Министерство образования и науки Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.91

На правах рукописи

Ахмедов Джовидон Толибович

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(повторная защита)

01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Нуров И.Д.
Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
член корреспондент НАН Таджикистана,
профессор Мухамадиев Э.М.

Душанбе — 2021

Оглавление

Введение 3

Глава 1 Периодические и ограниченные решения однородного дифференциального уравнения второго порядка 19

1.1. Общее решение однородного дифференциального уравнения . . 19

1.2. Анализ фазовых портретов однородных уравнений 24

1.3. Периодические решения однородного уравнения 35

1.4. Ограниченные решения однородного уравнения 39

1.5. Приложения 43

Глава 2 Периодические и ограниченные решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка 47

2.1. Обозначения, постановка задач и вспомогательные сведения . . 47

2.2. Априорные оценки периодических решений 55

2.3. Вычисление вращения векторных полей 58

2.4. Периодические решения неоднородного уравнения 64

2.5. Ограниченные решения неоднородного уравнения 69

Заключение 73

Список литературы 74

Введение

Актуальность темы. Теория периодических и ограниченных решений обыкновенных дифференциальных уравнений является основополагающим разделом теории колебаний и качественной теории дифференциальных уравнений. Данная теория разработана и развита в работах А. Пуанкаре[44], А.М. Ляпунова[27], А.А. Андронова[4], Т. Важевского[51],[52], Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского[8], М.А. Красносельского[19]-[23] и их последователей.

Настоящая диссертационная работа посвящена вопросов о существования периодических и ограниченных решений одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Периодические и ограниченные решения играют важную роль как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих других научных областях и прикладных задачах. Имеются разделы физики и техники, которые полностью базируются на колебательных явлениях. Эти задачи электромагнитных колебаний [9], которые включают в себя оптику, учение о звуке, радиотехнику и прикладную акустику и т.д. Задачи анализа периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений также возникают в химии [10], при изучении биологических систем [28], [46]-[48], в задачах механики, астродинамики и при моделировании экономических процессов [17].

Такое широкое разнообразие применения теории периодических и ограниченных решений вызывает дополнительный интерес к более глубокому исследованию проблем существования периодических и ограниченных решений систем дифференциальных уравнений.

Существуют целый ряд работ [2], [6], [7], [21], [31], в которых используя различные методы найдены условия существования периодических и ограни-ченных решений линейных и нелинейных систем. В частности, в работах [21],[35], где используются топологические методы [19], [24], как гомотопия векторных полей, вращения вполне непрерывных векторных полей, предметом изучения является дифференциальное уравнение вида

$$y' = P(y) + F(t, y)\,, \quad y \in R^n, \tag{1}$$

где вектор-функция $P(y)$ непрерывна и положительно однородна порядка $m > 0$ $(P(\lambda y) = \lambda^m P(y), \quad \lambda \geq 0)$, а вектор-функция $F(t, y)$ непрерывна по совокупности переменных, и по переменной t либо $F(t+T, y) \equiv F(t, y)$, либо $\sup_t |F(t, y)| < \infty$. При этом $F(t, y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{||y|| \to \infty} \sup_t \frac{|F(t, y)|}{||y||^m} = 0,$$

здесь через $|| \cdot ||$ обозначается евклидова норма в R^n.

Большое число работ (например, [13], [26], [53], [23]) посвящено исследованию вопроса о периодических и ограниченных решениях системы (1). В случае $n = 2$ Р.Е. Гомори [11] исследовал существование периодических решений системы (1). Теоремы Р.Е. Гомори были усилены Н.А. Бобылевым [7] на основе направляющих функции. Система (1) в случае, когда $P()$ зависят от времени исследована Э.М. Мухамадиевым [35]. А также в этой работе изучена эта система, когда свойства однородности вектор-функция $P(y)$ различны для разных её компонентов, т.е. компоненты оператора

$$P(y) = (P_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, P_n(y_1, \cdots, y_n))$$

являются положительно однородными:

$$P_i(\lambda y) = \lambda^{m_i} P_i(y), \quad \lambda > 0, \quad i = 1, \cdots, n,$$

где $m_i > 0$ и необязательно все одинаковые. Случай $n = 2$ и $m_1 \neq m_2$ детально исследован в работах Э.М. Мухамадиева [33] и Х. Абдуваитова [2]. Случай $n = 3$ изучен Р. Азизовым [3].

Различным вопросам исследования систем (1) посвящены также работы других авторов: Д.С.Ушно [49], Liang Zaojun [25], Ye Yangian [54].

Целью данной диссертационной работы является более углублённое исследование этой системы в плоскости. Основной объект исследуемой в диссертации является уравнение вида

$$y'' + g(y, y') = f(t, y, y'), \tag{2}$$

где функция $g(y, z)$- непрерывна и положительно однородна порядка $m = 1$:

$$g(\lambda y, \lambda z) = \lambda g(y, z), \quad \lambda > 0,$$

а $f(t, y, z)$-непрерывная функция, определенная при всех значениях t, y, z и удовлетворяющая условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup_{t, |y|+|z|\leq r} |f(t, y, z)| = 0.$$

Объект исследования. В диссертации рассматривается один класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Предмет исследования. Исследование периодических и ограниченных решений рассматриваемого класса дифференциальных уравнений.

Цель работы. Целью работы является нахождение условий, которые обеспечивают существования периодических и ограниченных решений дифференциального уравнения (2). Для однородного уравнения, соответствующего уравнения (2) провести классификацию и анализ фазовых портретов.

Задачи работы. Для достижения поставленной в работе цели сформулированы следующие задачи:

1. Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2) получить классификацию и построение фазовых портретов и провести анализ устойчивости нулевого решения.

2. Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2) получить условия существования периодических и ограниченных решений.

3. Для периодических решений дифференциальных уравнений (2) получить новые априорные оценки.

4. Вычислить вращения нелинейных векторных полей, соответствующие периодическим решениям уравнений (2).

5. Для дифференциальных уравнений (2) получить условия существования периодических решений.

6. Для дифференциальных уравнений (2) получить условия существования ограниченных решений.

Методы исследования. В работе используются методы качественной теории дифференциальных уравнений, теории нелинейных колебаний, топологические методы, вращение вполне непрерывных векторных полей в банаховом пространстве и гомотопия векторных полей.

Научная новизна. Все основные результаты являются новыми, чётко сформулированными и математически строго доказанными. При использовании работ других авторов даны соответствующие ссылки. Наиболее существенные научные результаты:

1. Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2) дана классификация и анализ фазовых портретов и проведён анализ устойчивости нулевого решения.

2. Для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2) получены условия существования периодических и ограниченных решений.

3. Для периодических решений дифференциальных уравнений (2) получены новые априорные оценки.

4. Вычислены вращения нелинейных векторных полей, соответствующие периодическим решениям уравнений (2).

5. Для дифференциальных уравнений (2) получены условия существования периодических решений.

6. Для дифференциальных уравнений (2) получены условия существования ограниченных решений.

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказательства теорем существования периодических и ограниченных решений и получение классификации фазовых портретов для однородных уравнений, соответствующего уравнению (2).

2. Доказательство теоремы устойчивости решений однородных дифференциальных уравнений, соответствующего уравнению (2).

3. Доказательство теорем о существовании априорных оценок для периодических решений уравнения (2).

4. Доказательство теоремы существования периодических решений дифференциальных уравнений (2).

5. Доказательство теоремы существования ограниченных решений дифференциальных уравнений (2).

Теоретическая и практическая ценность. В работе обоснована схема исследования периодических и ограниченных решений нелинейных уравнений второго порядка. Полученные результаты доведены до расчетных формул. Использованные методы могут быть применены при исследовании динамических систем, математических моделей, содержащих кусочно-линейные и нелинейные функции и т.д. Эти результаты несут также практическую ценность, поскольку периодические и ограниченные решения дифференциальных уравнений широко применимы в различных областях химии, биологии, физики, техники и т.д.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы качественной теории дифференциальных уравнений, топологические методы и теорию вращения вполне непрерывных векторных полей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были доложены в международных научных конференциях «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённой 80-летию профессора В.Я. Стеценко (Душанбе, 27-28 апреля 2015г.); «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (г. Уфа, БашГУ, 1-3 октября 2015г.); «Современные проблемы математики и её приложений» (Филиал МГУ в городе Душанбе, 3-4 июня 2016г.); «Современные методы теории функции и смежные проблемы» (Воронеж, 26.01 – 01.02.2017г.); международная конференция по теории функций, посвящённая 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (г. Уфа, 24-27 мая 2017г.); «Математика-Компьютер-Образования» (г. Дубна, 29.01 – 03.02.2018г., г. Пущино, 28.01 – 02.02.2019г.); «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции», посвящённая 90-летию академика НАН Таджикистана Михайлова Л.Г. (Душанбе, 27-28 февраля 2018г.); «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённая 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана Илолова Мамадшо (Душанбе, 14-15 марта 2018г.); «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравне-ния с сингулярными коэффициентами», посвящённая 70-летию профессора Джангибекова Г. (Душанбе, 30-31 января 2020); «Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений», посвящённая 70-летию профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020).

Личный вклад автора. Постановка основных задач принадлежит научным руководителям. Результаты диссертации получены автором самостоятельно. При выполнении работ, опубликованных в соавторстве, соискатель принимал участие в обосновании предлагаемых алгоритмов.

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 15 работах, 4 из них входят в списки ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 69 наименований, занимает

81 страниц машинописаного текста и набрана на LATEX.

Краткое содержание работы

Прежде чем перейти к изложению результатов работы, особо отметим, что в работе используется известный топологический метод, восходящие к Лере и Шаудеру и развитый Красносельским. Применительно к нашему случаю этот метод приводит к следующему принципу:

если для $T-$периодических решений семейства уравнений

$$y'' + g(y, y') = \lambda f(t, y, y')$$

или же систем

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -g(y_1, y_2) + \lambda f(t, y_1, y_2), \qquad \lambda \in [0, 1] \end{cases}$$

справедлива априорная оценка и векторное поле

$$(\Phi y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t P(y(s))ds,$$

где $y(t) = (y_1(t), y_2(t)), P(y) = (y_2, -g(y_1, y_2)),$ *на сферах большого радиуса пространства* $C_{[0,T]}$ *имеет ненулевое вращение, то уравнение* (2) *имеет по крайне мере одно* $T-$*периодическое решение.*

План исследований в диссертации в основном базируется на этом принципе.

Во введении освещается цель работы, апробация и краткое изложение результатов диссертационной работы.

В **первой главе** (§§1.1-1.5) приводятся результаты диссертации, связанные с классификацией фазовых портретов и анализом существования периодических и ограниченных решений однородных дифференциальных уравнений вида

$$y'' + g(y, y') = 0, \tag{3}$$

где функция $g(x,y)$-непрерывна по совокупности переменных x, y, положительно однородна первого порядка: $g(\lambda x, \lambda y) = \lambda g(x,y)$ - для всех $(x,y) \in R^2, \lambda \geq 0$.

В §1.1 приведена формула представления решения системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g(x_1, x_2), \end{cases} \tag{4}$$

эквивалентной уравнению (3). Предполагается, что система (4) имеет единственное стационарное решение, т.е. $g(\pm 1, 0) \neq 0$ и функция $g(y,z)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|g(y_1, z_1) - g(y_2, z_2)| \leq L(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|),$$

где $L > 0$-постоянная (константа Липшица).

Для исследования характера поведения траектории системы (4) перейдем к полярным координатам ρ, φ заменой $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$. Относительно искомых функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$ система (4) примет вид

$$\begin{cases} \varphi' = -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi), \\ \rho' = \rho(\sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)). \end{cases}$$

В §1.2 изучается расположения траектории системы (4) в окрестности особой точки $(0,0)$, предполагая ее изолированность: $g(\pm 1, 0) \neq 0$. Траектория системы (4) определяется поведением 2π-периодической функции $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому рассматривается уравнение

$$-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0. \tag{5}$$

Возможны следующие случаи.

1. Уравнение (5) не имеет решения, т.е $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in [0, 2\pi]$. В этом случае определим число

$$\gamma = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)} d\varphi.$$

При этом траектория системы (4) окружность и нулевая особая точка является центром, если $\gamma = 0$; совершает бесконечно много оборотов вокруг особой точки и особая точка является устойчивым фокусом, если $\gamma > 0$, неустойчивым, если $\gamma < 0$.

Все траектории системы (4) которые могут наблюдаться в фазовой плоскости, в случае когда уравнение (5) имеет решение, в основном разделяются на следующие классы:

Параболические – когда $\rho(t) \to 0$ при $t \to -\infty(+\infty)$ и $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty(-\infty)$.

Гиперболические – когда $\rho(t) \to \infty$ при $t \to \pm\infty$.

Эллиптические – когда $\rho(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Сектор $S(\varphi_1, \varphi_2) = \{(\rho, \varphi) : \rho > 0,\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$, где (φ_1, φ_2) составляющий интервал множества $\{\varphi : -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$, называют соответственно, параболическим, гиперболическим и эллиптическим, если все траектории $(\rho(t), \varphi(t))$, где $(\rho(0), \varphi(0)) \in S(\varphi_1, \varphi_2)$ являются параболическими, гиперболическими и эллиптическими.

В силу изолированности нулевой особой точки системы (4) и 2π-периодичности функции $g(\cos\varphi, \sin\varphi)$, без ограничения общности, можно предполагать, что составляющий интервал (φ_1, φ_2) множества $\{\varphi : -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$ удовлетворяет условиям: $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $\varphi_1 \in (k_1\pi/2, (k_1+1)\pi/2)$ для некоторого $k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\varphi_2 \in (k_2\pi/2, (k_2+1)\pi/2)$ для некоторого $k_2 \in \{k_1, k_1+1, k_1+2, k_1+3, k_1+4\}$. В этом параграфе доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. *Сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является параболическим тогда и только тогда, когда $k_1 + k_2$-четное число.*

В случае, когда $k_1 + k_2$-нечетно, сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ может быть как гиперболическим так и эллиптическим. При этом для некоторых значений (k_1, k_2) гиперболичность или эллиптичность сектора определяется знаком функции $g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2).

Лемма 2. *Пусть $k_1 + k_2$-нечетно и выполнено одно из условий: 1) $(k_1, k_2) \notin \{(1,2), (3,4), (1,4), (3,6)\}$; 2) $(k_1, k_2) = (1,2)$ и $g(-1,0) > 0$; 3) $(k_1, k_2) = (3,4)$ и $g(1,0) < 0$. Тогда сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является гиперболическим. Обратно, если сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является гиперболическим, то выполнено одно из условий 1)-3).*

Лемма 3. *Пусть выполнено одно из условий: 1) $(k_1, k_2) \in \{(1,4), (3,6)\}$; 2) $(k_1, k_2) = (1,2)$ и $g(-1,0) < 0$; 3) $(k_1, k_2) = (3,4)$ и $g(1,0) > 0$. Тогда сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является эллиптическим. Обратно, если сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является эллиптическим, то выполнено одно из условий 1)-3).*

Уравнение (5) в силу однородности и 2π-периодичности функция g распадается на два уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + g(1, \operatorname{tg} \varphi) = 0, \qquad \varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{6}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi - g(-1, -\operatorname{tg} \varphi) = 0, \qquad \varphi \in (\pi/2, 3\pi/2). \tag{7}$$

С учётом некоторых свойств значений $g(\pm 1, 0)$ и решения уравнений (6) и (7) приведены всевозможные случаи поведения траектории системы на фазовой плоскости.

В параграфе §1.3 исследуется периодические решения и устойчивость нулевого решения системы (4). Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0, \forall \varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда уравнение (3) имеет ненулевое периодическое решение тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$. При этом величина периода*

$$T = k \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, k \in Z.$$

Теорема 2. *Если функция g удовлетворяет одному из условий:*

1) $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0, \forall \varphi$ *и* $\gamma > 0$;

2) *уравнение (5) имеет решение и все его решения принадлежат интервалом* $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$;

то нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво. Обратно, если нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво, то функция g удовлетворяет одному из условый 1), 2).

В §1.4 исследуются ограниченные решения системы (4). В случае, когда $k_1 + k_2$-нечетно, имеют место следующие утверждения:

Теорема 3. *Для того чтобы, в полуплоскости $x_1 \geq 0$ система (4) имела ограниченные на всей оси решения, отличные от стационарного решения, необходимо и достаточно чтобы $(k_1, k_2) = (3, 4)$ и $g(1, 0) > 0$.*

Теорема 4. *Для того чтобы, в полуплоскости $x_1 \leq 0$ система (4) имела ограниченные на всей оси решения, отличные от стационарного решения, необходимо и достаточно чтобы $(k_1, k_2) = (1, 2)$ и $g(-1, 0) < 0$.*

Теорема 5. *Пусть $(k_1, k_2) \in \{(1, 4), (3, 6)\}$. Тогда система* (4) *имеет ограниченные на всей оси решения отличные от стационарного.*

Из выше приведённых теорем и лемм вытекает

Следствие 1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

1. $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$, *и либо* $\gamma \neq 0$, *либо* $\gamma = 0$ и $T \neq k \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, \quad k \in Z$;
2. $(k_1, k_2) \notin \{(1, 2), (3, 4), (1, 4), (3, 6)\}$;
3. $(k_1, k_2) = (1, 2)$ и $g(-1, 0) > 0$;
4. $(k_1, k_2) = (3, 4)$ и $g(1, 0) < 0$.

Тогда система (4) *не имеет ненулевого ограниченного на всей оси решения.*

В §1.5 используя некоторые результаты работ [36],[37] исследуется кусочно-линейное уравнение

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = 0 \qquad (8)$$

на предмет наличия, или отсутствия периодических и ограниченных решений.

Теорема 6. *Пусть* $d = 0,\ b \neq 0$. *Для того чтобы уравнение (8) имело ненулевое ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического, необходимо и достаточно, чтобы* $|a| < |c|$ *и* $0 < 4b \le (|c| - |a|)^2$.

