Отзыв

научного консультанта на диссертационную работу Абдулвохиди Олимхон **«Двоякопериодические решения некоторых классов линейных и нелинейных эллиптических систем второго порядка на плоскости»**, представленную на соискание учёной степени доктора PhD по специальности 6D060100 –математика (01.01.02–дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление)

Актуальность темы диссертации

Изучение задачи существования и нахождения ограниченных, в том числе периодических решений для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных является важным. Так как решения смешанных краевых задач для параболических и гиперболических уравнений сводятся к этим задачам, поскольку в этих уравнениях обычно участвует эллиптический оператор.

Проблеме нахождения периодических решений эллиптических систем посвящено большое число работ. В монографии Берса Л., Джона Ф., Шехтера М., функциональными методами исследована задача о нахождении периодических решений для эллиптических уравнений. Вопрос о разрешимости сводится к известной теореме Фредгольма-Рисса-Шаудера об операторных уравнениях в гильбертовом пространстве и доказывается фредгольмовость задачи.

Одна из главных проблем в моделировании физических процессов в периодических средах - решение локальной задачи на ячейке периодичности. Для периодической композиции однородных материалов решение задач теплопроводности, электродинамики, акустики сводится к построению периодических решений уравнений Лапласа или Пуассона. В плоском случае решения задач на ячейке периодичности заменяют двоякопериодической решеткой и успешно строятся решения в виде рядов по двоякопериодическим функциям комплексного переменного с применением аппарата эллиптических функций.

Исследованию задачи нахождения периодических, в том числе и двоякопериодических, решений для эллиптических уравнений и систем уравнений на плоскости занимались: Ф. Эрве, В.Л. Натанзон, В.И. Показеев, В.В. Показеев, Э.М. Мухамадиев, С. Байзоев, А.А. Джабборов, Д.С. Сафаров, С. Саидназаров , А.Т. Гаюров и др.

В монографии И.Н. Векуа получены формулы комплексного представления, при помощи аналитической функции одной комплексной переменной решение уравнения вида

$$\Delta w + a(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} + c(x,y)w = f(x,y), \qquad (A)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ −оператор Лапласа, и a, b, c, f − заданные аналитические функции переменных x, y в некоторой области D плоскости oxy.Такие решения названы аналитическими по x, y.

Для уравнения (1) даны решения краевых задач Дирихле, Неймана, Пуанкаре и более общие граничные задачи.

В работах И.Н. Векуа , Л. Берса было обнаружено, что глубокая связь между аналитическими функциями и решениями эллиптических уравнений не зависят от аналитичности рассматриваемого решения. Когда в уравнении (A) a, b, c, f- неаналитические им было показано, что уравнение (A) можно свести к уравнению обобщенных аналитических функций (или псевдоаналитических функций). Теория таких уравнений разработаны И.Н. Векуа и Л. Берсом и названы обобщенными аналитическими функциями по Векуа, а по Берсу – псевдоаналитическими.

При исследовании задачи Дирихле для уравнения второго порядка эллиптического типа и построению гомеоморфизмов системы Бельтрами, И.Н. Векуа впервые нашёл метод приведения к двумерному сингулярному интегральному уравнению в рамках пространство Соболева $W_p^{(k)}, p > 2$.

Этот метод получил дальнейшее развитие в работах А.В. Бицадзе , Б.Боярского,В.С.Виноградова,Л.Г.Михайлова, А.Д.Джураева, Н.Р.Раджабова, З.Д.Усманова, А.П.Солдатова, Д.С.Сафарова и др. математиков.

В.С. Виноградов с помощью этого метода Векуа исследовал задачи Дирихле и Неймана для квазилинейных и нелинейных эллиптических систем уравнений второго порядка на плоскости.

Таким же методом в работах Д.С. Сафарова доказана фредголмовость задачи нахождения двоякопериодических решений для равномерно эллиптической системы уравнений первого порядка, общего вида, а также фредголмовость этой задачи для эллиптической систем уравнений вида

$$w_{z\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w_z + c(z)w = f(z), \qquad (0.0.1)$$

в пространстве Соболева $W_p^2(\Omega)$, $p > 2$, Ω −один из параллелограммов периодов, при довольно общих условиях на коэффициентов и правой части.

