Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

На правах рукописи

Фарайдунов Осим Косумшоевич

НЕКОТОРЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОСОБЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик АН Республики Таджикистан,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 9

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Актуальность темы. При исследовании определённого круга инженерных задач, связанных с механикой деформируемого тела, механикой жидкости газа, технической механикой, решением сингулярных интегральных уравнений и т.д. возникает необходимость в вычислении интегралов от функции одной и двух переменных. Поскольку в подавляющем большинстве случаев полученные интегралы невозможно выразить через элементарные функции, то их вычисляют приближённо, а значит существует оптимизационная проблема, связанная с выбором наилучшего метода приближённого интегрирования согласно выбранному критерию оптимальности. Постановка задач, связанных с построением наилучших (оптимальных) квадратурных формул, была сформулирована в 40-х годах двадцатого столетия А.Н.Колмогоровым, а первые результаты по оптимизации квадратурных формул были опубликованы в 50-х годах С.М.Никольским. Дальнейшие результаты в этом направлении исследований были получены в работах Н.П.Корнейчука [10], В.П.Моторного [19], Н.Е.Лушпая [17, 18], А.А.Лигуна [16], А.А.Женсыкбаева [9], Б.Д.Боянова [6], М.И.Левина [14, 15], В.Ф.Бабенко [2, 3], М.Ш.Шабозова [36] и многих других. Необходимо отметить, что оптимальные квадратурные формулы для соболевских классов функций с ограниченной по норме старшей производной в пространстве $L_p[a,b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$, как в периодическом, так и в непериодическом случаях, найдены в фундаментальных работах А.А.Женсыкбаева [9] и Б.Д.Боянова [6], а для классов функций, задаваемых с помощью дифференциального оператора r – го порядка К.И.Оскольковым [23].

Несмотря на ряд полученных окончательных результатов, благодаря усилиям перечисленных выше математиков, большое количество оптимизационных задач, особенно на классах функций нескольких переменных и сингулярных интегралов, до сих пор остаются нерешенными. Также недостаточно изучены и экстремальные задачи, связанные с особенностями на отрезке интегрирования. В указанных направлениях исследований известно намного меньше окончательных результатов, полученных А.Л.Кузминой [13], Л.А.Онеговым [22], В.А.Бойковым [5], М.Ш.Шабозовым [38]. Поэтому рассмотренные в диссертации задачи, связанные с оптимизацией приближённого интегрирования с весом на некоторых классах функций одной и двух переменных, являются актуальными.

Цель и задача исследования

1. Найти наилучшие квадратурные формулы с заданным весом для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси.

2. Найти наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова как для функций одной, так и для функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности.

3. Найти наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a,b]$ старшей производной.

4. Найти наилучшую кубатурную формулу для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q)$, $p \geq 1$.

Основные методы исследования. В работе используются современные методы функционального анализа, методы исследования экстремальных задач отыскания квадратурных и кубатурных формул, а также метод Н.П.Корнейчука [10] оценки снизу погрешности квадратур на классах функций, обращающих в нуль квадратурную сумму.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Найдены наилучшие квадратурные формулы с заданными весами для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси.

2. Найдены наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова для классов функций одной и двух переменных, задаваемых модулями непрерывности.

3. Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы для классов

функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a, b]$ старшей производной.

4. Найдена наилучшая кубатурная формула для класса $H^{\omega}(\rho_p, Q),\ p \geq 1$.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты по оптимизации квадратурных и кубатурных формул, полученные в диссертационной работе, имеют теоретическое и прикладное значение. Они могут быть использованы при приближённом вычислении как обыкновенных интегральных уравнений, так и сингулярных интегральных уравнений, оптимизации погрешности их решений на классах функций малой гладкости, поскольку именно на таких классах функций погрешности оптимальных квадратурных и кубатурных формул являются минимальными.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руко водством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2013-2019 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 80-летию члена–корреспондента АН Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Стеценко Владислава Яковлевича „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 75-летию доктора физико – математических наук, профессора Собирова Темура Сафаровича „Математический анализ, дифференциальные уравнения и тео рия чисел" (Душанбе, 29-30 октября 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);

- международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ, лаурета государственной премии имени Абуали Ибн Сино Михайлова Леонида Григорьевича „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции" (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.).

