ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК-517.968.2 На правах рукописи

Эшонкулов Алишер Алигулович

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО СДВИГОМ

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель: **доктор физико–математических наук,**
профессор Джангибеков Гулходжа

Душанбе – 2021

Содержание

Введение (Обзор литературы. Основные результаты работы)

Актуальность темы исследования. Известно, что двумерные сингулярные интегральные уравнения по ограниченной области с операторами типа Михлина – Кальдерона – Зигмунда

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D}, \tag{1}$$

где D – ограниченная область комплексной плоскости, играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций И.Н.Векуа [1], теории квазиконформных отображений Л.Альфорс [2], М.Шиффер [3], системы дифференциальных уравнений с частными производными Б.Боярского [4], А.Д.Джураева [5] – [7], В.Н.Монахова [8].

Разработанная Р.В.Дудучавой [9] L_p - теория, $1 < p < \infty$, многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразиях с краем даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее – к нахождению их частных индексов.

Для широкого класса уравнений с операторами вида (1) в работах И.И.Комяка [10] – [12], А.Д.Джураева [5] – [7] Н.Н.Василевского [13] – [15], Г.Джангибекова [16] – [18], К.Х.Бойматова и Г.Джангибекова [19] установлены эффективные необходимые и достататочные условия нетеровости и получены формулы для подсчета индекса.

Что касается двумерных сингулярных уравнений со сдвигом, то их изучение началось сравнительно недавно. Первые работы в этом направлении выполнены Г. Джангибековым [20] – [22].

Указанный автор методом банаховых алгебр исследовал некоторые классы двумерных сингулярных интегральных уравнений, левая часть которых, наряду с операторами сингулярного интегрирования S_n, содержит операторы с поли-кернфункциями Бергмана B_n, а также операторы сдвига $(Wf)(z) = f(z)$ и комплексного сопряжения $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$. Р.В.Дудучава, А.И.Сагинашвили и Е.М.Шаргородский [23],[24] изучили вопрос нетеровости четырехкомпонентного оператора A с операторами S и W методом сведения к системе интегральных уравнений без сдвига, а также полученные результаты распространили для операторов с карлемановским сдвигом порядка n. В работе В.А.Мозеля [25] изучена алгебра поликерноператоров Бергмана с карлемановским сдвигом порядка n.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств новых классов двумерных сингулярных интегральных операторов вида (1) по ограниченной области со сдвигом и с непрерывными коэффициентами, где D - ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой, $m \neq 0$ - целое число.

Цель работы. Целью диссертационной работы является исследование вопроса разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области со сдвигом с непрерывными коэффициентами.

Научная новизна. Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- для одной системы двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом Карлемана в лебеговых пространствах с весом найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен ее индекс;

- для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом получены необходимые и достаточные условия нетеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора;

- в лебеговых пространствах изучены свойства алгебры $\mathcal{R}$, порожденные сингулярными операторами с нечетными характеристиками и антиконформном сдвигом, для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса;

- доказана теорема разрешимости одного класса одномерных сингулярных интегральных операторов Коши и получена формула для подсчета индекса;

- решена одна общая задача линейного сопряжения для аналитических функций

Теоретическая и практическая значимость работы. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут послужить основой для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для уравнений с частными производными.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций", посвященной 90 – летию академика АН РТ, лауреата Государственной премии имени Абуали ибн Сино Л.Г.Михайлова (Душанбе, 27 – 28 февраля 2018 г.);

- международной научной конференции "Математический анализ и его приложения", посвященной 80 – летию профессора Б.Имомназарова (Душанбе, 10 – 11 июня 2019 г.);

- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Филиал Московского государственного университета в г.Душанбе им. М.В.Ломоносова, Душанбе, 2019 г.);

- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами", посвященной 70 – летию доктора физико-математических наук, профессора Г.Джангибекова (Душанбе, 30 – 31 января 2020 г.)

- международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений", посвященной 70 – летию академика НАНТ, доктора физико-математических наук, профессора К.Х.Бойматова (Душанбе, 25 – 26 декабря 2020 г.);

Публикации и личный вклад автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах. Из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих а действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а 5 статей в материалах международных конференций.

Работы [1] –[3] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежит постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, разбитых на пять параграфов, и составляет 82 страницы машинописного текста. Список цитированной литературы состоит из 59 наименований. Работа набрана на LaTeX и в ней для удобства применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул. Они имеют двойную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении дан краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации. Затем приведено описание результатов диссертации.

§ 1 **главы 1** носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В § 2 в пространстве n – мерных вектор-функций

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D),$$

компоненты которых $f_k(z), k = 1, 2, \ldots, n$ принадлежат пространству

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f_k(z) : |z|^{\beta-2/p} f_k(z) = F_k(z) \in L^p(D),\ ||f_k||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F_k||_{L^p}\},$$

$1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$ рассматривается следующий оператор

$$A = aI + bW + \sum_{m=1}^{N} (c_m I + d_m W) S_{2m} + T, \tag{2}$$

где S_{2m} обозначает двумерный сингулярный интегральный оператор с чётной экспоненциальной характеристикой порядка $2m$:

$$(S_{2m} f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

$m-$ натуральное число, ds_ζ - элемент плоской меры Лебега; D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ; $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, T – вполне непрерывный оператор, N – натуральное число,

$a(z), b(z),\ c_m(z), d_m(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы - функции порядка n, $W : L^{n,p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ – оператор карлемановского сдвига:

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ – однолистное конформное отображение области D на себя со свойством $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) \neq z_0$. Отметим, что действие матрицы на вектор в (2) понимается в смысле скалярного умножения строк матрицы на этот вектор и сходимость в пространстве вектор-функций означает покоординатную сходимость. Некоторые классы уравнений со сдвигом, содержащих операторы S_{2m}, исследованы в работах [20–25]. В частности, в [23] изучен оператор A в скалярном случае, когда $N = 1$.

Исследование оператора A осуществляется с помощью локального метода Симоненко [26] посредством перехода от исходного оператора со сдвигом A, к оператору без сдвига $\mathfrak{M}$.

Доказывается, что имеет место

Лемма 1.1. *Пусть* $f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$. *Тогда оператор*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^m W S_{2m} - S_{2m} W$$

вполне непрерывен в $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$.

Наряду с оператором A из (2) рассматривается следующий сопутствующий ему оператор

$$\mathcal{A} = aI - bW + \sum_{m=1}^{N} (c_m I - d_m W) S_{2m} + T. \tag{3}$$

Лемма 1.2. *Если один из двух операторов A и $\mathcal{A}$ нётеров в пространстве $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$, то и второй оператор является нётеровым.*

Лемма 1.3. *Пространство $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D)$ распадается в прямую сумму подпространств $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ и $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$:*

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) \oplus L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D).$$

Далее в пространстве $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D), (0 < \beta < 2, 1 < p < \infty)$ рассмотрим оператор $\mathfrak{M}$, соответствующий оператору A из (2):

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{a} I + \sum_{m=1}^{N} \mathfrak{d}_m S_{2m} + T, \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{a}(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{d}_m(z) = \begin{pmatrix} c_m(z) & d_m(z)(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \\ d_m(\alpha(z)) & c_m(\alpha(z))(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \end{pmatrix},$$

Лемма 1.4. *Подпространства $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ и $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ инвариантны относительно оператора $\mathfrak{M}$. Сужение $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}}$ оператора $\mathfrak{M}$ на подпространство $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ эквивалентно в смысле нетеровости оператору A, а сужение $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}}$ оператора $\mathfrak{M}$ на подпространство $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ эквивалентно в смысле нётеровости сопутствующему оператору $\mathcal{A}$.*

Символом $\mathscr{G}_A(z,\sigma)$ оператора A вида (2) назовём блочную матрицу-функцию, определенную по формуле

$$\mathscr{G}_A(z,\sigma) =$$

$$= \begin{pmatrix} a(z)+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m c_m(z) & b(z)+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m d_m(z) \\ b(\alpha(z))+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m d_m(\alpha(z)) & a(\alpha(z))+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m c_m(\alpha(z)) \end{pmatrix},$$

где $z \in \overline{D},\ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$.

Теорема 1.1. *Для нётеровости оператора A из (2) в пространствах $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ 1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*

$$1)\,\det \mathscr{G}_A(z,\sigma) \neq 0 \quad \textit{при } z \in \overline{D},\ |\sigma| = 1,$$

$$2)\,\det \mathscr{G}_A(z,\sigma) \neq 0 \quad \textit{при } z \in \Gamma,\ |\sigma| < 1.$$

При этом индекс оператора равен нулю.

Замечание. *Из критерии нетеровости операторов вида (1) в пространстве $L^2(D)$, автоматически следует их нетеровость в пространствах Бесова-Трибеля-Лизоркина $B^s_{p,q}(D), F^s_{p,q}(D)$.*

В § **2.1. главы 2** в лебеговом пространстве $L^p(\mathbf{D})(1 < p < \infty)$ изучается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная сингулярными интегральными операторами с нечетной характеристикой, вида

$$\mathcal{A} = aI + bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + T, \tag{5}$$

где a, b, c, d, e, q – непрерывные в $\overline{D}$ функции, T – вполне непрерывный оператор,

$$(S_{-n}f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)ds_\zeta \equiv (S^n_{-1}f)(z),$$

$\theta = \arg(\zeta - z),\ |n| = 2m+1,\ \ (Kf)(z) = \overline{f(z)},\ \overline{B}_n = KB_nK,\ \ B_n$ – поликерн оператор Бергмана

$$(B_nf)(z) = \iint\limits_{D} B_n(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta, \tag{6}$$

где ядро оператора $B_n(z,\overline{\zeta})$ в случае единичного круга с центром в начале координат, определяется по формуле [27]

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi|1-z\overline{\zeta}|^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kC^k_{\frac{n}{2}}C^k_{\frac{n}{2}+k-1}\left|\frac{\zeta-z}{1-z\overline{\zeta}}\right|^{2(k-1)}, \quad \alpha=\arg(1-z\overline{\zeta}); \tag{7}$$

Доказывается, что имеют место следующие леммы:

Лемма 2.1. *Пусть* $a(z)$ *непрерывна в* D. *Тогда операторы* $S_{-n}a - aS_{-n}$, $B_na - aB_n$ *вполне непрерывны в* $L^p(\mathbf{D}), 1<p<\infty$.

Лемма 2.2. *Пусть* $f(z)\in L^p(\mathbf{D}), 1<p<\infty$. *Тогда операторы* $S_{-n}\overline{B}_n$, $B_nS_{-n}, B_n\overline{B}_n$, $\overline{B}_nS_{-n}B_n, B_n^2-B_n$ *являются вполне непрерывными в* $L^p(\mathbf{D})$ *операторами.*

Лемма 2.3. *Интегральные операторы* B_n, $S_{-n}B_n$, $\overline{B}_nS_{-n}$, $S_{-n}B_nS_n$ *при* $n=2m+1$ *не являются вполне непрерывными операторами в пространстве* $L^p(D)$, $1<p<\infty$, *причем их ядра теряют непрерывность лишь при совпадении обеих переменных на границе* Γ.

Далее в пункте **2.1.3**. **главы 2** рассматривается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная всеми действующими в пространстве $L^p(D)(1<p<\infty)$ операторами вида $\mathcal{A}$ из равенства (5), где все коэффициенты непрерывны в $\overline{D}$ функции, $T\in\mathfrak{J}$, а через $\mathfrak{J}$ обозначен идеал, содержащийся в $\mathcal{R}$, вполне непрерывных операторов. В силу того, что $\mathcal{R}$ одновременно содержит операторы $\overline{B}_n, \overline{B}_nK, B_n, B_nK$ и $S_{-n}K$, алгебра $\mathcal{R}$ не исчерпывается одними только операторами вида $\mathcal{A}$. Это связано с тем, что в алгебру $\mathcal{R}$ входят, например, операторы $S_{-n}B$ и $\overline{B}_nS$, которые в силу леммы 2.3 не являются вполне непрерывными в $L^p(\mathbf{D})$. Поэтому при описании алгебры $\mathcal{R}$ возникает необходимость в изучении операторов более сложной природы, а именно, операторов вида

$$\mathcal{M} = aI + bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + \lambda S_{-n}B_nK + \\ +\mu\overline{B}_nS_{-n}K + \nu S_{-n}B_nS_n + \gamma S_{-n}B_n + \delta B_nS_n + T, \tag{8}$$

где все коэффициенты – непрерывные в $\overline{D}$ функции.

Отметим, что при $b \equiv d \equiv q \equiv 0$ оператор $\mathcal{A}$ из (5) ранее был изучен в работе Джангибекова Г. [26].

Л е м м а 2.4. *Оператор $\mathcal{M}$, заданный формулой (8), является элементом алгебры $\mathcal{R}$; и обратно, всякий оператор из алгебры $\mathcal{R}$ представим в виде (8).*

Каждому оператору $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа матрицу вида

$$\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -\overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{\mathbf{D}},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t) + c(t) & e(t) & \delta(t) \\ \overline{q(t)} & \overline{a(t)} + \overline{d(t)} & \overline{-b(t)} + \overline{\mu(t)} \\ \gamma(t) & a(t) + \lambda(t) & a(t) + \nu(t) \end{pmatrix}, \ t \in \Gamma,$$

Л е м м а 2.5. *Символ $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) \in \mathfrak{N}$ оператора $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}$.*

Т е о р е м а 2.1 *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{M}$ из алгебры $\mathcal{R}$ был нетеровым оператором в пространстве $L^p(\mathbf{D})$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \neq 0 \textit{ при } z \in \overline{\mathbf{D}}, \ \det D(t) \neq 0 \textit{ при } t \in \Gamma. \tag{9}$$

При выполнении этих условий индекс оператора равен

$$\varkappa = -\frac{n}{2\pi}[\arg\det D(t)]\Big|_{\Gamma}.$$

В § **2.2. главы 2** в векторном лебеговом пространстве $L^{\nu,p}(\mathbf{D})$ $(1 < p < \infty)$ изучается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная сингулярными операторами с нечетными характеристиками со сдвигом вида

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_l(z)B_{2l+1} + T, \quad m \geq 0 - \text{целое}, \tag{10}$$

где $a(z)$, $b(z)$, $c_l(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы-функции порядка ν, T – вполне непрерывный оператор,

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta$$

$\theta = \arg(\zeta - z)$, B_n – поликерн-оператор Бергмана из (6), (7) оператор W – является оператором антиконформного сдвига, то есть

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ антиконформное отображение области D на себя, удовлетворяющее условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) = z_0$.

