.2.18) полагать* $\omega_i(t)=\overline{\omega}(t)$ $(i=\overline{1,m})$, *где* $\overline{\omega}(t)$ *заданный модуль непрерывности, то будем иметь*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\alpha,p};\mathscr{H}^{\,\overline{\omega}}\right)=(2N)\sqrt[p]{m^\alpha}\int\limits_0^{L/(2N)}(\overline{\omega}(t))^\alpha\,dt.$$

Следствие 1.2.2. *Если в условиях теоремы 1.2.1 полагать* $\omega_i(t)=t^{\alpha_i}$ $(0<\alpha_i\le 1,\ i=\overline{1,m})$, *то имеем:*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_m}\right)=(2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m t^{\alpha_i p}\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (1.2.19)$$

В частности, полагая в (1.2.19) $\omega(t)=t$, *и* $p=1$ *получаем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_1^{\alpha_i,1};\ \mathscr{H}^{\,1,1,\ldots,1}\right)=\sum_{i=1}^m\frac{L^{\alpha_i+1}}{\alpha_i+1}\cdot\left(\frac{1}{2N}\right)^{\alpha_i}.$$

Отметим, что утверждение теоремы 1.2.1 справедливо на более широких классах функций и кривых, чем классы $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ и $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ – класс функций $\mathcal{F}(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))$, определённых на кривых $\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$, удовлетворяющих для точек $t,t\pm\tau\in[0,L]$ условию

$$\Big|\mathcal{F}\left(\varphi_1(t+\tau),\varphi_2(t+\tau),\cdots,\varphi_m(t+\tau)\right)+$$

$$+\mathcal{F}\left(\varphi_1(t-\tau),\varphi_2(t-\tau),\cdots,\varphi_m(t-\tau)\right)-2\mathcal{F}(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_m(t))\Big|\le$$

$$\le 2\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(|t|)\right\}^{1/p}\right),\ 1\le p\le\infty. \tag{1.2.20}$$

Для квадратурной формулы, заданной векторами коэффициентов (1.2.15) и узлов (1.2.16), погрешность формулы представима в виде

$$R_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0)=J(\mathcal{F},\mathscr{L})-L_N(\mathcal{F};\ \mathscr{L};\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\Big[\mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^0+\tau),\ \varphi_2(\tau_k^0+\tau),\cdots,\varphi_m(\tau_k^0+\tau))+$$

$$+\mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^0-\tau),\ \varphi_2(\tau_k^0-\tau),\cdots,\varphi_m(\tau_k^0-\tau))-$$

$$-2\mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^0),\ \varphi_2(\tau_k^0),\cdots,\varphi_m(\tau_k^0))\Big]d\tau. \tag{1.2.21}$$

Из соотношения (1.2.21) с учётом неравенства (1.2.20) следует оценка сверху

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\omega_2\dots,\omega_m}\right)\le R_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0\right)=$$

$$=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt,$$

а учитывая включение $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}\supset\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$ $(1\le p\le\infty)$, справедливое для любой кривой $\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$, приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m}\right)\ge R_N\left(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m};\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0\right)=$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt.$$

Из двух последних неравенств получаем

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) = \mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\ \ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) =$$

$$= 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида (1.2.4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов* $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$ *наилучшей для классов* $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p}$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула средних прямоугольников (1.2.6). При этом для погрешности формулы (1.2.6) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{2,\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) = \mathcal{E}_N\Big(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}\Big) =$$

$$= (2N) \int\limits_0^{L/(2N)} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt, \tag{1.2.22}$$

где значение правой части равенства (1.2.22) совпадает с правой части соотношения (1.2.7).

Замечание 1.2.1. Отметим, что частные случаи теоремы 1.2.1 при $m = 2$, $p = 2$, $\omega(t) = t$ ранее доказаны в работе М.Ш.Шабозова, Ф.М.Мирпоччоева [31], а случай произвольной $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\omega(t) = t$ доказан в работе М.Ш.Шабозова, К.Тухлиева [32].

§1.3. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов первого рода

В данном параграфе наряду с квадратурной фрмулой

$$J(\mathcal{F};\mathscr{L})\approx\mathcal{L}_N(\mathcal{F};\mathscr{L};\mathscr{P},\mathscr{T}):=\sum_{k=1}^{N}p_k\,\mathcal{F}\Big(\varphi_1(t_k),\,\varphi_2(t_k),\ldots,\,\varphi_m(t_k)\Big),$$

параллельно вводим в рассмотрение следующую квадратурную формулу типа Маркова:

$$\int\limits_0^L\mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt=$$

$$=p_0\mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\,\ldots,\,\varphi_m(0)\right)+p_N\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\,\ldots,\,\varphi_m(L)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}p_k\mathcal{F}\left(\varphi_1(t_k),\,\ldots,\,\varphi_m(t_k)\right)+R_N(\mathcal{F};\mathscr{L})\qquad(1.3.1)$$

с произвольными векторами коэффициентов $\mathscr{P}=\{p_k\}_{k=0}^N$ и векторами узлов

$$\mathscr{T}=\{t_k\}_{k=0}^N:\ 0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_N=L.$$

Далее исследуем квадратурную формулу вида (1.3.1), где заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка: $t_0=0,\ t_N=L$, а узлы $t_1,\,t_2,\ldots,t_{N-1}$ и коэффициенты $p_k\,(k=0,\,1,...,N)$ нужно выбрать оптимальным образом. Имеет место следующая общая

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида (1.3.1) с произвольными векторами коэффициентов и узлов* $(\mathscr{P},\,\mathscr{T})$,

$$\mathscr{P}=\{p_k\}_{k=0}^N,\ \ \mathscr{T}=\{t_k:0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=L\},$$

наилучшей для класса функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1\le p\le\infty)$ *и класса кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула вида трапеций*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt =$$

$$= \frac{L}{2N}\left\{\mathcal{F}(\varphi_1(0),\,\varphi_2(0),...,\varphi_m(0)) + \mathcal{F}(\varphi_1(L),\,\varphi_2(L),...,\varphi_m(L)\right\} +$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right),\,\ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + R_N(\mathcal{F};\mathscr{L}). \qquad (1.3.2)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (1.3.2) на классах функций $\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) = (2N)\int\limits_0^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p(t)\right\}^{1/p}\right)dt. \qquad (1.3.3)$$

Доказательство. Если, как и в предыдущем случае в теореме 1.2.1, через $\mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p}$ обозначить множество функций $\mathcal{F}(\mathscr{M}) \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$, определённых вдоль кривых $\mathscr{L} \subset \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$, которые в узлах вектора

$$\mathscr{T} = \{t_k : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = L\}$$

обращаются в нуль:

$$\mathcal{F}\left(\varphi_1(t_k),\ldots,\varphi_m(t_k)\right) = 0, k = \overline{0,N},$$

то в силу включения $\mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p} \subset \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ (как и при доказательстве теоремы 1.2.1) приходим к следующей оценке снизу величины (1.2.5) для квадратурной формулы (1.3.1):

