«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Ректор Таджикского государственного
педагогического университета им. С. Айни
Н.Ю. Салими
«25» января 2019 г.

О Т З Ы В

оппонирующей организации на диссертационную работу
Бекназарова Джурабека Холмаматовича
на тему
«Приближения суммами Фурье – Чебышёва и точные значения n-поперечников некоторых классов функций»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория приближения функций, основы которой были заложены в классических трудах П.Л.Чебышёва и К.Вейерштрасса о наилучшем равномерном приближении функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами, является одной из центральных ветвей математического анализа, занимающегося вопросами приближенного представления сложных функций с помощью более простых и удобных функций. В своём развитии теория приближения прошла три этапа: от наилучшего приближения индивидуальных функций на первом этапе до наилучшего приближения классов функций во втором этапе и, наконец, выбора экстремальных приближающихся подпространств на третьем этапе. Последний этап связан с именем А.Н.Колмогорова, который ввёл в теорию приближений понятие поперечника множества. В шестидесятых годах XX-го столетия интерес к вычислению n-поперечников по Колмогорову резко возрос и появились другие n-поперечники: n-поперечники по Гельфанду, по Бернштейну, линейные, проекционные, тригонометрические, информационные и т.д. В решение задач отыскания точных значений n-поперечников различных классов функций существенный вклад внесли В.М. Тихомиров, Н.П. Корнейчук, Л.В. Тайков, А.А. Лигун, А. Пинкус, Н.И.Черных, А.Г.Бабенко, В.И.Иванов, Н.Айнулоев, Ю.Хуссейн, С.Б.Вакарчук, Г.Г. Магарил-Ильяев, М.Ш. Шабозов и многие другие.

Диссертационная работа Бекназарова Джурабека Холмаматовича является дальнейшим развитием результатов перечисленных выше учёных, когда в качестве аппарата приближения используются полиномы П.Л.Чебышёва первого рода. В ней также рассматриваются задачи, связанные с отысканием точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина, а также вычислением различных n-поперечников классов функций. Решение перечисленных экстремальных задач является актуальным в приложениях теории аппроксимации.

Диссертация соответствует профилю диссертационного совета 6D.KOA - 012 при Таджикском национальном университете.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 51 наименования, занимает 81 страницу машинописного текста, набранного на LaTeX.

В диссертационной работе в качестве характеристики гладкости функции рассматривается обобщённый модуль непрерывности m-го порядка, конструкция которого построена на базе оператора сдвига для многочлена Чебышёва первого рода и имеет вид

$$\Omega_m(f,t)_{L_{2,\mu}[-1,1]} = \sup\Big\{\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|_{L_{2,\mu}[-1,1]}:\ |h|\le t\Big\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-\cos kh)^{2m}k^{4r}c_k^2(f):\ |h|\le t\right\}^{1/2},$$

где $L_{2,\mu}[-1,1]$ - гильбертово пространство с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$, $c_k(f)$– коэффициенты Фурье–Чебышёва функции $f\in L_{2,\mu}$. Диссертантом получены точные неравенства Джексона–Стечкина, связывающие величину $\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ — наилучшее приближение функций f, на классах дифференцируемых функций суммами Фурье–Чебышёва, а также вычислены точные значения различных n-поперечников классов функций, определяемых обобщёнными модулями непрерывности $\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\mu}$,, где $\mathcal{D}$ - дифференциальный оператор второго порядка Чебышёва. Полученные результаты в некотором смысле являются обобщением известных результатов Л.В.Тайкова, С.Б.Вакарчука и В.В.Шалаева о полиномиальном приближении 2π-периодических функций, принадлежащих пространству $L_2[0,2\pi]$, на случай приближения функций, принадлежащих пространству $L_{2,\mu}[-1,1]$

Во введении обосновывается актуальность рассматриваемых задач, формулируются цели и приводятся основные результаты работы автора. В первом параграфе первой главы приводится определение вспомогательных фактов, используемых далее в диссертации. Во втором параграфе вычислены точные верхние грани отклонений заданных классов функций от их частных сумм ряда Фурье – Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Основными результатами второго параграфа являются следующие утверждения:

Теорема 1.2.1. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$. Тогда при любом*

$n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu} \sin nh dh \right)^m .$$

Теорема 1.2.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ *и* $0 \leq t \leq \pi/n$. *Тогда при любом* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \left\{ \frac{nt}{nt - \sin nt} \right\}^m \frac{1}{n^{2r}} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, h)_{2,\mu}\, dh \right)^m .$$