Отметим, что некоторые классы уравнений со сдвигом, содержащих операторы S_n, изучены в работах [20 – 25]. Все указанные работы касаются случая, когда оператор S_n имеет четную характеристику. Операторы со сдвигом и с нечетной характеристикой ранее не были исследованы.

Лемма 2.6. *Пусть $f(z) \in L^{\nu,p}(D)(1 < p < \infty)$. Если $\alpha(z)$ является антиконформным отображением области D на себя, удовлетворяющим* *условию Карлемана* $\alpha(\alpha(z)) = z$ *для* $\forall z \in \overline{D}$, *тогда операторы*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} W S_{2m+1} - S_{-(2m+1)} W$$

и

$$W B_{2l+1} - B_{-(2l+1)} W, \quad B_{-(2l+1)} W S_m, \; W S_m B_{-(2l+1)} \quad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

вполне непрерывны в $L^{\nu,p}(D)$.

Теперь каждому оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа блочную квадратную матрицу-функцию

$$\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D},$$

где

$$c(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=1}^{m} c_l(t) & 0 & 0 \ldots & 0 \\ c_1(t) & a(t) + \sum_{l=2}^{m} c_l(t) & 0 \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_1(t) & c_2(t) & \ldots & a(t) + c_m(t) \end{pmatrix}, \; t \in \Gamma.$$

Таким образом, матрица-функция $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D} \times \Gamma$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех символов операторов из $\mathcal{R}$. Непосредственной проверкой устанавливается, что имеют место равенства

$$\sigma_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(z,t) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t) + \sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t), \; \sigma_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(z,t) = \sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t) \cdot \sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t),$$

то есть сопоставление оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ его символа $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$. При этом ядром гомоморфизма является множество вполне непрерывных операторов в $L^p(D)$. Наконец, если $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ – невырожденная матрица-символ, то непосредственным построением устанавливается, что матрица $\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(z,t)$ является символом некоторого оператора из $\mathcal{R}$.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы сингулярный интегральный оператор $\mathcal{A}$ с антиконформным сдвигом Карлемана $\alpha(z)$ из (10) был нетеровым в пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\det\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) \equiv \begin{vmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{vmatrix} \neq 0, \ \forall z \in \overline{D},$$

$$\prod_{j=1}^{m} \det\Big(a(t) + \sum_{k=j}^{m} c_k(t)\Big) \neq 0, \ \forall t \in \Gamma.$$

При выполнении этих условий индекс оператора $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\varkappa = \sum_{j=1}^{m} Ind_{\Gamma} \det\Big(a(t) + \sum_{k=j}^{m} c_k(t)\Big).$$

З а м е ч а н и е. Полученные результаты сохраняются в лебеговом пространстве $L^{\nu,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$.

Глава 3 посвящена исследованию одномерного сингулярного интегрального уравнения Коши вида

$$(Af)(t) =$$

$$= a(t)f(t) + b(t)\overline{f(t)} + \frac{c(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{d(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (Tf)(t) = g(t) \quad (11)$$

в банаховых пространствах $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, где $a(t),\ b(t),\ c(t),\ d(t)$ – заданные непрерывные на Γ функции.

Уравнение (11) впервые рассмотрен Михайловым Л.Г.[28],[29], в связи с изучением некоторых краевых задач для обобщенных аналитических функции. Указанный автор, в предположении, что коэффициенты уравнения (11) удовлетворяют условию Гельдера, сводит изучение уравнения (11) в пространствах $H_\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$ к эквивалентной системе интегральных уравнений Коши.

Ламма 3.1. *Если функция $b(t)$ непрерывна на Γ, то оператор*

$$V = S_\Gamma b - bS_\Gamma$$

вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

В векторном пространстве

$$L_p^2(\Gamma) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L_p^2(\Gamma)\},$$

введем оператор

$$U = \begin{pmatrix} a(t)I + c(t)S_\Gamma & b(t)I + d(t)\overline{S}_\Gamma \\ \overline{b(t)}I + \overline{d(t)}S_\Gamma & \overline{a(t)}I + \overline{c(t)}\overline{S}_\Gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Рассмотрим множество $\mathcal{R}$ всех операторов вида (11), действующих в векторном пространстве $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Устанавливается, что множество сингулярных операторов $\mathcal{R}$ представляет собой алгебру в $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$.

Каждому оператору вида (11) из алгебры $\mathcal{R}$, приведем в соответствие в качестве символа следующую матрицу-функцию

$$\Phi_U(t, \Theta) = \lambda(t) + \mu(t)\Theta, \tag{13}$$

где

$$\Theta = signy = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \text{y>0}, \\ -1, & \text{если} \quad \text{y<0}, \end{cases}$$

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -d(t) \\ \overline{d(t)} & -\overline{c(t)} \end{pmatrix},$$

Лемма 3.2. *Нетеровость оператора* $A : L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$ *из (11) эквивалентна нетеровости оператора* $U : L_p^2(\Gamma) \longrightarrow L_p^2(\Gamma)$.

Теорема 3.1. *Для нетеровости оператора* A *из* (11) *в пространствах* $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\det \Phi_U(t, \Theta) \neq 0$ $\forall t \in \Gamma$, *то есть*

$$\Delta(t) \equiv \big(a(t) - c(t)\big)\big(\overline{a(t)} + \overline{c(t)}\big) - \big(b(t) + d(t)\big)\big(\overline{b(t)} - \overline{d(t)}\big) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \quad (14)$$

При выполнении условия (14), *индекс оператора* A *равен*

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\Delta(t).$$

В пункте **3.1.4 главы 3** результаты теоремы 3.1. обобщены для системы сингулярных интегральных уравнений Коши типа (1), где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ – заданные $n \times n$ мерные матрицы-функции с непрерывными на Γ элементами, $g(t)$ – заданная функция из пространства $L_p^2(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

В параграфе **3.2.** полученные выше результаты для сингулярных интегральных уравнений (11) применены к общей задаче сопряжения для аналитических функций.

Пусть Γ – замкнутая кривая Ляпунова, делящая плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-.

Постановка задачи сопряжения. *Найти две функции $\Phi^+(z)$ – аналитическую в области D^+, и $\Phi^-(z)$ – аналитическую в области D^- представимые в виде интеграла типа Коши, такие, что почти всюду их граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ на Γ существуют и удовлетворяют условию*

$$a(t)\Phi^+(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)} = c(t)\Phi^-(t) + d(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad \Phi^-(\infty) = 0, \qquad (15)$$

где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ – заданные в Γ непрерывные функции.

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (15) *коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ являются на Γ непрерывными функциями. Тогда для нетеровости задачи (15), в классе функций представимых в виде интеграла типа Коши $\Phi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)} \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \qquad (16)$$

При этом, индекс задачи равен

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\Big(\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)}\Big).$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для одной системы двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области со сдвигом Карлемана в лебеговых пространствах с весом, найдены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и вычислен ее индекс;
- для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом, получены необходимые и достаточные условия нетеровости, а также даны формулы для подсчета индекса оператора;
- в лебеговых пространствах изучены свойства алгебры $\mathcal{R}$, порожденные сингулярными операторами с нечетными характеристиками и антиконформным сдвигом, для которых получены необходимые и достаточные условия нетеровости и формула для подсчета индекса;
- доказана теорема разрешимости одного класса одномерных сингулярных интегральных операторов Коши и получена формула для подсчета индекса;
- решена одна общая задача линейного сопряжения для аналитических функций

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты можно применить к изучению различных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в ограниченной области

Глава 1

Некоторые классы систем двумерных сингулярных интегральных операторов с четной характеристикой со сдвигом

§ 1.1. Описание пространств функций и некоторые вспомогательные сведения

В этом параграфе мы изложим основные понятия и факты теории нетеровых операторов в банаховых пространствах. Подробности этой теории и доказательства всех приводимых здесь утверждений можно найти, например, в монографии С. Г. Крейна [31].

Определение 1.1. Простую замкнутую гладкую кривую Γ назовем кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующему условию: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гёльдера относительно дуги s кривой Γ.

1.1.1. Нётеровы операторы и основные их свойства

Пусть D - конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и, содержащая внутри точку $z = 0$.

Пространство $\mathbf{L}^{\mathbf{p}}_{\beta-\mathbf{2/p}}(\mathbf{D})$ - это множество комплекснозначных измеримых в D функций $f(z)$, для которых функция $F(z) = |z|^{\beta-2/p}f(z)$ суммируемая с p - ой степенью, где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$. Норма в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ вводится по формуле

$$||f(z)||_{L^p_{\beta-2/p}} = \left(\iint\limits_D |F(z)|^p ds_z\right)^{1/p} = ||F||_{L^p}.$$

Далее в этом пункте приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах, которыми мы будем пользоваться в работе. Доказательства всех приводимых здесь утверждений можно найти, например, в монографии [33].

Пусть X - банахово пространство, A - линейный ограниченный оператор, действующий из X в X, A^* - сопряженный к нему оператор, действующий в сопряженном пространстве X^*.

Определение 1.2. Говорят, что оператор A допускает левую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R, действующий в X, такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма, т.е.

$$RA = I + T,$$

где I - тождественный, а T - вполне непрерывный оператор в пространстве X. Оператор R в этом случае называется левым регуляризатором оператора

A.

Определение 1.3. Говорят, что оператор A допускает правую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R, действующий в X, такой, что

$$A = I + T,$$

где I и T - операторы, соответственно тождественные и вполне непрерывные, в пространстве X. Оператор R называется правым регуляризатором оператора A.

Определение 1.4. Говорят, что A допускает двустороннюю регуляризацию, если он одновременно допускает и правую, и левую регуляризацию.

Множество $KerA$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $KerA$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства $KerA$, т.е. число линейно независимых решений уравнения (1.1), будем обозначать через $\alpha_A = dimKerA$. Через $KerA^*$ обозначим подпространства нулей оператора A^*, т.е. множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0 \tag{1.2}$$

называется ядром оператора A^* и, наконец, $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Числа α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из чисел α_A и β_A - конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $IndA$,

$$IndA = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.3}$$

Очевидно, $IndA$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A - конечны.

Для того, чтобы уравнение

$$Ax = y,\ y \in X, \tag{1.4}$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $KerA^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in KerA^*$). Действительно, если уравнение (1.4) имеет решение x, а $u \in KerA^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0;$$

где здесь круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе.

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (1.3), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом, можно дать следующее:

Определение 1.5. Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (1.4) разрешимо тогда и только тогда, когда ее правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (1.2).

Известна следующая теорема Хаусдорфа: для того, чтобы оператор был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы его область значений была замкнутой.

Определение 1.6. Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.

Определение 1.7. Индексом $IndA$ нётерова оператора A называется целое число $IndA = \alpha_A - \beta_A$.

Следующее определение из всего множества нётеровых операторов выделяет подмножество фредгольмовых операторов:

Определение 1.8. Нетеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.

Определение 1.9. (теорема о композиции). Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нётерова в X, причем $IndAB = IndA + IndB$.

Определение 1.10. Если A нётеров в X, то и A^* нётеров в X^*, причём $IndA^* = -IndA$.

Определение 1.11. (возмущение вполне непрерывным оператором). Если A нётеров, а T вполне непрерывен в X, то $A+T$ также нётеров в X, причём $Ind(A+T) = IndA$.

Определение 1.12. (возмущение малым по норме оператором). Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех операторов B таких, что $||B|| < \varepsilon$, оператор $A+B$ нётеров в X и $Ind(A+B) = IndA$.

Определение 1.13. Для того, чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.

Определение 1.14. Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t)$, $t \in [0,1]$, которые равномерно непрерывны по норме на сегменте $[0,1]$: по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $||A(t_1) - A(t_2)|| < \varepsilon$, и $A(0) = A,\ A(1) = B$.

Свойства 1.1. Если операторы A и B гомотопны, то

$$IndA = IndB.$$

1.1.2. Алгебра операторов и алгебра символов

Пусть $\mathcal{M}$ - некоторая алгебра ограниченных операторов действующих из банахового пространстве X в X, т.е. если $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$, то

$$A_1 + A_2 \in \mathcal{M} \quad \text{и} \quad A_1 A_2 \in \mathcal{M}.$$

Пусть $\mathcal{N}$ - алгебра всех скалярных или матричных непрерывных комплексных функций, зависящих от переменной точки t некоторого конечномерного пространства, т.е. если $\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in \mathcal{N}$, то

$$\sigma_1(t) + \sigma_2(t) \in \mathcal{N} \quad \text{и} \quad \sigma_1(t)\sigma_2(t) \in \mathcal{N}$$

Пусть между элементами алгебры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ установлено голоморфное соответствие, так что каждому оператору $A \in \mathcal{M}$ приведена в соответствие одна и только одна функция $\sigma_A(t) \in \mathcal{N}$ и каждой функции из $\mathcal{N}$ соответствует хотя бы один оператор из $\mathcal{M}$, причем сумме или произведению операторов соответствует сумма или произведение функций:

$$\sigma_{A_1+A_2}(t) = \sigma_{A_1}(t) + \sigma_{A_2}(t), \quad \sigma_{A_1A_2}(t) = \sigma_{A_1}(t)\sigma_{A_2}(t).$$

В этом случае функция $\sigma_A(z)$ называется **символом** оператора A. Таким образом, символ осуществляет гомоморфизм операторной алгебры $\mathcal{M}$ в функциональную алгебру $\mathcal{N}$.

Ниже будем предполагать, что в алгебре $\mathcal{M}$ существует оператор, символ которого нигде в нуль не обращается. Также предположим, что алгебра $\mathcal{M}$ содержит тождественный оператор и все вполне непрерывные операторы действующие в X. Эти допущения эквивалентны тому, что символ тождественного оператора есть функция, тождественно равная единице (единичной матрице) и символ оператора тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда этот оператор вполне непрерывен. При вышесказанных допущениях, имеет место (см.[32] гл.6,п.4)

Теорема 1.0.1. *Оператор A допускает двустороннюю регуляризацию оператором из той же алгебры тогда и только тогда, когда символ оператора A не вырождается.*

§ 1.2. Теория разрешимости некоторых матричных сингулярных интегральных операторов со сдвигом Карлемана

1.2.1. Постановка задачи

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости E, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ; $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$. Обозначим через $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ пространство n-мерных вектор-функций

$$f(z) = (f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)),$$

компоненты которых $f_k(z), k = 1, 2, \dots, n,$ принадлежат пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \{f_k(z) : |z|^{\beta-2/p} f_k(z) = F_k(z) \in L^p(D),\ ||f_k||_{L^p_{\beta-2/p}} = ||F_k||_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2$. Норму вектор-функций $f(z)$ будем считать равной сумме норм компонент: $||f||_{L^{n,p}_{\beta-2/p}} = \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_{L^p_{\beta-2/p}}$.