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) \ge \mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}\right) =$$

$$= \inf_{(\mathscr{P},\mathscr{T})\in\mathscr{B}}\ \sup_{\mathcal{F}\in\mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p}}\ \sup_{\mathscr{L}\subset\mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}}\left|\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt\right| =$$

$$= \inf_{(\mathscr{P},\mathscr{T})} \int\limits_0^L \mathcal{F}^*_{p,\mathscr{T}}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt, \tag{1.3.4}$$

где обозначено

$$\mathcal{F}^*_{p,\mathscr{T}}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)) := \omega\left(\min_k \left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(|t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right),$$

где надо учитывать, что $t_0 = 0,\; t_N = L.$

Полагая

$$\mathscr{T}_1 = \{\tau_k : \tau_k = kL/N,\; k = 0, 1, ..., N\},$$

введём обозначение

$$s_0 = 0 = \tau_0,\;\; s_k = (\tau_{k-1}+\tau_k)/2,\; k = 1, 2, ..., N,\;\; s_{N+1} = \tau_N = L.$$

При этом в силу монотонности $\omega_i(\tau)$ $(i = \overline{1,m}$ очевидно, что

$$\mathcal{F}^*_{p,\mathscr{T}_1}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)) = \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\min_k |t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right),$$

где

$$(s_k \le t \le s_{k+1},\; k = 0, 1, ..., N),$$

используя которое, согласно неравенству (1.2.8), получаем

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}^*_{p,\mathscr{T}}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt = \int\limits_0^L \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(\min_k |t-t_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^L \mathcal{F}^*_{p,\mathscr{T}_1}(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t))dt = \sum_{k=0}^N \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{s_1} \omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\int\limits_{s_k}^{\tau_k} + \int\limits_{\tau_k}^{s_{k+1}}\right)\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt +$$

$$+\int\limits_{s_N}^{L}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right)\right\}^{1/p}\right)dt=\int\limits_{0}^{s_1}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1}\left(\int\limits_{0}^{\tau_k-s_k}+\int\limits_{0}^{s_{k+1}-\tau_k}\right)\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt+$$

$$+\int\limits_{0}^{L-s_N}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt=\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt+$$

$$+2(N-1)\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt+\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt=$$

$$=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{1.3.5}$$

С учётом (1.3.4) и (1.3.5), получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right)\geq\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho,\mathscr{T}}^{\omega,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right)=$$

$$=\inf_{(\mathscr{P},\mathscr{T})}\int\limits_{0}^{L}\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}}^{*}(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t))dt=\int\limits_{0}^{L}\mathcal{F}_{p,\mathscr{T}_1}^{*}(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t))dt=$$

$$=2N\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega\left(\left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p\left(t\right)\right\}^{1/p}\right)dt. \tag{1.3.6}$$

Для получения оценки сверху, рассмотрим квадратурную формулу (1.3.1) с вектором коэффициентов

$$\mathscr{P}_1=\{p_k:p_0=p_N=L/(2N);\ \ p_k=L/N,\ k=1,2,...,N-1\}$$

и вектором узлов $\mathscr{T}_1=\{\tau_k:\ \tau_k=kL/N,\ k=0,1,...,N\}$, полагая

$$s_0=0=\tau_0,\ \ s_k=\frac{\tau_{k-1}+\tau_k}{2}=\left(\frac{(k-1)L}{N}+\frac{kL}{N}\right):2=\frac{(2k-1)L}{2N},$$

$$k = 1, 2, ..., N, \ \ s_{N+1} = L.$$

В самом деле, для произвольных $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_\rho^{\omega,p}$ и $\mathscr{L} \in \mathscr{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ имеем:

$$|R_N(\mathcal{F};\, \mathscr{L};\, \mathscr{P}_1,\, \mathscr{T}_1)| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \left[\mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \ldots,\, \varphi_m(t)\right) - \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right)\right] dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} \int\limits_{s_k}^{s_{k+1}} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right) \right\}^{1/p} \right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(t\right) \right\}^{1/p} \right) dt + \int\limits_{L-L/(2N)}^{L} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(L-t\right) \right\}^{1/p} \right) dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{\tau_k - L/(2N)}^{\tau_k + L/(2N)} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(|t-\tau_k|\right) \right\}^{1/p} \right) dt =$$

$$= 2 \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(t\right) \right\}^{1/p} \right) dt +$$

$$+ 2(N-1) \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(t\right) \right\}^{1/p} \right) dt =$$

$$= 2N \int\limits_{0}^{L/(2N)} \omega \left(\left\{ \sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\left(t\right) \right\}^{1/p} \right) dt. \qquad (1.3.7)$$

Требуемое равенство (1.3.3) следует из сопоставления неравенств (1.3.6) и (1.3.7). Теорема 1.3.1 доказана. Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Следствие 1.3.1. *Если в условиях теоремы полагать* $\omega(t) = Kt^{\alpha}$ $(K > 0,\ 0 < \alpha \le 1)$, *то имеем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{Kt^{\alpha},\,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = 2NK \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\,(t)\right\}^{\alpha/p} dt.$$

Отсюда, в частности, при $\alpha = 1$ *и* $K = 1$ *вытекает результат в виде равенства*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{t,\,p};\ \mathscr{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = 2N \int\limits_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i^p\,(t)\right\}^{1/p} dt$$

из работы [32], а если $\omega_i(t) = \omega(t)$ $(i = \overline{1,m})$, *то получаем равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{t,\,p};\ \mathscr{H}^{\,m,\omega}\right) = 2N\sqrt[p]{m} \int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t)dt.$$

Следствие 1.3.2. *Если в условиях теоремы полагать* $\omega(t) = Kt^{\alpha}$ $(K > 0,\ 0 < \alpha \le 1)$, $\omega_i(t) = K_i t$ $(K_i > 0,\ i = \overline{1,m})$, *то получаем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho}^{Kt^{\alpha},\,p};\ \mathscr{H}^{\,K_1 t,\dots,K_m t}\right) = \frac{KL^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha}} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{m} K_i^p\right\}^{\alpha/p} \cdot \frac{1}{N^{\alpha}}.$$

Теорема 1.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида (1.3.1) с произвольными векторами коэффициентов и узлов* $(\mathscr{P},\ \mathscr{T})$:

$$\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=0}^{N},\ \ \mathscr{T} = \{t_k : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = L\}$$

наилучшей для классов $\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,\,p}$, $\mathfrak{M}_{2,\,\rho}^{\omega,\,p}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\mathscr{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ *является формула трапеций (1.3.2). При этом для погрешности формулы (1.3.2) на указанных классах функций и кривых справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_N\Bigl(\mathfrak{M}_{2,\,\rho}^{\omega,\,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}\Bigr) = \mathcal{E}_N\Bigl(\mathfrak{M}_{\rho}^{\omega,\,p};\ \mathscr{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}\Bigr), \tag{1.3.8}$$

где значение правой части равенства (1.3.8) определено в правой части *соотношения (1.3.3).*

Доказательство теоремы 1.3.2 не приводится, поскольку оно почти не отличается от схемы рассуждений доказательства теоремы 1.2.2, только при этом надо учитывать, что в данном случае концы отрезка, точка $t_0 = 0$ и $t_{N+1} = L$ являются крайными узлами формулы Маркова.