Следствие 2. *Пусть* $d = 0, b \neq 0$. *Тогда уравнение* (1.19) *не имеет ненулевого* T*- периодического решения, если* $(a, 4b - c^2) \neq (0,\ 16\pi^2 k^2/T^2)$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $d \neq 0$ *и* $|b| - c|d| \neq 0$. *Тогда уравнение* (1.19) *не имеет ненулевого* T*-периодического решения, если* $a/d \notin (0, 2)$ *или* $a/d \in (0, 2)$ *и* $(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2 - a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}) \neq (0, \frac{4k\pi}{T})$, *для всех k=1,2,....*

В плоскости (a, b) определим множества

$$I(c) = \{(a, b) : \quad a = 0, \quad 4b > c^2\},$$

$$I(c, d) = \{(a, b) : \quad ad > 0,\ 2ab = d(c^2 + a^2)\},$$

$$\Delta(c) = \{(a, b) : \quad -c \le a \le c, \quad 0 \le 4b \le (|c| - |a|)^2\},$$

$$\Delta(c, d) = \{(a, b) : \quad 2\sqrt{2c} - c \le a \le c,\ 4c|d| \le 4b \le a^2 + c^2 - 2c|2d - a|\}.$$

Следствие 3. *Пусть* $d = 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют условиям* $b \neq 0$ и $(a, b) \notin I(c) \cup \Delta(c)$. *Тогда уравнение* (1.19) *не имеет ненулевого ограниченного на всей оси решения.*

Пусть $d \neq 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют условиям,* $|b| - c|d| \neq 0$ *и* $(a, b) \notin I(c, d) \cup \Delta(c, d)$. *Тогда уравнение* (1.19) *не имеет ненулевого ограниченного на всей оси решения.*

Во **второй главе** (§§2.1-2.5) приводятся результаты диссертации, связанные с анализом существования периодических и ограниченных решений неоднородных дифференциальных уравнений вида (2).

В §2.1 приведены основные обозначения и постановка задач. А также приводятся основные понятия и используемые в дальнейшем результаты. Она имеет дело с общими сведениями из теории вращения вполне непрерывных векторных полей и их приложениях к периодическим и ограниченным решениям систем дифференциальных уравнений.

В §2.2 получены условия на функция $g(y, y')$, при которых для всех $T-$периодических решений семейства уравнений

$$y'' + g(y, y') = \lambda f(t, y, y'), \quad \lambda \in [0, 1] \tag{9}$$

справедливо априорная оценка.

Теорема 7. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

1. $\exists\varphi \in [0, 2\pi]$, *такое что* $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) = 0$*;*
2. $\forall\varphi \in [0, 2\pi], sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$ *и* $\gamma \neq 0$*;*
3. $\forall\varphi \in [0, 2\pi], sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$ *и* $\gamma = 0$ *и* $T \neq k \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, k \in Z.$

Тогда $\exists R > 0$*, что для всех* T*-периодических решений* $y_\lambda(t)$ *семейства уравнений (9) справедливо неравенство*

$$\max_t (|y_\lambda(t)| + |y'_\lambda(t)|) \leq R.$$

Далее, так как отыскание $T-$ периодических решений эквивалентного уравнения (2) системе

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -g(y_1, y_2) + f(t, y_1, y_2), \end{cases}$$

эквивалентно нахождению решений на отрезке $[0, T]$ системы

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(T) + \int_0^t y_2(s)ds, \\ y_2(t) = y_2(T) + \int_0^t [-g(y_1(s), y_2(s)) + f(s, y_1(s), y_2(s))]ds, \end{cases}$$

поэтому рассматривается вполне непрерывное векторное поле

$$(\Phi y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t [P(y(s)) + F(s, y(s)]ds,$$

где

$$P(y) = (y_2, -g(y_1, y_2)), \quad F(t, y) = (0, -f(t, y_1, y_2),$$

в пространстве $C_{[0,T]}-$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функций $y(t)$.

Параграф §2.3 посвящён вычислению вращения векторного поля Φ. Пусть $S(R) = \{y_1(t), y_2(t) \in C_{[0,T]} : \max_t(|y_1(t)| + |y_2(t)|) < R, \quad t \in [0,T]\}$; $\dot{S}(R) = \{y_1(t), y_2(t) \in C_{[0,T]} : \max_t(|y_1(t)| + |y_2(t)|) = R, \quad t \in [0,T]\}$ – граница области $S(R)$. Обозначим через S единичную окружность в R^2.

Наряду с бесконечномерным полем Φ рассматривается двумерное поле

$$\Psi(y) = P_0(y),$$

где $y = \{y_1, y_2\}$, $P_0(y) = \{-y_2, g(y_1, y_2)\}$.

Из теоремы 7 вытекает

Следствие 4. *Векторное поле* Φ *невырожденно на* $\dot{S}(R)$ *и гомотопно с*

$$(\Phi_1 y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t P(y(s))ds.$$

И вращение $\gamma(\Phi_1, \dot{S}(R))$ *поля* Φ_1 *совпадает с вращением* $\gamma(\Psi, S)$ *конечномерного поля* Ψ *на* S.

Имеет место, следующее утверждение

Теорема 8. *Пусть* $g(1,0) \cdot g(-1,0) < 0$, *тогда*

$$\gamma(\Psi, S) = \frac{sign g(1,0) - sign g(-1,0)}{2}.$$

С учётом выше приведённых утверджений в §2.4 доказана следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть* $g(1,0) \cdot g(-1,0) < 0$ *и выполняются условия теоремы 7. Пусть функция* $f(t,y,z)$ T*-периодическая по переменной* t. *Тогда уравнение (2) имеет по крайне мере одно* T*-периодическое решение.*

Параграф §2.5 посвящен исследованием ограниченных решений неоднородного уравнения (2). В этом параграфе доказана следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть* $g(1,0) \cdot g(-1,0) < 0$ *и выполнены условия следствия 1. Тогда уравнение (2) имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

А также в параграфах §§2.2-2.5 в качестве примера рассмотрено уравнение вида

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = f(t, y, y'). \tag{10}$$

Из полученных теорем в этих праграфах вытекает следующие следствия:

Следствие 5. *Пусть* $b \neq 0, d = 0$ *и выполнено одно из следующих условий:*

1. $a \neq 0$;
2. $a = 0$ и $b \neq \frac{c^2}{4} + \frac{4\pi^2 k^2}{T^2}$, *для всех* $k = 1, 2, \ldots$;

Тогда $\exists R > 0$, *что для всех* $T-$*периодических решений* $y_\lambda(t)$ *семейства уравнений*

$$y'' + ay' + by + c|y'| = \lambda f(t, y, y'), \quad \lambda \in [0, 1],$$

справедлива априорная оценка (2.18).

Следствие 6. *Пусть* $d \neq 0, |b| - c|d| \neq 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют одному условий: либо* $a/d \notin (0, 2)$, *либо* $a/d \in (0, 2)$ *и*

$$(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2 - a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}) \neq (0, \frac{4k\pi}{T}), \text{ для всех } k\text{=1,2,}\ldots.$$

Тогда $\exists R > 0$, *что для всех* $T-$*периодических решений* $y_\lambda(t)$ *семейства уравнений*

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = \lambda f(t, y, y'), \quad \lambda \in [0, 1],$$

справедлива априорная оценка (2.18).

Следствие 7. *Пусть* $d = 0, b \neq 0$, $(a, 4b - c^2) \neq (0,\ 16\pi^2 k^2/T^2)$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$ *и* $f(t, y, z)$ $T-$*периодическая по переменной* t. *Тогда уравнение* (10) *имеет по крайней мере одно* $T-$*периодическое решение.*

Пусть $d \neq 0$ *и* $|b| - c|d| \neq 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют одному из условий: либо* $a/d \notin (0, 2)$, *либо* $a/d \in (0, 2)$ *и*

$$(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2 - a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}) \neq (0, \frac{4k\pi}{T}), \text{ для всех } k\text{=1,2,}\ldots.$$

Пусть функция $f(t,y,z)$ $T-$*периодическая по переменной* t. *Тогда уравнение* (10) *имеет по крайней мере одно* $T-$*периодическое решение.*

Следствие 8. *Пусть* $d=0$ *и коэффициенты* a,b *удовлетворяют условиям* $b\neq 0$ *и* $(a,b)\notin I(c)\cup\Delta(c)$. *Тогда уравнение* (10) *имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

Пусть $d\neq 0$ *и коэффициенти* (a,b) *удовлетворяют условиям* $|b|-c|d|\neq 0$ *и* $(a,b)\notin I(c,d)\cup\Delta(c,d)$. *Тогда уравнение* (10) *имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

В **заключении** к диссертации представлены основные результаты работы и возможные дальнейшие темы исследований.

Глава 1. Периодические и ограниченные решения однородного дифференциального уравнения второго порядка

В этой главе рассматривается один класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [6], [5], [38], [40]. Отражены основные результаты диссертации, связанные со существованием периодических и ограниченных решений однородных дифференциальных уравнений.

§ 1.1. Общее решение однородного дифференциального уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + g(y, y') = 0, \tag{1.1}$$

где функция $g(x, y)$-непрерывна по совокупности переменных y, y' положительно однородна первого порядка: $g(\lambda x, \lambda y) = \lambda g(x, y)$ - для всех $(x, y) \in R^2, \lambda \geq 0$.

Отметим, что функция $g(x, y)$ в силу непрерывности и однородности $g(x, y) = |x| g(\varepsilon, y/|x|), \varepsilon = x/|x|, x \neq 0$ однозначно определяется по двум непрерывным функциям $g_+(s) = g(1, s)$ и $g_-(s) = g(-1, s)$ у которых существуют пределы отношений $g_+(s)/s$ и $g_-(s)/s$ при $s \to +\infty$ и $s \to -\infty$, причем имеет место

$$\lim_{s \to \pm\infty} g_+(s)/s = \lim_{s \to \pm\infty} g_-(s)/s.$$

В данном случае функция $g(x, y)$ определяется формулами

$$g(x, y) = \begin{cases} x \cdot g_+(y/x), & \textit{если} \quad x > 0, \\ x \cdot g_-(y/x), & \textit{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

$$g(0, y) = \begin{cases} b_+ \cdot y, & \textit{если} \quad y \geq 0, \\ b_- \cdot y, & \textit{если} \quad y < 0, \end{cases}$$

где

$$b_+ = \lim_{s\to+\infty} g_+(s)/s = \lim_{s\to+\infty} g_-(s)/s,$$

$$b_- = \lim_{s\to-\infty} g_+(s)/s = \lim_{s\to-\infty} g_-(s)/s.$$

Другое представление однородной функции - через ее значение на единичной окружности: $g(x,y) = \rho g(\cos\varphi, \sin\varphi)$, где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ - непрерывная 2π-периодическая функция.

В уравнение (1.1), полагая $x_1 = y$, $x_2 = y'$, придем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1.2}$$

Координаты точки покоя находятся из системы уравнений

$$x_2 = 0, -g(x_1, x_2) = 0. \tag{1.3}$$

Так как из системы (1.2) следует, что траектории автономной системы удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g(x_1, x_2)}{x_2}, \tag{1.4}$$

то из равенства (1.3) видно, что точка покоя – это особая точка для уравнения (1.4). В дальнейшем будем предполагать, что система (1.2) имеет единственную стационарную точку $(0,0)$, т.е. функция g удовлетворяет условию $g(\pm 1, 0) \neq 0$. Нам ниже понадобятся свойства существования или отсутствия ненулевых периодических или ограниченных на все оси решений (эллиптические траектории) системы (1.2). При изучении этих свойств сам собою встает вопрос о получении критерий существования ненулевых периодических или ограниченных решений системы (1.2) в терминах свойства функции g.

Для исследования характера поведения траектории системы (1.2) приведем сначала формулу представления решения системы (1.2). С этой целью перейдем к полярным координатам ρ, φ заменой

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\varphi, \\ x_2 = \rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.5}$$

Берем производную по t, умножим (1.5) на $(-sin\varphi, cos\varphi)$ и $(cos\varphi, sin\varphi)$ соответственно, получим следующие системы

$$\begin{cases} -x_1' \cdot sin\varphi = -\rho' cos\varphi \cdot sin\varphi + \rho sin^2\varphi \cdot \varphi', \\ x_2' \cdot cos\varphi = \rho' cos\varphi \cdot sin\varphi + \rho cos^2\varphi \cdot \varphi', \end{cases} \tag{1.6}$$

и

$$\begin{cases} x_1' \cdot cos\varphi = \rho' cos^2\varphi - \rho sin\varphi \cdot cos\varphi \cdot \varphi', \\ x_2' \cdot sin\varphi = \rho' sin^2\varphi + \rho sin\varphi \cdot cos\varphi \cdot \varphi'. \end{cases} \tag{1.7}$$

Далее, первую строку системы (1.6) суммируем со второй строкой этой системы, а также первую строку (1.7) со второй строкой этой же системы. Получим новую систему уравнений

$$\begin{cases} -x_1' \cdot sin\varphi + x_2' \cdot cos\varphi = \rho \cdot \varphi', \\ x_1' \cdot cos\varphi + x_2' \cdot sin\varphi = \rho'. \end{cases}$$

Из системы (1.2) учитывая (1.5) поставляем значения x_1' и x_2' в последнюю систему. Относительно искомых функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$ система (1.2) примет вид

$$\begin{cases} \rho\varphi' = \rho(-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)), \\ \rho' = \rho(\sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)). \end{cases}$$

или предполагая, что $\rho \neq 0$ имеем систему

$$\begin{cases} \varphi' = -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi), \\ \rho' = \rho(\sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)). \end{cases} \tag{1.8}$$

Здесь $g(\cos\varphi, \sin\varphi) = g(x, y)$, где $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Так как первое уравнение системы (1.8) является уравнение с разделяющимися переменными относительно искомой функции $\varphi = \varphi(t)$ независимой переменной t, то его решения могут быть найдены явной форме (см., напр., [50]).

Пусть $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$, где (φ_1, φ_2)-составляющий интервал множества $\{\varphi : -\sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$ и $\varphi = \varphi(t)$, $\varphi(0) = \varphi_0$ - решение первого уравнения системы (1.8).

Так как правая часть первого уравнения системы (1.8) на интервале (φ_1, φ_2) отлично от нуля при всех t, то время t можно выразить через полярный угол $\varphi :\quad t = T(\varphi)$. Относительно функции $r(\varphi) = \rho(T(\varphi))$ от системы (1.8) перейдём к скалярному уравнению

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r[cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)]}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}. \tag{1.9}$$

Предположим, что $r(\varphi)$ удовлетворяет (1.9). Т.е. имеет место тождество

$$r'(\varphi) \equiv -r(\varphi)\frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}, \qquad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2).$$

Интегрируя последное равенство на промежутке от φ_0 до φ имеем

$$r(\varphi) = r(\varphi_0) \cdot e^{A(\varphi)}, \tag{1.10}$$

где $\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2$ и

$$A(\varphi) = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)} d\tau.$$

Из первого уравнения системы (1.8) найдем $\varphi(t)$ и поставляя в (1.10) найдем $\rho(t)$. Для этого, предположим $\varphi(t)$ удовлетворяет первое уравнение системы (1.8). Имеет место тождество

$$-\frac{\varphi'(t)}{sin^2\varphi(t) + cos\varphi(t) \cdot g(cos\varphi(t), sin\varphi(t))} \equiv 1.$$

Интегрируя последное равенство на промежутке от 0 до t имеем

$$-\int\limits_0^t \frac{\varphi'(\tau)d\tau}{sin^2\varphi(\tau) + cos\varphi(\tau) \cdot g(cos\varphi(\tau), sin\varphi(\tau))} = t.$$

Сделаем замену $\varphi(\tau) = v, dv = \varphi'(\tau)d\tau, v = \varphi(t), v_0 = \varphi(0)$ и получим

$$-\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{sin^2v + cosv \cdot g(cosv, sinv)} = t.$$

На интервале (φ_1, φ_2) определим функцию

$$G(\varphi) = -\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}.$$

Функция $G(\varphi)$ на этом интервале строго монотонна, имеет обратную функцию и решение $\varphi = \varphi(t)$ определяется из уравнения $G(\varphi) = t:\ \varphi(t) = G^{-1}(t)$.

Теперь, поставляя $\varphi(t)$ в (1.10) для второго уравнения системы (1.8), определим функцию

$$\rho(t) = \rho(0)\exp\int\limits_0^t [\sin\varphi(s)\cdot\cos\varphi(s) - \sin\varphi(s)\cdot g(\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))]\,ds,$$

$$\varphi(t) = G^{-1}(t), \quad (1.11)$$

где $\rho(0) = \rho_0 > 0$.

Из представления (1.11) следует важное свойство решений системы (1.2) с однородной функцией g: *для системы* (1.2) *задача Коши* $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$, *где* $x_1^0 = \rho_0\cos\varphi_0$, $x_2^0 = \rho_0\sin\varphi_0$, *где* ($\rho_0 > 0$, $-\sin^2\varphi_0 - g(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)\cos\varphi_0 \neq 0$), *имеет единственное решение.*

Если $\varphi = \varphi_1$ решение уравнения

$$-\sin^2\varphi - \cos\varphi\cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) = 0, \quad (1.12)$$

то $\cos\varphi_1 \neq 0$ и правая часть второго уравнения системы (1.8) при $\varphi = \varphi_1$ примет вид

$$\rho(\cos\varphi_1 - g(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1))\sin\varphi_1 = \rho\,\mathrm{tg}\,\varphi_1.$$

Поэтому функции

$$\varphi(t) \equiv \varphi_1,\ \rho(t) = \rho(0)e^{\alpha t},\ \rho(0) = \rho_1 > 0,\ \alpha = \mathrm{tg}\,\varphi_1$$

являются решением системы (1.8). Этому решению системы (1.8) соответствует решение

$$x_1(t) = x_1(0)e^{\alpha t},\ x_2(t) = x_2(0)e^{\alpha t},$$

где $x_1(0) = \rho(0)\cos\varphi_1$, $x_2(0) = \rho(0)\sin\varphi_1$, системы (1.2). В этом случае нельзя гарантировать единственность решения задачи Коши, без дополнительных условий на функцию g.

Например, если

$$g(1,u) = -\begin{cases} 3u, & \textit{если} \quad u \geq 2; \\ u^2 + u\sqrt{|1-u|}, & \textit{если} \ 1/2 < u < 2; \\ u/\sqrt{2} + 1/4, & \textit{если} \quad u \leq 1/2, \end{cases}$$

и

$$g(-1,u) = g(1,u), u \in (-\infty, +\infty),$$

то $\varphi = \pi/4-$решение уравнения (1.12) и функции $x_1 = e^t$, $x_2 = e^t$; $x_1 = e^{2\,\mathrm{th}\,(t/2)}$, $x_2 = (1 - th^2(t/2))e^{2th(t/2)}$ и $x_1 = \frac{\cos^2(t/2+\tau)}{\cos^2\tau}$, $x_2 = \frac{1}{2}\frac{\sin(t+2\tau)}{\cos^2\tau}$, где $\tau = atan(u(0))$ являются решениями системы (1.2), удовлетворяющие начальному условию $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Если функция $g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ в некоторой окрестности решения $\varphi = \varphi_1$ уравнения (1.12) удовлетворяет условию Липшица $|g(\cos\varphi, \sin\varphi) - g(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)| \leq L|\varphi - \varphi_1|$, то функции $x_1(t) = x_1(0)e^{\alpha t}$, $x_2(t) = x_2(0)e^{\alpha t}$, $\alpha = \mathrm{tg}\,\varphi_1$, является единственным решением задачи Коши $x_1(0) = \rho(0)cos\varphi_1$, $x_2(0) = \rho(0)sin\varphi_1, \rho(0) > 0$. Более общие условия единственности решения можно получить в терминах поведения функции $G(\varphi)$. Например, если $\varphi = \varphi_1$ изолированное решение уравнения (1.12), то функция $G(\varphi) = G(\varphi, \varphi_0)$ определена как при $\varepsilon - \varphi_1 < \varphi_0$, $\varphi < \varphi_1$ так и при $\varphi_1 < \varphi_0$, $\varphi < \varphi_1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0-$достаточно мало. Тогда необходимым и достаточным условием единственности решения является неограниченность функции $G(\varphi, \varphi_0)$ при $\varphi \to \varphi_1$.