Содержание третьего параграфа первой главы связано с решением некоторых экстремальных задач отыскания верхних граней приближения заданного класса функций посредством частных сумм ряда Фурье-Чебышёва в пространстве $L_{2,\mu}[-1,1]$. Сначала вводятся классы функций, задающихся мажорантными функциями $\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t)$:

$W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_1)$ — класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$ $(r = 0, 1, \ldots, L_{2,\mu}^{(0)} = L_{2,\mu})$, для которых при любых натуральных $m, n \in \mathbb{N}$, и $r \in \mathbb{Z}_+$ выполняется ограничение

$$\frac{n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)_{2,\mu} \sin nt dt \leq \Psi_1\left(\frac{\pi}{n}\right); \tag{1}$$

$W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_2)$ — класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$, для которых при любых натуральных m, n и целых неотрицательных r и $0 < h \leq \pi/n$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu} d\tau \leq \Psi_2(h); \tag{2}$$

$W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_3)$— класс функций, для которых выполняется ограничение

$$\frac{2}{h^2} \int\limits_0^h (h - \tau) \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu} d\tau \leq \Psi_3(h). \tag{3}$$

Далее для выше указанных классов функций доказывается следующее утверждение:

Теорема 1.3.1. *При любых натуральных* m, n *и целых положительных* r, $0 < h \leq \pi/n$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\mathcal{D}, \Psi_1)\Big)_{2,\mu} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{1}{n^{2r}} \Psi_1^m\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_2)\right)_{2,\mu}=\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^{-m}\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_2^m\,(h)\,,$$

$$\mathcal{E}_{n-1}\left(W_{m,h}^{(r)}(\mathcal{D},\Psi_3)\right)_{2,\mu}=\left\{1-\frac{4}{n^2h^2}\sin^2\frac{nh}{2}\right\}^{-m}\frac{1}{n^{2r}}\,\Psi_3^m\,(h)\,,$$

где

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\mu}=sup\left\{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}:f\in\mathfrak{M}\right\}.$$

Среди экстремальных задач теории приближения функций наиболее важной является задача отыскания точных констант в неравенстве Джексона–Стечкина. Под неравенствами Джексона–Стечкина в широком смысле в любом нормированном пространстве X понимают соотношения, в которых величина $\mathcal{E}_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}$ наилучшего приближения функций $f\in X$ оценивается через заданный модуль непрерывности $\Omega_m(\mathcal{D}^rf,t)_{2,\mu}$ самой приближаемой функции f или некоторой её производной $f^{(r)}\in X$. В этом направлении точные результаты для периодических функций получены в работах Н.П.Корнейчука, Л.В.Тайкова, А.А.Лигуна, Н.И.Черных, А.Г.Бабенко, В.И.Иванова, М.Ш.Шабозова, С.Б.Вакарчука, Г.А.Юсупова и многих других математиков. В заключительном четвёртом параграфе первой главы доказывается ряд точных неравенств Джексона–Стечкина, основным из которых является

Теорема 1.4.1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $f\in L_{2,\mu}^{(2r)}$ и $0<t\le\pi/n$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}^{(r)}\\ f^{(r)}\neq const}}\frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;h)_{2,\mu}\,dh\right)^m}=\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right)^{-m},\tag{4}$$

где $\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;\tau)_{2,\mu}:=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf;h)_{2,\mu}\,dh$, а $Si(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin u}{u}\,du$ – интегральный синус, и существует функция $f_0\in L_{2,\mu}^{(2r)}$, реализующая в (4) верхнюю грань.

В этом же параграфе в теореме 1.4.2 для $t\in(0,\pi/n]$ доказано неравенство

$$\frac{2^m}{n^{2r}(nt)^{2m}}\le\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}}\frac{\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^rf;t)_{2,\mu}}\le\frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{(nt)^2}+\frac{1}{2}\right)^m.\tag{5}$$

Из (5), в частности, для константы Джексона–Стечкина вытекает двусторонняя оценка

$$\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^m \cdot \frac{1}{n^{2r}} \le \chi_{n,m,r}(\Omega_m; \pi/n)_{2,\mu} \le \frac{2^m}{n^{2r}}\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2}\right)^m,$$

где

$$\chi_{n,m,r}\left(\Omega_m; \pi/n\right)_{2,\mu} = \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2r}\mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f; \pi/n)_{2,\mu}}.$$

Равенство (4) и двойное неравенство (5) являются обобщением известных результатов Л.В.Тайкова и С.Б.Вакарчука для наилучшего полиномиального приближения периодической дифференцируемой функции $f \in L_2[0, 2\pi]$ посредством обычных модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)}; t)_2$ на случай наилучшего полиномиального приближения функции $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$, гладкостные структурные характеристики которой выражаются через обобщённый модуль непрерывности m-го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu}$.