Глава II. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций и кривых с ограниченным по норме градиента в пространствах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

В данной главе найдены как наилучшие весовые квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского, так и наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы в смысле А.Сарда (при фиксированных узлах) для классов функций и кривых с ограниченным по норме пространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ градиентом первого порядка. Для конкретных весовых функций приведен явный вид наилучших квадратурных формул и вычислено точное значение погрешности на рассматриваемых классах функций и кривых.

§2.1. Постановка задач

В данной главе рассмотрим вопрос оптимизации приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода с весом

$$\int\limits_{\mathscr{L}} \gamma(\mathscr{M})\mathcal{F}(\mathscr{M})d\tau \approx \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}(\mathscr{M}_k), \qquad (2.1.1)$$

где весовая функция $\gamma(\mathscr{M}) := \gamma(u_1, u_2, \ldots, u_m) \geq 0$ во всех точках $\mathscr{M} := \mathscr{M}(u_1,\, u_2, ..., u_m) \in \mathscr{L}$, $\mathscr{L}$ - произвольная спрямляемая с конечной длиной L, кривизна которой кусочно - непрерывна, а $\mathcal{F}(\mathscr{M}) := \mathcal{F}(u_1,\, u_2, ..., u_m)$ - произвольная непрерывная на $\mathscr{L}$ функция. Конечную сумму $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}(\mathscr{M}_k)$ состоящую из лилейной комбинации нескольких значений подынтегральной функции, будем называть квадратурной суммой. Для достижения высокой точности при помощи квадратурной формулы (2.1.1), нужно возможно лучшим образом воспользоваться выбором коэффициентов $p_k (k = \overline{1, N})$ и узлов $\mathscr{M}_k (k = \overline{1, N})$ [1], [9], [20].

Всюду далее через $\mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим класс пространственных спрямляемых кривых $\mathscr{L}$, у которых длина равна L, кривизна кусочно - непрерывна и все кривые из класса $\mathfrak{N}_Q(L)$ расположены в области

$$Q = \{(u_1,\, u_2, ..., u_m) : \; u_1^2 + u_2^2 + ... + u_m^2 \leq L^2\}.$$

Хорошо известно [26], что если на кривой $\mathscr{L}$ положительное направление определено так, чтобы положение произвольной точки $\mathscr{M} := \mathscr{M}(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathscr{L}$ могло быть определено длиной дуги $\tau = \overset{\smile}{B\mathscr{M}}$, отсчитываемой от начальной точки B, то тогда кривая $\mathscr{L}$ параметрически определится уравнениями

$$u_1 = \varphi_1(\tau),\; u_2 = \varphi_2(\tau),\; \ldots,\; u_m = \varphi_m(\tau),\; (0 \leq \tau \leq L). \qquad (2.1.2)$$

Обозначим через $\tau_k \in [0;\, L], k = 1,\, 2, ..., N$ значения длины дуги $\breve{B\mathscr{M}}$ кривой $\mathscr{L}$, которые соответствуют точкам $\mathscr{M}_k \in \mathscr{L}$, и перепишем формулу (2.1.1) в виде

$$\int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \ldots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) + R_N(\gamma;\ \mathcal{F};\ \mathscr{L}). \tag{2.1.3}$$

Всюду далее полагаем, что формула (2.1.3) является точной для постоянной функции $\mathcal{F}(\mathscr{M}) = const$, то есть что выполняется условие

$$\int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau = \sum_{k=1}^{N} p_k. \tag{2.1.4}$$

При выполнении условия (2.1.4) для квадратурной формулы (2.1.3) сформулируем экстремальную задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы в смысле А.Н.Колмогорова – С.М.Никольского и Сарда.

В этой главе, мы кроме отыскания наилучших весовых квадратурных формул для криволинейных интегралов на классах функций и кривых (в смысле С.М.Никольского) будем исследовать задачу отыскания наилучших весовых квадратурных формул для криволинейных интегралов по коэффициентам $P = \{p_k\}$ (или только по узлам $\mathscr{T} = \{t_k\}$) в смысле А.Сарда, решая при этом соответствующую экстремальную задачу.

Всякая квадратурная формула вида (2.1.3) задается векторами коэффициентов $\mathscr{P} = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $\mathscr{T} = \{\tau_k : 0 \le \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_{N-1} < \tau_N \le L\}$, где $p_1, p_2, ..., p_N$ – произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию (2.1.4). При фиксированной $N \ge 1$ через $\mathscr{B}$ будем обозначать множество векторов коэффициентов $\{\mathscr{P}\}$ и векторов узлов $\{\mathscr{T}\}$, либо некоторое его подмножество, определяемое теми или иными ограничениями на коэффициенты и узлы квадратурной формулы (2.1.3) (например, требования точности формулы на многочлены заданной степени, положительность коэффициентов p_k $(k = \overline{1, N})$, строгое расположение узлов $t_k < t_{k+1}$ $(k = \overline{1, N})$ и др.).

Пусть $\mathfrak{M} = \{\mathcal{F}(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau))\}$ – некоторый класс функций, определенных вдоль кривой $\mathscr{L} \subset \mathfrak{N}_Q(L)$. Для каждой функции $\mathcal{F}(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau)) \in \mathfrak{M}$ и каждой кривой $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ абсолютная погрешность формулы (2.1.3) имеет вполне определенное числовое значение

$$|R_N(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}; \mathscr{P}, \mathscr{T})| = |\mathcal{J}(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}) - L_N(\mathcal{F}; \mathscr{L})| =$$

$$= \Big| \int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau)) \cdot \mathcal{F}(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau))\, d\tau -$$

$$- \sum_{k=1}^N p_k \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k), \varphi_2(\tau_k), \ldots, \varphi_m(\tau_k)) \Big|.$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций $\mathcal{F}(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau)) \in \mathfrak{M}$ и кривой $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$, примем верхний грань погрешности квадратурной формулы по всем функциям класса:

$$R_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathscr{L}; \mathscr{P}, \mathscr{T}) = \sup\{|R_N(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}; \mathscr{P}, \mathscr{T})| : \mathcal{F} \in \mathfrak{M}\}.$$

Наибольшую погрешность квадратурной формулы (2.1.3) для всех функций $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}$ и кривой $\mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)$ обозначим величиною

$$R_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); \mathscr{P}, \mathscr{T}) = \sup\{R_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathscr{L}; \mathscr{P}, \mathscr{T}) : \mathscr{L} \in \mathfrak{N}_Q(L)\}.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L)) = \inf\{R_N(\gamma; \mathfrak{M}; \mathfrak{N}_Q(L); \mathscr{P}, \mathscr{T}) : (\mathscr{P}, \mathscr{T}) \in \mathscr{B}\} \quad (2.1.5)$$

по всем векторам коэффициентов и узлов $(\mathscr{P},\ \mathscr{T}) \in \mathscr{B}$, по аналогии с монографией С.М.Никольского [20], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (2.1.3) на рассматриваемых классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Если существует квадратурная формула, для которой

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L)) = R_N(\gamma;\mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}_0,\ \mathscr{T}_0),$$

то будем ее называть *наилучшей* (или *оптимальной*) на классах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$, а векторы $\mathscr{P}_0 = \{p_k^0\}_{k=1}^N$ и $\mathscr{T}_0 = \{\tau_k^0\}_{k=1}^N$ наилучшими векторами коэффициентов и узлов в смысле Колмогорова-Никольского.