§ 1.2. Анализ фазовых портретов однородных уравнений

Перейдем к изучению расположения траекторий системы (1.2) в окрестности особой точки $(0,0)$, предполагая ее изолированность: $g(\pm 1, 0) \neq$

0. Поведения траекторий системы (1.2) определяется поведением 2π-периодической функции $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

Возможны следующие случаи.

1. Уравнение (1.12) не имеет решения, т.е $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0$ при $\varphi \in [0, 2\pi]$. В частности, при $\varphi = \pi:$ $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) = -1$. Поэтому в силу непрерывности функции $g(\cdot, \cdot)$ $-\sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) < 0$ при всех φ и функция

$$G(\varphi, 0) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{ds}{-\sin^2 s - \cos s \cdot g(\cos s, \sin s)}$$

определена при всех значений $\varphi \in (-\infty, \infty)$, монотонно убывает и в силу 2π-периодичности подинтегральной функции, имеет место $G(\varphi + 2k\pi, 0) = kG(2\pi, 0) + G(\varphi, 0)$. Обратная к $G(\varphi, 0)$ функция $\varphi(t)$, т.е. $G(\varphi(t), 0) = t$, является решением первого уравнения системы (1.8): $\varphi'(t) = -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Далее, из представления (1.11) решения системы (1.8) при помощи подстановки в определенных интегралах, найдем функцию

$$\rho(t) = \rho_0 \exp \int\limits_0^{\varphi(t)} \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot g(\cos\theta, \sin\theta)}{-\sin^2\theta - \cos\theta \cdot g(\cos\theta, \sin\theta)} d\theta. \tag{1.13}$$

Обозначим $T_0 = G(-2\pi, 0)$ и

$$\gamma = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot g(\cos\theta, \sin\theta)}{-\sin^2\theta - \cos\theta \cdot g(\cos\theta, \sin\theta)} d\theta.$$

Тогда $\varphi(t + T_0) = \varphi(t) - 2\pi$ и $\rho(t + T_0) = \rho(t)e^{-\gamma}$. Отсюда следует, что траектории системы (1.2) окружности периода T_0 и нулевая особая точка является центром, если $\gamma = 0$; совершает бесконечно много оборотов вокруг особой точки и особая точка является устойчивым фокусом, если $\gamma > 0$, неустойчивым, если $\gamma < 0$.

Теперь рассмотрим случаи, когда уравнение (1.12) имеет решение, причем в некоторой окрестности каждого решения $\varphi = \varphi^*$ функция

$g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица $|g(\cos\varphi, \sin\varphi) - g(\cos\varphi*, \sin\varphi*)| \leq L|\varphi - \varphi^*|$. Предположим, что $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, такие корни уравнения (1.12), что $\varphi_1 < \varphi_2$ и интервал (φ_1, φ_2) принадлежит множеству $\{\varphi : -sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$. Отметим, что числа φ_1, φ_2 не принадлежат множеству $\{k\pi/2 : k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.

Лемма 1.1. *Пусть* $\varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$, *где* (φ_1, φ_2)*-составляющий интервал множества* $\{\varphi : -sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$ *и* $\varphi(t) = G^{-1}(t)$, $\rho(t)$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\rho(0) = \rho_0 > 0$ *- решение системы* (1.8), *причем* $|G(\varphi)| \to \infty$ *при* $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, $\varphi \to \varphi_i$, $i = 1, 2$. *Тогда имеют место равенства*

$$\lim_{\varphi \to \varphi_i \ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \frac{ln(\rho(G(\varphi)))}{G(\varphi)} = \operatorname{tg}\varphi_i, i = 1, 2.$$

Все траектории системы (1.8) которые могут наблюдаться в фазовой плоскости, в случае когда уравнение (1.12) имеет решение, в основном разделяются на следующие классы:

Параболические – когда $\rho(t) \to 0$ при $t \to -\infty(+\infty)$ и $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty(-\infty)$.

Гиперболические – когда $\rho(t) \to \infty$ при $t \to \pm\infty$.

Эллиптические – когда $\rho(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$.

Сектор $S(\varphi_1, \varphi_2) = \{(\rho, \varphi) : \rho > 0, \ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$, где (φ_1, φ_2) составляющий интервал множества $\{\varphi : -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$, называют соответственно, параболическим, гиперболическим и эллиптическим, если все траектории $(\rho(t), \varphi(t))$, где $(\rho(0), \varphi(0)) \in S(\varphi_1, \varphi_2)$ являются параболическими, гиперболическими и эллиптическими.

В силу изолированности нулевой особой точки системы (1.2) и 2π-периодичности функции $g(\cos\varphi, \sin\varphi)$, без ограничения общности, можно предполагать, что составляющий интервал (φ_1, φ_2) множества $\{\varphi : -\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0\}$ удовлетворяет условиям: $0 < \varphi_1 < 2\pi$, $\varphi_1 \in (k_1\pi/2, (k_1 + 1)\pi/2)$ для некоторого $k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\varphi_2 \in (k_2\pi/2, (k_2 + 1)\pi/2)$ для некоторого $k_2 \in \{k_1, k_1 + 1, k_1 + 2, k_1 + 3, k_1 + 4\}$.

Отметим, что сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ однозначно определяет целые числа k_1, k_2.

Лемма 1.2. *Сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является параболическим тогда и только тогда, когда $k_1 + k_2$-четное число.*

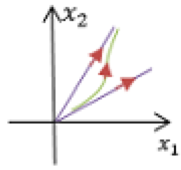
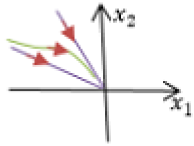
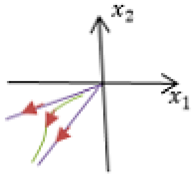
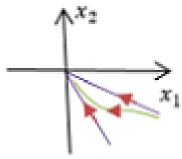
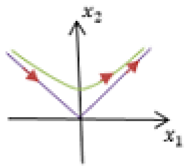
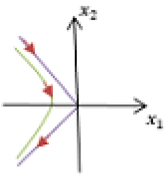
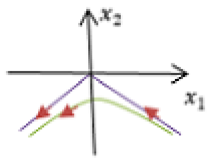
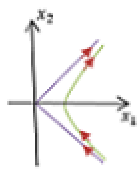
В случае, когда $k_1 + k_2$-нечетно, сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ может быть как гиперболическим так и эллиптическим. При этом для некоторых значений (k_1, k_2) гиперболичность или эллиптичность сектора определяется знаком функции $g(\cos\varphi, \sin\varphi)$ в интервале (φ_1, φ_2).

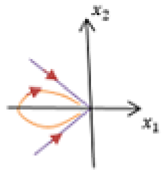
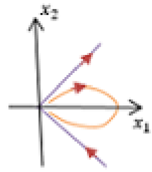
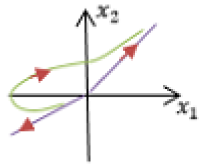
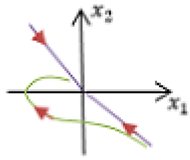
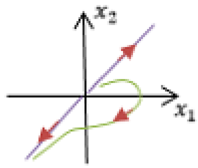
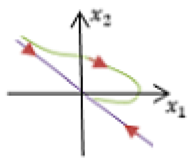
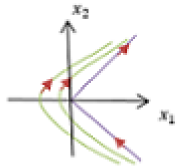
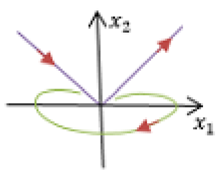
Лемма 1.3. *Пусть $k_1 + k_2$-нечетно и выполнено одно из условий: 1) $(k_1, k_2) \notin \{(1,2),(3,4),(1,4),(3,6)\}$; 2) $(k_1, k_2) = (1,2)$ и $g(-1,0) > 0$; 3) $(k_1, k_2) = (3,4)$ и $g(1,0) < 0$. Тогда сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является гиперболическим. Обратно, если сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является гиперболическим, то выполнено одно из условий 1)-3).*

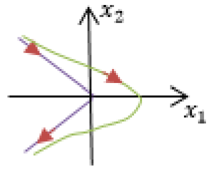
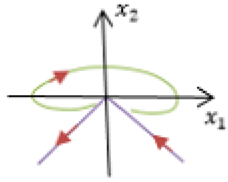
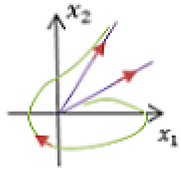
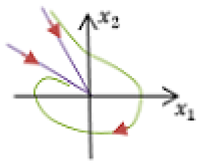
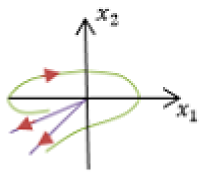
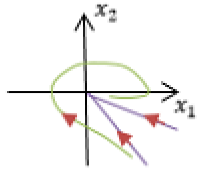
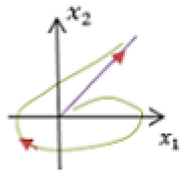
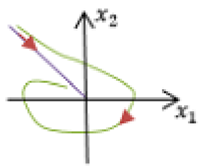
Лемма 1.4. *Пусть выполнено одно из условий: 1) $(k_1, k_2) \in \{(1,4),(3,6)\}$; 2) $(k_1, k_2) = (1,2)$ и $g(-1,0) < 0$; 3) $(k_1, k_2) = (3,4)$ и $g(1,0) > 0$. Тогда сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является эллиптическим. Обратно, если сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является эллиптическим, то выполнено одно из условий 1)-3).*

Наконец, для полноты описания, рассмотрим случай, когда уравнение (1.12) на отрезке $[0, 2\pi]$ имеет единственное решение $\varphi = \varphi^*, 0 < \varphi^* < \pi$. Полагая $\varphi_1 = \varphi^*$, $\varphi_2 = \varphi^* + 2\pi$ получим сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ состоящий из всех точек плоскости, за исключением луча (ρ, φ^*), $\rho \geq 0$. В этом случае, любое решение $(\rho(t), \varphi(t))$, $\rho(0) > 0$ системы (1.8), в силу леммы 1.1, удовлетворяет условиям $\rho(t) \to 0$ при $\varepsilon t \to -\infty$ и $\rho(t) \to +\infty$ при $\varepsilon t \to +\infty$, где $\varepsilon = \operatorname{tg}\varphi^*$. Следовательно, сектор $S(\varphi_1, \varphi_2)$ является параболическим.

№	Расположение сектора $S = \{(\rho,\varphi) : \rho > 0, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$	Характеристика поведения траекторий	

1.	$0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$	параболический	
2.	$\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$	параболический	
3.	$\pi < \varphi_1 < \varphi_2 < 3\pi/2$	параболический	
4.	$3\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$	параболический	
5.	$0 < \varphi_1 < \pi/2 < \varphi_2 < \pi$	гиперболический	
6.	$\pi/2 < \varphi_1 < \pi < \varphi_2 < 3\pi/2$, $g(-1,0) > 0$	гиперболический	
7.	$\pi < \varphi_1 < 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$	гиперболический	
8.	$3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi < \varphi_2 < 5\pi/2$, $g(1,0) < 0$	гиперболический	

9.	$\pi/2 < \varphi_1 < \pi < \varphi_2 < 3\pi/2$, $g(-1,0) < 0$	эллиптический	
10.	$3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi < \varphi_2 < 5\pi/2$, $g(1,0) > 0$	эллиптический	
11.	$0 < \varphi_1 < \pi/2, \pi < \varphi_2 < 3\pi/2$	параболический	
12.	$\pi/2 < \varphi_1 < \pi, 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$	параболический	
13.	$\pi < \varphi_1 < 3\pi/2,\ 2\pi < \varphi_2 < 5\pi/2$	параболический	
14.	$3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi,\ 5\pi/2 < \varphi_2 < 3\pi$	параболический	
15.	$0 < \varphi_1 < \pi/2,\ 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$	гиперболический	
16.	$\pi/2 < \varphi_1 < \pi,\ 2\pi < \varphi_2 < 5\pi/2$	эллиптический	

17.	$\pi < \varphi_1 < 3\pi/2,\ 5\pi/2 < \varphi_2 < 3\pi$	параболический	
18.	$3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi,\ 3\pi < \varphi_2 < 7\pi/2$	эллиптический	
19.	$0 < \varphi_1 < \pi/2,\ 2\pi < \varphi_2 < 5\pi/2$	параболический	
20.	$\pi/2 < \varphi_1 < \pi,\ 5\pi/2 < \varphi_2 < 3\pi$	параболический	
21.	$\pi < \varphi_1 < 3\pi/2,\ 3\pi < \varphi_2 < 7\pi/2$	параболический	
22.	$3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi,\ 7\pi/2 < \varphi_2 < 4\pi$	параболический	
23.	$0 < \varphi_1 < \pi/2,\ \varphi_2 = 2\pi + \varphi_1$	параболический	
24.	$\pi/2 < \varphi_1 < \pi,\ \varphi_2 = 2\pi + \varphi_1$	параболический	

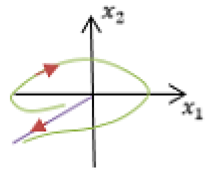
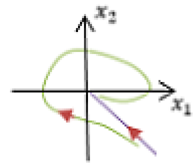
25.	$\pi < \varphi_1 < 3\pi/2,\ \varphi_2 = 2\pi + \varphi_1$	параболический	
26.	$3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi,\ \varphi_2 = 2\pi + \varphi_1$	параболический	

Таблица 1.1. Секторы

Уравнение (1.12) в силу однородности и 2π-периодичности функция g распадается на два уравнений

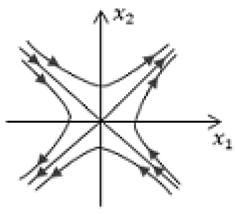
$$\operatorname{tg}^2\varphi + g(1, \operatorname{tg}\varphi) = 0, \qquad \varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{1.14}$$

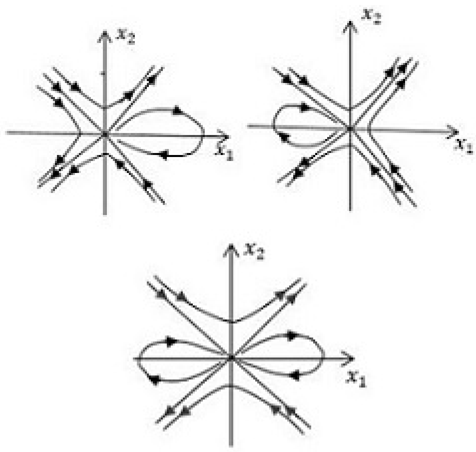
$$\operatorname{tg}^2\varphi - g(-1, -\operatorname{tg}\varphi) = 0, \qquad \varphi \in (\pi/2, 3\pi/2). \tag{1.15}$$

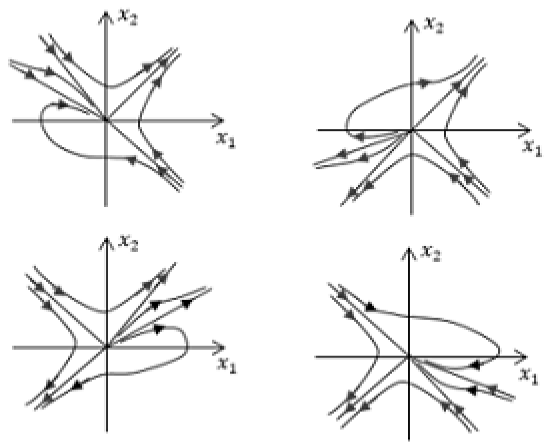
Лемма 1.5. *Если* $g(1,0) < 0$*, тогда уравнение (1.14) имеет хотя бы одно решение, которое принадлежит интервалу* $(0, \pi/2)$ *и хотя бы одно решение, которое принадлежит интервалу* $(3\pi/2, 2\pi)$*.*

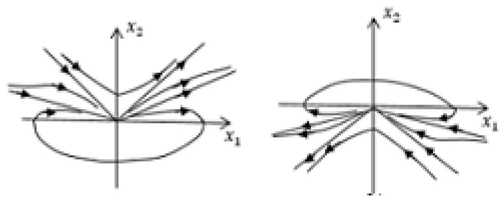
Лемма 1.6. *Если* $g(-1,0) > 0$*, тогда уравнение (1.15) имеет хотя бы одно решение, которое принадлежит интервалу* $(\pi/2, \pi)$ *и хотя бы одно решение, которое принадлежит интервалу* $(\pi, 3\pi/2)$*.*

С учётом решений уравнений (1.14) и (1.15) и вышеприведённых лемм, приведём всевозможные случаи поведения траекторий системы (1.2) на фазовой плоскости.