Пусть S_{2m} обозначает двумерный сингулярный интегральный оператор с чётной экспоненциальной характеристикой порядка $2m$:

$$(S_{2m}f)(z) = \frac{m(-1)^m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta)}{|\zeta - z|^2} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z),$$

где $m-$ натуральное число, ds_ζ - элемент плоской меры Лебега; интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В пространстве n-мерных вектор-функций $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ рассмотрим следующий оператор

$$A = aI + bW + \sum_{m=1}^{N}(c_m I + d_m W)S_{2m} + T, \tag{1.5}$$

где T – вполне непрерывный оператор, N - натуральное число, $a(z), b(z)$, $c_m(z), d_m(z)$ - непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы - функции порядка n, $W : L^{n,p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ – оператор карлемановского сдвига:

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ - однолистное конформное отображение области D на себя со свойством $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и при этом в силу теоремы Келлога (см.[33], глава 10) $\alpha'(z) \neq 0$, для $\forall z \in \overline{D}$ и отображение $\alpha(z)$ имеет в $\overline{D}$ единственную неподвижную точку $z_1 \in D$ такую, что $\alpha'(z_1) = -1$ (см.[34] Гл.1.§2).

Отметим, что действие матрицы на вектор в (1) понимается в смысле скалярного умножения строк матрицы на этот вектор и сходимость в пространстве вектор-функций означает покоординатную сходимость.

Некоторые классы уравнения со сдвигом, содержащих операторы S_{2m}, исследованы в работах [20 – 25]. В частности, в [23] изучен оператор A в скалярном случае, когда $N = 1$.

Исследование оператора A осуществляется с помощью локального метода Симоненко [26], посредством перехода от исходного оператора со сдвигом A, к оператору без сдвига $\mathfrak{M}$.

1.2.2. Доказательство основных лемм

Нам понадобятся следующие четыре леммы:

Лемма 1.1. *Пусть* $f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$. *Тогда оператор*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^m WS_{2m} - S_{2m}W$$

вполне непрерывен в $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор WS_{2m} :

$$(WS_{2m}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{\alpha(z)})^{m-1}}{(\zeta - \alpha(z))^{m+1}} f(\zeta) ds_\zeta.$$

Совершив внутри интеграла замену переменных $\zeta = \alpha(\sigma)$, получим

$$(WS_{2m}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(\overline{\alpha(\sigma)} - \overline{\alpha(z)})^{m-1}}{(\alpha(\sigma) - \alpha(z))^{m+1}} |\alpha'(\sigma)|^2 f(\alpha(\sigma)) ds_\sigma.$$

Представим этот интеграл в виде

$$(WS_{2m}f)(z) =$$

$$= \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \left[\frac{\left(\frac{\overline{\alpha(\sigma)} - \overline{\alpha(z)}}{\overline{\sigma} - \overline{z}}\right)^{m-1}}{\left(\frac{\alpha(\sigma) - \alpha(z)}{\sigma - z}\right)^{m+1}} - \frac{(\overline{\alpha'(z)})^{m-1}}{(\alpha'(z))^{m+1}} \right] \frac{(\overline{\sigma} - \overline{z})^{m-1}}{(\sigma - z)^{m+1}} |\alpha'(\sigma)|^2 \times$$

$$\times f(\alpha(z)) ds_\sigma + + \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(\overline{\alpha'(z)})^{m-1}}{(\alpha'(z))^{m+1}} \frac{(\overline{\sigma} - \overline{z})^{m-1}}{(\sigma - z)^{m+1}} |\alpha'(\sigma)|^2 f(\alpha(\sigma)) ds_\sigma.$$

Поскольку первый интеграл справа является вполне непрерывным оператором, а из второго вычитанием и прибавлением $|\alpha'(z)|^2$ также выделяется вполне непрерывный оператор, то имеем

$$(WS_{2m}f)(z) = \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(\overline{\sigma} - \overline{z})^{m-1}}{(\sigma - z)^{m+1}} f(\alpha(\sigma)) ds_\sigma + T,$$

то есть

$$(WS_{2m}f)(z) = \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m (S_{2m}Wf)(z) + T,$$

где T – компактный оператор.

Наряду с оператором A из (1.5), рассмотрим сопутствующий ему оператор

$$\mathcal{A} = aI - bW + \sum_{m=1}^{N}(c_m I - d_m W)S_{2m} + T. \tag{1.6}$$

Лемма 1.2. *Если один из двух операторов A и $\mathcal{A}$ нётеров в пространстве $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$, то и второй оператор является нётеровым.*

Доказательство леммы 1.2 проводится с помощью локального принципа (см.[35] глава 12) по аналогичной схеме доказательства леммы 1 из [6]. Пусть $\mathcal{L}$ фактор - алгебра алгебры всех линейных непрерывных в $L^{p}_{\beta-2/p}(D)$ операторов по идеалу компактных в указанных пространствах операторов $A : L^{p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{p}_{\beta-2/p}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$. Соответствующий оператору $\mathcal{A}$ элемент алгебры $\mathcal{L}$, обозначим через $[\mathcal{A}]$.

Каждой точке $z \in \overline{D}$ отличной от неподвижной точки z_1 отображения $\alpha(z)$ сопоставим ее окрестность U_z такую, что пересечение $U_z \bigcap \alpha(U_z) = \emptyset$. Введем в алгебре $\mathcal{L}$ локализующие классы:

$$\begin{aligned} M_z =& \{(\mu_z + \mu_z(\alpha)I) : \mu_z \in C^\infty(E), supp\ \mu_z \subset U_z, \\ & \mu_z = 1 \text{ в некоторой окрестности точки } z\}, z \in \overline{D}, z \neq z_1, \\ M_{z_1} =& \{1/2(\mu_{z_1} + \mu_{z_1}(\alpha)), \mu_{z_1} \in C^\infty(E), \\ & \mu_{z_1} = 1 \text{ в некоторой окрестности точки } \ z_1\}. \end{aligned}$$

Система $\{M_z\}_{z\in\overline{D}}$ является покрывающей системой локализующих классов и $[A]$, $[\mathcal{A}]$ коммутируют со всеми элементами $\bigcup\limits_{z\in\overline{D}} M_z$.

Для каждой точки $z \in \overline{D}$ определим оператор

$$\mathfrak{B}_z : L^{p}_{\beta-2/p}(D) \to L^{p}_{\beta-2/p}(D), \text{ действующий по формуле}$$

$$(\mathfrak{B}_z f)(z) = \begin{cases} (\alpha(z) - z) f(z) & \text{при } z \neq z_1, \\ (S_1 f)(z) & \text{при } z = z_1, \end{cases}$$

где

$$(S_1 f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_D \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z).$$

Отметим, что элемент $[\mathfrak{B}_z]$ является M_z - обратимым для любого $z \in \overline{D}$. Действительно, для $z \neq z_1$ это следует из того, что $\alpha(z) - z \neq 0$, а при $z = z_1$ из того, что z_1 - внутренняя точка области D и символ оператора $(S_1 f)(z)$ равен $e^{-i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ и не вырождается.

Следующие соотношения легко доказываются:

$$a)\ [\mathfrak{B}_z][fI] = [fI][\mathfrak{B}_z], \text{ для } \forall f(z) \in C(\overline{D}),$$

$$\text{в частности } [\mathfrak{B}_z] m_z = m_z [\mathfrak{B}_z], \text{ для } \forall m_z \in M_z, \forall z \in \overline{D};$$

$$b)\ [\mathfrak{B}_z][A] \overset{M_z}{\sim} [A][\mathfrak{B}_z], \text{ для } \forall z \in \overline{D},$$

$$c)\ [\mathfrak{B}_z]^[W] \overset{M_z}{\sim} -[W][\mathfrak{B}_z], \text{ для } \forall z \in \overline{D},$$

где символ $\overset{M_z}{\sim}$ обозначает M_z - эквивалентность соответствующих элементов. Соотношения a), b) очевидны, а соотношение c) в случае $z = z_1$ следует из компактности оператора $W(Sf)(z) - \frac{\overline{\alpha'(z)}}{|\alpha'(z)|}(SWf)(z)$. Действительно,

$$(WS_1f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\overline{\zeta} - \overline{\alpha(z)}}{|\zeta - \alpha(z)|^3} f(\zeta) ds_\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\overline{\alpha(\sigma)} - \overline{\alpha(z)}}{|\alpha(\sigma) - \alpha(z)|^3} |\alpha'(\sigma)|^2 f(\alpha(\sigma) ds_\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \left[\frac{\frac{\overline{\alpha(\sigma)} - \overline{\alpha(z)}}{\overline{\sigma} - \overline{z}}}{\left|\frac{\alpha(\sigma)-\alpha(z)}{\sigma - z}\right|^3} - \frac{\overline{\alpha'(z)})}{|\alpha'(z)|^3}\right] \frac{\overline{\sigma} - \overline{z}}{|\sigma - z|^3} \times$$

$$\times |\alpha'(\sigma)|^2 f(\alpha(z)) ds_\sigma + \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D \frac{\overline{\alpha'(z)}}{|\alpha'(z)|^3} \frac{\overline{\sigma} - \overline{z}}{|\sigma - z|^3} |\alpha'(\sigma)|^2 f(\alpha(\sigma)) ds_\sigma.$$

Отсюда следует, что поскольку первый оператор компактный, то оператор

$$W(S_1f)(z) - \frac{\overline{\alpha'(z)}}{|\alpha'(z)|}(SWf)(z)$$

также будет компактным оператором.

Из свойства $a) - c)$ вытекает, что

$$[\mathfrak{B}_z][A] \overset{M_z}{\sim} [\mathcal{A}][\mathfrak{B}_z], \quad \forall z \in \overline{D}.$$

Следовательно, M_z - обратимость одного из элементов $[A]$ и $[\mathcal{A}]$ влечет за собой M_z - обратимость второго для $\forall z \in \overline{D}$. Тогда из локального принципа [35],[36] следует, что обратимость элемента $[A]$ эквивалентна обратимости элемента $[\mathcal{A}]$. Теперь остается заметить, что нетеровость оператора A в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ равносильна обратимости соответствующего элемента в алгебре $\mathcal{L}$, то есть, если один из двух операторов A или $\mathcal{A}$ нетеров, то и второй из них является нетеровым. Лемма 1.2 доказана.

Введем теперь следующие пространства $2n$ - мерных векторных пространств функций:

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f^1(z), f^2(z)) : \ f^1(z), f^2(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\},$$

$$L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f(z), f(\alpha(z)) : \ f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\},$$

$$L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f(z), -f(\alpha(z)) : \ f(z) \in L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)\}.$$

Лемма 1.3. *Пространство $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D)$ распадается в прямую сумму подпространств $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ и $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$:*

$$L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D) = L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) \oplus L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D).$$

Действительно, достаточно показать, что $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) \cap L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D) = \{0\}$, а каждый элемент $f = \{f^1, f^2\} \in L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D)$ представим в виде $f = g^1 + g^2$, где $g^1 \in L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$, $g^2 \in L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$. Искомое представление можно получить с помощью операторов P и Q, проектирующих пространство $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D)$ соответственно на подпространства $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ и $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & W \\ W & I \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -W \\ -W & I \end{pmatrix},$$

то есть по формулам

$$g^1(z) = \Big\{\frac{f^1(z) + f^2(\alpha(z))}{2}, \ \frac{f^1(\alpha(z) + f^2(z)}{2}\Big\},$$

$$g^2(z) = \Big\{\frac{f^1(z) - f^2(\alpha(z))}{2}, \ \frac{f^2(z) - f^1(\alpha(z)}{2}\Big\}.$$

Далее, если

$$q(z) = \{q^1(z), q^2(z)\} \in L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D) \oplus L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D),$$

то $q^2(z) = q^1(\alpha(z))$ и $q^2(z) = -q^1(\alpha(z))$. Отсюда следует, что

$$q^2(z) \equiv 0, \quad q^1(z) = q^2(\alpha(z)) \equiv 0 \quad \text{и} \quad q(z) \equiv 0.$$

Лемма 1.3 доказана.

Теперь в пространстве $L^{2n,p}_{\beta-2/p}(D), (0 < \beta < 2, 1 < p < \infty)$ рассмотрим оператор $\mathfrak{M}$, соответствующий оператору A из (1):

$$\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{a}I + \sum_{m=1}^{N} \mathfrak{d}_m S_{2m} + T, \tag{1.7}$$

где

$$\mathfrak{a}(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ b(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{d}_m(z) = \begin{pmatrix} c_m(z) & d_m(z)(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \\ d_m(\alpha(z)) & c_m(\alpha(z))(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^m \end{pmatrix}.$$

Лемма 1.4. *Подпространства* $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ *и* $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ *инвариантны относительно оператора* $\mathfrak{M}$. *Сужение* $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}}$ *оператора* $\mathfrak{M}$ *на подпространство* $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ *эквивалентно в смысле нетеровости оператору* A, *а сужение* $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}|_{L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}}$ *оператора* $\mathfrak{M}$ *на подпространство* $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ *эквивалентно в смысле нётеровости сопутствующему оператору* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Поскольку возмущение вполне непрерывных слагаемых не влияет на нетеровость оператора, без ограничения общности можно считать, что в (1) и (2) $T = 0$. Достаточно показать, что

$$\mathfrak{M}_0(f, f(\alpha)) = \mathfrak{M}(f, f(\alpha)) = (g^1, g^2) = (Af, WAf), \tag{1.8}$$

$$\mathfrak{M}_1(f, -f(\alpha)) = \mathfrak{M}(f, -f(\alpha)) = (g^1, g^2) = (\mathcal{A}f, -W\mathcal{A}f). \tag{1.9}$$

Докажем равенство (4). Имеем

$$\begin{aligned}
g^1 =& af + bf(\alpha) + \sum_m^N (c_m S_{2m} f + d_m S_{2m} f(\alpha)) + d_m (W S_{2m} W - S_{2m}) f(\alpha) = \\
=& af + bWf + \sum_{m=0}^N (c_m I + d_m W) S_{2m} f = Af, \\
g^2 =& b(\alpha) f + a(\alpha) f(\alpha) + \sum_m^N (d_m(\alpha) S_{2m} f + c_m(\alpha) S_{2m} f(\alpha)) + \\
&+ \sum_m^N c_m(\alpha)(W S_{2m} W - S_{2m}) f(\alpha) = \\
=& Waf + WbWf + \sum_{m=0}^N (W c_m I + W d_m W) S_{2m} f = WAf.
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично доказывается равенство (5). Лемма 1.4 доказана.