Публикации. Результаты автора по теме диссертационной работы опубликованы в 9 работах [26–34]. Из них 6 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 3 статьи в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 43 наименований, занимает 81 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе.

Краткое содержание работы

В первом параграфе первой главы приводится общая постановка экстремальной задачи отыскания наилучших весовых квадратурных формул, а также определение классов функций, рассматриваемых в дальнейшем.

Рассматривается квадратурная формула

$$\int_a^b q(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{0.0.1}$$

(где весовая функция $q(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$ может иметь особенности, но интегрируется в смысле главного значения Коши) $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ - вектор коэффициентов,

$$X = \{x_k : a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b\}$$

- вектор узлов, а $R_n(f) := R_n(f; q, P, X)$ - погрешность квадратурной формулы (0.0.1) на функции $f(x)$.

Если $\mathfrak{M} = \{f(x)\}$ - некоторый класс функций $f(x)$, заданных и определенных на конечном или бесконечном отрезке $[a, b]$, то через

$$R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) = \sup\{|R_n(f; q, P, X)| : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$
$$= \sup\left\{\left|\int\limits_a^b q(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\right| : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \qquad (0.0.2)$$

обозначим наибольшую допустимую погрешность квадратурной формулы (0.0.1) на классе функций $\mathfrak{M}$.

Если $\mathcal{A}$ - множество векторов узлов и коэффициентов, для которых квадратурная формула (0.0.1) имеет смысл, то требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = \inf\left\{R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) : \ (P, X) \subset \mathcal{A}\right\}. \qquad (0.0.3)$$

При этом, если существуют вектор (P^0, X^0) узлов и коэффициентов, для которых достигается нижняя грань в (0.0.3), то есть если

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M}; q) = R_n(\mathfrak{M}; q, P^0, X^0),$$

то квадратурная формула (0.0.1) называется *наилучшей* или *оптимальной* квадратурной формулой на классе $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского [20], а вектор (P^0, X^0) называется наилучшим вектором коэффициентов и узлов квадратурной формулы (0.0.1).

Иногда в число узлов квадратурной формулы (0.0.1) включают концы отрезка $[a, b]$, $x_0 = a, x_n = b$. При этом на вектор узлов налагают условие

$$X = \{x_k : \ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

обязательное включение концов отрезка в число узлов и тогда квадратурная формула (0.0.1) принимает вид

$$\int\limits_a^b q(x)f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f). \qquad (0.0.4)$$

Квадратурная формула (0.0.4) называется квадратурной формулой типа Маркова. В некоторых задачах приближенного вычисления интегралов, когда $f(a)$ и $f(b)$ заданы, формула (0.0.4) предпочтительнее, чем формула (0.0.1).

Приводим определение классов функций, для которых решение экстремальной задачи (0.0.3) для квадратурных формул (0.0.1) или (0.0.4)приведено в первой главе.

Класс $H^{\omega}[a,b]$ - множество кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x'') - f(x')| \leq \omega\left(|x'' - x'|\right), \quad \forall\, x', x'' \in [a,b],$$

где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, то есть неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0, b-a]$ функция, для которой $\omega(0) = 0$. При $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, класс $H^{\omega}[a,b]$ превращается в класс Гёльдера $H^{\alpha}[a,b]$:

$$|f(x'') - f(x')| \leq |x'' - x'|^{\alpha}, \quad \forall\, x', x'' \in [a,b],$$

а при $\alpha = 1$ имеем $H^1[a,b]$ - класс Липщица:

$$H^1[a,b] = \{f: \ |f(x'') - f(x')| \leq |x'' - x'|, \ x', x'' \in [a,b]\}.$$

Очевидно, что класс $H^1[a,b]$ совпадает с классом $W^1[a,b]$ - функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и имеющих кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, удовлетворяющую условию $\underset{a \leq x \leq b}{supvrai}|f'(x)| \leq 1$. Обозначим через

$$W^{(r)}H^{\omega}[a,b] \ (r = 0,1,2,\ldots; W^{(0)}H^{\omega}[a,b] \equiv H^{\omega}[a,b])$$