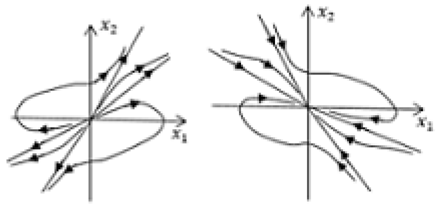
№	Условия	Качественная картина фазовых траектории
1.	$g(1,0) < 0$ *и* $g(-1,0) > 0$	 Седло

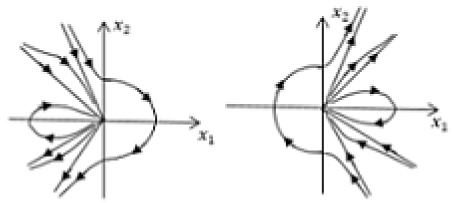
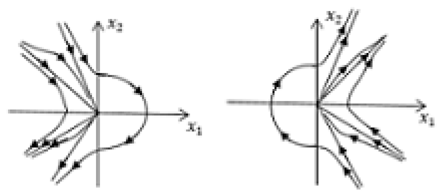
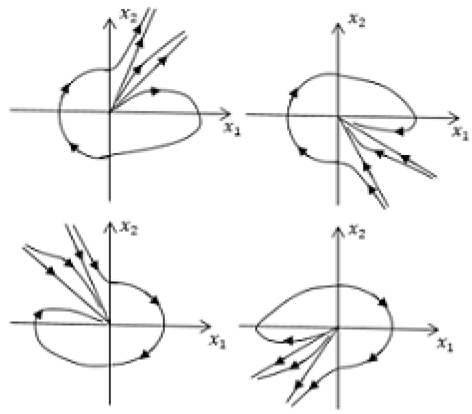
<table>
<tr><td>2.</td><td>$g(1,0) > 0$ и (1.14) имеет хотябы одно решение на $(0, \pi/2)$ и хотябы одно решение на $(3\pi/2, 2\pi)$ и $g(-1,0) > 0$</td><td rowspan="3">

Седло и эллиптический сектор</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$g(1,0) < 0$ и (1.15) имеет хотябы одно решение на $(\pi/2, \pi)$ и хотябы одно решение на $(\pi, 3\pi/2)$ и $g(-1,0) < 0$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>(1.14) имеет хотябы одно решение на $(0, \pi/2)$ и хотябы одно решение на $(3\pi/2, 2\pi)$ и $g(1,0) > 0$,
(1.15) имеет хотябы одно решение на $(\pi/2, \pi)$ и хотябы одно решение на $(\pi, 3\pi/2)$ и $g(-1,0) < 0$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$g(1,0) < 0$ и (1.15) имеет решение только на $(\pi/2, \pi)$</td><td rowspan="4">

Седло-узел</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>$g(1,0) < 0$ и (1.15) имеет решение только на $(\pi, 3\pi/2)$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$g(-1,0) > 0$ и (1.14) имеет решение только на $(0, \pi/2)$</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>$g(-1,0) > 0$ и (1.14) имеет решение только на $(3\pi/2, 2\pi)$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>(1.14) имеет решение только на $(0, \pi/2)$ и (1.15) имеет решение только на $(\pi/2, \pi)$</td><td rowspan="2">

Седло-узел</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>(1.14) имеет решение только на $(3\pi/2, 2\pi)$ и (1.15) имеет решение только на $(\pi, 3\pi/2)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>11.</td><td>(1.14) имеет решение только на $(0, \pi/2)$ и (1.15) имеет решение только на $(\pi, 3\pi/2)$</td><td rowspan="2">

Узел</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>(1.14) имеет решение только на $(3\pi/2, 2\pi)$ и (1.15) имеет решение только на $(\pi/2, \pi)$</td></tr>
<tr><td>13.</td><td>(1.14) не имеет решения и $g(-1, 0) < 0$ и (1.15) имеет хотябы одно решение на $(\pi/2, \pi)$ и имеет хотябы одно решение на $(\pi, 3\pi/2)$</td><td rowspan="2">
Фокус и эллиптический сектор</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>$g(1, 0) > 0$ и (1.14) имеет хотябы одно решение на $(0, \pi/2)$ и хотябы одно решение на $(3\pi/2, 2\pi)$. и (1.15) не имеет решения</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>(1.14) не имеет решения и $g(-1, 0) > 0$</td><td rowspan="2">
Седло-фокус</td></tr>
<tr><td>16.</td><td>(1.15) не имеет решения и $g(1, 0) < 0$</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>(1.14) имеет решения только на интервале $(0, \pi/2)$ и (1.15) не имеет решения</td><td rowspan="4">
Фокус-узел</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>(1.14) имеет решения только на интервале $(3\pi/2, 2\pi)$ и (1.15) не имеет решения</td></tr>
<tr><td>19.</td><td>(1.14) не имеет решения и (1.15) имеет решения только на интервале $(\pi/2, \pi)$</td></tr>
<tr><td>20.</td><td>(1.14) не имеет решения и (1.15) имеет решения только на интервале $(\pi, 3\pi/2)$</td></tr>
</table>

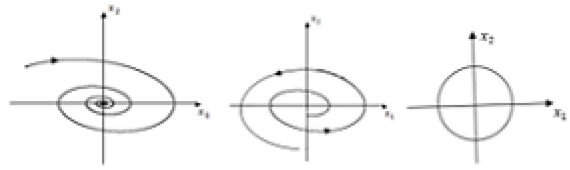
21.	уравнения (1.14), (1.15) не имеют решения	 Фокус (устойчивый, если $\gamma > 0$: неустойчивый, если $\gamma < 0$: центр, если $\gamma = 0$)

Таблица 1.2. Основные случаи и фазовые портреты

Доказательство леммы 1.1. Так как,

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} ln(\rho(G(\varphi)))}{\frac{d}{d\varphi} G(\varphi)} = \frac{\rho'(G(\varphi))G'(\varphi)}{\rho(G(\varphi))G'(\varphi)} = \frac{\rho'(G(\varphi))}{\rho(G(\varphi))} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

то в силу тождества

$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi - \sin\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) = \operatorname{tg}\varphi(1 - \sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)),$$

имеем

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} ln(\rho(G(\varphi)))}{\frac{d}{d\varphi} G(\varphi)} = \operatorname{tg}\varphi(1 - \sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)). \tag{1.16}$$

В равенстве (1.16) переходя к пределу при $\varphi \to \varphi_i$, согласно правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{\varphi \to \varphi_i \ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \frac{ln(\rho(G(\varphi)))}{G(\varphi)} = \lim_{\varphi \to \varphi_i \ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2} \operatorname{tg}\varphi(1 - \sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi)) =$$
$$= \operatorname{tg}\varphi_i, \ i = 1, 2.$$

Лемма доказана.

Доказательство леммы 1.2. Пусть $(k_1, k_2) = (0, 0)$, т.е. $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$. Так как на интервале (φ_1, φ_2) уравнение (1.12) не имеет решения, то функция (1.11) удовлетворяет систему (1.8).

Если $-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) < 0$, то функция $\varphi(t)$ монотонна убывающая и при неограниченном возрастании времени стремится к $\varphi_1 + 0$. Соответственно, правая часть второго уравнения системы (1.8) стремится к $\rho \operatorname{tg}\varphi_1$. Учитывая положительность функции $\operatorname{tg}\varphi$ на интервале $(0, \pi/2)$

можно легко проверить, что $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\rho(t) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Если $-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) > 0$, то функция $\varphi(t)$ стремится к $\varphi_2 - 0$ и правая часть второго уравнения системы (1.8) стремися к $\rho \operatorname{tg}\varphi_2$. Следовательно, $\rho(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\rho(t) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Рассмотрим случай, когда k_1-нечетное число. Пусть $(k_1, k_2) = (1, 3)$ т.е. $\pi/2 < \varphi_1 < \pi, 3\pi/2 < \varphi_2 < 2\pi$. При этом для всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ $-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) < 0$, поэтому при $t \to +\infty$ функция $\varphi(t)$ стремится к $\varphi_1 + 0$. В силу отрицательности функция $\operatorname{tg}\varphi$ на интервалах $(\pi/2, \pi), (3\pi/2, 2\pi)$ $\rho(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и $\rho(t) \to \infty$ при $t \to -\infty$.

Доказательства лемм 1.3, 1.4 проводятся аналогично лемме 1.2.

Доказательство леммы 1.5. Допустим противное. Пусть $\forall\varphi \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \operatorname{tg}^2\varphi + g(1, \operatorname{tg}\varphi) \neq 0$, тогда при $\varphi = 0: \ g(1, 0) \neq 0$ и в силу условий леммы $g(1, 0) < 0$. Далее, в силу непрерывности функции $g(1, \operatorname{tg}\varphi)$, имеем $\operatorname{tg}^2\varphi + g(1, \operatorname{tg}\varphi) < 0, \ \forall\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. В силу однородности функция g имеем

$$\operatorname{tg}^2\varphi \cdot \left(1 + g\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}, \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\right) < 0 \Rightarrow 1 + g\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi}, \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\right) < 0.$$

При $\varphi \to \pi/2$ перейдём к пределу и получим $1 + g(0, 0) \leq 0 \ \Rightarrow 1 \leq 0$. Аналогично, при $\varphi \to -\pi/2$ получим противоречие. Эти противоречия доказывают лемму.

Лемма 1.6 доказывается аналогично лемме 1.5.

Отметим, что система (1.2) может имет максимум два эллиптических сектора и бесконечное число параболических.

§ 1.3. Периодические решения однородного уравнения

Теорема 1.1. *Пусть* $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0, \forall\varphi \in [0, 2\pi]$. *Тогда система (1.2) имеет ненулевое периодическое решение тогда и только* *тогда, когда* $\gamma = 0$. *При этом величина периода*

$$T = k \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, \quad k \in Z.$$

Теорема 1.2. *Если функция* g *удовлетворяет одному из условий:*

1) $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0, \forall\varphi$ *и* $\gamma > 0$*;*

2) уравнение (1.12) *имеет решение и все его решения принадлежат интервалам* $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$,

то нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво. Обратно, если нулевое решение системы (1.2) асимптотически устойчиво, то для функции g *выполняется одному из условий 1), 2).*

Доказательство теоремы 1.1. Интегрируем равенство (1.9) на промежутке от 0 до φ

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\rho}{\rho} = -\int\limits_0^{\varphi} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)} d\tau.$$

Отсюда получим

$$\rho(\varphi) = \rho(0) \cdot e^{A(\varphi)}, \tag{1.17}$$

где

$$A(\varphi) = -\int\limits_0^{\varphi} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)} d\tau.$$

В силу лемм 1.5, 1.6 система(1.2) не имеет собственных векторов и при $\varphi \in [0, 2\pi]$ траектория решения $\rho(\varphi)$ совершает полный оборот вокруг особой точки $(0, 0)$ и при $A(2\pi) = 0$ возвращается на исходный луч $\rho(2\pi) = \rho(0)$ (т.е. начало траектории совпадают с концом).

Далее, определим время, в течение которого траектория решения системы (1.2) совершает полный оборот вокруг (0,0) и совпадает с началом. В силу условий теоремы правая часть первого уравнения системы (1.8) отлично от нуля. Поэтому, функция $\varphi(t)$ имеет обратную: $\varphi(t) = \tau \Rightarrow t = \varphi^{-1}(\tau)$. Тогда имеем

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} = -\frac{1}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}.$$

Интегрируя последнее равенство на промежутке $[0, 2\pi]$, получим

$$t(2\pi) = -\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}.$$

Следовательно,

$$T = k \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, \quad k \in Z.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Достаточность. Пусть выполнено условие 1). Тогда в силу лемм 1.5-1.6 система (1.2) не имеет собственных векторов. Интегрируя равенство (1.9) на промежутке $[0, \varphi]$ получим (1.17).

В силу условия теоремы $-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) < 0$ при всех φ. Поэтому $\varphi(t)$ уменшается и при $\varphi \in [-2\pi, 0]$ траектория решения $\rho(\varphi)$ совершает один оборот вокруг особой точки $(0, 0)$. $\rho(-2\pi) < \rho(0)$, если $A(-2\pi) = -A(2\pi) < 0$. Отсюда следует, что $\gamma > 0$.

Следовательно, при неограниченном возрастании времени $\varphi(t) \to -\infty$ и траектория решении стремится к началу координат.

Пусть выполнено условие 2). Рассмотрим следующие случаи:

I. Пусть $\exists\varphi_1 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, что удовлетворяет уравнению (1.12). Тогда в силу тождества

$$g(cos\varphi_1, sin\varphi_1) = -\frac{sin^2\varphi_1}{cos\varphi_1}$$

имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = tg\varphi_1 dt.$$

Интегрируя последнее равенство на промежутке от 0 до t, получим

$$\rho(t) = \rho(0)e^{tg\varphi_1 \cdot t}.$$

Так как, функция $tg\varphi$ на интервале $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ отрицательна, поэтому $\rho(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

II. Пусть $\exists \varphi_1, \varphi_2 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, что удовлетворяют уравнению (1.12) и $\forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ выполняется $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$. Тогда интегрируя (1.9) на промежутке от $\varphi*$ до φ имеем

$$r(\varphi) = r(\varphi^*) \cdot e^{A(\varphi)},$$

где $\varphi_1 < \varphi^* < \varphi_2$ и

$$A(\varphi) = -\int\limits_{\varphi^*}^{\varphi} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)} d\tau.$$

Из первого уравнения системы (1.8) найдем $\varphi(t)$ и поставляя в последное равенство определим

$$\rho(t) = r(\varphi(t)) = \rho^* \cdot e^{A(\varphi(t))}, \quad \varphi(t) = G^{-1}(t).$$

Рассмотрим следующие случаи:

а) $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) < 0, \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Тогда из системы (1.8) $\varphi'(t) > 0$, т.е. функция $\varphi(t)$ возрастает и $\varphi(t) \to \varphi_2 - 0$ при $t \to +\infty$. При этом числитель $A(\varphi)$ стремится к $tg\varphi_2 < 0$. А знаменатель отрицательна и стремится к нулю при $\varphi(t) \to \varphi_2 - 0$. Поэтому $\rho(t) \to 0$ при $\varphi(t) \to \varphi_2 - 0$.

б) Пусть $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) > 0, \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Тогда $\varphi'(t) < 0$ и $\varphi(t) \to \varphi_0 + 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому $A(\varphi)$ примет вид

$$A(\varphi) = \int\limits_{\varphi}^{\varphi^*} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}.$$

Аналогично, числитель $A(\varphi)$ стремится к $tg\varphi_1 < 0$, знаменатель положительна и стремится к нулю при $\varphi(t) \to \varphi_1 + 0$. Таким образом, $\rho(t) \to 0$ при $\varphi(t) \to \varphi_1 + 0$.

III. Пусть $\varphi_1 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi), \varphi_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ корни уравнения (1.12) и $\forall \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ выполняется $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$.

Так как, функция $tg\varphi$ на интервале $(\frac{\pi}{2},\pi)$ отрицательна, то $\forall\varphi\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, которое удовлетворяет уравнение (1.12) аналогично случаю I. можно показать, что $\rho(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Решение системы (1.8) на интервале (φ_1,φ_2) определяется (1.3.). Поэтому, рассуждается аналогично случаю II.a) и II.б).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Необходимость. Пусть $|\rho(t)|\to 0$ при $t\to+\infty$. Рассмотрим следующие случаи:

1) уравнение (1.12) не имеет решения. Тогда в силу теоремы 1.1 траектории решений системы стремятся к нулю тогда и только тогда, когда $\gamma<0$.

2) уравнение (1.12) имеет решение. Пусть $\varphi(t)=\varphi_1$ удовлетворяет (1.12). Тогда, $\rho(t)=\rho(0)\exp(t\cdot\operatorname{tg}\varphi_1)$ удовлетворяет второму уравнению системы (1.8). При этом ясно, что при $t\to+\infty$ $|\rho(t)|\to 0$ только тогда, когда $\varphi_1\in(\pi/2,\pi)\cup(3\pi/2,2\pi)$. Теорема доказана.

§ 1.4. Ограниченные решения однородного уравнения

Напомним, что в силу изолированности нулевой особой точки системы (1.2) и 2π-периодичности функции $g(\cos\varphi,\sin\varphi)$, без ограничения общности, предполагается, что составляющий интервал (φ_1,φ_2) множества $\{\varphi : -\sin^2\varphi-\cos\varphi\cdot g(\cos\varphi,\sin\varphi)\neq 0\}$ удовлетворяет условиям: $0<\varphi_1<2\pi$, $\varphi_1\in(k_1\pi/2,(k_1+1)\pi/2)$ для некоторого $k_1\in\{0,1,2,3\}$, $\varphi_2\in(k_2\pi/2,(k_2+1)\pi/2)$ для некоторого $k_2\in\{k_1,k_1+1,k_1+2,k_1+3,k_1+4\}$. φ_1 и φ_2 являются решениями уравнений (1.12).

В случае, когда k_1+k_2-нечетно имеют место следующие утверждения:

Теорема 1.3. *Для того чтобы, в полуплоскости $x_1\geq 0$ система (1.2) имела ограниченные на всей оси решения, отличные от стационарного решения, необходимо и достаточно чтобы $(k_1,k_2)=(3,4)$ и $g(1,0)>0$.*

Теорема 1.4. *Для того чтобы, в полуплоскости* $x_1 \leq 0$ *система (1.2) имела ограниченные на всей оси решения, отличные от стационарного решения, необходимо и достаточно чтобы* $(k_1, k_2) = (1, 2)$ *и* $g(-1, 0) < 0$.

Теорема 1.5. *Пусть* $(k_1, k_2) \in \{(1, 4), (3, 6)\}$. *Тогда система* (1.2) *имеет ограниченные на всей оси решения отличные от стационарного.*

Из выше приведённых теорем и лемм вытекает

Следствие 1.1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

1. $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$, *и либо* $\gamma \neq 0$, *либо* $\gamma = 0$ и $T \neq k \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, \quad k \in Z$;
2. $(k_1, k_2) \notin \{(1, 2), (3, 4), (1, 4), (3, 6)\}$;
3. $(k_1, k_2) = (1, 2)$ и $g(-1, 0) > 0$;
4. $(k_1, k_2) = (3, 4)$ и $g(1, 0) < 0$.

Тогда уравнение (1.2) *не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений.*

Доказательство теоремы 1.3. Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда в силу определения k_1, k_2 уравнение (1.12) имеет решения $\varphi_1 \in (3\pi/2, 2\pi)$, $\varphi_2 \in (2\pi, 5\pi/2)$ и на интервале (φ_1, φ_2) не имеет решения. Поэтому на этом интервале правая часть первого уравнения системы (1.8) отлично то нуля, т.е. $\varphi' \neq 0$. Следовательно, в системе (1.8) можно выразить t и получить

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{\rho[cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)]}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}, \quad \varphi_1 < \varphi < \varphi_2.$$

Интегрируя последнее равенство на промежутке от $\varphi*$ до φ

$$\int\limits_{\varphi*}^{\varphi} \frac{d\rho}{\rho} = -\int\limits_{\varphi*}^{\varphi} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)} d\tau, \ \varphi* \in (\varphi_1, \varphi_2)$$

получим

$$\rho(\varphi) = \rho(\varphi*) \cdot exp(A(\varphi)), \tag{1.18}$$

где

$$A(\varphi) = -\int\limits_{\varphi*}^{\varphi} \frac{cos\tau \cdot sin\tau - sin\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)} d\tau.$$

В силу положительности функции $cos\varphi$ на интервале (φ_1, φ_2) и однородности функции g $A(\varphi)$ запишем в виде

$$A(\varphi) = -\int\limits_{\varphi*}^{\varphi} \frac{tg\tau[1 - g(1, tg\tau)]}{tg^2\tau + g(1, tg\tau)} d\tau.$$

Обозначая $u = tg\tau, d\tau = \frac{du}{1+u^2}, u_1 = \operatorname{tg}\varphi, u_0 = \operatorname{tg}\varphi*$ имеем

$$A(\varphi) = -\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{u[1 - g(1,u)]}{(1+u^2)[u^2 + g(1,u)]} du = -\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{u \cdot du}{u^2 + g(1,u)} + \frac{1}{2} ln \frac{1+u_1^2}{1+u_0^2}.$$

Отсюда

$$0 \leq \frac{1}{2} ln \frac{1+u_1^2}{1+u_0^2} \leq \frac{1}{2} ln \frac{1+u_2^2}{1+u_0^2},$$

где $u_2 = max(\operatorname{tg}\varphi_1, \operatorname{tg}\varphi_2)$. И с учётом условия теоремы

$$\int\limits_{u_0}^{u_1} \frac{u \cdot du}{u^2 + g(1,u)} > 0.$$

Таким образом, $A(\varphi) \leq M, \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ и $A(\varphi) \to -\infty$ при $\varphi \to \varphi_2 - 0$. Следовательно, $\rho(\varphi) \to 0$.