1.2.3. Основное утверждение

Таким образом, мы выше доказали, что соответствующий оператор $\mathfrak{M}$ представляется в виде прямой суммы операторов $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$, действующих, соответственно, в подпространствах $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$ и $L^{(2n,1),p}_{\beta-2/p}(D)$ и эквивалентных в смысле нетеровости, соответственно, оператору A и сопутствующему оператору $\mathcal{A}$. Следовательно вопрос нетеровости исходного оператора A в пространствах $L^p_{\beta-2/p}(D), 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$ сводится к исследованию нетеровости оператора $\mathfrak{M}$ в пространствах $L^{(2n,0),p}_{\beta-2/p}(D)$, к которому остается применить результаты из [36].

Символом $\mathscr{G}_A(z,\sigma)$ оператора A вида (1) назовём блочную матрицу-функцию, определенную по формуле

$$\mathscr{G}_A(z,\sigma) = \mathfrak{a}(z) + \sum_{m=1}^N \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \mathfrak{d}_m(z) \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} a(z) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m c_m(z) & b(z) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m d_m(z) \\ b(\alpha(z)) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m d_m(\alpha(z)) & a(\alpha(z)) + \sum_{m=1}^{N} \left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m \left(\frac{\overline{\alpha'(z)}}{\alpha'(z)}\right)^m c_m(\alpha(z)) \end{pmatrix},$$

где $z \in \overline{D},\ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$. Итак, нами доказана

Теорема 1.1. *Для нётеровости оператора A из (1) в пространствах $L^{n,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ 1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*

$$1)\, \det \mathscr{G}_A(z,\sigma) \neq 0 \quad \text{при } z \in \overline{D},\ |\sigma| = 1,$$

$$2)\, \det \mathscr{G}_A(z,\sigma) \neq 0 \quad \text{при } z \in \Gamma,\ |\sigma| < 1.$$

При этом, индекс оператора равен нулю.

Глава 2

Алгебра некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой

§ 2.1. Алгебра двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой

2.1.1 История вопроса

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости z. Известно ([37], [38] с.9, [39], сс.252, 254]), что керн-функция Бергмана области D, имеет вид

$$B(z, \overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{\zeta})^2},$$

и интегральный оператор Бергмана

$$(Bf)(z) = \iint\limits_D B(z, \overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta \tag{2.1}$$

является ортогональным проектором пространства $L_2(D)$ на его замкнутое подпространство – пространство Бергмана $A_2(D)$, состоящее из всех аналитических в D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функций $f(z)$. При этом, функция $B(z,\overline{\zeta})$ является воспроизводящим ядром оператора B, то есть имеет место равенство

$$(f(z), \overline{B(z,\overline{\zeta})}) = \iint\limits_D B(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta = f(z).$$

В дальнейшем А.Д.Кошеловым [40] и Г.Джангибековым [41] (см. также [28]) независимо была найдена поликерн-функция

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) = \frac{1}{\pi(1-z\overline{\zeta})^{2m}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} k (C_m^k)^2 |\zeta - z|^{2(k-1)} [(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)]^{m-k} \tag{2.2}$$

более широкого пространства функций $A_2^m(D)$: полианалитических (произвольного фиксированного порядка m) в круге D и принадлежащих $L_2(D)$ функций $f(z)$

$$f(z) = h_0(z) + \overline{z} h_1(z) + \cdots + \overline{z}^{m-1} h_{m-1}(z),$$

где $h_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots m-1)$ – аналитические в D функции. При этом, при любых $f(z) \in A_2^m(D)$ для ядра $B_m(z,\overline{\zeta})$, справедлива формула

$$(f(z), \overline{B_{2m}(z,\overline{\zeta})}) = \iint\limits_D B_{2m}(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta = f(z).$$

Следует отметить, что способы получения ядра $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$ в работах [40] и [41] совершенно разные. Так, в [40] эта функция получена с помощью полной ортонормированной в $A_2^m(D)$ функций $\{e_{np}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, по формуле

$$B_{2m}(z,\overline{\zeta}) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} e_{np}(z) \overline{e_{np}(\zeta)},$$

а в работе [41] интегральный оператор Бергмана с поли-керн функцией $B_{2m}(z,\overline{\zeta})$, получен с помощью формулы

$$(B_{2m}f)(z) = f(z) - (\overline{S}^m S^m f)(z), \tag{2.3}$$

где S^m – m-ая степень сингулярного оператора

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{2i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \tag{2.4}$$

где $\theta = \arg(\zeta - z), z = x + iy, \zeta = \xi + i\eta$ - комплексные точки плоскости.

В лебеговом пространстве $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$, рассмотрим простейшие сингулярные операторы S_{-1} и S_1 :

$$(S_{-1}f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{e^{-i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,\ (S_1 f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{e^{i\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta. \tag{2.5}$$

Ранее в работе Джаегибекова Г. [27] был введен новый поликерн оператор $(B_n f)(z)$, по формуле

$$(B_n f)(z) = (I - S_{-1}^n S_1^n) f(z) \equiv \iint\limits_{|\zeta|<1} B_n(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \tag{2.6}$$

где $n = 2m + 1$ $(m = 0, 1, \cdots)$ – любое нечетное число, S_1^n и S_{-1}^n, соответственно, обозначают n – ую степень операторов S_1 и S_{-1}, а ядро оператора B_n определяется по формуле

$$B_n(z,\overline{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi|1 - z\overline{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C_{\frac{n}{2}}^k C_{\frac{n}{2}+k-1}^k \left|\frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}}\right|^{2(k-1)}; \tag{2.7}$$

$$\alpha = \arg(1 - z\overline{\zeta}),\ C_{\frac{n}{2}}^k = \frac{(\frac{n}{2} + k - 1)(\frac{n}{2} + k - 2)\cdots(\frac{n}{2} + 1)\frac{n}{2}}{k!}.$$

Доказано (см.[28]), что оператор B_n, имеет воспроизводящее свойство

$$(f(z), \overline{B_n(z,\overline{\zeta})}) = \iint\limits_{\mathbf{D}} B_n(z,\overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta = f(z) \tag{2.8}$$

для функции вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \overline{z}^k f_k(z) + (1-|z|^2)^{\frac{n}{2}-1} f_{\frac{n-1}{2}}(z), \tag{2.9}$$

где $f_k(z)$ - аналитические в $|z| < 1$ функции, $k = 0, 1, \cdots m$. Как показано в [42], сумму из (2.9) можно преобразовать, к виду

$$\sum_{k=0}^{m-1} \overline{z}^k f_k(z) = P(z, \overline{z}) + \sum_{k=0}^{m-1} (1-|z|^2)^k g_k(z),$$

где $g_k(z)$ - аналитические функции в $\mathbf{D}$, $P_n(z, \overline{z}) = \sum_{k=0}^{m-1} \overline{z}^k P_k(z), P_0 = const$, $P_k(z)$ при $k \geq 1$ - полином по z степени не выше $k-1$. Легко доказать, что для поликерн оператора B_n также имеет место операторное представление

$$B_n = B_1 + \sum_{k=1}^{2m} S_{-1}^k B_1 S_1^k \equiv B_{2m} + S_{-2m} B_1 S_{2m}, \tag{2.10}$$

где S_{2m} - сингулярный оператор с четной характеристикой из (2.3), а B_{2m} - поликерн оператор Бергмана с ядром из (2.2).

2.1.2. Исходный оператор

В этом параграфе в лебеговом пространстве $L^p(\mathbf{D})(1 < p < \infty)$ изучается алгебра $\mathcal{R}$, порожденная операторами вида

$$\mathcal{A} = aI + bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + T, \tag{2.11}$$

где a, b, c, d, e, q - непрерывные в D функции, T - вполне непрерывный оператор,

$$(S_{-n}f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{-in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta \equiv (S_{-1}^n f)(z),$$

$\theta = \arg(\zeta - z)$, $|n| = 2m+1$, B_n - поликерн оператор Бергмана из (2.6), $\overline{B}_n = KB_nK$, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$.

Отметим, что при $d \equiv e \equiv q \equiv 0$ оператор $\mathcal{A}$ из (2.11) ранее был изучен в работе [27].

2.1.3. Доказательство пяти основных лемм

Лемма 2.1. *Пусть* $a(z)$ *непрерывна в* $\overline{D}$. *Тогда операторы* $S_{-n}a - aS_{-n}$, $B_n a - aB_n$ *вполне непрерывны в* $L^p(\mathbf{D}), 1 < p < \infty$.

Доказательство. Пусть сначала $a(z)$ непрерывна по Гельдеру. Тогда очевидно оператор $S_{-n}a - aS_{-n}$ имеет слабую особенность и по лемме 1.4 из [43] вполне непрерывен в $L^p(D)$ $1 < p < \infty$.

Если функция $a(z)$ только непрерывна, то достаточно равномерно аппроксимировать ее функциями, непрерывными по Гельдеру. Аналогично доказывается вполне непрерывность оператора $B_n a - aB_n$ в $L^p(\mathbf{D})$.

Лемма 2.2. *Пусть* $f(z) \in L^p(D), 1 < p < \infty$. *Тогда операторы* $S_{-n}\overline{B}_n$, $B_n S_{-n}, B_n\overline{B}_n,\ \overline{B}_n S_{-n} B_n, B_n^2 - B_n$ *являются вполне непрерывными в* $L^p(D)$ *операторами.*

Доказательство. Случай $n = 1$. Докажем справедливость утверждения леммы при $n = 1$.

Сначала убедимся, что поликерн оператор B_1, переводит функцию

$$f(z) = \frac{f_0(z)}{\sqrt{1 - |z|^2)}}$$

в себя, где $f_0(z)$ – произвольная аналитическая в $\mathbf{D}$ функция.

Прежде всего заметим, что в ядре $B_1(z, \overline{\zeta})$ поликерн оператора B_1 из (7) функция $\left|(\zeta - z)/(1 - z\overline{\zeta})\right|^2$ на контуре $|z| = 1$ обращается в единицу и поликерн оператор B_1 с таким ядром в граничных точках $|z| = 1$ локально эквивалентен (см.[27]) оператору с ядром $e^{-i\alpha}/2\pi|1-z\overline{\zeta}|^2$. Поэтому, имеем

$$(B_1f)(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^{3/2}(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{f_0(\zeta)ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^{3/2}(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}(1-|\zeta|^2)^{1/2}}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{1}{\zeta-z}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\sqrt{\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}}\frac{f_0(\zeta)ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}}.$$

Так как функция

$$\omega(\zeta)=\sqrt{\frac{1-|\zeta|^2}{1-z\overline{\zeta}}}\frac{f_0(\zeta)}{(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}}\in C(D)\quad \text{и}\quad \frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}\in L_p(D),\ p>2,$$

то по формуле Грина получим

$$(B_1f)(z)=\frac{f_0(z)}{\sqrt{1-|z|^2}},$$

ибо контурный интеграл в формуле Грина обращается в нуль. Теперь из доказанной формулы немедленно следует, что $B_1^2=B_1$.

а). Рассмотрим теперь оператор $(S_{-1}\overline{B}_1f)(z)$, где $f(z)\in L^p(\mathbf{D}), 1<p<\infty:$

$$(S_{-1}\overline{B}_1f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{ds_\zeta}{(\zeta-z)^{3/2}(\overline{\zeta}-z)^{1/2}}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\overline{\zeta}\sigma)^{3/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}.$$

Представляя внешний сингулярный интеграл в виде производной от интеграла со слабой особенностью и поменяв порядок интегрирования, получим

$$(S_1\overline{B}_1f)(z)=\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\pi i}\iint\limits_{|\sigma|<1}f(\sigma)J(z,\sigma)ds_\sigma,$$

где

$$J_1(z,\sigma)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{ds_\zeta}{(\overline{\zeta}-\overline{z})^{1/2}(1-\overline{\zeta}\sigma)^{3/2}(\zeta-z)^{1/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}.$$

Для подсчета внутреннего интеграла $J(z,\sigma)$, представим его в виде

$$J_1(z,\sigma) = -\frac{1}{(1-\overline{z}\sigma)\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1} \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\sqrt{\frac{\overline{\zeta}-\overline{z}}{1-\overline{\zeta}\sigma}}\frac{ds_\zeta}{(\zeta-z)^{1/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}.$$

По формуле Грина, имеем

$$J_1(z,\sigma) = -\frac{1}{(1-\overline{z}\sigma)\pi i}\int\limits_{|t|=1} \sqrt{\frac{\overline{t}-\overline{z}}{1-\overline{t}\sigma}}\frac{dt}{(t-z)^{1/2}(1-t\overline{\sigma})^{1/2}} =$$

$$= -\frac{1}{(1-\overline{z}\sigma)}\overline{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1} \sqrt{\frac{t-z}{t-\sigma}}\frac{dt}{t(1-t\overline{z})^{1/2}(1-t\overline{\sigma})^{1/2}}}.$$

Покажем, что подынтегральная функция по переменной t продолжима внутри единичного круга $|t|<1$ в однозначную аналитическую функцию с единственным простым полюсом в точке $t=0$.