Пусть задан вектор узлов $\mathscr{T}^* = \{\tau_k^*\}_{k=1}^N$. Требуется определить величину

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \inf\{R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P},\ \mathscr{T}^*) : \mathscr{P} \in \mathscr{B}\} \quad (2.1.6)$$

и если существует вектор коэффициентов $\tilde{\mathscr{P}}^0 \in \mathscr{B}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\tilde{\mathscr{P}}^0,\ \mathscr{T}^*),$$

то квадратурную формулу (2.1.3) будем называть *наилучшей* (или *оптимальной*) по коэффициентам в смысле Сарда.

Если задан вектор коэффициентов $\mathscr{P}^* = \{p_k^*\}_{k=1}^N$ и требуется определить величину

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}^*) = \inf\{R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}^*,\ \mathscr{T}) : \mathscr{T} \in \mathscr{B}\} \quad (2.1.7)$$

и существует вектор узлов $\tilde{\mathscr{T}}^0 \in \mathscr{B}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}^*) = R_N(\gamma;\ \mathfrak{M};\mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{P}^*,\tilde{\mathscr{T}}^0),$$

то квадратурная формула (2.1.3) с фиксированным вектором коэффициентов $\mathscr{P}^*$ и наилучшим вектором узлов $\tilde{\mathscr{T}}^0$ называется наилучшей квадратурной формулой по узлам в смысле Сарда.

§2.2. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом по норме пространства $\mathcal{L}_1(Q)$.

В этом параграфе будем решать задачу Колмогорова-Никольского (2.1.5) для классов функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$ и $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Пусть задан класс $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q),\ \mathscr{M} > 0$ функций $\mathcal{F}(u_1,\, u_2,\, ..., u_m)$, у которых почти всюду в области Q сущесвуют частные производные первого порядка

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_1},\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_m},$$

для которых выполняется неравенство

$$\int\limits_0^L |\mathcal{F}(u_1,\, u_2, ..., u_m)|d\tau =$$

$$= \int\limits_0^L \left|\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{d\varphi_1}{d\tau} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_2}\cdot\frac{d\varphi_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_m}\cdot\frac{d\varphi_m}{d\tau}\right| d\tau \le \mathscr{M}. \qquad (2.2.1)$$

Через $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q),\ \mathscr{M} > 0$ обозначаем множество всех функций $\mathcal{F}(u_1, u_2, ..., u_m)$, принадлежащих соответственно множеству $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q),\ \mathscr{M} > 0$ и удовлетворяющих условию $\mathcal{F}(0, ..., 0) = 0$.

Записав для произвольной функции $\mathcal{F} \in \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ как сложной функции одной переменной $\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши

$$\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \mathcal{F}(\varphi_1(0),\, \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)) +$$

$$+\int\limits_0^L (\tau - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\varphi_1(\tau), ..., \varphi_m(\tau))}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\tau} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}(\varphi_1(\tau), ..., \varphi_m(\tau))}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{d\tau} \right) dt,$$

где введено обозначение $(\tau - t)_+^0 = max(0, \tau - t)$, остаток квадратурной формулы (2.1.3) представим в следующем виде

$$R_N(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}) =$$

$$= \int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \dots,\, \varphi_m(\tau)\right) \cdot \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \dots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} p_k \mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau_k),\, \varphi_2(\tau_k), \dots,\, \varphi_m(\tau_k)\right) =$$

$$= \int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \dots,\, \varphi_m(\tau)\right) \Bigg[\mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\, \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^L (\tau - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt} \right) dt \Bigg] d\tau -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} p_k \Bigg[\mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\, \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^L (\tau_k - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt} \right) dt \Bigg] =$$

$$= \mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\, \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)\right) \cdot \left\{ \int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \dots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau - \sum_{k=1}^{N} p_k \right\} +$$

$$+ \int\limits_0^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \dots,\, \varphi_m(\tau)\right) \times$$

$$\times \left\{ \int_0^L (\tau - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt} \right) dt \right\} d\tau -$$

$$- \int_0^L \left\{ \sum_{k=1}^N p_k (\tau_k - t)_+^0 \right\} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_0^L \left\{ \int_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt - \sum_{k=1}^N p_k (\tau_k - \tau)_+^0 \right\} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{d\tau} \right) d\tau =$$

$$= \int_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\tau} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{d\tau} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{d\tau} \right) K(\tau) d\tau, \qquad (2.2.2)$$

где ядро $K(\tau)$ определяется равенством

$$K(\tau) = \int_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt - \sum_{k=1}^N p_k (\tau_k - \tau)_+^0,$$

где $(\tau_k - \tau)_+^0 := max\{0, (\tau_k - \tau)\}^0$ - сплайн нулевого порядка, т.е., кусочно - постоянная функция на каждом из частичных отрезков $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = 1, 2, ..., N$.

Как известно [20, с.14], погрешность квадратурной формулы (2.1.3) на всем классе $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ и классе кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$ равна

$$R_N\left(\gamma;\, \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L)\right) = sup\left\{|\mathcal{F}(t)| :\; 0 \le t \le L\right\}. \qquad (2.2.3)$$

Следуя схеме рассуждений, приведенной в [1, с.144-146] и работах Ю.М.Гиршовича [5] и М.Ш.Шабозова и С.Каландаршоева [30] введем обозначения

$$\Phi(\tau)=\int\limits_{\tau}^{L}\gamma(\varphi_1(t),\,\varphi_2(t),...,\varphi_m(t))dt,$$

$$B_i=\sum_{i=j+1}^{N}p_i,\ (j=\overline{0,N-1}),\ B_N=0,\ B_0=\Phi(0). \tag{2.2.4}$$

Очевидно, что

$$\sup_{0\le\tau\le L}|K(\tau)|=\sup_{0\le\tau\le L}\left|\Phi(\tau)-\sum_{k=1}^{N}p_k(\tau_k-\tau)_+^0\right|\ge$$

$$\ge max\left\{\sup_{0\le\tau\le\tau_1}|K(\tau)|,\ \sup_{\tau_k\le\tau\le\tau_{k+1}}|K(\tau)|\ (k=\overline{1,N-1}),\ \sup_{\tau_N\le\tau\le L}|K(\tau)|\right\}. \tag{2.2.5}$$