При $\varphi \to \varphi_1 + 0$ имеем

$$A(\varphi) = \int\limits_{u_1}^{u_0} \frac{u[1 - g(1,u)]}{(1+u^2)[u^2 + g(1,u)]} du = \int\limits_{u_1}^{u_0} \frac{u \cdot du}{u^2 + g(1,u)} - \frac{1}{2} ln \frac{1+u_0^2}{1+u_1^2}.$$

Отсюда $-\frac{1}{2} ln \frac{1+u_0^2}{1+u_1^2} \leq 0$. Далее, из $u^2 + g(1,u) < 0$ следует

$$\int\limits_{u_1}^{u_0} \frac{u \cdot du}{u^2 + g(1,u)} < 0.$$

Поэтому $\rho(\varphi) \to 0$ при $\varphi \to \varphi_1 + 0$.

Необходимость. Пусть при $\varphi \in (3\pi/2, 5\pi/2)$ $\forall t$ $\rho(t) \leq M$.

На первом этапе покажем существование φ_1, φ_2- корней уравнения (1.12). От противного, предположим, что $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0$. Возможны следующие случаи:

1) $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) > 0$. В частности при $\varphi = 2\pi$ имеем $g(1,0) < 0$. В силу леммы (1.5) уравнение имеет хотя бы одно решение φ_1 на интервале $(3\pi/2, 2\pi)$ и хотя бы одно решение φ_2 на интервале $(2\pi, 5\pi/2)$.

2) $-sin^2\varphi - cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) < 0$. В этом случае из первого уравнения системы (1.8) ясно, что $\varphi' < 0$, т.е. функция $\varphi(t)$ является монотонно убивающей. И решение в течение конечного времени пересекает линию x_2. Так как $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = \varphi_*$ то $\lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$. Отсюда

$$-sin^2\varphi_* - cos\varphi_* \cdot g(cos\varphi_*, sin\varphi_*) = 0$$

При $t \to -\infty$, аналогично, показывается существование другого решения (1.12).

Теперь, пусть на интервале (φ_1, φ_2) уравнение (1.12) не имеет решения. Тогда решение системы (1.8) определяет (1.18). Не сложное вычисление показывает, что $\rho(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ только в случае когда $g(1,0) > 0$. Теорема польностю доказана.

Доказательство теоремы 1.4 проводится аналогично как теореме 1.3.

Доказательство теоремы 1.5. Пусть $(k_1, k_2) = (1, 4)$. Т.е. $\varphi_1 \in (\pi/2, \pi), \varphi_2 \in (2\pi, 5\pi/2)$ удовлеворяют уравнение (1.12) и на интервале (φ_1, φ_2) $-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) \neq 0$.

В этом случае $-\sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot g(\cos\varphi, \sin\varphi) < 0$ при всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$. Поэтому (1.18) удовлетворяет систему (1.8). При $t \to +\infty$ $\varphi(t) \to \varphi_1 + 0$ следовательно, $\rho(t) \to \operatorname{tg}\varphi_1$. В силу отрицательности функции $\operatorname{tg}\varphi$ на интервале $(\pi/2, \pi)$ $\rho(t) \to 0$. Аналогично, при $t \to -\infty$ $\varphi(t) \to \varphi_2 - 0$ и $\rho(t) \to 0$.

Аналогично доказывается случай $(k_1, k_2) = (3, 6)$. Теорема доказана.

§ 1.5. Приложения

Для иллюстрации рассмотрим кусочно-линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = 0 \tag{1.19}$$

где a, b, c, d – вещественные числа.

Полный анализ фазового портрета траекторий системы

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_2 + d \cdot x_1|, \end{cases} \tag{1.20}$$

эквивалентной уравнению (1.19) проведен в работах [36],[37]. Используя некоторые результаты этих работ будем исследовать уравнение (1.19) на предмет отсутствия периодических и ограниченных решений.

Для удобства, отдельно, рассмотрим два случая: $d = 0$ и $d \neq 0$.

Периодические решения кусочно-линейных уравнений.

Теорема 1.6. *Пусть* $d = 0, b \neq 0$. *Тогда система (1.20) имеет ненулевое периодическое решение тогда и только тогда, когда* $a = 0$ *и* $4b > c^2$*; при этом величина периода* $T = \frac{4\pi}{\sqrt{4b-c^2}}$.

В случае, когда $d \neq 0$ вопросы существования периодических решений системы (1.20) исследованы в работе [37]. В данной работе установлена

Теорема 1.7. *Пусть* $|b| - c|d| \neq 0$. *Тогда система (1.20) имеет ненулевое периодическое решение тогда и только тогда, когда* $b = d(c^2 + a^2)/2a$ *и* $0 < \frac{a}{d} < 2$, $|a| < |c|$*; при этом величина периода*

$$T = \frac{4\pi c}{c^2 - a^2}\sqrt{\frac{a}{2d - a}}.$$

Как отмечалось выше, нас интересует условия отсутствия периодических решений системы (1.20). Эти условия можно получать как следствия выше приведенных теорем 1.6-1.7.

Следствие 1.2. *Пусть* $d = 0, b \neq 0$. *Тогда система* (1.20) *не имеет ненулевого* T- *периодического решения, если* $(a, 4b - c^2) \neq (0,\ 16\pi^2 k^2/T^2)$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть $d \neq 0$ *и* $|b| - c|d| \neq 0$. *Тогда система* (1.20) *не имеет ненулевого* T*-периодического решения, если* $a/d \notin (0,2)$ *или* $a/d \in (0,2)$ *и* $\left(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2-a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}\right) \neq (0, \frac{4k\pi}{T})$, *для всех k=1,2,....*

Ограниченные решения кусочно-линейных уравнений. В этом параграфе исследуется ограниченные решения системы (1.20). Выделяем множество точек в пространстве коэффициентов, где соответствующее им система (1.20) имеет ограниченные на всей числовой оси решения. Согласно теореме 1.6 не трудно видеть, что каждое периодическое решение является и ограниченным на всей оси решением системы (1.20). Для линейного уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами [50] любое ограниченное решение является и периодическим решением. В отличие от линейного случая, нелинейное уравнение (1.19) может иметь при некоторых значениях коэффициентов ограниченные на всей оси решения, отличное от периодического решения. А именно, справедлива

Теорема 1.8. *Пусть* $d = 0,\ b \neq 0$. *Для того чтобы система* (1.20) *имело ненулевое ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического, необходимо и достаточно чтобы* $|a| < |c|$ *и* $0 < 4b \leq (|c| - |a|)^2$.

Отметим, что в теореме 1.8 система имеет в полуплоскости $x_1 \geq 0$ $(x_1 \leq 0)$ ненулевое ограниченное решение, если $c < 0$ $(c > 0)$.

В случай $d \neq 0$ для системы (1.20) при некоторых значениях коэффициента $c > 2$ существует множество точек в плоскости коэффициентов a, b для которых уравнение имеет ненулевое ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического решения. Более точное утверждение о существовании ограниченных решений системы (1.20) [37] содержится в следующей теореме.

Теорема 1.9. *Пусть* $|b| - c|d| \neq 0$. *Тогда система* (1.20) *имеет ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического решения тогда и только тогда, когда коэффициенты* a, b, c, d *удовлетворяют неравенствам*

$$4c|d| < 4b \leq a^2 + c^2 - 2c|2d - a|.$$

В плоскости (a, b) определим множества

$$I(c) = \{(a, b): \quad a = 0, \quad 4b > c^2\},$$

$$I(c, d) = \{(a, b): \quad ad > 0, \ 2ab = d(c^2 + a^2)\},$$

$$\Delta(c) = \{(a, b): \quad -c \leq a \leq c, \quad 0 \leq 4b \leq (|c| - |a|)^2\},$$

$$\Delta(c, d) = \{(a, b): \quad 2\sqrt{2c} - c \leq a \leq c, \ 4c|d| \leq 4b \leq a^2 + c^2 - 2c|2d - a|\}.$$

Отметим, что множество $\Delta(c, d)$ пустое, если $c < 2$.

Следствие 1.3. *Пусть* $d = 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют условиям* $b \neq 0$ и $(a, b) \notin I(c) \cup \Delta(c)$. *Тогда система* (1.20) *не имеет ненулевого ограниченного на всей оси решения.*

Пусть $d \neq 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют условиям,* $|b| - c|d| \neq 0$ *и* $(a, b) \notin I(c, d) \cup \Delta(c, d)$. *Тогда система* (1.20) *не имеет ненулевого ограниченного на всей оси решения.*

Доказательство теоремы 1.8 Достаточность. Рассмотрим случай $c < 0$. Покажем, что уравнение (1.14) имеет решения на каждом из интервалов $(3\pi/2, 2\pi)$, $(2\pi, 5\pi/2)$ и $g(1, 0) > 0$.

Полагая $\eta = \operatorname{tg}\varphi$ с учётом того $g(1, \eta) = a\eta + b + c|\eta|$ имеем

$$\eta^+_{1,2} = \frac{-(a + c) \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4b}}{2},$$

$$\eta^-_{1,2} = \frac{-(a - c) \pm \sqrt{(a - c)^2 - 4b}}{2}.$$

Нетрудно проверить, что при выполнении условия теоремы $\eta^+_{1,2} > 0$ и $\eta^-_{1,2} < 0$, т.е. $\varphi_0 \in (3\pi/2, 2\pi), \varphi_1 \in (2\pi, 5\pi/2)$ удовлетворяют уравнение (1.14). Далее, из $b > 0$ следует, что $g(1, 0) > 0$. Поэтому, в силу теоремы

1.3 система (1.20) в полуплоскости $x_1 \geq 0$ имеет ненулевое ограниченное на всей оси решение.

Необходимость. Пусть нарушены условия теоремы. Тогда выполняется одно из следующих условий:

1) $0 < 4b < (|a| - |c|)^2$, $|a| > |c|$,

2) $b < 0$,

3) $4b > (|a| + |c|)^2$,

4) $(|a| - |c|)^2 < 4b < (|a| + |c|)^2$.

При выпольнении условие 1) уравнение (1.14) имеет решение только на интервале $(2\pi, 5\pi/2)$, если $a < 0$ или только на интервале $(3\pi/2, 2\pi)$, если $a > 0$. Уместно отметить, что полученное противоречит условием теоремы 1.3. А при выполнении условия 2) ясно, что невыполняются оба условия теоремы 1.3. Что касается третье условие, то уравнение (1.14) не имеет решения. Нетрудно проверить, что условие 4) тоже противоречит условиям теоремы 1.3. Таким образом, при условиях 1)-4) система (1.20) не имеет ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ решений, отличные от периодических.

Аналогично доказывается случай $c > 0$. Теорема доказана.

Глава 2. Периодические и ограниченные решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

В этой главе рассматриваются периодические и ограниченные решения одного класса неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка [1], [12], [16], [30], [32], [42], [43].

§ 2.1. Обозначения, постановка задач и вспомогательные сведения

В работе используются следующие обозначения:

$y-$вектор с вещественными координатами y_1 и y_2, т.е. $y = \{y_1, y_2\}$;

$y(t)-$вектор-функция с вещественными координатами $y_1(t)$ и $y_2(t)$, т.е. $y = \{y_1(t), y_2(t)\}$;

$C_{[0,T]}-$ пространство непрерывных на $[0, T]$ вектор-функции $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$;

$S(R)-$шар в пространстве $C_{[0,T]}$ с центром в точке $y(t) \equiv 0$ и радиусом равным R;

$\dot{S}(R)-$сфера в пространстве $C_{[0,T]}$ с центром в точке $y(t) \equiv 0$ и радиусом равным R;

$E-$вещественное банахово пространство;

В этой главе рассматривается неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' + g(y, y') = f(t, y, y'), \tag{2.1}$$

где функция $g(y, z)$- непрерывна и положительно однородна порядка $m = 1$ $(g(\lambda y, \lambda z) = \lambda g(y, z))$, а $f(t, y, z)$-непрерывная функция, опеределенная при всех значениях t, y, z и удовлетворяющая условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup_{t,|y|+|z|\le r} |f(t, y, z)| = 0. \tag{2.2}$$

А также в качестве примера рассматривается уравнение

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = f(t, y, y'), \tag{2.3}$$

с вещественными коэффициентами.

Изучаются вопросы существования периодических и ограниченных решений уравнения (2.1) при соответствующих условиях периодичности или лишь ограниченности функции $f(t, y, z)$ по переменной t.

Периодические и ограниченные решения системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -g(y_1, y_2) + f(t, y_1, y_2), \end{cases} \tag{2.4}$$

эквивалентной уравнению (2.1) понимаются в следующем обычном для теории обыкновенных дифференциалных уравнений смысле (см., например, [41], [45]). Пусть компоненты вектор-функции

$$y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$$

определены на всей числовой оси R^1, являются обсолютно непрерывными функциями и почти всюду на R^1 удовлетворяют систему (2.4). Тогда если

$$y_1(t+T) \equiv y_1(t),\ y_2(t+T) \equiv y_2(t),$$

то вектор-функцию $y(t)$називают $T-$периодическим решением системы (2.4), если же

$$\sup_t |y_1(t)| < \infty,\ \sup_t |y_2(t)| < \infty,$$

то вектор-функцию $y(t)$ называют ограниченным решением системы (2.4).

Принцип Лере-Шаудера. В данной главе основным аппаратом исследования периодической и ограниченной задачи для системы (2.4) является фундаментальный прицип, развитый Ж.Лере и Ю.Шаудером [24]. Сформулируем это принцип в общем виде.

Прежде всего, напомним некоторые определения и понятия (см., например, [23]).

Пусть $\Omega-$ограниченная область в банаховом пространстве E . Пусть на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω определен вполне непрерывный оператор A действующий в E, причем $Ax \neq x$ для любого $x \in \dot{\Omega}$; здесь $\dot{\Omega}-$ граница области Ω. Тогда определена целочисленная характеристика $\gamma(I - A, \dot{\Omega})$, которая называется вращением вполне непрерывного векторного поля $\Phi x = x - Ax$ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω.

При исследовании систем дифференциальных уравнений в функциональном анализе, топологии и их приложениях [39] широко используется теория вращения векторных полей. Применяя вращения векторных полей, можно получить весьма важные сведения о некоторых основных свойствах систем дифференциальных уравнений.

В ряде случаев вычисление вращения конкретных векторных полей является сложной задачей. Поэтому разработаны разнообразные методы и приемы для решения этих задач (см. [22], [29], [34]). Например, (см. [14]) П.П. Забрейко указал эффективный алгоритм вычисления индекса нуля произвольного гладкого двумерного поля. Разарботаны специальные приемы сведения задачи об индексе нуля вполне непрерывного векторного поля к вычислению индекса нуля векторного поля в пространстве малой конечной размерности.

Способы определения вращения для нас не играет особой роли. В далнейшем важны лишь некоторые указиваемые ниже свойства вращения.

Два невырожденных на $\dot{\Omega}$ (т.е. не принимающих на $\dot{\Omega}$ нулевых значений) вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_0 x = x - A_0 x, \quad x \in \dot{\Omega},$$

$$\Phi_1 x = x - A_1 x, \quad x \in \dot{\Omega},$$

называют гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует семейство невырожденных на $\dot{\Omega}$ векторных полей

$$\Phi(\lambda, x) = x - A(\lambda, x), \quad x \in \dot{\Omega}, \ \lambda \in [0, 1],$$

такое, что оператор $A(\lambda, x)$ вполне непрерывен по совокупности переменных λ и x, при этом

$$\Phi(0, x) = \Phi_0 x,\ \Phi(1, x) = \Phi_1 x.$$

Отношение гомотопии векторных полей обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Свойство 2.1. Если Φ_0 и Φ_1 гомотопны на $\dot{\Omega}$, то

$$\gamma(\Phi_0, \dot{\Omega}) = \gamma(\Phi_1, \dot{\Omega}).$$

Это свойство дает метод вычисления вращения. Оно позволяет сводить вычисление вращения сложных векторных полей к вычислению более простых полей.

Свойство 2.2. Если образ $A\overline{\Omega}$ области $\overline{\Omega}$ лежит в подпространстве $E_0 \subset E$ и $\Omega \cap E_0 \neq 0$, то определено поле $\Psi x = x - Ax$ на границе $\dot{\Omega}_0$ области $\Omega_0 = \Omega \cap E_0$ со значением на E_0. Пусть $\Omega_0 \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) = \gamma(\Psi, \dot{\Omega}_0).$$

Свойство 2.3. Если вполне непрерывное векторное поле $\Phi x = x - Ax$ невырождено на границе $\dot{\Omega}$ ограниченной области Ω и непрерывно на ее замыкании $\overline{\Omega}$. Пусть $\gamma(\Phi, \dot{\Omega}) \neq 0$. Тогда поле Φ имеет в области Ω по крайне мере одну особую точку.

Свойство 2.3 является основным орудием доказательства разрешимости векторных уравнений [23]. Из нее вытекает, что каждый признак отличия от нуля вращения поля Φ на границе $\dot{\Omega}$ области Ω является одновременно признаком существования у уравнения $\Phi x = 0$ по крайней мере одного решения в области Ω. Данное свойство является основной причиной интереса к задаче вычислении вращения.