Действительно, в знаменателе функция $(1-t\overline{z})^{-1/2}(1-t\overline{\sigma})^{-1/2}$ при $|t|<1$ является однозначной аналитической функцией. Функция

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{t-z}{t-\sigma}}$$

имеет две точки разветвления: $t=z$ и $t=\sigma$. При полном обходе точки $t=z$ аргумент числителя $(t-z)^{1/2}$, увеличивается на величину π, а при полном обходе точки $t=\sigma$, аргумент знаменателя $(t-\sigma)^{1/2}$ также увеличивается на величину π. При этом будем считать, что все обходы совершаются против часовой стрелки. Отсюда следует, что после полного обхода контура $|t|=1$ функция $\omega(t)$ возвращается к своему исходному значению, ибо в результате полного обхода числитель и знаменатель функции $\omega(t)$ преобретут одинаковые множители, равные $e^{i\pi}$, которые сократятся, и функция $\omega(t)$ примет свое первоначальное значение. Делая на комплексной плоскости t разрез по положительной части вещественной оси от точки $t=0$ до $t=+\infty$, приняв за исходное значение функции $\omega(t)$: $\sqrt{1}=1$, мы в итоге получим, что подынтегральная функция является в круге $|t|<1$ однозначной аналитической функцией с полюсом первого порядка в точке $t=0$. Тогда по теореме о вычетах получим, что

$$J_1(z,\sigma)=-\frac{2}{1-\overline{z}\sigma}\sqrt{\frac{\overline{z}}{\overline{\sigma}}}.$$

В итоге, имеем

$$(S_{-1}\overline{B}_1 f)(z)=\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\pi i}\iint\limits_{|\sigma|<1} f(\sigma)J_1(z,\sigma)ds_\sigma=0.$$

Утверждение леммы 2.2 относительно оператора B_1S_{-1} следует из цепочек равенств

$$B_1S_{-1}=(I-S_{-1}S_1)S_{-1}=S_{-1}-S_{-1}S_1S_{-1}=S_{-1}(I-S_1S_{-1})=$$

$$=S_{-1}(I-I+\overline{B}_1)=S_{-1}\overline{B}_1.$$

b). Рассмотрим теперь оператор $(B_1\overline{B}_1 f)(z)$, где $f(z)\in L^p(D), 1<p<\infty$:

$$(B_1\overline{B}_1 f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^{3/2}(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\sigma|<1}\frac{f(\sigma)ds_\sigma}{(1-\overline{\zeta}\sigma)^{3/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}.$$

Представляя внешний интеграл в виде производной от интеграла с особенностью первого порядка и поменяв порядок интегрирования, получим

$$(S_1\overline{B}_1 f)(z)=\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\pi i}\iint\limits_{|\sigma|<1} f(\sigma)J_2(z,\sigma)ds_\sigma,$$

где

$$J_2(z,\sigma)=\frac{2}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{ds_\zeta}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})^{1/2}(1-\overline{\zeta}\sigma)^{3/2}(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}.$$

Для подсчета интеграла $J_1(z,\sigma)$, представим его в виде

$$J_2(z,\sigma)=\frac{2}{\overline{z}\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{(\overline{z}-\overline{\zeta})ds_\zeta}{\overline{\zeta}(1-z\overline{\zeta})^{1/2}(1-\overline{\zeta}\sigma)^{3/2}(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}+$$

$$+\frac{2}{\overline{z}\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^{1/2}(1-\overline{\zeta}\sigma)^{3/2}(1-\overline{\zeta})^{1/2}z\zeta)^{1/2}(1-\zeta\overline{\sigma})^{1/2}}.$$

Первое слагаемое дает вполне непрерывный оператор T, а второе представим в виде

$$J_2(z,\sigma)=\frac{4}{\overline{z}(\sigma-z)\pi}\iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\sqrt{\frac{1-\sigma\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}}\frac{ds_\zeta}{(1-\overline{z}\zeta)^{1/2}(1-\overline{\sigma}\zeta)^{1/2}}.$$

По формуле Грина получим

$$J_2(z,\sigma)=-\frac{2}{\overline{z}(\sigma-z)\pi i}\int\limits_{|t|=1}\sqrt{\frac{t-\sigma}{t-z}}\frac{dt}{(1-\overline{z}t)^{1/2}(1-\overline{\sigma}t)1/2}=0.$$

Таким образом, оператор $B_1\overline{B}_1$ является вполне непрерывным оператором.

Аналогичным образом доказывается вполне непрерывность оператора $\overline{B}_1S_{-1}B_1$.

Случай произвольного n. Утверждение леммы 2.2 в случае произвольного $n=2m+1$, доказывается методом математической индукции с использованием формулы (2.9), которая связывает поликерн операторы с нечетным индексом с операторами, имеющими четный индекс.

Лемма 2.3. *Интегральные операторы* B_n, $S_{-n}B_n$, $\overline{B}_nS_{-n}$, $S_{-n}B_nS_n$ *при* $n=2m+1$ *не являются вполне непрерывными операторами в пространстве* $L^p(D)$, $1<p<\infty$, *причем их ядра теряют непрерывность лишь при совпадении обеих переменных на границе* Γ.

Доказательство. В силу воспроизводящего свойства ядра B_n (см. формулу (2.8)), оператор B_n имеет бесконечное число собственных функций, соответствующих собственному значению 1, поэтому он не может быть вполне непрерывным оператором. Отсюда и из формулы (2.6) следует, что остальные операторы также не являются вполне непрерывными в $L^p(D)$.

Действительно, пусть, например, оператор $S_{-n}B_n$ вполне непрерывен в $L^p(D)$. Тогда оператор $S_nS_{-n}B_n$ как композиция ограниченного оператора S_n и вполне непрерывного $S_{-n}B_n$ вполне непрерывен. Однако это противоречит тождеству

$$S_nS_{-n}B_n = (I - \overline{B}_n + T)B_n = \overline{B}_n + T + TB_n = \overline{B}_n + T,$$

где T - вполне непрерывный оператор.

В этом пункте рассмотрим алгебру $\mathcal{R}$, порожденную всеми действующими в пространстве $L^p(D)(1 < p < \infty)$ операторами вида $\mathcal{A}$ из равенства (2.11), где все коэффициенты непрерывны в $\overline{D}$ функции, $T \in \mathfrak{J}$, а через $\mathfrak{J}$ обозначен идеал, содержащихся в $\mathcal{R}$ вполне непрерывных операторов. При этом, хотя функции, входящие в $L^p(D)$, являются комплекснозначными, само пространство будем считать вещественным, то есть рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда операторы из $\mathcal{R}$ будут обычными линейными ограниченными операторами в $L^p(D)$. В силу того, что $\mathcal{R}$ одновременно содержит операторы $\overline{B}_n, \overline{B}_nK, B_n, B_nK$ и $S_{-n}K$, алгебра $\mathcal{R}$ не исчерпывается одними только операторами вида $\mathcal{A}$. Это связано с тем, что в алгебру $\mathcal{R}$ входят, например, операторы $S_{-n}B$ и $\overline{B}_nS$, которые в силу леммы 2.3, не являются вполне непрерывными в $L^p(D)$. Поэтому при описании алгебры $\mathcal{R}$ возникает необходимость в изучении операторов более сложной природы, а именно, операторов вида

$$\begin{gathered}\mathcal{M} = aI + bS_{-n}K + cB_n + d\overline{B}_n + eB_nK + q\overline{B}_nK + \lambda S_{-n}B_nK + \\ + \mu\overline{B}_nS_{-n}K + \nu S_{-n}B_nS_n + \gamma S_{-n}B_n + \delta B_nS_n + T,\end{gathered} \tag{2.12}$$

где все коэффициенты – непрерывные в D функции.

Л е м м а 2.4. *Оператор $\mathcal{M}$, заданный формулой (2.12), является элементом алгебры $\mathcal{R}$; и обратно, всякий оператор из алгебры $\mathcal{R}$, представим в виде (2.12).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего нетрудно проверить, что произведение двух операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ из (2.11) с коэффициентами $a_j,\ b_j,\ c_j,\ d_j,\ e_j,$ q_j $(j = 1, 2)$ дает оператор $\mathcal{A}$ с коэффициентами $a = a_1a_2 - b_1\overline{b}_2$, $b = a_1b_2 + \overline{a}_2b_1$, $c = (a_1 + c_1)c_2 + a_2c_1 + e_1\overline{q}_2 + b_1\overline{b}_2$, $d = (a_1 + d_1)d_2 + a_2d_1 + q_1\overline{e}_2$, $e = (a_1 + c_1)e_2 + (\overline{a}_2 + \overline{c}_2)e_1$, $q = (a_1 + d_1)q_2 + (\overline{a}_2 + \overline{c}_2)q_1$, $\lambda = b_1\overline{d}_2$, $\mu = b_2d_1$, $\nu = 0$, $\gamma = b_1\overline{q}_2$, $\delta = -\overline{b}_2e_1$. Отсюда ясно, что если, обратно, задан оператор $\mathcal{M}$, то, задавая $\mathcal{M}_1$ с условиями $|a_1|^2 + |b_1|^2 \neq 0, (a_1 + c_1)(\overline{a}_1 + \overline{d}_1) - e_1\overline{q} \neq 0$, найдем $a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ e_2,\ q_2$. Очевидно, для доказательства второй части леммы достаточно показать, что сумма и произведение операторов вида (2.12) имеют такое же представление. В самом деле, если $A_j = aI + b_jSK + c_jB + d_j\overline{B} + e_jBK + q_j\overline{B}K + \lambda_jSBK + \mu_j\overline{B}SK + \nu_jSB\overline{S} + \gamma_jSB + \delta_jB\overline{S} + T_j$, $j = 1, 2$, то $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$, имеет такой же вид. Что касается композиции операторов $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{A}_2$, то их вычисление требует довольно кропотливой работы и опирается на леммы 2.1 – 2.4. В результате, получим $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$, причем коэффициенты оператора $\mathcal{M}$, находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&a = a_1a_2 - b_1\overline{b}_2,\ b = a_1b_2 + \overline{a}_2b_1,\\
&c = (a_1 + c_1)c_2 + c_1a_2 + e_1\overline{q}_2 - \delta_1\gamma_2 + b_1\overline{b}_2,\\
&d = (a_1 + d_1)d_2 - (\overline{b}_2 + \overline{\lambda}_2)\mu_1 + a_2d_1 + q_1\overline{e}_2 - b_1\overline{\lambda}_2,\\
&e = (a_1 + c_1)e_2 + (b_2 + \lambda_2)\delta_1 + (a_2 + d_2)e_1,\\
&q = (a_1 + d_1)q_2 + (\overline{a}_2 + \overline{c}_2)q_1 - (b_1 + \mu_1)\overline{\gamma}_2,\\
&\lambda = (a_1 + d_1)\lambda_2 + (\overline{a}_2 + \overline{d}_2)\lambda_1 + b_2\nu_1 + b_1\overline{d}_2 + \gamma_1e_2,\\
&\mu = (a_1 + d_1)\mu_2 + (\nu_2 + \overline{q}_2)\mu_1 + b_2d_1 + b_1\overline{\nu}_2 - q_1\overline{\delta}_2,\\
&\nu = (a_1 + \nu_1)\nu_2 + a_2\nu_1 - \overline{b}_2\lambda_1 + \gamma_1\delta_2,\\
&\gamma = (a_1 + \nu_1)\gamma_2 + (a_2 + c_2)\gamma_1 + (b_1 + \lambda_1)\overline{q}_2,\\
&\delta = (a_1 + c_1)\delta_2 + (a_2 + \nu_2)\delta_1 - (\overline{b}_2 + \overline{\mu}_2)e_1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Каждому оператору $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа матрицу, вида

$$\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) = \begin{pmatrix} \Delta(z) & 0 \\ 0 & D(t) \end{pmatrix},\ \text{где}\ \Delta(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ -\overline{b(z)} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},\ z \in \overline{\mathbf{D}},$$

$$D(t) = \begin{pmatrix} a(t) + c(t) & e(t) & \delta(t) \\ \overline{q(t)} & \overline{a(t)} + \overline{d(t)} & \overline{-b(t)} + \overline{\mu(t)} \\ \gamma(t) & a(t) + \lambda(t) & a(t) + \nu(t) \end{pmatrix},\ t \in \Gamma,$$

то есть, матрица-функция $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{\mathbf{D}} \times \Gamma$. Множество определенных, таким образом, символов обозначим через $\mathfrak{N}$. Очевидно, что $\sigma_I(z,t) = E$, где E – единичная матрица из $\mathfrak{N}$, а в силу (2.4) нетрудно убедиться, что $\sigma_{A_1+A_2}(z,t) = \sigma_{A_1}(z,t) + \sigma_{A_2}(t)$, $\sigma_{A_1(z,t)\cdot A_2}(z,t) = \sigma_{A_1}(z,t) \cdot \sigma_{A_2}(z,t)$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ есть алгебра. Покажем теперь, что выполнены условия, обеспечивающие применимость к операторам из $\mathcal{R}$ теоремы 6.4.1 из [32]. Прежде всего, имеет место

Л е м м а 2.5. *Символ* $\sigma_{\mathcal{M}}(z,t) \in \mathfrak{N}$ *оператора* $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$ *тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда* $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}$.

Лемма 5 доказывается с помощью локального метода Симоненко [26] с использованием результатов, доказанных лемм 2.1 – 2.4.

2.1.4. Доказательство итоговой теоремы

Пусть теперь матрица $\sigma_A(z,t)$ невырожденная, то есть $\sigma_A(z,t) \neq 0$ при всех $z \in \overline{\mathbf{D}},\ t \in \Gamma$. Тогда обратная матрица

$$[\sigma_A(z,t)]^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta^{-1}(z) & 0 \\ 0 & D^{-1}(t), \end{pmatrix},\ z \in \overline{\mathbf{D}},\ t \in \Gamma$$

также принадлежит алгебре $\mathfrak{N}$, поскольку она является символом оператора $R \in \mathfrak{N}$:

$$\begin{aligned} R = & \frac{\overline{a}}{|\Delta|} I - \frac{b}{|\Delta|} SK + c^* B + d^* \overline{B} + e^* BK + q^* \overline{B} K + \\ & + \lambda^* SBK + \mu^* \overline{B} SK + \nu^* SB\overline{S} + \gamma^* SB + \delta^* BS, \end{aligned} \tag{2.14}$$

где $c^*,\ d^*,\ e^*,\ q^*,\ \lambda a^*,\ \mu^*,\ \nu^*,\ \gamma^*,\ \delta^*$– такие непрерывные в $\overline{\mathbf{D}}$ функции, что на границе Γ области $\mathbf{D}$, соответственно, имеют вид:

$$\begin{aligned} & c^*(t) = \frac{\Delta_{11}(t)}{|D(t)} - \frac{\overline{a(t)}}{|\Delta(t)|}, \quad d^*(t) = \frac{\overline{\Delta_{22}(t)}}{|D(t)|} - \frac{\overline{a(t)}}{|\Delta(t)|}, \quad e^*(t) = \frac{\Delta_{21}(t)}{|\Delta(t)|}, \\ & q^*(t) = \frac{\Delta_{12}(t)}{|D(t)|}, \quad \lambda^*(t) = \frac{\Delta_{23}(t)}{|D(t)|} - \frac{b(t)}{|\Delta(t)|}, \quad \mu^*(t = \frac{\Delta_{32}(t)}{|D(t)|}, \\ & \nu^*(t) = \frac{\Delta_{33}(t)}{|D(t)} - \frac{\overline{a(t)}}{|\Delta(t)|}, \quad \gamma^*(t) = \frac{\Delta_{13}(t)}{|D(t)|}, \quad \delta^*(t) = \frac{\Delta_{31}(t)}{|\Delta(t)|}, \end{aligned}$$

здесь $|\Delta(z)| = \det \Delta(z)$, $|D(t)| = \det |D(t)|$, $z \in \overline{\mathbf{D}}$, $t \in \Gamma$ а Δ_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $|D(t)|$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Т е о р е м а 2.1. *Для того чтобы произвольный оператор $\mathcal{M}$ из алгебры $\mathcal{R}$ был нетеровым оператором в пространстве $L^p(\mathbf{D})$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2 + |b(z)|^2 \neq 0 \textit{ при } z \in \overline{\mathbf{D}}, \ \det D(t) \neq 0 \textit{ при } t \in \Gamma. \tag{2.15}$$

При выполнении этих условий индекс оператора равен

$$\varkappa = -\frac{n}{2\pi} [\arg \det D(t)]\Big|_{\Gamma}.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь . По теореме 6.4.1 из [32] заключаем, что при выполнении условий (2.15) оператор R из (2.14) является правым и левым регуляризатором оператора A.