В силу положительности весовой функции $\gamma(\varphi_1(\tau),...,\varphi_m(\tau))$ имеем:

$$\sup_{0\le\tau\le\tau_1}|K(\tau)|=\sup_{0\le\tau\le\tau_1}\left|\int\limits_{0}^{L}\gamma(\varphi_1(\tau),...,\varphi_m(\tau))d\tau-\sum_{k=1}^{N}p_k\right|=$$

$$=\sup_{0\le\tau\le\tau_1}|\Phi(\tau)-\Phi(0)|=\Phi(0)-\Phi(\tau_1),$$

$$\sup_{\tau_N\le\tau\le L}|K(\tau)|=\sup_{\tau_N\le\tau\le L}|\Phi(\tau)|=\Phi(\tau_N),$$

$$\sup_{\tau_k\le\tau\le\tau_{k+1}}|K(\tau)|=\sup_{\tau_k\le\tau\le\tau_{k+1}}|\Phi(\tau)-B_k|\ge\frac{1}{2}|\Phi(\tau_k)-\Phi(\tau_{k+1})| \tag{2.2.6}$$

и равенство в (2.2.6) достигается [18, с.58] только при

$$B_k=\frac{1}{2}[\Phi(\tau_k)+\Phi(\tau_{k+1})],\ (k=\overline{1,N-1}). \tag{2.2.7}$$

Подставляя полученные значения в (2.2.5), получим

$$\sup_{0\le\tau\le L}|K(\tau)|\ge max\left\{\Phi(0)-\Phi(\tau_1),\ \Phi(\tau_N),\ \max_{1\le k\le N-1}[\Phi(\tau_k)-\Phi(\tau_{k+1})]/2\right\}. \tag{2.2.8}$$

Легко заметить, что правая часть неравенства (2.2.8) достигает наименьшего значения тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\tau_k) = \frac{2N-2k+1}{2N} \cdot \Phi(0), \ (k = \overline{1, N}). \tag{2.2.9}$$

Так как при условии (2.2.7) неравенство (2.2.8) обращается в равенство, то (2.2.7) и (2.2.9) определяют наилучшую квадратурную формулу вида (2.1.3) с произвольным положительным весом $\gamma(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))$, заданным и определенным на всех кривых класса $\mathfrak{N}_Q(L)$. Из (2.2.7) и (2.2.3) сразу следует, что

$$p_k = \frac{1}{N}\Phi(0), \ k = \overline{1, N}.$$

Таким образом, доказана следующая общая

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M}; Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))\mathcal{F}(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{\Phi(0)}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k), \varphi_2(\tau_k), ..., \varphi_m(\tau_k)) + R_N(\gamma; \mathcal{F}; \mathscr{L}), \tag{2.2.10}$$

где узлы τ_k *определяются из системы уравнений* (2.2.9). *При этом для погрешности формулы* (2.2.10) *на классах* $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M}; Q)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}\left(\gamma; \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M}; Q); \mathfrak{N}_Q(L)\right) =$$

$$= \frac{\mathscr{M}}{2N}\Phi(0) = \frac{\mathscr{M}}{2N}\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t))dt.$$

Из общего вида квадратурной формулы (2.2.10) видно, что это формула с равными коэффициентами облегчает ее применение в практических целях. Из доказанной теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.2.10) *с весовой функцией* $\gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \tau^{-\alpha},\ 0 < \alpha < 1$ *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \frac{\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))}{\tau^\alpha} d\tau =$$

$$= \frac{L^{1-\alpha}}{(1-\alpha)N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L\right), \varphi_2\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L\right), ...,\right.$$

$$\left.\varphi_m\left(\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} L\right)\right) + R_N(\tau^{-\alpha};\, \mathcal{F};\, \mathscr{L}). \qquad (2.2.11)$$

При этом точная оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы (2.2.11) *на классе функций* $\mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q)$ *и классе кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *равна*

$$\mathcal{E}_N\left(\tau^{-\alpha};\ \mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathscr{M}\, L^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)N},\ \ 0 < \alpha < 1.$$

Следствие 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.2.10) *с весовой функцией* $\gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \sin\dfrac{\pi\tau}{L},\ 0 \le \tau \le L$ *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \sin\frac{\pi\tau}{L} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{2L}{\pi N} \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^*),\, \varphi_2(\tau_k^*), ..., \varphi_m(\tau_k^*)) + R_N(\sin\frac{\pi\tau}{L}; \mathcal{F}; \mathscr{L}), \qquad (2.2.12)$$

где узлы $\tau_k^* = \frac{L}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{2k-1}{N}\right)$, $k = \overline{1, N}$. *При этом для погрешности квадратурной формулы* (2.2.12) *на классах функций* $\mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\sin\frac{\pi\tau}{L};\ \mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathscr{M}\,L}{N}.$$

Следствие 2.2.3. *Пусть* $[0,\, L] = [0,\, 1]$. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.2.10) *с весовой функцией* $\gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}$ *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right),\, \varphi_2\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right), ...,\right.$$

$$\left.\varphi_m\left(sin\frac{(2k-1)\pi}{4N}\right)\right) + R_N(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}};\ \mathcal{F};\ \mathscr{L}), \qquad (2.2.13)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (2.2.13) *на классах функций* $\mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathcal{E}_N\left(\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}};\ \mathscr{W}_1^{(1)}(\mathscr{M};\, Q);\ \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathscr{M}\,\pi}{4N}.$$

Аналогично доказывается

Теорема 2.2.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.1.3) *наилучшей для классов функций* $\mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q)$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула*

$$\int\limits_0^L \gamma(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))\mathcal{F}(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))d\tau =$$

$$= \frac{2\Phi(0)}{2N+1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \mathcal{F}(\varphi_1(\tau_k^*),\, \varphi_2(\tau_k^*), ..., \varphi_m(\tau_k^*)) + R_N(\gamma;\, \mathcal{F};\, \mathscr{L}), \qquad (2.2.14)$$

если узлы τ_k^* *есть решения уравнений*

$$\Phi(\tau_k) = \frac{2N-2k+1}{2N+1}\Phi(0),\ (k = \overline{1, N}),$$

верхная грань ошибки этой формулы равна

$$\mathcal{E}\left(\gamma;\, \mathscr{W}_0^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathscr{M}}{2N+1}\Phi(0) =$$

$$= \frac{\mathscr{M}}{2N+1}\int_0^L \gamma(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t))dt.$$

§2.3. О наилучших весовых квадратурных формулах для криволинейных интегралов первого рода класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q)$

Пусть задан класс $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q)$, $\mathscr{M}>0$ функций $\mathcal{F}(u_1,\,u_2,\,...,u_m)$, у которых почти всюду в области Q сущесвуют частные производные

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_1},\ \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_2},...,\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u_m}$$

и выполняется неравенство

$$\|grad\mathcal{F}(u_1,\,u_2,\,...,u_m)\|_{\mathcal{L}_2(Q)}=$$

$$=\left(\int\limits_0^L\left|\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_2}\right)^2+...+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\varphi_m}\right)^2\right|dt\right)^{1/2}\le\mathscr{M}. \tag{2.3.1}$$