Сформулируем теперь принцип Лере-Шаудера. Рассмотрим уравнение

$$Ax = x,\ x \in E. \tag{2.5}$$

где $A-$вполне непрерывный оператор действующий в E. Из свойства 2.1 и 2.2 следует

Теорема (см.[23]). Пусть оператор $A(x,\lambda)$, $(x \in E,\ \lambda \in [0,1]$ *вполне непрерывен по совокупности переменных и* $A(x,0) = Ax$. *Пусть для всех решений* x *всех уравнений*

$$A(x,\lambda) = x,\ \lambda \in [0,1], \tag{2.6}$$

справедлива общая априорная оценка $||x|| \leq R_0$. *Пусть, наконец, векторное поле* $x - A(x,1)$ *имеет ненулевое вращение на сферах* $||x|| = R_1$, *где* $R_1 > R_0$. *Тогда уравнение* (2.5) *имеет по крайне мере одно решение.*

Эффективность принципа Лере-Шаудера, в первую очередь, заключается в том, что для доказательства разрешимости уравнения (2.5) строится вспомогательное семейство уравнений (2.6), которое при $\lambda = 1$ настолько просто, что разрешимость уравнения $x = A(x,1)$ либо очевидно, либо известна априорно.

Переход к интегральным уравнениям. Использование принципа Лере-Шаудера в задачах о существовании периодических или ограниченных решениях уравнений вида (2.4) требует, в первую очередь, построения вполне непрерывного оператора A, неподвыжные точки которого определяют периодические или ограниченные решения уравнений (2.4). Такие операторы могут быть построены различными способами (см., например, [18], [23]). Ниже указывается один из таких способов.

Ограничимся рассмотрением периодической задачи для системы (2.4); приводимые ниже конструкции используются в дальнейшем, и в задаче об ограниченных решениях системы (2.4). Пусть функция $f(t,x,y)$ является $T-$периодической по переменной t:

$$f(t+T,x,y) \equiv f(t,x,y).$$

Непосредственный подсчет показывает, что $T-$периодические решения системы (2.4) совпадают с решениями системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(T) + \int_0^t y_2(s)ds, \\ y_2(t) = y_2(T) + \int_0^t [-g(y_1(s),y_2(s)) + f(s,y_1(s),y_2(s))]ds. \end{cases} \tag{2.7}$$

Пусть $C[0,T]-$ банахово пространство непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функции $y(t)$ с равномерной метрикой.

Обозначая $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$, $P(y) = \{y_2, -g(y_1,y_2)\}$, $F_0(t,y) = \{0, f(t,y_1,y_2)\}$ запишем систему (2.7) в виде

$$y(t) = y(T) + \int_0^t [P(y(s)) + F_0(s,y(s))]ds, \tag{2.8}$$

и соответствующее векторное поле

$$(\Phi_0 y)(t) = y(t) - y(T) - \int_0^t [P(y(s)) + F_0(s,y(s))]ds. \tag{2.9}$$

Так как вектор-функции $P(y)$ и $F_0(t,y)$ непрерывны по совокупности переменных, причем $F_0(t,y)$ является $T-$периодической по переменной t, то из общей теории интегральных операторов (см., например [21]) следует, что определяемый левой частью уравнения (2.9) оператор $I - \Phi_0$ будет действовать в пространстве $C[0,T]$ и обладает свойством полной непрерывности. Другими словами, равенство (2.9) определяет в пространстве $C[0,T]$ вполне непрерывное векторное поле Φ_0.

Наряду с (2.9), введем в рассмотрение также векторное поле

$$(\Phi_1 y)(t) = y(t) - y(T) - \int_0^t P(y(s))ds. \tag{2.10}$$

Далее, наряду с (2.4), рассмотрим семейство систем

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -g(y_1,y_2) + \lambda f(t,y_1,y_2), \quad \lambda \in [0,1]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Тогда принцип Лере-Шаудера применительно к задаче о существовании периодических решений системы (2.4) будеть иметь следующую формулировку.

Теорема. Пусть для всех $T-$периодических решений $y_1(t), y_2(t)$ всех систем (2.11) *справедлива общая априорная оценка*

$$\max_t (|y_\lambda(t)| + |y_\lambda'(t)|) \le R_0$$

и векторное поле (2.10) *имеет ненулевое вращение на сфере*

$$\dot{S}(R) = y(t) \in C[0,T] : ||y(t)||_C = R$$

при некотором $R > R_0$. *Тогда система* (2.4) *имеет по крайней мере одно* $T-$*периодическое решение.*

Таким образом, для изучения поставленной задачи о периодических решениях системы (2.4) необходимо, во-первых, указать условия, при которых верна априорная оценка, и во-вторых, уметь вычислять вращение векторного поля (2.10) на сферах $\dot{S}(R)$ больших радиусов.

Вопросам получения априорных оценок посвящен параграф §2.3, а вопросы вычисления вращения векторного поля (2.10) будут рассмотрены в параграфе §2.4.

При изучении вопросов получения априорных оцененок для ограниченных решений системы (2.11) важную роль играют нижеприводимые факты, относящиеся к системам вида

$$x' = P(x) + f(t,x),\ x \in R^n, \tag{2.12}$$

где оператор $P(x)$ является непрерывным и положительно однородным порядка $m > 0$: $(P(\lambda x) = \lambda^m P(x), \quad \lambda \geq 0)$, а вектор-функция $f(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных, и по переменной t либо является $T-$периодической по переменной t:

$$f(t+T,x) \equiv f(t,x) \tag{2.13}$$

либо является ограниченной по переменной t:

$$\sup_t |f(t,x)| < \infty.$$

При этом $f(t,x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{||x|| \to \infty} \sup_t \frac{|f(t,x)|}{||x||^m} = 0, \tag{2.14}$$

здесь через $|| \cdot ||$ обозначается евклидова норма в пространстве R^n. Другими словами, прои "больших"значениях $||x||$ правая часть системы (2.12) "близка"к однородной функции $P(x)$.

Наряду с (2.12) рассмотрим также системы

$$x' = P(x),\ x \in R^n, \tag{2.15}$$

$$x' = P(x) + \lambda f(t,x),\ x \in R^n,\ \lambda \in [0,1]. \tag{2.16}$$

Справедлива

Лемма. Пусть для всех ограниченных решений $x(t)$ *всех систем* (2.16) *имеет место общая априорная оценка*

$$\sup_t ||f(t,x)|| \le R_0 < \infty.$$

Тогда уравнение (2.15) *не имеет ненулевых ограниченных решений.*

Доказательство леммы совсем просто. В предположении противного у уравнения (2.15) найдется ненулевое ограниченное решение $x_0(t)$. Но тогда функция $y(t,\rho) \equiv \rho x_0(t\rho^{m-1})$ при любом $\rho \ge 0$ будет решением уравнения (2.15), что противоречить существованию априорной оценки для всех ограниченных решений всех систем (2.16).

Из этой леммы следует, что в задаче об априорных оценках для всех ограниченных решений всех систем (2.16) необходимо предполагать, что уравнение (2.15) не имеет ненулевых ограниченных решений.

Пусть уравнение (2.15) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда, в частности, нулевая точка $x = 0$ является единственной особой точкой векторного поля $P(x)$ и, следовательно (см., например, [23]), оперделено вращение $\gamma(P,S_r)$ векторного поля P на всех сферах

$$S_r = \{x : x \in R^n, ||x|| = r\}$$

и значение этого вращения не зависит от $r > 0$. Это общее значение вращения называют индексом $ind(P,\theta)$ особой точки $x = \theta$ векторного поля $P(x)$. Справедлива

Теорема. Пусть уравнение (2.15) *не имеет ненулевых ограниченных решений. Пусть* $ind(P,\theta) \ne 0$. *Тогда уравнение* (2.12) *для каждой удовлетворяющей условию* (2.14) *вектор-функции* $f(t,x)$ *имеет ограниченное* *решение. Если при этом выполнено равенство* (2.13), *то уравнение* (2.12) *имеет периодическое решение.*

Эта теорема и лемма указывают на существенность условия отсутствия у уравнения (2.16) ненулевых ограниченных решений в общей задаче с периодическими или ограниченными решениями уравнения (2.12). Поэтому важно уметь определять, когда это условие выполняется. Вопросы о существовании и отсутствия периодических и ограниченных решений однородных уравнений соответствующего уравнению (2.1) изучены в первой главе данной диссертации.

§ 2.2. Априорные оценки периодических решений

В этом параграфе получим условия на функцию $g(y, y')$, при которых для всех $T-$периодических решений семейства уравнений

$$y'' + g(y, y') = \lambda f(t, y, y'), \quad \lambda \in [0, 1], \tag{2.17}$$

справедлива априорная оценка

$$\max_t (|y_\lambda(t)| + |y'_\lambda(t)|) \leq R. \tag{2.18}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

1. $\exists \varphi \in [0, 2\pi]$, *такое что* $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) = 0$;
2. $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$, $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$ *и* $\gamma \neq 0$;
3. $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$, $sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi) \neq 0$ *и* $\gamma = 0$ *и* $T \neq k \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, k \in Z$.

Тогда $\exists R > 0$, *что для всех T-периодических решений* $y_\lambda(t)$ *семейства уравнений (2.17) справедлива априорная оценка (2.18).*

Отметим, что число γ определено в параграфе §1.1. Из теоремы 2.1 вытекают

Следствие 2.1. *Пусть* $b \neq 0, d = 0$ *и выполнены одно из следующих условий:*

1. $a \neq 0$;

2. $a = 0$ и $b \neq \frac{c^2}{4} + \frac{4\pi^2 k^2}{T^2}$, *для всех* $k = 1, 2, ...$;

Тогда $\exists R > 0$, *что для всех* $T-$*периодических решений* $y_\lambda(t)$ *семейства уравнений*

$$y'' + ay' + by + c|y'| = \lambda f(t, y, y'), \quad \lambda \in [0, 1],$$

справедлива априорная оценка (2.18).

Следствие 2.2. *Пусть* $d \neq 0, |b| - c|d| \neq 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют одному из условий: либо* $a/d \notin (0, 2)$ *либо* $a/d \in (0, 2)$ *и*

$$(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2 - a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}) \neq (0, \frac{4k\pi}{T}), \text{ для всех } k=1,2,\ldots.$$

Тогда $\exists R > 0$, *что для всех* $T-$*периодических решений* $y_\lambda(t)$ *семейства уравнений*

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y'| = \lambda f(t, y, y'), \quad \lambda \in [0, 1],$$

справедлива априорная оценка (2.18).

Доказательство теоремы 2.1. От противного имеем: $\forall R > 0$, $\exists \lambda \in [0, 1]$, при которых уравнение (2.17) имеет периодическое решение $y_\lambda(t)$ такое, что имеет место неравенство

$$\max_t(|y_\lambda(t)| + |y'_\lambda(t)|) > R.$$

В частности, для каждого $R = K, (K \in N)$ имеем

$$\max_t(|y_{\lambda_k}(t)| + |y'_{\lambda_k}(t)|) > K.$$

Обозначим $r_k = \max_t(|y_{\lambda_k}(t)| + |y'_{\lambda_k}(t)|)$ и введём в рассмотрение последовательность функций

$$x_k(t) = \frac{1}{r_k} y_{\lambda_k}(t).$$

Функции $x_k(t)$ определены на всей оси и удовлетворяют условиям:

1. $x_k(t + T) = x_k(t)$,

2. $|x_k(t)| + |x'_k(t)| \le 1$.

Вычисляя $x'_k(t)$, $x''_k(t)$ имеем

$$x''_k(t) + g(x_k(t), x'_k(t)) = \frac{\lambda_k}{r_k} f(t, r_k x_k(t), r_k x'_k(t)). \qquad (2.19)$$

Покажем, что x'' ограничена. Действительно, так как функция g непрерывна и её аргументы ограниченны, то она (в силу теоремы Вейерштрасса) являются ограничнным. А функция $\frac{\lambda_k}{r_k} f(t, r_k x_k(t), r_k x'_k(t))$ удовлетворяет условию (2.2), что обеспечивает ограниченность этой функции, тогда

$$|-g(x_k(t), x'_k(t)) + \frac{\lambda_k}{r_k} f(t, r_k x_k(t), r_k x'_k(t))| \le |-g(x_k(t), x'_k(t))| +$$

$$|\frac{\lambda_k}{r_k} f(t, r_k x_k(t), r_k x'_k(t))| \le M_0 + M_1 \le M.$$

Следовательно, в силу теоремы Арцела [15] из последовательности $x_k(t)$ можно выделить подпоследовательность $x_{k_j}(t)$ такую, что $x_{k_j}(t) \to x_0(t)$ и $x'_{k_j}(t) \to x'_0(t)$ равномерно по t при $j \to \infty$. Докажем, что

$$\max_t(|x_0(t)| + |x'_0(t)|) = 1.$$

Из обозначения r_k вытекает, что

$$r_k = \max_t(|y_{\lambda_k}(t)| + |y'_{\lambda_k}(t)|) = \max_t(|r_k x_k(t)| + |r_k x'_k(t)|) \Rightarrow$$

$$\max_t(|x_k(t)| + |x'_k(t)|) = 1.$$

Теперь из неравенств

$$1 = \max_t(|x_k(t)| + |x'_k(t)|) \le \max_t(|x_0(t)| + |x'_0(t)|) + 2\varepsilon,$$

$$1 = \max_t(|x_k(t)| + |x'_k(t)|) \ge \max_t(|x_0(t)| + |x'_0(t)|) - 2\varepsilon,$$

получим

$$1 - 2\varepsilon \le \max_t(|x_0(t)| + |x'_0(t)|) \le 1 + 2\varepsilon.$$

Следовательно, $\max_t(|x_0(t)| + |x'_0(t)|) = 1$.

Далее, интегрируем равенство (2.19) на промежутке $[t_0, t]$

$$x'_k(t) - x'_k(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} [-g(x_k(s), x'_k(s)) + \frac{\lambda_k}{r_k} f(s, r_k x_k(s), r_k x'_k(s))] ds.$$

Поставляя $k = k_j$, перейдем к пределу при $j \to \infty$ и получим

$$x'_0(t) - x'_0(t_0) = -\int\limits_{t_0}^{t} g(x_0(s), x'_0(s)) ds.$$

Дифференцируя последное равенство, получим

$$x''_0(t) = -g(x_0(t), x'_0(t)).$$

Таким образом, нами доказано, что $x_0(t)$ является ненулевым периодическим решением уравнения

$$x'' + g(x, x') = 0.$$

Напомним, что последнее уравнение при выполнении условий теоремы 1.1 имеет периодическое решение. Предположение противности доказывает теорему.

§ 2.3. Вычисление вращения векторных полей

Запишем уравнение (2.1) в виде системы

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = -g(y_1, y_2) + f(t, y_1, y_2). \end{cases} \tag{2.20}$$

Наряду с системой (2.20) рассмотрим систему

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(T) + \int_0^t y_2(s) ds, \\ y_2(t) = y_2(T) + \int_0^t [-g(y_1(s), y_2(s)) + f(s, y_1(s), y_2(s))] ds. \end{cases} \tag{2.21}$$

решения которой рассматривается на отрезке $[0, T]$. Если функция f $T-$периодическая по t, то T-периодическое решение $(y_1(t), y_2(t))$ системы (2.20) на отрезке $[0, T]$ удовлетворяет также системе (2.21). Это можно показать проинтегрировав тождество полученное при подстановке в (2.20) решения $(y_1(t), y_2(t))$ от 0 до t. Обратно, продолжая решение $(y_1(t), y_2(t))(t \in [0, T])$ системы (2.21) на всю прямую с периодом T получим решение системы (2.20). Следовательно, можно продифференцировать систему (2.21).

Поэтому, вопрос о существовании $T-$периодических решений у системы (2.20) эквивалентно нахождению решений на отрезке $[0, T]$ системы (2.21).

Обозначая $y(t) = \{y_1(t), y_2(t)\}$, $P(y) = \{y_2, -g(y_1, y_2)\}$, $F_0(t, y) = \{0, f(t, y_1, y_2)\}$ запишем систему (2.21) в виде

$$y(t) = y(T) + \int\limits_0^t [P(y(s)) + F_0(s, y(s))]ds, \tag{2.22}$$

и соответствующее векторное поле

$$(\Phi_0 y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t [P(y(s)) + F_0(s, y(s))]ds. \tag{2.23}$$

Этот параграф посвящён вычислению вращения векторного поля (2.23). Пусть $C_{[0,T]}-$ пространство непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций $(y_1(t), y_2(t))$; $S(R) = \{(y_1(t), y_2(t)) \in C_{[0,T]} : \max\limits_t(|y_1(t)| + |y_2(t)|) < R, \quad t \in [0, T]\}$; $\dot{S}(R) = \{(y_1(t), y_2(t)) \in C_{[0,T]} : \max\limits_t(|y_1(t)| + |y_2(t)|) = R, \quad t \in [0, T]\}$ – граница области $S(R)$. Обозначим через S единичную окружность в R^2.

Наряду с бесконечномерным полем (2.23) рассмотрим двумерное поле

$$\Psi_0(y) = P_0(y), \tag{2.24}$$

где $y = \{y_1, y_2\}$, $P_0(y) = \{-y_2, g(y_1, y_2)\}$.

Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.3. *Векторное поле (2.23) невырожденно на* $\dot{S}(R)$ *и гомотопно с*

$$(\Phi_1 y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t P(y(s))ds. \tag{2.25}$$

И вращение $\gamma(\Phi_1, \dot{S}(R))$ *поля* (2.25) *совпадает с вращением* $\gamma(\Psi_0, S)$ *конечномерного поля* (2.24) *на* S.

Теорема 2.2. *Пусть* $g(1,0)\cdot g(-1,0)<0$, *тогда*

$$\gamma(\Psi_0,S)=\frac{signg(1,0)-signg(-1,0)}{2}.$$

Пример1. Рассмотрим векторное поле

$$\Psi_1(y)=\{-y_2,\ ay_2+by_1+c|y_1|\}$$

Очевидно, $y=0$ является особой точкой поля Ψ_1. Следующая лемма определяет условие изолированности нулевой особой точки.

Лемма 2.1. *Нулевая особая точка* $y=0$ *поля* Ψ_1 *изолирована тогда и только тогда, когда* $|b|\neq|c|$.

Теперь вычислим вращения поля Ψ_1 в окрестности $(0,0)$.

Лемма 2.2. *Пусть* $|b|>|c|$, *тогда* $\gamma(\Psi_1,S)=signb$; *и пусть* $|b|<|c|$, *тогда* $\gamma(\Psi_1,S)=0$.

Доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(y)=P_\lambda(y),\quad \lambda\in[0,1],$$

где $P_\lambda(y)=\{-y_2,(1-\lambda)g(y_1,y_2)+\lambda g(y_1,0)\}$.