Н е о б х о д и м о с т ь . Необходимость условий (2.15) для нетеровости доказывается по схеме [44] от противного с помощью локального метода [26].

З а м е ч а н и е. Полученные результаты сохраняются в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$.

§ 2.2. Алгебра двумерных сингулярных интегральных операторов с нечетной характеристикой со сдвигом

2.2.1. Исследуемый оператор со сдвигом и доказательство основной леммы

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Г. В данной работе в векторном лебеговом пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$ изучаются операторы, вида

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_l(z)B_{2l+1} + T, \quad m \geq 0 - \text{целое}, \qquad (2.16)$$

где $a(z)$, $b(z)$, $c_l(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ квадратные матрицы-функции порядка ν, T – вполне непрерывный оператор,

$$(S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i^{|n|}} \iint\limits_{\mathbf{D}} \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta$$

$\theta = \arg(\zeta - z)$, B_n - поликерн - оператор Бергмана

$$(B_n f)(z) = \iint\limits_{D} B_n(z, \overline{\zeta}) f(\zeta) ds_\zeta, \qquad (2.17)$$

где ядро оператора B_n в случае единичного круга с центром в начале координат определяется, по формуле (см.[27])

$$B_n(z, \overline{\zeta}) = \frac{e^{-in\alpha}}{\pi |1 - z\overline{\zeta}|^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k C^k_{\frac{n}{2}} C^k_{\frac{n}{2}+k-1} \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\overline{\zeta}} \right|^{2(k-1)}; \qquad (2.18)$$

оператор W – является оператором антиконформного сдвига, то есть

$$(Wf)(z) = f(\alpha(z)),$$

где $\alpha(z)$ антиконформное отображение области D на себя, удовлетворяющее условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$ и $\exists z_0 \in \overline{D}$ такое, что $\alpha(z_0) \neq z_0$.

Отметим, что некоторые классы уравнений со сдвигом, содержащих операторы S_n, изучены в работах [20 – 25]. Все указанные работы касаются случая, когда оператор S_n имеет четную характеристику. Операторы со сдвигом и с нечетной характеристикой ранее не были исследованы.

Лемма 2.6. *Пусть $f(z) \in L^{\nu,p}(D)(1 < p < \infty)$. Если $\alpha(z)$ является антиконформным отображением области D на себя, удовлетворяющим условию Карлемана $\alpha(\alpha(z)) = z$ для $\forall z \in \overline{D}$, тогда оператор*

$$(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} W S_{2m+1} - S_{-(2m+1)} W$$

и

$$W B_{2l+1} - B_{-(2l+1)} W, \quad B_{-(2l+1)} W S_m, \ W S_m B_{-(2l+1)} \quad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

вполне непрерывны в $L^{\nu,p}(D)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор WS_{2m+1}:

$$(WS_{2m+1}f)(z) = \frac{(2m+1)}{2\pi i^{2m+1}} \iint\limits_D \frac{(\zeta - \alpha(z))^{m-1/2}}{(\overline{\zeta} - \overline{\alpha(z)})^{m-3/2}} f(\zeta) ds_\zeta$$

Произведя в интеграле замену переменных $\zeta = \alpha(\sigma)$ и учитывая некоторые свойства конформного отображения (см. [33], стр. 399, 411), получим

$$(WS_{2m+1}f)(z) = \frac{(2m+1)}{2\pi i^{2m+1}} \iint\limits_D \frac{(\alpha(\sigma) - \alpha(z))^{m-1/2}}{(\overline{\alpha(\sigma)} - \overline{\alpha(z)})^{m+3/2}} |\alpha\prime(\sigma)|^2 f(\alpha(\sigma)) ds_\sigma =$$

$$+\frac{(2m+1)}{2\pi i^{2m+1}} \iint\limits_D \left[\frac{\left(\frac{\alpha(\sigma)-\alpha(z)}{\overline{\sigma}-\overline{z}}\right)^{m-1/2}}{\left(\frac{\overline{\alpha(\sigma)}-\overline{\alpha(z)}}{\sigma - z}\right)^{m+3/2}} - \frac{\overline{(\alpha'(z))}^{m-1/2}}{(\alpha'(z))^{m+3/2}} \right] |\alpha'(\sigma)|^2) \times$$

$$\times \frac{(\sigma - z)^{m-1/2}}{(\overline{\sigma} - \overline{z})^{m+3/2}} f(\alpha(\sigma) ds_\sigma + \frac{(2m+1)}{2\pi i^{2m+1}} \iint\limits_D \frac{\overline{(\alpha'(z))}^{m-1/2}}{(\alpha'(z))^{m+3/2}} |\alpha'(\sigma)|^2 \times$$

$$\times \frac{(\sigma - z)^{m-1/2}}{(\overline{\sigma} - \overline{z})^{m+3/2}} f(\alpha(\sigma) ds_\sigma = (\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^{m+1/2} (S_{-(2m+1)} W) f(z) + T.$$

Поэтому

$$WS_{2m+1} = \Big(\frac{\overline{\alpha}_z(z)}{\alpha_{\overline{z}}}\Big)^{m+1/2} S_{-(2m+1)}W + T.$$

Прежде чем перейти к доказательству других утверждений относительно операторов $B_{-(2l+1)}$, отметим, что, как показано в работе [1], в случае единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$ оператор $B_{-(2l+1)}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ локально эквивалентен оператору с ядром $e^{i(2l+1)\theta}/2\pi|1 - z\overline{\zeta}|^2$, где $\theta = arg(1 - z\overline{\zeta})$. Теперь, если D – произвольная односвязная область комплексной плоскости z, то оператор $B_{2l+1} l = 1, 2, \ldots, m$, представляется в виде

$$(B_{-(2l+1)}f(z)) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}(1-\overline{\omega(z)}\omega(\zeta))^{l-1/2}}{(1-\omega(z)\overline{\omega(\zeta)})^{l+3/2}} f(\zeta)ds_\zeta,$$

где $\omega(z)$ – однолистное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат. Учитывая это, будем иметь

$$(WB_{-(2l+1)}f)(z) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{\omega'(\alpha(z))\overline{\omega'(\zeta)}(1-\overline{\omega(\alpha(z)}\omega(\zeta))^{l-1/2}}{\overline{\alpha}_z(z)(1-\omega(\alpha(z))\overline{\omega(\zeta)})^{l+3/2}} f(\zeta)ds_\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{\omega'(\alpha(z))\overline{\omega'(\alpha(\sigma))}(1-\overline{\omega(\alpha(z)}\omega(\alpha(\sigma)))^{l-1/2}}{\overline{\alpha}_z(z)\alpha_{\overline{\sigma}}(\sigma)(1-\omega(\alpha(z))\overline{\omega(\alpha(\sigma))})^{l+3/2}} |\alpha'(\sigma)|^2 f(\alpha(\sigma))ds_\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \frac{\psi'(z)\overline{\psi'(\sigma)}(1-\overline{\psi(z)}\psi(\sigma))^{l-1/2}}{(1-\psi(z)\overline{\psi(\sigma)})^{l+3/2}} f(\alpha(\sigma))ds_\sigma + T \equiv (B_{2l+1}Wf)(z) + T,$$

где функция $\psi(z) = \overline{\omega(\alpha(z))}$ является конформным отображением области D на себя.

Другие утверждения леммы 2.6 доказываются аналогичным образом.

2.2.2. Алгебра операторов и доказательство основной теоремы

Теперь рассмотрим множество всех операторов вида (1) в пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$. Указанное множество обозначим через $\mathcal{R}$. Покажем, что множество представляет собой алгебру в $L^{\nu,p}(D)$ $(1 < p < \infty)$. Действительно, пусть $\mathcal{A}_k \in \mathcal{R},\ k = 1, 2,$ так что

$$\mathcal{A}_k = a_k(z)I + b_k(z)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_{k,l}(z)B_{2l+1} + T_k,$$

тогда

$$\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = (a_1 + a_2)I + (b_1 + b_2)WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m}(c_{1,l} + c_{2,l})B_{2l+1} + T,$$

и $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \in \mathcal{R}$. Далее,

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = \left(a_1I + b_1WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_{1,l}B_{2l+1} + T_1\right) \times$$

$$\times \left(a_2I + b_2WS_{2m+1} + \sum_{l=0}^{m} c_{2,l}(z)B_{2l+1} + T_2\right).$$

Пользуясь доказанной выше леммой, результатами лемм 1–3 из [1], свойствами $W^2 = I,\ S_nS_{-n} = I - B_n + T$, а также учитывая, что композиция вполне непрерывного и ограниченного операторов есть вполне непрерывный оператор, установим, что коэффициенты композиции $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_3$, определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
&a_3(z) = a_1(z)a_2(z) + b_1(z)b_2(\alpha(z))(\overline{\alpha'(z)}/\alpha'(z))^{m+1/2},\\
&b_3(z) = a_1(z)b_2(z) + b_1(z)b_2(\alpha(z)),\\
&c_{3,m} = a_1c_{2,m} + a_2c_{1,m} + c_{1,m}c_{2,m} - b_1b_2\alpha'(z))^{m+1/2},\\
&c_{3,m-1} = a_1c_{2,m-1} + a_2c_{1,m-1} + c_{1,m-1}c_{2,m-1} + c_{1,m-1}c_{2,m} + c_{2,m-1}c_{1,m},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&c_{3,0} = c_{1,0}\sum_{l=0}^{m} c_{2,l} + c_{2,0}\sum_{l=0}^{m} c_{1,l} + a_1c_{2,0} + a_2c_{1,0}.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Таким образом, композиция двух сингулярных интегральных операторов вида (2) является оператором такого же типа. Итак, нами доказано, что множество операторов вида (2) из $\mathcal{R}$, является алгеброй.

Теперь каждому оператору $\mathcal{A} \in \mathcal{R}$ сопоставим в качестве символа блочную квадратную матрицу-функцию

$$
\sigma_{\mathcal{A}}(z,t) = \begin{pmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0 \\ 0 & 0 & c(t) \end{pmatrix},
$$

где

$$
c(t) = \begin{pmatrix} a(t) + \sum_{l=1}^{m} c_l(t) & 0 & 0\dots & 0 \\ c_1(t) & a(t) + \sum_{l=2}^{m} c_l(t) & 0\dots & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ c_1(t) & c_2(t) & \dots & a(t) + c_m(t) \end{pmatrix},
$$

$z \in \overline{D}, t \in \Gamma$. Таким образом, матрица-функция $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ непрерывна на компакте $\overline{D}\times\Gamma$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех символов операторов из $\mathcal{R}$.

Непосредственной проверкой устанавливается, что имеют место равенства

$$\sigma_{\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2}(z,t)=\sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t)+\sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t),\ \sigma_{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}(z,t)=\sigma_{\mathcal{A}_1}(z,t)\cdot\sigma_{\mathcal{A}_2}(z,t),$$

то есть сопоставление оператору $\mathcal{A}\in\mathcal{R}$ его символа $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ задает гомоморфизм алгебр $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$. При этом ядром гомоморфизма является множество вполне непрерывных операторов в $L^p(D)$. Наконец, если $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ – невырожденная матрица-символ, то непосредственным построением устанавливается, что матрица $\sigma_{\mathcal{A}}^{-1}(z,t)$ является символом некоторого оператора из $\mathcal{R}$.

Таким образом, по теореме 6.4.1 из [8], оператор $\mathcal{A}$ из алгебры $\mathcal{R}$ нетеров тогда и только тогда, когда его символ $\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)$ невырожден для всех $z\in\overline{D}, t\in\Gamma$. Итак, мы приходим к утверждению

Теорема 2.1. *Для того, чтобы сингулярный интегральный оператор $\mathcal{A}$ с антиконформным сдвигом Карлемана $\alpha(z)$ из (1) был нетеровым в пространстве $L^{\nu,p}(D)$ $(1<p<\infty)$, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\det\sigma_{\mathcal{A}}(z,t)\equiv\begin{vmatrix} a(z) & d(z)(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0\\ d(\alpha(z)) & a(\alpha(z))(\alpha'(z)/\overline{\alpha'(z)})^{m+1/2} & 0\\ 0 & 0 & c(t)\end{vmatrix}\neq 0,\ \forall z\in\overline{D},$$

$$\prod_{j=1}^{m}\det\Big(a(t)+\sum_{k=j}^{m}c_k(t)\Big)\neq 0,\ \forall t\in\Gamma.$$

При выполнении этих условий индекс оператора $\mathcal{A}$ вычисляется по формуле

$$\varkappa=\sum_{j=1}^{m}Ind_{\Gamma}\det\Big(a(t)+\sum_{k=j}^{m}c_k(t)\Big).$$

З а м е ч а н и е. Полученные результаты сохраняются в лебеговом пространстве $L^{\nu,p}_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$.

Глава 3

Нётеровая разрешимость одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому кругу

§ 3.1. Алгебра одного класса двумерных сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому кругу

3.1.1. История вопроса

Пусть Γ – простая замкнутая кривая Ляпунова комплексной плоскости. Рассмотрим следующее уравнение:

$$(Af)(t) \equiv a(t)f(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau + (Tf)(t) = g(t), \tag{3.1}$$

где $a(t), b(t)$ – заданные на Γ непрерывные функции, g(t) – заданная, а $f(t)$ - неизвестная функция гильбертова пространства $L_2(\Gamma)$, T – вполне непрерывный оператор. Интеграл $(S_\Gamma f)(t)$ является сингулярным интегралом:

$$(S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}d\tau = \lim_{\varepsilon \to o} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t}d\tau, \quad t \in \Gamma$$

(предел понимается в смысле главного значения по Коши), где Γ_ε – обозначает контур круга с радиусом ε и центром в точке t.