Вторая глава состоит из трёх параграфов, и в ней рассматривается задача отыскания точных значений различных n-поперечников классов дифференцируемых функций в пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1]$.

В первом параграфе второй главы приведены необходимые обозначения и определения n-поперечников. Во втором параграфе второй главы решается ряд конкретных экстремальных задач, связанных с вычислением точных значений n-поперечников классов функций, удовлетворяющих условиям (1), (2) и (3) (теоремы 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.3.) Надо отметить, что при доказательстве теорем 2.2.1-2.2.3 каждый раз указывается конкретные функции, удовлетворяющие ограничению теорем.

В третьем параграфе второй главы определяется класс функций $W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi)$, $p \in (1/(2r), 2]$ $m, r \in \mathbb{N}$, для которых при любом $t \in \mathbb{R}_+$ выполняется неравенство $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, \tau)_{2,\mu}\, d\tau \le \Phi^p(t)$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.3.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $1/(2r) < p \le 2$ и функция Φ при любых значениях $t \in [0, \pi]$ удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nt}\int\limits_0^{nt} (sin^2\frac{\tau}{2})_*^{2mp} d\tau \left(\int\limits_0^{\pi} (sin^2\frac{\tau}{2})^{2mp} d\tau\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Тогда справедливы равенства

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi); L_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi))_{L_{2,\mu}} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (sin^2 \frac{\tau}{2})^{mp} d\tau \right\}^{-1/p} n^{-2r}\, \Phi(\pi/n),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из n-поперечников,* $b_n(\cdot)$ *– Бернштейна,* $d^n(\cdot)$ *– Гельфанда,* $d_n(\cdot)$ *– Колмогорова,* $\delta_n(\cdot)$ *– линейного,* $\Pi_n(\cdot)$ *– проекционного, а*

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi))_{L_{2,\mu}} \overset{def}{=} \sup\left\{ \mathcal{E}_{n-1}(f)_{2,\mu} : \ f \in W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{D}, \Phi) \right\}.$$

Множество мажорант Φ*, для которых выполняется ограничение* (6)*, не пусто.*

В целом в диссертации проделана большая, содержательная работа. Наиболее важными являются результаты о поперечниках, изложенные в главе 2. При выводе этих результатов используются точные неравенства, доказанные во втором и третьем параграфах первой главы. Автор диссертации владеет современными методами теории функций, функционального анализа вариационного содержания и конструктивными методами теории приближений. Диссертация написана автором самостоятельно, содержит новые научные результаты, выдвигаемые для публичной защиты и характеризующие личный вклад автора диссертации в теорию приближения функций.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте РТ, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах из Перечня ВАК при Президенте РТ, в том числе и в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, а также доложены на ведущих по данной тематике международных конференциях и семинарах.

Автореферат и диссертационная работа оформлены хорошо, однако имеются некоторые замечания.

1. Имеются некоторые неточности редакционного характера и стилистические погрешности.
2. В диссертации и автореферате в теореме 1.4.1 вместо $f \in L_2^{(2r)}$ следует писать $f \in L_{2,\mu}^{(2r)}$.

Отмеченные недостатки легко устранимы и не снижают общую высокую оценку диссертационной работы.

Вышесказанное даёт основание считать, что диссертационная работа Джурабека Холмаматовича Бекназарова «Приближения суммами Фурье–Чебышёва и точные значения n-поперечников некоторых классов функций», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалификационной работой и полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК при Президенте

Республики Таджикистан к кандидатским диссертациям, а её автор - Бекназаров Джурабек Холмаматович заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Результаты диссертационной работы Бекназарова Джурабека Холмаматовича заслушаны на специальном семинара кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С.Айни 14 декабря 2018 г.

Отзыв составил профессор кафедры математического анализа ТГПУ им. С.Айни, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ М.Азизов.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни (протокол № 6 от 21.01.2019 г.).

Председатель семинара, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, профессор М.Азизов

Председатель заседания, зав. кафедрой математического анализа Таджикского государственного педагогического университета имени С. Айни кандидат физ.-мат. наук, доцент М.Б.Холикова

Секретарь заседания, старший преподаватель С.Лашкарбеков

Адрес: Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни, 734003, Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 121.
Сайт: www.tgpu.tj; e-mail: info@tgpu.tj
Тел. рабочий: +992(37) 224-13-83; Тел. моб. (+992) 93 508 6897

Подписи Азизова М, Холиковой М.Б. и Лашкарбекова С заверяю

Начальник
ОК ТГПУ им. С.Айни **Д.Назаров**

РАЁСАТИ КАДРҲО ВА КОРҲОИ МАХСУС