В этом параграфе для квадратурной формулы (2.1.3) решаем задачу Сарда (2.1.6) при фиксированных узлах. Итак, требуется при фиксированном векторе узлов $\mathscr{T}^0=\{\tau_k^0\}_{k=1}^N$ определить нижнюю грань по коэффициентам

$$\mathcal{E}_N\left(\gamma;\,\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q);\,\mathfrak{N}_Q(L);\,\mathscr{T}^0\right)=$$

$$=\inf_{(\mathscr{P})}\left\{R_N\left(\gamma;\,\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q);\,\mathfrak{N}_Q(L);\,\mathscr{P},\,\mathscr{T}^0\right)\right\}. \tag{2.3.2}$$

При этом, если существует вектор коэффициентов $\mathscr{P}^0=\{p_k^0\}_{k=1}^N$, для которого в (2.3.2) достигается нижняя грань, то вектор $\mathscr{P}^0$ определяет наилучшую по коэффициентам $\{p_k\}_{k=1}^N$ квадратурную формулу на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\,Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$. Отыскание наилучших по коэффициентам квадратурных формул при фиксированных узлах, то есть решение задачи (2.3.7), называется задачей Сарда [22]. Для произвольной функции

$\mathcal{F} \in \mathscr{W}^{(1)} L_2(\mathscr{M};\, Q)$ запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши следующего вида:

$$\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)\right) = \mathcal{F}\left(\varphi_1(0),\, \varphi_2(0), ..., \varphi_m(0)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^L (\tau - t)_+^0 \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt} \right) dt, \qquad (2.3.3)$$

где $(\tau - t)_+^0 := \max\{0,\, (\tau - t)\}^0$.

Пользуясь формулой (2.3.3) и остатком квадратурной формулы (2.1.3), с учетом равенства (2.1.4) представим погрешность в интегральном виде

$$R_N(\gamma;\, \mathcal{F};\, \mathscr{L};\, \mathscr{P},\, \mathscr{T}) = \int\limits_0^L \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} + ... + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{d\varphi_m}{dt} \right) \cdot K(t) dt, \qquad (2.3.4)$$

где положено

$$K(t) := \int\limits_t^L \gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) d\tau - \sum_{k=1}^N p_k (\tau_k - \tau)_+^0.$$

Учитывая тождество

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)^2 + ... + \left(\frac{d\varphi_m}{dt}\right)^2 = 1$$

и применяя неравенство Коши - Буняковского к равенству (2.3.4), будем иметь

$$|R_N(\gamma;\, \mathcal{F};\, \mathscr{L};\, \mathscr{P},\, \mathscr{T})| \le \left(\int\limits_0^L \left| \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_m}\right)^2 \right| dt \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^L |K(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_0^L |grad \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^L |K(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathscr{M} \left(\int\limits_0^L |K(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.3.5)$$

Рассмотрим кривую $\mathscr{L}^* \in \mathfrak{N}_Q(L)$, заданную параметрическими уравнениями

$$u_1 = \varphi_1(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{m}}, \ u_2 = \varphi_2(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{m}}, ..., u_m = \varphi_m(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{m}}, \ (0 \leq \tau \leq L),$$

и зададим функцию $\mathcal{F}^*(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau))$ на кривой $\mathscr{L}^* \in \mathfrak{N}_Q(L)$ равенством

$$\mathcal{F}^*(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{\varphi_i(\tau)} \Psi(\tau) d\tau, \qquad (2.3.6)$$

где

$$\Psi(\tau) = \frac{\mathscr{M}}{\sqrt{m}} \left(\int\limits_0^L |K(\tau)|^2 d\tau \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot |\widetilde{K}(\tau)| \cdot sgn \widetilde{K}(\tau),$$

$$\widetilde{K}(\tau) = \int\limits_{\sqrt{m}\tau}^{L} \gamma(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) + \sum_{k=1}^{N} p_k \left(\tau_k - \sqrt{m}\tau\right)_+^0,$$

$$\widetilde{K}\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) \equiv K(\tau).$$

Очевидно, что функция $\mathcal{F}^* \in \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M}; Q)$. В самом деле, из равенства (2.3.6) имеем:

$$\nabla \mathcal{F}^*(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)) = \sum_{i=1}^{m} \Psi(\varphi_i(\tau)) \cdot \varphi_i'(\tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Psi\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \cdot \Psi\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) =$$

$$= \mathscr{M}\left(\int\limits_0^L |K(\tau)|^2 d\tau\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left|\widetilde{K}\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right)\right| \cdot sgn\widetilde{K}\left(\frac{\tau}{\sqrt{m}}\right) =$$

$$= \mathscr{M}\left(\int\limits_0^L |K(\tau)|^2 d\tau\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot |K(\tau)| \cdot sgnK(\tau). \qquad (2.3.7)$$

Учитывая определение класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q)$, из (2.3.7) будем иметь

$$\|\nabla\mathcal{F}^*(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau),\, ...,\varphi_m(\tau))\|^2_{\mathcal{L}_2(Q)} =$$

$$= \mathscr{M}^2\left(\int\limits_0^L |K(\tau)|^2 d\tau\right)^{-1} \cdot \int\limits_0^L |K(\tau)|^2 d\tau = \mathscr{M}^2. \qquad (2.3.8)$$

Таким образом доказано, что функция $\mathcal{F}^* \in \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q)$. Используя равенства (2.3.6)-(2.3.8), получаем

$$\left|R_N\left(\gamma;\, \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\, \mathscr{P},\, \mathscr{T}\right)\right| = \mathscr{M}\left(\int\limits_0^L |K(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.3.9)$$

Итак, задача отыскания наилучшей квадратурной формулы для рассматриваемого класса сводится к задаче нахождения минимума интеграла в правой части равенства (2.3.9) по коэффициентам $p_k\,(k=\overline{1,N})$ при фиксированных узлах $\{\tau_k^0\}\,(k=\overline{1,N})$. Для решения полученной задачи предварительно преобразуем подынтегральное выражение в правой части (2.3.9). Так как

$$\sum_{k=1}^N p_k(\tau_k^0-\tau)_+^0 = \begin{cases} d_1, & \text{при } 0 \le \tau < \tau_1^0, \\ \sum_{i=k}^N p_i := d_k, & \text{при } \tau_{k-1}^0 \le \tau < \tau_k^0, \\ 0, & \text{при } \tau_n^0 \le \tau \le L, \end{cases}$$

то, следуя схеме рассуждений работы [31] и [22], введем в рассмотрение систему функций $\{\sigma_k(\tau)\}_{k=1}^N$, определённых следующим образом:

$$\sigma_k(\tau) := \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \in [\tau_{k-1}^0, \tau_k^0), \\ 0, & \text{если } \tau \notin [\tau_{k-1}^0, \tau_k^0) \end{cases} k = \overline{1, N}$$

в предположении, что $\tau_0^0 = 0$. В принятых обозначениях интеграл в правой части (2.3.9) примет вид

$$\int\limits_0^L K^2(\tau)d\tau = \int\limits_0^L \left[\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt - \sum_{k=1}^N d_k\sigma_k(\tau)\right]^2 d\tau. \tag{2.3.10}$$