- множество функций $f(x) \in C^{(r-1)}[a,b]$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r)}(x)$, принадлежащая классу $H^{\omega}[a,b]$.
$W^{(r)}L_p[a,b], (r = 0,1,2,\ldots; \ W^{(r)}L_{\infty}[a,b] \equiv W^{(r)}[a,b], \ W^{(0)}L_p[a,b] \equiv L_p[a,b];$ $1 \leq p \leq \infty)$ - класс функций $f(x)$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывна, существует производная $f^{(r)}(x)$ порядка r, принадлежащая пространству $L_p[a,b]$ и удовлетворяющая условиям

$$\left\|f^{(r)}\right\|_p := \left\|f^{(r)}\right\|_{L_p} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq 1, \ 1 \leq p < \infty,$$

$$\left\|f^{(r)}\right\|_{\infty} := \left\|f^{(r)}\right\|_{L_{\infty}} = \underset{a\le x\le b}{supvrai}|f^{(r)}(x)| \le 1,\ p=\infty.$$

При отыскании оптимальных (наилучших) квадратурных формул для сингулярных интегралов в смысле главной значение по Коши и Адамара нам понадобится ещё следующий класс функций: пусть $c \in (a,b)$, где a и b – произвольные фиксированные действительные числа. Обозначим через $H^{(\alpha)}_{c,m}L\left(M;(a,b)\right)$ – множество функций $f(t)$, представимых в виде

$$f(t) = f(c) + |t-c|^{m-1+\alpha}sgn(t-c)\varphi(t),$$

где $m \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \le 1$, а $\varphi(t) \in W^{(1)}L\left(M;[a,b]\right)$ - класс функций, для которых

$$\|\varphi'\|_{L[a,b]} = \int\limits_a^b |\varphi^{'}(t)|dt \le M.$$

Во втором параграфе первой главы рассматривается задача отыскания наилучшей квадратурной формулы для сингулярного интеграла Адамара

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt, a<c<b, \tag{0.0.5}$$

где $m \in \mathbb{N}, m \ge 2$. Интеграл (0.0.5) понимается в смысле конечной части или главного значения в смысле Коши, то есть когда существует предел

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon}\frac{f(t)}{(t-c)^m}dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^b\frac{f(t)}{(t-c)^m}dt + \frac{\psi(c)}{\varepsilon^{m-1}}\right), \tag{0.0.6}$$

где функция $\psi(c)$ выбирается так, чтобы указанный предел справа в (0.0.6) существовал (см., например, [43]).

Для приближённого вычисления сингулярного интеграла (0.0.5) введём в рассмотрение квадратурную формулу следующего вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{(t-c)^m} = Af(c) + \sum_{k=1}^n p_k f(t_k) + R_n(f), \tag{0.0.7}$$

где c и $t_k : a \le t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_n \le b$ – различные узлы, A и p_k – коэффициенты, $R_n(f)$ – погрешность квадратурной формулы на функции f.

Всюду далее при условии точности квадратурной формулы (0.0.7) для функции $f(t) = 1$ потребуем выполнения равенства

$$A = \frac{1}{m-1}\left[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1}\right] - \sum_{k=1}^{n} p_k. \tag{0.0.8}$$

Таким образом, задача состоит в том, что при выполнении условия (0.0.8) требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n\left(W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)\right) = \inf_{(T,P)} R_n\left(W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b) : T, P\right). \tag{0.0.9}$$

Решение задачи (0.0.9) при выполнении условия (0.0.8) приводится к решению экстремальной задачи отыскания наилучшей весовой квадратурной формулы для класса $W^{(1)}L(M;a,b)$.