Первые значительные результаты по разрешимости уравнения (3.1) в начале двадцатого века были получены Ф. Нётером [45], Т. Карлеманом [46] и Трикоми Ф.Ж. [47], [48]. Полная теория разрешимости одномерных сингулярных интегральных уравнений Коши в Гельдеровых пространствах $H_\alpha(\Gamma), 0 < \alpha < 1$ и пространствах Лебега $L_p(\Gamma), 1 < p < \infty$ построены в фундаментальных работах советских математиков Н.И. Мусхелишвили [49], С.Г.Михлина [9] Ф.Д.Гахова [50] и изложены в [49]:

Теорема 3.1. *Пусть для любых $t \in \Gamma$ выполняется условие*

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0.$$

Тогда

1). *Однородное интегральное уравнение*

$$(Af)(t) = 0 \tag{3.2}$$

и соответствующее ему, однородное сопряженное уравнение

$$(A^*\psi)(t) = a(t)\psi(t) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \overline{b(\tau)}\frac{\psi(\tau)}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (T'\psi)(t) = 0 \tag{3.3}$$

в пространстве $L_2(\Gamma)$, могут иметь конечное число k (соответственно k') линейно независимых решений.

2). *Для разрешимости неоднородного уравнения*

$$(Af)(t) = g(t), \quad g(t) \in \Gamma \tag{3.4}$$

в пространстве $L_2(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{\Gamma} g(t)\psi_j(t)dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots k'$$

для любого решения $\psi_j(t) \in L_2(\Gamma)$ сопряженного уравнения $(A^*\psi)(t) = 0$.

3). *Конечное число $\varkappa = k - k'$, называется индексом уравнения (3.1) и вычисляется по формуле*

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}\Big[arg\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}\Big]_{\Gamma}.$$

3.1.2. Сингулярные интегральные уравнения с операторами S_Γ и $\overline{S}_\Gamma$

Данная глава посвящена исследованию более общему, чем (3.1) сингулярному интегральному уравнению

$$(Af)(t) =$$

$$= a(t)f(t) + b(t)\overline{f(t)} + \frac{c(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{d(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (Tf)(t) = g(t) \quad (3.5)$$

в банаховых пространствах $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ – заданные непрерывные на Γ функции.

Уравнение (3.5) впервые рассмотрен Л.Г. Михайловым [29] (см. также [30]) в связи с изучением некоторых краевых задач для обобщенных аналитических функций. Указанный автор, в предположении, что коэффициенты уравнения (3.5) удовлетворяют условию Гельдера, сводит изучение уравнения (3.5) в пространствах $H_\alpha(\Gamma)$ $(0 < \alpha < 1)$ к эквивалентной системе интегральных уравнений Коши.

При этом, хотя функции, входящие в $L_p(\Gamma)$, являются комплекснозначными, само пространство будем считать вещественным, т.е. рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда не только сингулярный интегральный оператор

$$(S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

но и композиция сингулярного оператора с оператором комплексного сопряжения

$$(\overline{S}_\Gamma f)(t) \equiv (K S_\Gamma f)(t) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}} d\overline{\tau}, \quad (Kf) = \overline{f(t)}$$

будут обычными линейными ограниченными операторами в $L_p(\Gamma)$.

Всякий линейный ограниченный функционал на рассматриваемом (вещественном) пространстве $L_p(\Gamma)$, единственным образом представим, в виде

$$(f, \psi) = Re \int\limits_\Gamma f(\tau) \psi(\tau) d\tau$$

В соответствии с этим сопряженным к оператору A в $L_p(\Gamma)$

$$(A^* \psi)(t) = a(t)\psi(t) + b(t)\overline{\psi(t)} - \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\overline{c(\tau)}\psi(\tau)}{\overline{\tau} - \overline{t}} d\overline{\tau} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\overline{d(t)\psi(\tau)}}{\tau - t} d\tau + (T\psi)(t) = q(t) \tag{3.6}$$

где $\psi(t),\ q(t) \in L_q(\Gamma)$ $(1/p + 1/q = 1)$.

Ламма 3.1. *Если функция $b(t)$ непрерывна на Γ, то оператор*

$$V = S_\Gamma b - b S_\Gamma$$

вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $b(t) \in H_\alpha(\Gamma), 0 < \alpha < 1$, т.е. найдется такое число, что для произвольных значений $t_1, t_2 \in \Gamma$ выполняется неравенство $|b(t_1) - b(t_2)| < M|t_1 - t_2|^\alpha$. Тогда оператор V :

$$(Vf)(t) = (S_\Gamma(bf))(t) - b(t)(S_\Gamma)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t} f(\tau)d\tau$$

имеет ядро со слабой особенностью:

$$\Big|\frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}\Big| < M\frac{|\tau - t|^\alpha}{|\tau - t|} = \frac{M}{|\tau - t|^{1-\alpha}}.$$

Следовательно оператор, V вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

Пусть, теперь функция $b(t)$ только непрерывна, то построим последовательность функции $b_n(t) \in H_\alpha(\Gamma)$, которая равномерно сходится к функции $b(t)$. Рассмотрим оператор $V_n = S_\Gamma b_n - b_n S_\Gamma$. По доказанному, оператор V_n вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$. Оценим норму разности $V - V_n$:

$$||V - V_n|| = ||S_\Gamma(b - b_n) - (b - b_n)S_\Gamma|| \leq ||S_\Gamma(b - b_n)|| + ||(b - b_n)S_\Gamma|| \leq$$

$$\leq 2||S_\Gamma|| \max_{t\in\Gamma} |b(t) - b_n(t)|.$$

Но функции $b_n(t)$ равномерно сходятся к $b(t)$, следовательно,

$$max_{t\in\Gamma}|b(t) - b_n(t)| \to 0 \quad \text{и} \quad ||V - V_n|| \to 0.$$

По известной теореме функционального анализа, оператор V вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$.

Лемма 3.1 доказана.

Следствие. Из леммы 3.1 следует, что оператор A^* – сопряженное к оператору A из (3.6) также имеет вид (3.5).

С учетом указанного следствия, ниже будем изучать множество всех операторов, имеющих вид (3.5).

Прежде всего заметим, что уравнение (3.5), наряду с искомой функцией $f(t)$, также содержит комплексно сопряженную функцию $\overline{f(t)}$ и уравнения такого вида можно, непосредственно, свести к системе двух сингулярных интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями $f(t)$ и $\overline{f(t)}$. Для этого нужно присоединить к данному уравнению другое полученное переходом к комплексно сопряженным значениям. Таким образом в векторном пространстве

$$L_p^2(\Gamma) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L_p^2(\Gamma)\},$$

рассмотрим оператор

$$U = \begin{pmatrix} a(t)I + c(t)S_\Gamma & b(t)I + d(t)\overline{S}_\Gamma \\ \overline{b(t)}I + \overline{d(t)}S_\Gamma & \overline{a(t)}I + \overline{c(t)}\overline{S}_\Gamma \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Лемма 3.2. *Нетеровость оператора $A : L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma) (1 < p < \infty)$ из (3.5) эквивалентна нетеровости оператора $U : L_p^2(\Gamma) \longrightarrow L_p^2(\Gamma)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [23]. Действительно, если функция $f(t)$ является решением уравнения (3.5) из $L^p(\Gamma)$, то вектор $F = (f, \overline{f})$ будет решением системы $UF = G$ из $L_p^2(\Gamma)$, где $G = (g, \overline{g})$ и обратно, если вектор $F = (f_1, f_2)$ является решением системы $UF = G$ из $L_p^2(\Gamma)$, то вектор $(\overline{f}_2, \overline{f}_1)$ также будет решением. Но тогда решением системы $UF = Q$ из $L_p^2(\Gamma)$ будет вектор $\left(\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}, \frac{f_2+\overline{f}_1}{2}\right)$. Отсюда следует, что функция $\frac{f_1+\overline{f}_2}{2}$ будет решением уравнения (3.5) из $L_p^2(\Gamma)$.

Пусть теперь k обозначает число линейно-независимых решений однородного уравнения (3.5) над полем вещественных чисел, l – число линейно-независимых решений однородной системы $UF = 0$ над полем комплексных чисел. Покажем, что $k = l$. Пусть $\{f_j(z)\}, j = 1, 2, \cdots, k,$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (5). Тогда векторы $F_j = (f_j, \overline{f}_j)$ $(j = 1, 2, \cdots k)$ будут линейно-независимыми решениями уравнения $UF = 0$. Действительно, если $\sum_{j=1}^{n} c_j F_j = 0$, то $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n} c_j \overline{f}_j = 0$ или $\sum_{j=1}^{n} c_j f_j = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j f_j = 0$. Отсюда $\sum_{j=1}^{n}(c_j + \overline{c}_j) f_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n}(c_j - \overline{c}_j) f_j = 0$, и $c_j + \overline{c}_j = 0, c_j - \overline{c}_j = 0$, т.е. $c_j = 0$. Таким образом, $k \leq l$. Также как в ([34], с.276) доказывается, что имеет место обратное неравенство $k \geq l$.

Совершенно аналогично доказывается, что однородное сопряженное уравнение $A^*\psi = 0$ в пространстве $L_q(\Gamma)$ и соответствующая система уравнений $U^*\Psi = 0$ в векторном пространстве $L_q^2(\Gamma)$, имеют одинаковое число линейно-независимых решений, определенным образом, соответствующих друг другу.

Из установленного выше соответствия между решениями неоднородного уравнения $Af = g$ и неоднородной системы $UF = G$ следует, что они нормально разрешимы одновременно. Лемма 3.2 доказана.

Следующее утверждение следует из [30] :

Лемма 3.3. *Между операторами* $(\overline{S_\Gamma} f)(t)$ *и* $(S_\Gamma f)(t)$, *имеет место следующее соотношение*

$$(\overline{S_\Gamma} f)(t) = -(S_\Gamma f)(t) + (Tf)(t),$$

где T *– вполне непрерывный оператор.*

Действительно, в случае $\Gamma = \{\tau : |\tau| = 1\}$ это утверждение следует из равенства:

$$(\overline{S_\Gamma}f)(t) + (S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} f(\tau)\Big(\frac{d\tau}{\tau - t} - \frac{d\overline{\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Big(\frac{1}{\tau - t} - \frac{t}{\tau(\tau - t)}\Big) f(\tau)d\tau = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau}.$$

В силу леммы 3.3 в (3.7) заменив $\overline{S_\Gamma}$ на $-S_\Gamma$, согласно следствиям леммы 3.2 получим, что нетеровость оператора $A : L_p(\Gamma) \longrightarrow L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ из (3.5), равносильно нетеровости матричного оператора $U : L_p^2(\Gamma) \longrightarrow L_p^2(\Gamma)$:

$$(UF)(t) \equiv \lambda(t)F(t) + \mu(t)(S_\Gamma F)(t) + (TF)(t) = G(t), \qquad (3.8)$$

где

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -d(t) \\ \overline{d(t)} & -\overline{c(t)} \end{pmatrix},$$

$G = (g, \overline{g})$ – заданный вектор из пространства $L_p^2(\Gamma)$, $F = (f, \overline{f})$ – искомая вектор-функция из $L_p^2(\Gamma)$.

3.1.3. Алгебра сингулярных операторов с интегралами S_Γ и $\overline{S}_\Gamma$

Рассмотрим множество $\mathcal{R}$ всех операторов вида (3.8), действующие в векторном пространстве $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Покажем, что множество сингулярных операторов $\mathcal{R}$ представляет собой алгебру в $L_p^2(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Действительно, пусть $U_k \in \mathcal{R},\ k = 1, 2$, так что

$$U_k = \lambda_k I + \mu_k S_\Gamma + T_k,$$

тогда

$$U_1 + U_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)I + (\mu_1 + \mu_2)S_\Gamma + (T_1 + T_2), \tag{3.9}$$

и $U_1 + U_2 \in \mathcal{R}$. Далее

$$U_1U_2 = (\lambda_1 I + \mu_1 S_\Gamma + T_1)(\lambda_2 I + \mu_2 S_\Gamma + T_2) =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 I + \mu_1 S_\Gamma \mu_2 S_\Gamma + \lambda_1\mu_2 S_\Gamma + \mu_1 S_\Gamma \mu_2 + (T_1 + T_2).$$

Пользуясь следствием из леммы (3.1) и формулой Пуанкаре – Бертрана [5]

$$S_\Gamma^2 = I,$$

находим,

$$U_1U_2 = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)I + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)S_\Gamma + T. \tag{3.10}$$

Отсюда ясно, что $U_1U_2 \in \mathcal{R}$.

Из формул (3.9) и (3.10) следует, что алгебру операторов $\mathcal{R}$ можно привести в соответствие алгебры символов. Для этого сначала определим символ сингулярного интегрального оператора S_Γ . С этой целью достаточно рассмотреть сингулярный интеграл на вещественной оси, т.е.

$$(S_R f)(x) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{y-x}dy = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{sign(y-x)}{|y-x|}f(y)dy.$$

Оператору S_R сопоставим, в качестве символа, преобразование Фурье его ядра $(FK)(x)$, где

$$K(x) = \frac{1}{\pi i}\frac{sign x}{|x|}.$$

Вычислим $(FK)(y)$:

$$(FK)(y) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi i}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\Big)\frac{e^{ixy}}{x}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ixy} - e^{-ixy}}{x} dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin xy}{x} dx = \frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(x|y|) \cdot signy}{x|y|} d(x|y|) =$$

$$= \frac{2}{\pi i} signy \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = signy.$$

Итак, символ сингулярного оператора S_Γ равен Θ, которое обозначает независимую переменную, принимающую только два значения $+1$ и -1:

$$\Theta = signy = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \text{y}>0, \\ -1, & \text{если} \quad \text{y}<0, \end{cases}$$

так, что $\Theta^2 = 1$.