Покажем, что семейство полей $\Psi_\lambda(y)$ на S не имеет нулевых векторов. Действительно, если для некоторого $\lambda_0\in[0,1]$ и $y_0\neq0$, имеет место равенство $\Psi_{\lambda_0}(y_0)=0$, то получим $y_0=0$. Т.е. это поле равняется нулю только при нулевым значением y. А в окрестностях нуля является ненулевым. Следовательно, семейство векторных полей невырождено на S. Поэтому поле Ψ_0 на S гомотопно полю

$$\Psi_1(y)=P_1(y),$$

где $P_1(y)=\{-y_2,g(y_1,0)\}$. И следовательно, [20] вращение $\gamma(\Psi_1,S)$ поля Ψ_1 на S совпадает с вращением $\gamma(\Psi_2,S)$ поля $\Psi_2(y)=\{g(y_1,0),y_2\}$. Не трудно видеть, что вращение поля Ψ_2 зависить от знака функции $g(y_1,0)$. В случае $y_1>0$ с учетом того, что $g(\cdot,\cdot)$ однородная функция, имеем $g(y_1,0)=$

$y_1 \cdot g(1,0)$. Аналогично, в случае $y_1 < 0$ получим $g(y_1, 0) = -y_1 \cdot g(-1,0)$. Далее, возможны следующие случаи:

1. $g(1,0) > 0$ и $g(-1,0) > 0$;
2. $g(1,0) < 0$ и $g(-1,0) < 0$;
3. $g(1,0) > 0$ и $g(-1,0) < 0$;
4. $g(1,0) < 0$ и $g(-1,0) > 0$;

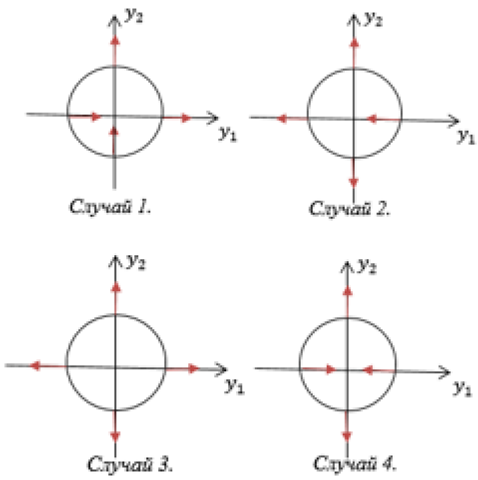


Рис. 2.1. Вращение поля

Из рис.2.1 видно, что $\gamma(\Psi_2, S) = 0$ для случаев 1 и 2, в случае 3 $\gamma(\Psi_2, S) = 1$ и в случае 4 $\gamma(\Psi_2, S) = -1$.

Проверим случай 1. В данном случае $g(1,0)$ и $g(-1,0)$ (так как оба положительные) можно заменить единицей. И поле Ψ_2 гомотопно полю $\Psi_3(y) = (|y_1|, y_2)$. В свою очередь, семейство

$$\boldsymbol{\Psi}_\lambda(\mathbf{y}) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbf{1} - \lambda) \begin{pmatrix} |y_1| \\ y_2 \end{pmatrix}$$

гомотопно соединяет поле Ψ_3 с $(1,0)$. Таким образом, вращение равно нулю. Рассмотрим ещё один случай (случай 4). В этом случае векторное поле Ψ_2 гомотопно линейному полю $\Psi_4(y) = (-y_1, y_2)$, и очевидно, вращение равно -1. Аналогично рассматриваются случаи 2 и 3. Теорема доказана.

Доказательство леммы 2.1. Пусть $\Psi_1(y) = 0$, т.е.

$$\begin{cases} -y_2 = 0, \\ ay_2 + by_1 + c|y_1| = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда скалярное уравнение

$$by_1 + c|y_1| = 0 \tag{2.26}$$

имеет ненулевое решение. Легко показать, что уравнение (2.26) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда либо $b + c = 0$, либо $b - c = 0$, т.е. когда $|b| = |c|$. Что противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2.2. С учётом условий $|b| \neq |c|$ плоскость (b, c) разделим на четыре часты. На первой и третьей части, где соответствует $|b| > |c|$ вращение поля отлично от нуля. Фиксируя некую точку из этой части, например $(1, 0)$ и вычислим вращение поля. Получим линейное поле

$$\Psi_2(y) = (-y_2,\ y_1).$$

И, следовательно, [20] $\gamma(\Psi_1, S) = 1$.

Теперь, рассмотрим семейство векторных полей

$$\Psi_\lambda(y) = \{-y_2,\ (\lambda + (1-\lambda)b_0)y_1 + (1-\lambda)c_0|y_1|\}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Легко показать, что деформация $\Psi_\lambda(y) \neq 0,\ \forall y \neq 0, \lambda \in [0,1]$ гомотопно соединяет поле Ψ_1 с

$$\Psi_0(y) = \{-y_2,\ b_0y_1 + c_0|y_1|\} \quad b_0 > |c_0|.$$

От противного. Пусть $\exists \lambda_0 \in [0,1]$ и $y \neq 0$, что $\Psi_{\lambda_0}y = 0$, т.е.

$$\begin{cases} y_2 = 0, \\ (\lambda_0 + (1-\lambda_0)b_0)y_1 + (1-\lambda_0)c_0|y_1| = 0. \end{cases}$$

$y_1 > 0:\ \lambda_0 + (1-\lambda_0)(b_0 + c_0) = 0$. Очевидно, что левая часть последнего равенства положительна. Мы пришли к противоречию.

$y_1 < 0 : \lambda_0 + (1-\lambda_0)(b_0 - c_0) = 0$. Так как $(b_0 - c_0) > 0$, то левая часть последнего равенства положительна. Эти противоречия покажут, что деформация $\Psi_\lambda(y) \neq 0$.

Далее, берем точку из области II или IV. В частности, точку $(0,1)$ и получим нелинейное поле

$$\Psi_2(y) = \{-y_2,\ |y_1|\}.$$

Используя формулу Пуанкаре [20] , получим

$$y_1 = cost, y_2 = sint, \quad y_1^2 + y_2^2 = 1, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{g_1(t)\cdot g_2'(t) - g_1'(t)\cdot g_2(t)}{{g_1}^2(t) + {g_2}^2(t)}dt.$$

В нашем случае $g_1(t) = -y_2$, $g_2(t) = |y_1|$. Тогда имеем

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{-sint\cdot|cos't| + (sint)'\cdot|cost|}{cos^2t + sin^2t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\int\limits_0^{\pi/2}(-sint\cdot cos't + sin't\cdot cost)dt + \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}(sint\cdot cos't - sin't\cdot cost)dt +$$

$$+ \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}(-sint\cdot cos't + sin't\cdot cost)dt] = 0.$$

Аналогично, семейство полей

$$\Psi_\lambda(y) = \{-y_2,\ (1-\lambda)b_0y_1 + (\lambda + (1-\lambda)c_0)|y_1|\}, \quad \lambda \in [0,1],$$

не пренимает нулевых векторов в окрестностях $(0,0)$ и гомотопно соединяет полю Ψ_2 с

$$\Psi_3(y) = \{-y_2,\ b_0y_1 + c_0|y_1|\}, \quad |b_0| < c_0.$$

Аналогично, можно показать для третей и четвёртой частях, как для первой и второй, соответственно. Лемма доказана.

§ 2.4. Периодические решения неоднородного уравнения

С учётом теорем 1.1, 2.1 и 2.2 имеем

Теорема 2.3. *Пусть* $g(1,0)\cdot g(-1,0) < 0$ *и выполняются условия теоремы 2.1. Пусть функция* $f(t,y,z)$ $T-$*периодическая по переменной* t, *тогда уравнение (2.1) имеет по крайней мере одно* $T-$*периодическое решение.*

Из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.4. *Пусть* $d=0, b\neq 0,\ (a, 4b-c^2)\neq(0,\ 16\pi^2k^2/T^2)$ *для всех* $k=1,2,...$ *и* $f(t,y,z)$ $T-$*периодическая по переменной* t. *Тогда уравнение* (2.3) *имеет по крайней мере одно* $T-$*периодическое решение.*

Пусть $d\neq 0$ *и* $|b|-c|d|\neq 0$ *и коэффициенты* a, b *удовлетворяют одному из условий: либо* $a/d\notin(0,2)$, *либо* $a/d\in(0,2)$ *и*

$$(2ab-d(c^2+a^2), \frac{c^2-a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a}-1})\neq(0,\frac{4k\pi}{T}),\ \textit{для всех } k=1,2,....$$

Пусть функция $f(t,y,z)$ $T-$*периодическая по переменной* t. *Тогда уравнение* (2.3) *имеет по крайней мере одно* $T-$*периодическое решение.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.3 приведём вспомогательную лемму. Функция

$$g_1(y_1,y_2)=\begin{cases}\dfrac{y_1\cdot y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}, & \textit{если}\quad y_1\geq 0,\quad y_2\geq 0,\quad y_1+y_2>0,\\ 0, & \textit{в остальных случаях,}\end{cases}$$

определена и непрерывна по совокупности y_1, y_2 и положительно однородна первого порядка. Свойства однородности функции g_1 легко проверить. Используя неравенство $y_1\cdot y_2\leq\dfrac{y_1^2+y_2^2}{2}$ можно проверить непрерывность этой функции.

Определим число

$$\gamma(\varepsilon)=-\int\limits_0^{2\pi}\frac{cos\varphi\cdot sin\varphi-sin\varphi\cdot[g(cos\varphi,sin\varphi)+\varepsilon\cdot g_1(cos\varphi,sin\varphi)]}{sin^2\varphi+cos\varphi\cdot[g(cos\varphi,sin\varphi)+\varepsilon\cdot g_1(cos\varphi,sin\varphi)]}d\varphi.$$

В предположении §1.2, знаменатель подинтегральной функции числа γ была ненулевой. Поэтому знаменатель в формуле для $\gamma(\varepsilon)$ тоже останется ненулевой при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$.

Лемма 2.3. *Если $\gamma = 0$, то $\gamma(\varepsilon) \neq 0$ при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$.*

Доказательство леммы 2.3.

$$\gamma(\varepsilon) = -\int_0^{2\pi} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]} d\varphi =$$

$$= -[\int_0^{\pi/2} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]} d\varphi +$$

$$+ \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)} d\varphi] =$$

$$= -[\int_0^{\pi/2} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]} d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)} d\varphi -$$

$$- \int_0^{\pi/2} \frac{cos\varphi \cdot sin\varphi - sin\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot g(cos\varphi, sin\varphi)} d\varphi] =$$

если $\gamma = 0$, то

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\varepsilon \cdot sin\varphi \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)}{sin^2\varphi + cos\varphi \cdot [g(cos\varphi, sin\varphi) + \varepsilon \cdot g_1(cos\varphi, sin\varphi)]} d\varphi > 0.$$

Доказательство теоремы 2.3. Из условий теоремы 2.1, $T \neq T_0$, где $T_0 = k \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{sin^2\tau + cos\tau \cdot g(cos\tau, sin\tau)}, k \in Z$ имеется пара случаев: I. $T < T_0$; II. $T > T_0$.

Случай $T < T_0$. Введём в рассмотрение семейство систем

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -g(y_1, y_2) + (1-\lambda) f(t, y_1, y_2), \quad \lambda \in [0,1]. \end{cases}$$

и соответствующее ему семейство векторных полей

$$(\Phi_\lambda y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t [P(y(s)) + F_\lambda(s, y(s))] ds, \tag{2.27}$$

где $F_\lambda(t, y) = \{0, (1-\lambda) f(t, y_1, y_2)\}$. При $\lambda = 0$ поле (2.27) совпадает с полем (2.23), а при $\lambda = 1$ оно совпадает с полем (2.25).

В силу теоремы 2.1 семейство векторных полей (2.27) невырождено на $\dot{S}(R)$ и поэтому вращения векторных полей (2.23) и (2.25) совпадают.

Далее, рассмотрим семейство векторных полей

$$(\Phi_\lambda y)(t) = y(t) - (Ay)(t) \quad \lambda \in [1, 2]. \tag{2.28}$$

Ясно, что оператор

$$(Ay)(t) = y(T) + (2-\lambda) \int\limits_0^t P(y(s)) ds + (\lambda - 1) \int\limits_0^T P(y(s)) ds$$

вполне непрерывен по совокупности переменных λ, y. Это следует из непрерывности подинтегральной функции. Покажем, что семейство полей (2.28) на границе $\dot{S}(R)$ области $S(R)$ не имеет нулевых векторов и гомотопно соединяет поля (2.25) с полем

$$(\Phi_2 y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^T P(y(s)) ds. \tag{2.29}$$

Действительно, если для некоторого $\lambda_0 \in [1, 2)$ и $y_0(t) \neq 0$ $(y_0(t) \in S(R))$ имеет место равенство $(\Phi_{\lambda_0} y_0)(t) = 0$, т.е.

$$y_0(t) = y_0(T) + (2-\lambda_0) \int\limits_0^t P(y_0(s)) ds + (\lambda_0 - 1) \int\limits_0^T P(y_0(s)) ds, \tag{2.30}$$

то при $t = T$ из (2.30) имеем

$$\int_0^T P(y(s))ds = 0 \ .$$

Поэтому, полагая $t = 0$, получим

$$y_0(0) = y_0(T). \tag{2.31}$$

С другой стороны дифференцируя тождество (2.30) имеем

$$y_0'(t) = (2 - \lambda_0)P(y_0).$$

Сделая замену $\tau = t \cdot (2 - \lambda_0)$, получим $w(\tau) = y(\frac{\tau}{1-\lambda_0})$. Вычислим производную

$$w'(t) = P(w(\tau)). \tag{2.32}$$

Из условия (2.31) вытекает, что $w(0) = w(T_0)$, где $T_0 = (2 - \lambda_0) \cdot T$. Это противоречит условию теоремы. Теперь рассмотрим случай $\lambda_0 = 2$. Из (2.30) имеем $y_0(t) = 0$. Это противоречит предположению. Таким образом, семейство (2.28) не имеет нулевых векторов на $\dot{S}(R)$.

Теперь пусть $K_{[0,T]}$– подпространство пространства $C_{[0,T]}$, состоящее из всех постоянных вектор-функций. Пусть оператор $(Ay)(t) = y(T) + \int_0^T P(y(s))ds$. Ясно, что оператор A действует из $C_{[0,T]}$ в $K_{[0,T]}$. Поэтому в силу леммы Лере-Шаудера [23], вращение поля (2.29) на $\dot{S}(R)$ равно вращению двумерного поля

$$\Psi(y) = -P(y), \tag{2.33}$$

на единичной сфере S. Вращение поля Ψ согласно теореме 2.2 отлично от нуля.

Случай $T > T_0$. В этом случае однородное уравнение (1.1) имеет периодическое решение периода T_0 $(T_0 < T)$. Поэтому невозможно применят утверждение о совпадении вращения $\gamma(\Phi_1, \dot{S}(R))$ поля (2.25) с вращением $\gamma(\Psi, S)$ двумерного поля (2.33) на единичной сфере S. Но векторное поле

$$(\Phi_3 y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t P_\varepsilon(y(s))ds, \tag{2.34}$$

где $P_\varepsilon(y) = \{y_2, \ \ -g(y_1, y_2) + \varepsilon g_1(y_1, y_2)\}$ при достаточно малом ненулевом ε гомотопно полю (2.25).

Семейство вектор-функций

$$(\Phi_\lambda y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t P_\lambda(y(s))ds, \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.35}$$

где $P_\lambda(y) = \{y_2, \ -g(y_1, y_2) + \lambda \cdot \varepsilon \cdot g_1(y_1, y_2)\}$, на границе $\dot{S}(R)$ области $S(R)$ не имеет нулевых векторов и гомотопно соединяет поле (2.34) с (2.25). Действительно, пусть для некоторых $\lambda_0 \in [0,1]$ и $y_0(t) \neq 0 \in S(R)$ имеет место равенство $(\Phi_{\lambda_0} y_0)(t) = 0$, т.е.

$$y_0(t) = y_0(T) + \int\limits_0^t P_{\lambda_0}(y(s))ds. \tag{2.36}$$

Тогда при $t = 0$ получим

$$y_0(0) = y_0(T). \tag{2.37}$$

С другой стороны, дифференцируя (2.36), имеем

$$y_0'(t) = P_{\lambda_0}(y_0).$$

Условие (2.37) противоречит условиям леммы 2.3 и теоремы 1.1. Теорема полностью доказана.

Следует отметить, что следствие 2.4. в случае, когда $d = 0, a = 0, 4b - c^2 > 0$ и $4b - c^2 \neq 16\pi^2 k^2/T^2$ для всех $k = 1, 2, ...$ и $4b - c^2 > 16\pi^2 k_0^2/T^2$ не является следствием выше приведенных общих теорем. В этом случае однородное уравнение (1.19) имеет периодическое решение периода $T_0 < T$ и поэтому невозможно применять утверждение о совпадении вращения $\gamma(\Phi_1, \dot{S}(R))$ поля (2.25) с вращением $\gamma(\Psi_0, S)$ двумерного поля

$\Psi_0 y = (-y_2, by_1 + c|y_2|)$ на единичной сфере S. Но векторное поле

$$(\Phi_4 y)(t) = y(t) - y(T) - \int\limits_0^t P_\varepsilon(y(s))ds,$$

где $P_\varepsilon(y) = \{y_2, \quad \varepsilon y_2 - by_1 - c|y_2|\}$ при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ гомотопно полю (2.25). Поэтому в силу свойства транзитивности гомотопных векторных полей $\gamma(\Phi_1, S(R)) = \gamma(\Phi_4, \dot{S}(R)) = \gamma(\Psi_0, S)$. Не трудно видеть, что вращения $\gamma(\Psi_0, S)$ поля Ψ_0 на окружности S равно вращению линейного поля $\Psi_1(-y_2, by_1)$ и следовательно, [23] $\gamma(\Psi_1, S) = signb$.

§ 2.5. Ограниченные решения неоднородного уравнения

В этом параграфе будем исследовать ограниченные решения нелинейных уравнений (2.1). В отличие от предыдущего параграфа $f(t,y,z)$ не является периодической. Здесь предполагается, что $\sup_t |f(t,y,z)| < \infty$. При этом $f(t,y,z)$ удовлетворяет условию (2.2).