Отыскание наилучшей квадратурной формулы вида (0.0.7) для класса $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)$ при выполнении условии (0.0.8) сводится к отысканию наилучшей квадратурной формулы вида

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|t-c|^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} A_k\varphi(t_k) + R_n(\varphi) \tag{0.0.10}$$

с узлами $t_k \neq c$ $(k = \overline{1,n})$ на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$. Отметим, что рассмотренный сингулярный интеграл (0.0.5) в случае $m = 1$, то есть случай интеграл в смысле главного значения по Коши ранее по приведенной выше схеме подробно исследован А.Л.Кузьминой [13] и состоит в следующем:

Пусть теперь функция $q(t) \geqslant 0$ и интегрируема на $[a,b]$ имеет на концах отрезка особенности, а $\varphi \in W^{(1)}L(M;a,b)$. Требуется найти наилучшую весовую квадратурную формулу вида

$$\int\limits_a^b q(t)\varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(t_k) + R_n(\varphi), \tag{0.0.11}$$

которая задана векторами узлов

$$T = \{t_k : \ a \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \leq b\}$$

и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, остаточный член $R_n(\varphi) := R_n(\varphi; T, P)$ на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$. Решение этой последней задачи для различных областей интегрирования имеется в работах [8, 13], где доказывается, что единственной наилучшей на множестве $W^{(1)}L(M;a,b)$ квадратурной формулой вида (0.0.11) является формула

$$\int\limits_a^b q(t)\varphi(t)dt = \frac{\omega(a)}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(t_k) + R_n(\varphi), \qquad (0.0.12)$$

причём узлы t_k находятся как единственное решение системы уравнений

$$\omega(t_k) = \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)\omega(a), \quad k=\overline{1,n}, \quad \omega(t) = \int\limits_t^b q(u)du, \quad a \le t \le b, \quad (0.0.13)$$

где весовая функция может иметь на отрезке $[a,b]$ слабые особенности.

При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (0.0.12) на всём классе функций $W^{(1)}L(M;a,b)$ равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b),q\right) = \frac{M\omega(a)}{2n} = \frac{M}{2n}\int\limits_a^b q(t)dt. \qquad (0.0.14)$$

В частности, когда $q(t) = \dfrac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}$ $\big(0 < \alpha \le 1; a < c < b, c \ne t_k(k=\overline{1,n})\big)$, то, полагая

$$\omega(t) = \int\limits_t^b \frac{du}{|u-c|^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left[(b-c)^\alpha - |t-c|^\alpha sgn(t-c)\right], a \le t \le b, \quad (0.0.15)$$

для квадратурной формулы (0.0.10) получим следующее утверждение, являющееся одним из основных результатов второго параграфа первой главы.

Теорема 1.2.1. *Среди всевозможных квадратурных формул (0.0.10) точной для $\varphi(t) \equiv const$, наилучшей на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$ является формула с коэффициентами*

$$A_k = \frac{(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha}{\alpha n}, \ k=\overline{1,n}$$

и узлами t_k, являющаяся решениями системы уравнений

$$(b-c)^\alpha - |t_k-c|^\alpha sgn(t_k-c) =$$

$$= \left[(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha\right]\left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right), \ k=\overline{1,n}.$$

При этом

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b),\frac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}\right)=\frac{M\left[(b-c)^\alpha+(c-a)^\alpha\right]}{2\alpha n},\quad (0<\alpha\leqslant 1).$$

Замечание 1.2.1. Если в теореме 1.2.1 полагать $\alpha\equiv 1$, то $q\equiv 1$, то мы получаем

$$\mathcal{E}\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right)=\frac{M(b-a)}{2n}.$$

Заметим, что результат теоремы 1.2.1 остаётся справедливым и для сингулярного интеграла Адамара более общего вида

$$\mathcal{J}_\gamma(f,\tau)=\int\limits_a^b\frac{f(t)dt}{|t-\tau|^\gamma},\quad f\in W_c^{[\gamma]}H^{(\alpha)}L(M;a,b),$$

где $\gamma\in R_+(\gamma\geqslant 1)$ – произвольное число из положительной полуоси и, в отличие от предыдущих параграфов, может принимать и нецелые значения, а $[\gamma]$ – целая часть числа γ.