Легко проверить, что система функций $\{\sigma_k(\tau)\}_{k=1}^N$ определена при заданных узлах $\{\tau_k^0\}_{k=1}^N$ и ортогональна на отрезке $[0; L]$. Таким образом, задача сведена к такому выбору коэффициентов d_k, чтобы интеграл (2.3.10) принимал наименьшее значение. В [18, с.304-312] доказано, что интеграл (2.3.10) наименьшее значение принимает тогда и только тогда, когда d_k совпадают с коэффициентами Фурье в разложении функции $\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt$ по системе функции $\{\sigma_k(\tau)\}_{k=1}^N$, то есть когда

$$d_k = \frac{1}{D_k}\int\limits_0^L \left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt\right) \sigma_k(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{D_k}\int\limits_{\tau_{k-1}^0}^{\tau_k^0} \left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt\right) d\tau, \tag{2.3.11}$$

где число

$$D_k := \int\limits_0^L \sigma_k^2(\tau)d\tau = \tau_k^0 - \tau_{k-1}^0. \tag{2.3.12}$$

Наименьшее значение интеграл (2.3.10) принимает при значении коэффициентов d_k, определяемых равенством (2.3.11). Этот минимум равен

$$\int\limits_0^L \left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt \right)^2 d\tau - \sum_{k=1}^N D_k d_k^2 =$$

$$= \int\limits_0^L \left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt \right)^2 d\tau - \sum_{k=1}^N (\tau_k^0 - \tau_{k-1}^0) d_k^2. \tag{2.3.13}$$

Из формул $d_k = \sum_{i=k}^N p_i\, (k = \overline{1,N})$ легко определить коэффициенты p_k наилучшей квадратурной формулы для классов $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q)$ и $\mathfrak{N}_Q(L)$ с заданными фиксированными узлами $\mathscr{T}^0 := \{\tau_k^0\}_{k=1}^N$, а именно

$$p_k = d_k^0 - d_{k+1}^0,\ k = \overline{1,N},\ \ d_{N+1} = 0. \tag{2.3.14}$$

Учитывая равенство (2.3.13), точную оценку наилучшей квадратурной формулы, получаем точную оценку погрешности на указанных классах функций и кривых

$$\mathcal{E}_N(\gamma;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^0) =$$

$$= \mathscr{M} \left\{ \int\limits_0^L \left(\int\limits_\tau^L \gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt \right)^2 d\tau - \sum_{k=1}^N D_k d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3.15}$$

Теорема 2.3.1. *Пусть* $\mathscr{T} := \{\tau_k : 0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N \le L\}_{k=1}^N$ *- произвольная система узлов, а коэффициенты* $\mathscr{P} = \{p_k\}$ *квадратурной формулы (2.1.3) имеют вид* $p_k = d_k - d_{k+1},\ k = \overline{1,N},\ d_{N+1} = 0$. *Тогда для погрешности наилучшей по коэффициентам формулы имеет место равенство (2.3.15).*

Рассмотрим примеры

1. Пусть $\gamma\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) \equiv 1$. Фиксируем вектор узлов $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* :\, \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^N$. Исходя из формул (2.3.12)-(2.3.15), находим вектор коэффициентов и погрешность наилучшей формулы:

$$p_k = \frac{L}{N-1}\,(k = \overline{1, N-1}),\ p_N = \frac{L}{2(N-1)};$$

$$\mathcal{E}_N(1;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \frac{\mathscr{M}L^2}{2\sqrt{3}(N-1)}.$$

Полученный результат сформулируем в виде следующего утверждения

Теорема 2.3.2. *Пусть весовая функция* $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \equiv 1$. *Тогда при заданной системе узлов* $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* :\, \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^N$ *наилучшей по коэффициентам квадратурной формулой в смысле Сарда является формула*

$$\int\limits_0^L \mathcal{F}\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)\right) dt =$$

$$= \frac{L}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} \mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right),\, \varphi_2\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), ..., \varphi_m\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\frac{L}{2(N-1)}\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\, \varphi_2(L), ..., \varphi_m(L)\right) + R_N(\mathcal{F},\, \mathscr{L}). \qquad (2.3.16)$$

При этом точная оценка погрешности формулы (2.3.16) равна

$$\mathcal{E}_N(1;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*) = \frac{\mathscr{M}L^2}{2\sqrt{3}(N-1)}. \qquad (2.3.17)$$

2. Пусть теперь $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \equiv \tau$. По формулам (2.3.11)-(2.3.13) получаем:

$$p_k = \frac{1}{6}(\tau_{k+1} - \tau_{k-1})(\tau_{k-1} + \tau_k + \tau_{k+1}),\ (k = \overline{1, N-1});$$

$$p_N = \frac{1}{6}(3 - \tau_N^2 - \tau_{N-1}\tau_N - \tau_{N-1}^2).$$

Применяя оценку (2.3.15), будем иметь

$$\mathcal{E}_N(\tau;\ \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}) =$$

$$= \mathscr{M}\left\{\frac{2L^5}{15} - \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{N}(\tau_k - \tau_{k-1})\left(3 - \tau_{k-1}^2 - \tau_{k-1}\tau_k - \tau_k^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если, в частности, полагать

$$\tau_k := \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\ (k = \overline{1, N}),$$

то для оптимальной по коэффициентам

$$p_k = \frac{(k-1)L^2}{N-1}\ (k = \overline{1, N-1}),\ \ p_N = \frac{1-L^2}{2} - \frac{3N-2}{6(N-1)^2}$$

квадратурной формулы найдём точную оценку погрешности

$$\mathcal{E}_N\left(\tau;\, \mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q);\, \mathfrak{N}_Q(L);\ \mathscr{T}^*\right) = \frac{\mathscr{M}L^2}{4\sqrt{3}(N-1)}. \tag{2.3.18}$$

Итак, доказана следующая

Теорема 2.3.3. *Пусть $\gamma\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), \ldots,\, \varphi_m(\tau)\right) \equiv \tau$. Тогда при заданной системе узлов $\mathscr{T}^* = \left\{\tau_k^* : \tau_k^* = \frac{k-1}{N-1}L\right\}_{k=1}^{N}$ наилучшая по коэффициентам квадратурная формула имеет вид*

$$\int_0^L \tau\mathcal{F}\left(\varphi_1(\tau),\, \varphi_2(\tau), ..., \varphi_m(\tau)\right) d\tau =$$

$$= \frac{L^2}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}(k-1)\mathcal{F}\left(\varphi_1\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), \varphi_2\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right), ..., \varphi_m\left(\frac{(k-1)L}{N-1}\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{1-L^2}{2} - \frac{3N-2}{6(N-1)^2}\right)\mathcal{F}\left(\varphi_1(L),\, \varphi_2(L), ..., \varphi_m(L)\right) + R_N(\tau,\, \mathcal{F},\, \mathscr{L}),$$

погрешность которой на всем классе функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};\, Q)$ имеет вид (2.3.18).

Отметим, что в случае $m = 2$, теорема 2.3.3 доказана Ф.М.Мирпоччоевым [14].