Уравнение (0.0.1) является комплексной записи уравнения (A).

В ряде работ Д.С. Сафарова , для нелинейного уравнения вида

$$\Delta w + a w_{\bar{z}}^2 = a_1 w^3 + a_2 w^2 + a_3 w + a_4,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 —постоянные числа, найдены явный вид двоякопериодических решений с помощью эллиптической функции Вейерштрасса $\wp(u)$, на плоскости некоторого квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами. Причём периоды зависят от коэффициентов уравнения, что характерно для нелинейных уравнений.

В работах С. Байзаева и его учеников, для квазилинейных эллиптических систем первого и второго порядка изучались вопросы об ограниченных во всей плоскости, в том числе периодических решениях. В случае линейных систем исследованы вопросы нормальной разрешимости нётеровости, вычисление индекса задач об ограниченных решениях в гёльдеровых пространствах.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы, состоящего из 87 наименований, 100 страниц компьютерного набора.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, дается краткий обзор работ близких к тематике исследования, указаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов, излагаются основные результаты работы.

Диссертационная работа посвящена исследованию задачи существования и нахождения двоякопериодических решений с основными периодами h_1, h_2, $Im(h_2/h_1) \neq 0$ для линейной эллиптической системы второго порядка вида (0.0.1).

А также для нелинейной эллиптической системы уравнений вида

$$a(z)ww_{z\bar{z}} + b(z)w_{\bar{z}}w_z + c(z)ww_{\bar{z}} + e(z)w_{\bar{z}}^2 + d(z)w^2 = 0, \quad (0.0.2)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_z = \partial_x - i\partial_y$, − дифференциальный оператор Коши–Римана, $w(z) = u + iv$ − искомая, $4\partial_{\bar{z}z} = \Delta$ − оператор Лапласа и $a(z), b(z), c(z), e(z), d(z)$ − заданные двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2, $Im(h_2/h_1) \neq 0$.

Это уравнение в случае дифференциального оператора Бицадзе А.В. изучено в работе Саидназарова Р.С

Первая глава состоит из 6 параграфов. В первом, втором и третьем параграфах приведены некоторые вспомогательные сведения из монографии Сафарова Д.С.

В четвёртом параграфе найдены квазидвоякопериодические решения уравнения Пуассона

$$w_{z\bar{z}} = f(z), \quad (1.4.1)$$

в классе регулярных решений, то есть из класса C^2 (без полюсов), удовлетворяющее условию

$$w(z+m_1h_1+m_2h_2\}=w(z)+m_1c_1+m_2c_2, \qquad (1.4.2)$$

где c_1, c_2 –произвольные постоянные, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$.

В пятом параграфе для уравнения (1.4.1) исследованы задачи существования и нахождения двоякопериодических решений, допускающие полюса (как у однозначных аналитических или антианалитических функций).

Найдено обобщённое двоякопериодическое решение уравнения с периодами h_1, h_2, такое, что его производная w_z имеет полюс порядка $\lambda \geq 1$, в точке $z = a$, $a \in \Omega$ и в области $\Omega \backslash \{a\}$ принадлежит классу $\tilde{C}_*^2$ и удовлетворяет уравнению (1.4.1), всюду кроме точки $z = a$.

В шестом параграфе рассматриваемой главы для уравнения (1.4.1), ищется обобщенные двоякопериодические решения с заданными главными частями вида

$$2A_1 \ln|z-a_1|, 2A_2 \ln|z-a_2|, \ldots, \ 2A_m \ln|z-a_m|, \qquad (1.6.1)$$

Раньше было найдено решение уравнения (1.4.1) в случае, когда $f(z)$ постоянная.

В этом параграфе получено решение уравнения (1.4.1), имеющее периоды h_1, h_2, с главными частями (1.6.1), точки $a_1, a_2, \ldots, a_m$, вместе со своими сопряжениями $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ лежать внутри основного параллелограмма Ω, содержащей начало координат.

Глава 2 тоже состоит из 6-и параграфов и в нем рассматривается поставленная задача для уравнения (0.0.1) с постоянными и переменными коэффициентами в классе регулярных и обобщенных двоякопериодических функций.