На основе теории вращения вполне непрерывных векторных полей и полученных результатов в §1.4 имеем

Теорема 2.4. *Пусть $g(1,0) \cdot g(-1,0) < 0$ и выполнены условия следствия 1.1. Тогда уравнение (2.1) имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

Из теоремы 2.4 вытекает

Следствие 2.5. *Пусть $d = 0$ и коэффициенты a, b удовлетворяют условиям $b \neq 0$ и $(a,b) \notin I(c) \cup \Delta(c)$. Тогда уравнение* (2.3) *имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

Пусть $d \neq 0$ и коэффициенты (a,b) удовлетворяют условиям $|b| - c|d| \neq 0$ и $(a,b) \notin I(c,d) \cup \Delta(c,d)$. Тогда уравнение (2.3) *имеет по крайне мере одно ограниченное на всей оси решение.*

Доказательство теоремы 2.4 Так как функция $f(t,y,z)$ не является периодической по t, то построим функции

$$f_k(t,y,z)=\begin{cases} f(t,y,z), & -\frac{k}{2}\le t\le\frac{k}{2}-1\\ f\left(-\frac{k}{2},y,z\right)+\left(\frac{k}{2}-t\right)\left[f(t,y,z)-f\left(-\frac{k}{2},y,z\right)\right], & \frac{k}{2}-1<t\le\frac{k}{2}\end{cases}$$

которые обладают следующими свойствами:

а) $f_k(t,y,z)$ определена и непрерывна для всех $(y,\ z)\in R^2$ и $-\frac{k}{2}\le t\le\frac{k}{2}$. Проверим: так, как функция $f(t,y,z)$ непрерывна, то достаточно чтобы проверить непрерывность функции $f_k(t,y,z)$ в точке $t=\frac{k}{2}-1$.

$$\lim_{t\to_+\left(\frac{k}{2}-1\right)} f_k(t,y,z)=\lim_{t\to_-\left(\frac{k}{2}-1\right)} f_k(t,y,z)=f\left(\frac{k}{2}-1,y,z\right);$$

б) $f_k\left(-\frac{k}{2},y,z\right)\equiv f_k\left(\frac{k}{2},y,z\right)$;

с) Последовательность $f_k(t,y,z)$ равномерно по k удовлетворяет условию (2.2):

$sup|f\left(-\frac{k}{2},y,z\right)+\left(\frac{k}{2}-t\right)\left[f(t,y,z)-f\left(-\frac{k}{2},y,z\right)\right]|=$
$=sup|\left(1+t-\frac{k}{2}\right)\cdot f\left(-\frac{k}{2},y,z\right)+\left(\frac{k}{2}-t\right)f(t,y,z)|\le sup|f(t,y,z)|$.

Как мы отметили, значения $f_k(t,y,z)$ на концах отрезка $-\frac{k}{2}\le t\le\frac{k}{2}$ одиноково, поэтому функцию $f_k(t,y,z)$ можно продолжит по t на всей оси с периодом $\omega_k=k$.

Введём в рассмотрение уравнение

$$y''+g(y,y')=f_k(t,y,y'). \tag{2.38}$$

Так как функция $f_k(t,y,z)$ удовлетворяет условию (2.2), то каждое из уравнений (2.38) имеет периодическое решение с периодом ω_k, т.е.

$$y_k(t){=}y_k(t+\omega_k),\ \omega_k=k. \tag{2.39}$$

Покажем $\exists M>0$, *такая что для всех* t *и* k *выполняется*

$$|y_k(t)|+|y_k'(t)|\le M.$$

Так как это неравенство выполняется для всех t, то

$$\max_{-\frac{k}{2}\le t\le\frac{k}{2}}\left(|y_k(t)|+|y_k'(t)|\right)\ \le M.$$

От противного, пусть

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \max_t(|y_k(t)| + |y_k'(t)|) = \infty.$$

Обозначим

$$r_k = \max_{-\frac{k}{2}\le t\le\frac{k}{2}}(|y_k(t)| + |y_k'(t)|) = |y_k(t_k)| + |y_k'(t_k)|.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$x_k(t) = \frac{1}{r_k} y_k(t+t_k), \quad -\frac{k}{2} \le t_k \le \frac{k}{2}. \tag{2.40}$$

Функции $x_k(t)$ определены на $(-\infty,\ +\infty)$ и

$$\max_t(|x_k(0)| + |x_k'(0)|) = 1.$$

С учётом (2.40) имеем

$$x_k''(t) + g(x_k(t), x_k'(t)) = \frac{1}{r_k} f_k(t+t_k, r_k x_k(t), r_k x_k'(t)). \tag{2.41}$$

По условию, правые части равенства (2.41) равномерно стремятся к нулю при $k \to \infty$. Так, как x_k'' ограниченны, из последовательности x_k выделим сходящую подпоследовательность $x_{k_j}(t)$ такую, что $x_{k_j}(t) \to x_0(t)$ и $x_{k_j}'(t)) \to x_0'(t)$ равномерно сходятся по t при $j \to \infty$. Интегрируя (2.41) в пределах от t_0 до t имеем

$$x_k'(t) - x_k'(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} [-g(x_k(s), x_k'(s)) + \frac{1}{r_k} f_k(s+t_k, r_k x_k(s), r_k x_k'(s))] ds.$$

Поставляя $k = k_j$, перейдем к пределу и получим

$$x_0'(t) - x_0'(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} -g(x_0(s), x_0'(s)) ds.$$

Дифференцируя последное равенство, имеем

$$x_0''(t) = -g(x_0(t), x_0'(t)).$$

Нами доказано, что $x_0(t)$ является решением уравнения

$$x'' + g(x, x') = 0. \tag{2.42}$$

Напомним, что уравнение (2.42) при выполнении условий теорем 1.1, 1.3-1.5 имеет ограниченные решения. Это противоречит нашему предположению. Поэтому, если не выполняются условия этих теорем, т.е. выполняется хотя бы одно из условий следствия 1.1, то последовательность $y_k(t)$ ограниченна.

Мы показали, что $y_k(t)$ является решением уравнения (2.38) и $y_k(t)$ и $y_k'(t)$ ограниченными. Оказывается $y_k''(t)$ тоже является ограниченным. Поэтому в силу теоремы Арцела при $j \to \infty$

$$y_{k_j}(t) \rightrightarrows y_0(t),$$

$$y_{k_j}'(t) \rightrightarrows y_0'(t).$$

Здесь $y_0(t)$ является решением уравнения (2.1) и $|y_0(t)| + |y_0'(t)| \le M$.

Теорема доказана.

Заключение

- Дана классификация и анализ фазовых портретов и проведен анализ устойчивости нулевого решения для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2).
- Получены условия существования периодических и ограниченных решений для однородного уравнения, соответствующего уравнению (2).
- Для периодических решений дифференциальных уравнений (2) получены новые априорные оценки.
- Вычислены вращения нелинейных векторных полей, соответствующие периодическим решениям уравнений (2).
- Для дифференциальных уравнений (2) получены условия существования периодических решений.
- Для дифференциальных уравнений (2) получены условия существования ограниченных решений.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно использовать в прикладных вопросах: в различных областях химии, биологии, техники, физики. Потому что периодические и ограниченные решения обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо применимы в этих областях.

А также можно использовать при исследовании периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в научных учреждениях и вузах, в которых ведутся исследования по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений, например, в Воронежском государственном университете, в Институте математики имени А. Джураева, в Таджикском национальном университете.

Литература

[1] *Абдуваитов, Х.* О некоторых свойствах автономных динамических систем на плоскости / Х. Абдуваитов // ДАН Тадж.ССР.–1984.–Т.27. – №7. – С. 351-354.

[2] *Абдуваитов, Х.* Некоторые достаточные условия существования периодических и ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Х. Абдуваитов // Дифференц. уравнения.–1985.–Т.21. –№12. –С. 74-84.

[3] *Азизов, Р.Э.* Об априорных оценках для ограниченных решений системы трёх дифференциальных уравнений с однородными главными членами / Р.Э. Азизов // ДАН Тадж.ССР.–1988.–Т.31. – №9. – С. 555-558.

[4] *Андронов, А.А.* Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.

[5] *Арнольд, В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. – 400 с.

[6] *Байзаев, С.* Ограниченные решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / С. Байзаев, Э. Мухамадиев // Вестник Таджикского государственного университета права, бизнеса и политика. – 2010. – № 1. – С. 108-112.

[7] *Бобылев, Н.А.* О построении правильных направляющих функций / Н.А. Бобылев // Доклады АН СССР. –1968.–Т.183.– №2. –С.265-266.

[8] *Боголюбов, Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1974. – 504 с.

[9] *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.:Радио и связь, 1988.

[10] *Гарел, Д.* Колебательные химические реакции / Д. Гарел , О. Гарел. – М.:Мир, 1986.

[11] *Gomory, R.E.* / R.E. Gomory // Ann. math. studies. – 1956. –№36.

[12] *Демидович, Б.П.* Об ограниченных решениях некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Б.П. Демидович. – Матем.сб. –1956. –№1.– С. 73-94.

[13] *Diblik, J.* Some asymptotic properties of solutions of homogenous linear systems of ordinary differential equations / J. Diblik // J.Math.Anal. and Appl. – 1992. –Т. 165. – №1. – p. 228-304.

[14] *Забрейко, П.П.* Вычисление индекса неподвижной точки векторного поля / П.П. Забрейко, М.А. Красносельский // СМЖ5. –1967.–№3.

[15] *Ильин, В.А.* Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

[16] *Кобилзода, М.М.* О положительных и периодических решениях одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений на плоскости / М.М. Кобилзода , А.Н. Наимов // Вестник Воронежского государственного университета. –2019. –№1. – С.117-127.

[17] *Колемаев, В.А.* Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М.: Выс. шк.,1998. –240 с.

[18] *Колмагоров, А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмагоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1981. –543 с.

[19] *Красносельский, М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Гостехиздат, 1956. – 390 с.

[20] *Красносельский, М.А.* Векторные поля в плоскости / М.А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1963. – 248 с.

[21] *Красносельский, М.А.* Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

[22] *Красносельский, М.А.* О вычислении вращения векторного поля на конечномерной сфере / М.А. Красносельский // ДАН СССР.–1966. – Т.101. –№3.

[23] *Красносельский, М.А.* Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

[24] *Лере, Ж.* Топология и функциональные уравнения / Ж. Лере , Ю. Шаудер. – УМЫ, –1946.

[25] *Liang, Z.* Several problems on the global analysis of the polynomial differential systems / Z. Liang // J.Cent. China Norm. Univ. Natur. Sci. – 1991. –Т. 11. – №1. – p. 137-149.

[26] *Liu, D.* Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of limit cycles for a class of polynomial system / D. Liu // Acta Math.Sci. – 1991. –Т. 11. – №1. – p. 65-71.

[27] *Ляпунов, А.М.* Общие задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 472 с.

[28] *Марри, Д.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии / Д. Марри. – М.: Мир, 1983. – 397 с.

[29] *Мухамадиев, Э.М.* О вычислении индекса особой точки конечномерного вектора поля / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН Тадж. ССр. –1967. – №10. – С. 6-9.

[30] *Мухамадиев, Э.М.* О построении правильной направляющей функции для систем дифференциальных уравнений / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. –1970. –Т.190.–№4.–С.777-779.

[31] *Мухамадиев, Э.М.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. –1970. –Т.194.–№3.–С.510-513.

[32] *Мухамадиев, Э.М.* К теории ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.М. Мухамадиев // Дифференциальные уравнения. –1974. –Т.10.–№5.–С.635-646.

[33] *Мухамадиев, Э.М.* О периодических и ограниченных решениях систем двух нелинейных уравнений / Э.М. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. –1976. –Т.19.–№3.

[34] *Мухамадиев, Э.М.* Формула для вычисления вращения одного класса векторных полей / Э.М. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. –1977. –Т.20.–№5.–С.11-14.

[35] *Мухамадиев, Э.М.* Исследования по теории периодических и ограниченных дифференциальных уравнений / Э.М. Мухамадиев // Диссертация. Душанбе. –1978.

[36] *Мухамадиев, Э.М.* Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // Уфимский математический журнал.–2013.–№4.– С. 74-84.

[37] *Мухамадиев, Э.М.* Анализ рождения предельных циклов одного класса нелинейной уравнений второго порядка / Э.М. Мухамадиев, А.М. Гулов, И.Д.Нуров // Вестник Воронежского государственного университета.–2016.–№1.– С.118-125.

[38] *Немыцкий, В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М.:Наука, 1949.–552 с.

[39] *Нуров, И.Д.* Методы теории вращения векторных полей в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа / И.Д. Нуров, М.Г. Юмагулов // Матем. моделирование и краев. задачи. – 2005. – №3. – С. 183-184.

[40] *Нуров, И.Д.* Исследования устойчивости состояния равновесия негладких динамических систем / И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // ДАН РТ. – 2011. –Т. 54. – №10. – С. 815-820.

[41] *Петровский, И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифферен-циальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: МГУ, 1984. – 296 с.

[42] *Плисс, В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний / В.А. Плисс. – М.: Физматгиз, 1964. – 369 с.

[43] *Плисс, В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений / В.А. Плисс. – М.: Наука, 1977. – 303 с.

[44] *Пуанкаре, А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

[45] *Розо, М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости / М. Розо. – М.:Наука, 1971.–288с.

[46] *Романовский, Ю.М.* Математическая биофизика / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.:Наука, 1984.–304с.

[47] *Ризниченко, Г.Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии / Г.Ю. Ризниченко. – М.: Ижевск, 2002. 232 с.

[48] *Свережев, Ю.М.* Устойчивость биологических сообществ / Ю.М. Свережев, Д.О. Логофет. – М.: Наука, 1979.–352с.

[49] *Ушно, Д.С.* Предельные циклы одной автономной системы с алгебраическими правыми частями / Д.С. Ушно // Дифференц. уравнения. – 1991. –Т. 27. – №11. – С. 1915-1925.

[50] *Филипов, А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений / А.Ф. Филипов. – М.:ЛЕНАНД, 2015. – 240 с.

[51] *Wazewski, T.* Une methode topologique de l'examen du phenomene asymptotique relativement aux equations differentielles ordinaires / T. Wazewski // Rent. Accad. Lincei. –1947. –№3. –P. 210-215.

[52] *Wazewski, T.* Systemes des equations et des ineqalites differentielles ordinaries deuxieme membres monotones et leurs applications / T. Wazewski // Ann. Polon. Math. –1950. –V.23. –P. 112-166.

[53] *Welch, S.C.* A priori bounds and modal properties for periodic solutions to a class of ordinary differential equations / S.C. Welch // J.Math.Anal. and Appl. – 1992. –T. 171. – №2. – p. 395-406.

[54] *Yangian, Y.* A new method for the proof of the equace ness of limit cycles / Y. Yangian // Repts Inst. Math. – 1991. – №2. – p. 1-6.

Публикации автора в изданиях, рекомендованных ВАК

[1-А] Ахмедов, Дж.Т. Анализ периодических решений негладкой динамической системы с вынужденным колебанием / Дж.Т. Ахмедов, С.Х. Мирзоев, И.Д. Нуров // Вестник Таджикского национального университета. –2016. – №1-3. –С.14-17.

[2-А] Ахмедов, Дж.Т. Устойчивость и периодичность в задачах с вынужденным колебанием нелинейной системы второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, И.Д. Нуров // Вестник Таджикского национального университета. –2017. – №1/3. –С.45-49.

[3-А] Ахмедов, Дж.Т. Периодические и ограниченные решения квазилинейных уравнения второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, Э.М.

Мухамадиев, И.Д. Нуров // Вестник Воронежского государственного университета. –2019. –№3. –С.59-66.

[4-А] Ахмедов, Дж.Т. О периодическом и ограниченном решении нелинейного уравнения второго порядка с фазовыми портретами / Дж.Т. Ахмедов //ДАН РТ. –2020. —Т.63.–№9-10.–С.579-585.

Публикации автора в других изданиях

[5-А] Ахмедов, Дж.Т. Анализ периодических решений динамической системы с вынужденным колебанием / Дж.Т. Ахмедов, И.Д. Нуров // Международная научная конференция "Современные проблемы математики и её приложений". –Душанбе, 2016. – С.7-8.

[6-А] Ахмедов, Дж.Т. К теории ограниченных решений негладких динамических систем второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, М.Ш. Халилова // Материалы междунар. конф., посвящ. 90-летию академика НАН Таджикистана Михайлова Л.Г. –Душанбе, –2018. –С.30-31.

[7-А] Ахмедов, Дж.Т. Вычисление индекса особой точки негладких динамических систем второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, И. Давлатов // Материалы междунар. конф., посвящ. 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана Илолова Мамадшо. (Душанбе, 14-15 марта 2018г.).–Душанбе, –2018. –С.78-79.

[8-А] Ахмедов, Дж.Т. Фазовый портрет однородного дифференциального уравнения второго порядка / Дж.Т. Ахмедов // Материалы междунар. конф., посвящ. 70-летию профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25-26 декабря 2020г.). Душанбе, – 2020. – С.-28-31.

[9-А] Ахмедов, Дж.Т. Об одном аналоге принципа Лере-Шаудера для негладких двумерных систем / Дж.Т. Ахмедов, И.Д. Нуров // Материалы междунар. конф. "Современные методы теории функции и смежные проблемы". –Воронеж, –2017. – С.24-25.

[10-A] Ахмедов, Дж.Т. Топологические методы анализа существования периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, И.Д. Нуров // Материалы междунар. конф., посвящ. 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф.Леонтьева. –Уфа, –2017. – С.14-15.

[11-A] Ahmedov, J.T. Existing of periodic and bounded solutions of quasilinears equation second order / J.T. Ahmedov , M.M. Kobilzoda // The twenty fifth of international conference "Mathematic-Computer-Education". –Dubna, – 2018. –P.156.

[12-A] Ахмедов, Дж.Т. Топологические методы решения квазилинейных уравнений второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, И.Д. Нуров // Двадцать шестая международная конференция "Математика-Компьютер-Образования"(Пущино, 28 января-2 февраля 2019г.). –2019. – С.133.

[13-A] Ахмедов, Дж.Т. Существование периодических и ограниченных решений нелинейных уравнений второго порядка / Дж.Т. Ахмедов // Материалы междунар. конф., посвящ. 10-летию Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе

[14-A] Ахмедов, Дж.Т. Качественный анализ и сравнения фазовых портретов квазилинейного уравнения второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, М.К. Арабов, А.М. Гулов // Материалы междунар. конф. – Вологда, –2019. – С.16-20.

[15-A] Ахмедов, Дж.Т. Ограниченные решения и анализ фазовых портретов нелинейного уравнения второго порядка / Дж.Т. Ахмедов, И. Давлатов // Материалы междунар. конф., посвящ. 70-летию профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30-31 января 2020г.).–Душанбе, – 2020. – С.59-62.