Теперь, любому оператору вида (3.8) из алгебры $\mathcal{R}$, приведем в соответствие символ матрицу-функцию

$$\Phi_U(t, \Theta) = \lambda(t) + \mu(t)\Theta. \tag{3.11}$$

Тогда $\Phi_I(t, \Theta) \equiv 1$ и

$$\Phi_{U_1+U_2}(t, \Theta) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + [\mu_1(t) + \mu_2(t)]\Theta = \Phi_{U_1}(t, \Theta) + \Phi_{U_2}(t, \Theta);$$

$$\Phi_{U_1U_2}(t, \Theta) = \lambda_1(t)\lambda_2(t) + \mu_1(t)\mu_2(t) + [\lambda_1(t)\mu_2(t)+$$

$$+\lambda_2(t)\mu_1(t)]\Theta = \Phi_{U_1}(t, \Theta)\Phi_{U_2}(t, \Theta).$$

Отсюда следует, что матрица-функция (3.11) составляет алгебру, которую обозначим через $\mathcal{M}$. Между алгебрами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ можно установить гомоморфное соответствие, так, что каждому оператору $U \in \mathcal{R}$, приводится в соответствие одна и только одна матрица-функция $\Phi_U(t,\Theta) \in \mathcal{R}$ и каждой функции из $\mathcal{M}$ соответствует хотя бы один оператор из $\mathcal{R}$, при этом вполне непрерывному оператору из $L_p^2(\Gamma)$ соответствует матрица-функция, равная нулю тождественно.

Из сказанного выше следует, что к операторам U из алгебры $\mathcal{R}$ (одновременно по лемме 3.1 к операторам A из (3.5)) применима теорема Михлина ([32] с.121). По этой теореме для нетеровости оператора A из $L_p^2(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы его символ $\Phi_U(t,\Theta)$ невырождался, т.е. при любом $t\in\Gamma$ и $\Theta=\pm1$, $\det\Phi_U(t,\Theta)\neq 0$. Иначе говоря,

$$\det(\lambda(t)\pm\mu(t))\neq 0 \quad \text{для любых } t\in\Gamma.$$

Так как $\det(\lambda(t)-\mu(t))=\Delta(t)$ и $\det(\lambda(t)+\mu(t))=\overline{\Delta(t)}$, то условие нетеровости оператора A, примет вид

$$\Delta(t)\equiv\big(a(t)-c(t)\big)\big(\overline{a(t)}+\overline{c(t)}\big)-\big(b(t)+d(t)\big)\big(\overline{b(t)}-\overline{d(t)}\big)\neq 0 \quad \forall t\in\Gamma.$$

Итак, нами доказана

Теорема 3.2. *Для нетеровости оператора* A *из* (3.5) *в пространствах* $L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Delta(t)\equiv\big(a(t)-c(t)\big)\big(\overline{a(t)}+\overline{c(t)}\big)-\big(b(t)+d(t)\big)\big(\overline{b(t)}-\overline{d(t)}\big)\neq 0 \quad \forall t\in\Gamma. \quad (3.12)$$

При выполнении условия (3.12), *индекс оператора* A, *равен*

$$\varkappa = 2Ind_\Gamma\Delta(t).$$

3.1.4. Обобщение результатов

Полученные в пунктах 3.1.1 – 3.3.3 результаты можно обобщить в системе сингулярных интегральных уравнений Коши. В банаховом пространстве $L_p^n(\Gamma)$, которая состоит из n - мерных векторов $f = (f_1, f_2, \cdots f_n)$ с компонентами $f_k, k = 1, 2, \cdots, n$ из пространства $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ с нормой

$$||f||_{L_p^n} = \max_{1 \le k \le n} ||f_k||_{L_p}$$

рассмотрим следующий оператор

$$(\mathcal{A}f)(t) \equiv a(t)f(t) + b(t)\overline{f(t)} + \frac{c(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau -$$

$$-\frac{d(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (Tf)(t) = g(t), \tag{3.13}$$

где a, b, c, d – заданные $n \times n$ мерные матрицы-функции с непрерывными на Γ элементами, $g(t)$ – заданная функция из пространства $L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$.

Через $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ обозначим $2n \times 2n$ – мерные блочные матрицы

$$\lambda(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad \mu(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -d(t) \\ \overline{d(t)} & -\overline{c(t)} \end{pmatrix}.$$

Имеет место

Теорема 3.3. *Для нетеровости оператора $\mathcal{A}$ из (3.13) в пространствах $L_p^n(\Gamma)$; $(1 < p < \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$det\big(\lambda(t) \pm \mu(t)\big) \neq 0 \quad \forall t \in \Gamma. \tag{3.14}$$

При выполнении (3.14) индекс оператора A, равен

$$\varkappa = Ind_{\Gamma}\frac{det\big(\lambda(t) - \mu(t)\big)}{\det\big(\lambda(t) + \mu(t)\big)}.$$

§ 3.2. Применение к краевым задачам для аналитических функций

В этом параграфе мы применяем полученные выше результаты для сингулярных интегральных уравнений (3.5) к общей задаче сопряжения для аналитических функций.

Пусть Γ – замкнутая кривая Ляпунова, делящая плоскость комплексного перменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^-.

Постановка задачи сопряжения. *Найти две функции* $\Phi^+(z)$ *– аналитическую в области* D^+, *и* $\Phi^-(z)$ *– аналитическую в области* D^- *представимые в виде интеграла типа Коши, такие, что почти всюду их граничные значения* $\Phi^+(t)$ *и* $\Phi^-(t)$ *на* Γ, *существуют и удовлетворяют условию*

$$a(t)\Phi^+(t) + b(t)\overline{\Phi^+(t)} = c(t)\Phi^-(t) + d(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad \Phi^-(\infty) = 0, \tag{3.15}$$

где $a(t), b(t), c(t), d(t)$ *– заданные в* Γ *непрерывные функции.*

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{3.16}$$

где $f(\tau) \in L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$. Тогда почти во всех точках $t \in \Gamma$, граничные значения интеграла при стремлении точки z к точке t, существуют:

$$\Phi_+(t) = \lim_{\substack{z\to t \\ z\in D_+}} \Phi(z), \quad \Phi_-(t) = \lim_{\substack{z\to t \\ z\in D_-}} \Phi(z)$$

и выражаются с помощью формул Сохоцкого–Племеля

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}\Big((If)(t) + (S_\Gamma f)(t)\Big), \tag{3.17}$$

$$\Phi^-(t) = \frac{1}{2}\Big(-(If)(t) + (S_\Gamma f)(t)\Big) \tag{3.18}$$

и принадлежат пространству $L_p(\Gamma)$. Отсюда следует, что

$$f(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \quad (Sf)(t) = \Phi^+(t) + \Phi^-(t). \tag{3.19}$$

Подставляя значения (3.17) – (3.19) - в задачу (3.15) получим, что данная задача эквивалентна сингулярному интегральному уравнению, вида (3.5):

$$(Af)(t) = a_1(t)f(t) + b_1(t)\overline{f(t)} + \frac{c_1(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau -$$

$$-\frac{d_1(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\overline{f(\tau)}}{\overline{\tau} - \overline{t}}d\overline{\tau} + (Tf)(t) = g(t) \tag{3.20}$$

с коэффициентами

$$a_1(t) = a(t) + c(t),\ b_1(t) = b(t) + d(t),$$

$$c_1(t) = a(t) - c(t),\ d_1(t) = b(t) - d(t).$$

Применяя к (3.20) теорему 3.2, получим

Теорема 3.4. *Пусть в задаче* (3.15) *коэффициенты* $a(t),\ b(t),\ c(t),\ d(t)$ *являются на* Γ *непрерывными функциями. Тогда для нетеровости задачи (3.15) в классе функции, представимых в виде интеграла типа Коши* $\Phi^{\pm}(t) \in L_p(\Gamma)(1 < p < \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)} \neq 0, \quad \forall t \in \Gamma. \tag{3.21}$$

При этом условии задачи равна

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\Big(\overline{a(t)}c(t) - b(t)\overline{d(t)}\Big).$$

Литература

[1] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции /И.Н. Векуа// М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[2] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям /Л. Альфорс// М.: Мир. 1969.

[3] Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конформном отображении /М. Шиффер// В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. - 1962, с. 193-218.

[4] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций /Б.В.Боярский// Дисс. докт. физ.-мат. наук. М. 1960.

[5] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области /А.Д.Джураев// ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[6] Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа /А.Д. Джураев // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[7] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений /А.Д.Джураев// М.: Наука, 1997, 415 с.

[8] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений /В.Н. Монахов// Новосибирск: Наука. 1977, 424 с.

[9] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I.II: the half-spase case /R.Duduchava// J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76, 199-214

[10] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения /И.И.Комяк// Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[11] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений /И.И.Комяк// Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[12] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк// ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[13] Василевский Н.Л. Об алгебре, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами /Н.Л. Василевский // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.- с. 1041-1044.

[14] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I /Н.Л.Василевский// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[15] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II./Н.Л.Василевский// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[16] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах /Г. Джангибеков// Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[17] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами /Г. Джангибеков// Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25-37.

[18] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости /Г. Джангибеков// Док. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[19] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе /К.Х.Бойматов, Г.Джангибеков// Успехи математических наук, 1988, .т.43, вып.8, с. 171-172.

[20] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах со сдвигом // Математические заметки, 1991, т. 49, в. 4, с. 150 Ц 152,

[21] Джангибеков Г. Об алгебре, порожденной поли-керн операторами со сдвигом// ДАН РТ 1991, т. 34, №4, с. 399 – 403.

[22] Джангибеков Г. Об алгебре, порожденной поли-керн операторами со сдвигом//ДАН РТ 1991, т. 34, №9, с.545 – 550.

[23] Дудучава Р.В.,Сагинашвили А.И.,Шаргородский Е.М. О двумерных сингулярных операторах со сдвигом// Труды Тбилисского Математического института им. А.Размадзе, 1995, т. 103, с. 3 – 13.

[24] Duduchava R., Saginashvili A., Shargorodsky E. On two-dimensional singular integral operators with conformal Carleman shift.// Jornal Operator Theory, 1997, v. 37, pp. 263 – 279.

[25] Мозель В.А. Банахова алгебра, порожденная конечным числом поликерн-операторов Бергмана, непрерывными коэффициентами и конечными группами циклов.// Укр.мат. журн., 2010, т. 62, №9, с. 1247 – 1255.

[26] Симоненко И.Б.. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений //Изв. АН СССР. сер. матем., 1965, т. 29, №3, №4, с. 567 – 580, 757 – 782.,

[27] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области //Доклады РАН, 2002, т 383, №1, с. 7 – 9.

[28] Джангибеков Г., Савлатов Ф. О поликерн-функциях ограниченной области и их связь с сингулярными интегральными операторами //Вестник филиала МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Душанбе, 2018, №1, с. 11 – 40.

[29] Михайлов Л.Г. Общая краевая задача о бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей //Изв. высших учебный заведений. Математика. 1960, №5, с. 99 – 109.

[30] Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами // Душанбе, 1963, с. 183.

[31] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве М. 1971, 103 с.

[32] Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 431 с.

[33] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного /Г.М.Голузин// М.: Наука, 1966. 626 с.

[34] Литвинчук Г.С. Краевые задач и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977, 448 с.

[35] Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теории одномерных сингулярных интегральных операторовю. Кишинев. Штиница, 1973, 426 с.

[36] Бильман Б.М., Джангибеков Г. О некоторых системах двумерных сингулярных интегральных уравнений //ДАН СССР, 1991, т 318, №5, с. 1033 – 1037.

[37] Bergman S. Uber die Entwining der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Math.Ann., 1922, v. 86, pp.238 – 271.

[38] Bergman S. The Kernel Funktion and Conformal Mapping. 1970, Math. Surveys. v.5, Am.Math.Soc. N.Y.

[39] Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М. ИЛ, 1953, 310 с.

[40] Кошелев А.Д. О керн-функции гильбертова пространства функций, полианалитических в круге. ДАН СССР, 1977, т. 232, №2, с. 277 – 279.

[41] Джангибеков Г. Формула обращения для одного двумерного сингулярного интегрального уравнения. Доклады АН ТаджССР, 1984, т. 27, №5, с. 243 – 248.

[42] Долженко Е.П. О граничном поведении компонент полианалитической функции. Доклады РАН, 1994, т.338, No 5, с. 585 – 588.

[43] Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: ФЛ, 1962, 254 с.

[44] Комяк И.И. Об условиях нетеровости и формуле для индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН БССР, 1979, т. 23, №1, с. 8 – 11.

[45] Нетер Ф. Uber eine Klasse singularer Integralgleichungen. Math. Ann., 82. 1921. p. 42–63.

[46] Карлеман Т. Sur la resolution deertaines equalions integrales. Arkiv for mat. astr. och fus., Bd. 16. №26. 1922. p. 1 – 19.

[47] Трикоми Ф. Ж. Formula de inversione delordine di due itegralione doppie "con asterisko" Rend. Accad. Naz. Lincei. – 3. ser. 6a. fasc. 9. 1926. p. 535 – 539.

[48] Трикоми Ф. Ж. Equazioni integrali contenti it valou principali di un integrale doppio. Math. Zeit. – 1928. B. 27. p. 87 – 133.

[49] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз. 1962. 511 с.

[50] Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963, 639 с.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В изданиях из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// ДАН РТ, 2018, т.61, №1, с. 19 – 26.

[2-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. О разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому контуру [Текст] /Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Вестник ТНУ, 2020, Серия естественных наук, №3, с. 46 – 52.

[3-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. Об алгебре некоторых двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А. // Доклады НАНТ, 2020, т.63, №11-12, с. 695 – 705.

[4-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. Об одной алгебре двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой со сдвигом [Текст] / Эшонкулов А.А. // Известия НАНТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2021, №4, с. 34 – 41.

В других изданиях:

[5-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 90-летию акад. АН РТ Л.Г.Михайлова, ”Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций” (Душанбе, 27 – 28 февраля 2018 г.) – С.68 – 71.

[6-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. О разрешимости одного класса сингулярных интегральных уравнений Коши по замкнутому контуру [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 80-летию профессора Б.Имомназарова, ”Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10 – 11 июня 2019 г.) – С.63 – 66.

[7-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. Об одном классе систем двумерных сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции ”Современные проблемы математики и ее приложения” (Филиал Московского государственного университета в г.Душанбе им. М.В.Ломоносова, Душанбе, 2019 г.)

[8-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. О разрешимости некоторых сингулярных интегральных операторов с сдвигом [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию доктора физ.-мат. наук, профессора Г.Джангибекова, ”Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30 – 31 января 2020 г.) – С. 115 – 117.

[9-А] ЭШОНКУЛОВ А.А. Об алгебре некоторых двумерных интегральных операторов с нечетной характеристикой [Текст] / Джангибеков Г., Эшонкулов А.А.// Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию доктора физ.-мат. наук, профессора К.Х.Бойматова, "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 25 – 26 декабря 2020 г). – С. 106 – 112.