В первом параграфе этой главы исследуется вопрос существования и нахождения двоякопериодических решений класса C_*^2 для эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$w_{z\bar{z}} + aw_{\bar{z}} + bw_z + cw = f(z), \qquad (2.1.1)$$

$a, b, c -$ постоянные, $f(z)$ заданная двоякопериодическая функция класса H_*^α, $0 < \alpha \leq 1$ с основными периодами h_1, h_2, $Im(h_2/h_1) > 0$.

Решение уравнения (2.1.1) найдено в классе C_*^2. Представление многообразия решений уравнения (2.1.2) зависят от свойства постоянных a, b: 1) $a \in \overline{\Gamma}_1, b \in \Gamma_1$; 2) $a \in \overline{\Gamma}_1, b \,\overline{\in}\, \Gamma_1$; 3) $a \,\overline{\in}\, \overline{\Gamma}_1, b \in \Gamma_1$; 4) $a \,\overline{\in}\, \overline{\Gamma}_1, b \,\overline{\in}\, \Gamma_1$.

Во втором параграфе для уравнения (2.1.1), найдено двоякопериодическое решение, имеющие в параллелограмме Ω полюсы в точках $b_1, b_2, b_3, \ldots b_r$ соответственно с кратностями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_r$, $r \geq 1$.

Выяснено что, задача нахождения двоякопериодических обобщенных решений не является нетеровым. Индекс задачи равно $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_r, \lambda_r$ —порядок полюсов $r \geq 1$.

В третьем параграфе для уравнения с переменными коэффициентами

$$Lw \equiv w_{z\bar{z}} + a(z)w_{\bar{z}} + b(z)w_z + c(z)w = f(z), \qquad (2.3.0)$$

получено решение уравнения из класса C_*^2 при предположении, что $a(z)$, $c(z), f(z) \in H_*^\alpha, b(z) \in C_*^1$ и связаны между собой уравнением

$$b_z + a(z)b(z) = c(z). \qquad (2.3.1)$$

Дается описание ядра и коядра оператора L в классе C_*^2. Обозначено через a_0, b_0 числа вида:

$$a_0 = \iint_\Omega a(z)d\Omega, \quad b_0 = \iint_\Omega b(z)d\Omega,$$

и изучены случаи: $a_0 \overline{\in} \Gamma, b_0 \overline{\in} \Gamma$; $a_0 \overline{\in} \Gamma, b_0 \in \Gamma$; $a_0 \in \Gamma, b_0 \overline{\in} \Gamma$; $a_0 \in \Gamma, b_0 \in \Gamma$.

В четвёртом параграфе для уравнения (2.3.0) в классе $\tilde{C}_*^2$ найдено двоякопериодическое решение, допускающие полюса $b_1, b_2, b_3, \dots b_r$, лежащие внутри параллелограмма Ω, с учетом их кратности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_r$, $r \geq 1$.

В пятом и шестом параграфах для уравнения (2.3.0) находим регулярное квазидвоякопериодическое решение уравнения, когда $a(z) \equiv 0$, то есть, для уравнения вида

$$w_{\bar{z}z} + b(z)w_z = f(z), \qquad (2.5.1)$$

где $b(z), f(z)$ – двоякопериодические функции с периодами h_1, h_2 и принадлежащие классу H_*^α, а также когда $b(z) \equiv 0$, то есть, для уравнения

$$w_{\bar{z}z} + a(z)w_{\bar{z}} = f(z). \qquad (2.6.1)$$

Здесь найдены обобщённое квазидвоякопериодическое решения уравнения (2.5.1) и (2.5.2) с основными периодами $h_1, h_2, \operatorname{Im}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) > 0$, то есть, удовлетворяющие условиям

$$w(z + h_j) = w(z) + c_j, \ j = 1,2, \qquad (2.6.2)$$

и допускающие внутри основного параллелограмма Ω, полюсы аналитической функции в точках $a_1, a_2, \dots, a_r$, соответственно порядков не выше $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Класс таких решений уравнения (2.6.1) в случае $c_1 = c_2 = 0$, обозначено через, $\tilde{C}_*^2$.