В качестве второго приложения квадратурной формулы (0.0.12) находим точную оценку погрешности квадратурной формулы следующего вида

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}p_kf(t_k)+R_n(f)\qquad(0.0.16)$$

на классе $W^{(1)}L(M;-1,1)$. Имеет место следующая

Теорема 1.2.2. *Единственной наилучшей на классе $W^{(1)}L(M;-1,1)$ квадратурной формулой вида (0.0.16), точной для $f(t)\equiv const$, имеет вид*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi\right)+R_n(f).\qquad(0.0.17)$$

Таким образом на всём классе функций $W^{(1)}L(M;-1,1)$ для точной оценки погрешности наилучшей формулы (1.2.17) справедливо оценка

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;-1,1),\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\frac{M\pi}{2n}.$$

Из утверждения теоремы 1.2.2 следует, что классическая квадратурная формула Эрмита – Чебышева не является наилучшей квадратурной формулой для класса функций $W^{(1)}L(M;[-1,1])$.

Следующие утверждения являются следствиями наилучших формул (0.0.13) и (0.0.14).

Теорема 1.2.3. *Среди всех формул вида*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f),$$

точной для $f(t) = const$, *наилучшей для класса* $W^{(1)}L(M;0,+\infty)$, *является формула*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(f). \qquad (0.0.18)$$

На всём классе погрешность формулы (0.0.18) равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;0,+\infty),\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{M\pi}{4n}.$$

В качестве третьего приложения формулы (0.0.12) приведём ещё одну квадратурную формулу. Требуется найти наилучшую квадратурную формулу для вычислении определённого интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Теорема 1.2.4. *Единственной наилучшей квадратурной формулой вида*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^{\alpha}} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f)$$

на классе $W^{(1)}L\left(M,-1,1\right)$, *точной для* $f(t) = const$, *является формула*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^{\alpha}} = \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right) + R_n(f). \qquad (0.0.19)$$

На всём классе $W^{(1)}L\,(M;-1,1)$ погрешность формулы (0.0.19) равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\,(M;-1,1)\,,\frac{1}{(1+t)^{\alpha}}\right)=\frac{M}{2^{\alpha}(1-\alpha)n},\quad(0<\alpha<1).$$

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.4 при $\alpha=\dfrac{1}{2}$ наилучшая квадратурная формула имеет вид*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1+t}}=\frac{2\sqrt{2}}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{2}-1\right)+R_n(f).$$

При этом

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\,(M;-1,1)\,,\frac{1}{(1+t)^{\alpha}}\right)=\frac{\sqrt{2}M}{n}.$$

Замечание 1.2.3. Отметим, что квадратурная формула (0.0.11) в случае $[a,b]=[0,+\infty)$ с узлами t_k, удовлетворяющими условиям (0.0.13), для класса $W^{(1)}L(M;0,+\infty)$ ранее была найдена в работе Ю.Гиршовича [8], а в случае конечного отрезка $[a,b]$ с весовой функцией $q(t)=\dfrac{1}{t-c}$, $(a<c<b)$ в работе А.Л.Кузьмина [13]. В работах [38, 39] для весовых функций, имеющих устранимые особенности на концах промежутка интегрирования, найдены наилучшие квадратурные формулы на классе функций $W^{(1)}L(M;a,b)$.

В третьем параграфе первой главы приведена задача нахождения точной оценки погрешности квадратурной формулы Эрмита – Чебышева

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+R_n(f),$$

рассмотренной нами в предыдущем параграфе, и доказывается, что она является наилучшей квадратурной формулой для класса функций $H^{\omega}[-1,1]$. Сначала приведём некоторые результаты для квадратурной формулы Эрмита – Чебышева – Маркова следующего вида

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=p_0f(-1)+\sum_{k=1}^{n-1}p_kf(t_k)+p_nf(1)+R_n\left(f,\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right),\quad(0.0.20)$$

задаваемой векторами $(T;P)$ узлов

$$T=\left\{t_k:\ -1=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=1\right\}$$

и коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=0}^{n}$. Таким образом, мы изучаем задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (0.0.20), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка интегрирования: $t_0=-1$ и $t_n=1$, а узлы $t_1,t_2,...,t_{n-1}$ и коэффициенты $p_0,p_1,...,p_n$ следует выбрать оптимальным образом. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.3.1. *Среди всех квадратурных формул вида (0.0.20) наилучшей на классе $H^{\omega}[-1,1]$ является квадратурная формула*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\left\{\frac{f(-1)+f(1)}{2}+\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\}+$$

$$+R_n\left(f,\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right). \tag{0.0.21}$$