Заключение

Основные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы для вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ для произвольного расположения узлов;
- найден явный вид точной оценки погрешности оптимальной квадратурной формулы типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными крайними узлами;
- найдена оптимальная квадратурная формула для вычисления весовых криволинейных интегралов на классах функций $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_2(\mathscr{M};Q)$ с ограниченным градиентом в норме пространства $\mathcal{L}_2(Q)$;
- найдены оптимальные квадратурные формулы для вычисления весовых криволинейных интегралов для класса $\mathscr{W}^{(1)}\mathcal{L}_1(\mathscr{M};Q)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Результаты диссертационной работы можно использовать в теории приближённого вычисления поверхностных интегралов на классах функций малой гладкости. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Прикладная математика» и «Математика».

Список литературы

[1] Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука. -1975. -632 с.

[2] Бабенко В.Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул // Матем. заметки. -1976. -Т.19. -№3. -С.313-332.

[3] Боянов Б.Д. Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцируемых функций // ДАН ССР. -1977. -232. -№6. -С.1233-1236.

[4] Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. -1986. -Т.38. -№5. -С.643-645.

[5] Гиршович Ю.М. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале // Изв. АН Эст.ССР, сер.физ.-мат.наук. -1975. -Т.24. -№1. -С.121-123.

[6] Женсыкбаев А.А. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов непериодических функций // ДАН ССР. -1977. -Т.236. -№3. -С.531-534.

[7] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения // -М.: Наука. -1987. -424 с.

[8] Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. -1968 -Т.3. -№5. -С.565-576.

[9] Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука. -1967. -500 с.

[10] Левин М.И. Экстремальные задачи для кубатурных формул // ДАН ССР. -1977. -Т.236. -№6. -С.1303-1306.

[11] Лигун А.А. Точные неравенства для сплайнфункций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Матем. заметки. -1976. -Т.19. -№6. -С.913-926.

[12] Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы на некоторых классах функций // Изв. вузов матем. -1969. -№12. -С.53-69.

[13] Мирпоччоев Ф.М. О приближении гладких параметрически заданных кривых ломаными // ДАН РТ. -2011. -Т.54. -№12. -С.963-968.

[14] Мирпоччоев Ф.М. О приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. -2012. -Т.55. -№5. -С.359-365.

[15] Молозёмов В.Н. Оценка точности одной квадратурной формулы для периодических функций // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. -1967. -№1. -С.52-59.

[16] Молозёмов В.Н. О точности квадратурной формулы прямоугольников // Матем. заметки. -1967. -Т.2. -№4. -С.357-360.

[17] Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН ССР. Сер. матем. -1974. -Т.38. -№3. -С.583-614.

[18] Натансон И.П. Конструктивная теория функций. -М.: Гостехиздат. -1949. -688 с.

[19] Никольский С.М. Квадратурные формулы // Изв. АН СССР, сер. математики. -1952. -№16. С.181-196.

[20] Никольский С.М. Квадратурные формулы. - М.: Наука. -1988. -256 с.

[21] Сангмамадов Д.С. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для классов функций и кривых, определяемых модулями непрерывности // ДАН РТ. -2011. -Т.54. -№10. -С.801-806.

[22] Sard A. Best approximate integration formulas, best approximate formulas // American J. Math. -1949. LXXI. -P.80-91.

[23] Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. -2013. -Вып.2. -Ч.1. -С.50-57.

[24] Тухлиев К. Оптимальные квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Моделирование и анализ информационных систем. -2013. -Т.20. -№3. -С.121-129.

[25] Файзмамадова Л.Г. Об оптимальных квадратурных формулах для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. -2013. -Т.56. -№4. -С.265-272.

[26] Финников С.П. Курс дифференциальной геометрии. - М. Гостехиздат. -1952. -343 с.

[27] Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полина Г. Неравенства. - М. -1948. -456 с.

[28] Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки. -2014. -Т.96. -№4. -С.637-640.

[29] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для классов функций, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ. -2014. -Т.1(59). -Вып.1. -С.79-86.

[30] Шабозов М.Ш., Каландаршоев С.С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости // ДАН РТ. -1998. -Т.41. -№10. -С.69-75.

[31] Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. -2010. -Т.53. -№6. -С.415-419.

[32] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ. -2015. -Серия 1. -Т.2. -№4. -С.563-575.

[33] Юсупов Г.А., Шабозова А.А. Точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. -2013. -Т.56. -№7. -С.509-514.

Работы автора по теме диссертации

В изданиях из перечня ВАК:

[34-А] Абдукаримзода М.К. Эрмитовые кубические сплайны и погрешность квадратурных формул, связанных с ними [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - 2018. - №.3. - С.110-116.

[35-А] Абдукаримзода М.К. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.Ш.Шабозов, М.К.Абдукаримзода // ДАН РТ. -2019. -Т.62. -№11-12. -С.619-628.

[36-А] Шабозов М.Ш., Абдукаримзода М.К.Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых [Текст] / М.Ш.Шабозов, М.К.Абдукаримзода // Чебышевский сборник. -2020. -Т.21. -№3. -С.437-448.

[37-А] Абдукаримзода М.К. О наилучших весовых квадратурных формулах для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.К.Абдукаримзода // ДАН РТ. -2020. -Т.63. -№7-8. -С.427-435.

[38-A] Абдукаримзода М.К. Оптимальные квадратурные формулы с весом для криволинейных интегралов на классах функций с ограниченным градиентом в пространстве $\mathcal{L}_1(Q)$ [Текст] / М.К.Абдукаримзода // ДАН РТ. -2020. -Т.63. -№9-10. -С.557-563.

В других изданиях:

[39-A] Абдукаримзода М.К. О точной оценке погрешности наилучших кубатурных формул для некоторых классов функций [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы республиканской научной конференции „*Математический анализ и его приложения*" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.7-11.

[40-A] Абдукаримзода М.К. Наилучшие весовые квадратурные формулы для криволинейных интегралов первого рода [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.26-31.

[41-A] Абдукаримзода М.К. О погрешности квадратурных формул, точных на кубических эрмитовых сплайнах [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы математики и её приложений*" (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С.22-24.

[42-A] Абдукаримзода М.К. О наилучших кубатурных формулах для некоторых классов функций [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы XI международной научно - теоретической конференции „*Компьютерный анализ, проблем науки и технологии*" (Душанбе, 27-28 декабря 2018 г.). – С.33-35.

[43-A] Абдукаримзода М.К. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы естественных и гуманитарных наук и их роль в укреплении научных связей между странами*" (Душанбе, 10-11 октября 2019 г.) – С.3-6.

[44-A] Абдукаримзода М.К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы республиканской научно - практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*" (Душанбе, 26 сентября 2020 г.) – С.261-265.

[45-A] Абдукаримзода М.К. Наилучшие квадратурные формулы с весом для приближенного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для классов функций с ограниченным градиентом по норме пространства $\mathcal{L}_1(Q)$ [Текст] / М.К.Абдукаримзода // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*" (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) – С.12-16.