В третей главе задача существования и нахождения двоякопериодических решений исследуется для некоторых классов нелинейных эллиптических систем с главной частью оператора Лапласа. Для одних классов периоды h_1, h_2 и $Im(h_2/h_1) \neq 0$ можно задавать произвольным образом. А для другого класса уравнений периоды нельзя задавать произвольно. Третья глава состоит из 4-х параграфов.

В первом параграфе исследуется задачи существования и нахождения двоякопериодических решений для уравнения вида

$$ww_{\bar{z}z} - w_{\bar{z}}w_z + aww_{\bar{z}} + bw^2 = 0, \qquad (3.1.1)$$

где a, b — некоторые постоянные с заданными полюсами.

Это уравнение является обобщением уравнений Пенлеве из теории обыкновенных дифференциальных уравнений на комплексную область.

Надо отметить, что порядок полюсов решения уравнения зависит от свойства числа $\frac{b}{a}$: $\frac{b}{a} \in \Gamma_1$ или $\frac{b}{a} \overline{\in} \Gamma_1$.

Во втором параграфе этой главы рассматривается нелинейная эллиптическая система с переменными коэффициентами записанной в комплексной форме вида

$$a(z)ww_{\bar{z}z} + b(z)w_{\bar{z}} \cdot w_z + c(z)ww_{\bar{z}} + e(z)w_{\bar{z}}^{\ 2} + d(z)w^2 = 0, \qquad (3.2.1)$$

где $a(z), b(z), c(z), e(z), d(z)-$ заданные двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2, $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0.$

Решение уравнения (3.2.1) в общем случае нельзя найти в явном виде, однако при некоторых ограничениях на коэффициентов можно их найти.
В конечном итоге получены обобщённые решения уравнения (3.2.1) в смысле Векуа, то есть допускающие полюса.

В третьем параграфе этой главы находится решение квазилинейное уравнени вида

$$w_{\bar{z}z} + \alpha_0 w_z^2 + \alpha_1 w^4 + \alpha_2 w^3 + \alpha_3 w + \alpha_4 = 0 \qquad (3.3.1)$$

где α_j – постоянные, $j = 0,1,2,3,4$.

Решение уравнения (3.3.1) в некоторых частных случаях раньше найдены через обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса, определенные на плоскости некоторого квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами.

Подводя итоги, отметим, что все результаты, полученные в диссертации, являются новыми и их достоверность обоснована строгими математическими доказательствами. Результаты, полученные диссертантом, имеют важное значения, для исследования дальнейшего развития теории линейных и нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений и систем с регулярными и с особыми коэффициентами и разработки новых методов их решения.

Полученные результаты были обсуждены на многих международных и республиканских конференциях. Результаты полученной автором являются определённым вкладом в теорию эллиптических систем дифференциальных уравнений с регулярными, и с особыми коэффициентами.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в 18-и работах, 7-и из которых в рецензируемых изданиях из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистан и РФ.

Исследования, приведенные в диссертации, носят теоритический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории линейных и нелинейных эллиптических уравнений, возникающих в физике, механике и других разделах прикладной математики. Они также, могут быть использованы при исследованиях, проводимых в Самарском государственном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Институт математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистана, Таджикском национальном университете, Бохтарском государственном университете им. Носира Хусрава, Худжандском государственном университете, Душанбинском государственном педагогическом университете имени С.Айни и Кулябском государственном университете имени А.Рудаки.

На основании вышеизложенного считаем, что диссертационая работа Абдувохиди Олимхон «*Двоякопериодические решения некоторых классов линейных и нелинейных эллиптических систем второго порядка на плоскости*», удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора PhD по специальности 6D060100-математика (01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а её автор заслуживает присуждения ему ученой степени доктора PhD по специальности 6D060100-математика (01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление).

Научный консультант,
доктор физико-математических наук, доцент,
01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление
Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич
20.08.2020

Адрес: 735140 Таджикистан, г. Бохтар, ул. Айни д. 67.
Тел.: моб. (+992) 918 66 70 65; e-mail: faizullo100@yahoo.com

Подпись Ф.М.Шамсудинова
заверяю:
Начальник ОК Бохтарского
государственного университета
им.. Носира Хусрава Шукурзод Дж. А.

ШУЪБАИ КАДРҲО