Для оценки погрешности формулы (0.0.21) на всём классе функций $H^{\omega}[-1,1]$ справедливо равенство

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=2n\int\limits_{0}^{\pi/(2n)}\omega(t)dt.$$

В частности, отсюда для класса Гёльдера $H^{\alpha}[-1,1]$ $(0<\alpha\le 1)$ имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\alpha}[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\frac{\pi^{\alpha+1}}{2^{\alpha}(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

При $\alpha=1$ для класса Липшица $H^{1}[-1,1]$ получаем

$$\mathscr{E}_n\left(H^{1}[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\frac{\pi^2}{4n}.$$

Задача нахождения наилучшей квадратурной формулы вида (0.0.21) для заданных классов функций на отрезке $[-1,1]$ при помощи замены переменной $t=\cos\tau$ приводит к отысканию наилучшей квадратурной формулы вида Маркова

$$\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(t)dt=p_0\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n-1}p_k\varphi(t_k)+p_n\varphi(\pi)+R_n(\varphi)$$

на соответствующем классе функций, определённых на $[0, \pi]$.

Пусть $H_2^\omega[a, b]$ — класс функций f, определённых на отрезке $[a, b]$ и для любых точек $\tau, \tau \pm x \in [a, b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(\tau + x) + f(\tau - x) - 2f(\tau)| \le 2\omega(|x|).$$

Очевидно, что $H^\omega[0, \pi] \subset H_2^\omega[0, \pi]$, то есть класс $H_2^\omega[0, \pi]$ шире, чем класс $H^\omega[0, \pi]$. Имеет место следующая

Теорема 1.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида*

$$\int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau = p_0\varphi(0) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k\varphi(\tau_k) + p_n\varphi(\pi) + R_n(\varphi)$$

наилучшей на классе $H_2^\omega[0, \pi]$ является квадратурная формула трапеций

$$\int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau = \frac{\pi}{n}\left\{\frac{\varphi(0) + \varphi(\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n(\varphi).$$

При этом

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[0, \pi]\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau.$$

Из теоремы 1.3.2 вытекает следующее

Следствие 1.3.1. *Для точной оценки погрешности квадратурной формулы типа Маркова (0.0.21) на всём классе $H_2^\omega[-1; 1]$ справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1, 1], \left(\sqrt{1 - t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau.$$

Заметим, что между классами $H^\omega[-1, 1]$ и $H_2^\omega[-1, 1]$ можно определить промежуточный класс $H_{2-\alpha}^\omega[-1, 1] (0 \le \alpha \le 1)$ функций $f(x)$, определённых на отрезке $[-1, 1]$ и для любых точек $x, x \pm t \in [-1, 1]$ удовлетворяющих условию

$$|(1 + \alpha)f(x + t) + (1 - \alpha)f(x - t) - 2f(x)| \le 2\omega(|t|). \tag{0.0.22}$$

Таким образом, из (0.0.22) при $\alpha = 1$ следует неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \le \omega(|t|), \tag{0.0.23}$$

а при $\alpha = 0$ следующее неравенство

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \le 2\omega(|t|). \tag{0.0.24}$$

Из (0.0.23) и (0.0.24) вытекает включение

$$H^\omega[-1,1] \subset H^\omega_{2-\alpha}[-1,1] \subset H^\omega_2[-1,1]. \tag{0.0.25}$$

Имеет место следующая

Теорема 1.3.3. *Среди всевозможных квадратурных формул типа Маркова (0.0.20) единственной наилучшей формулой на классе функций* $H^\omega_{2-\alpha}[-1,1]$ *при любых* α $(0 \le \alpha \le 1)$ *является формула (0.0.21). При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (0.0.21) на всем классе* $H^\omega_{2-\alpha}[-1,1]$ *равна*

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega_{2-\alpha}[-1,1]\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt.$$

Рассмотрим теперь квадратурную формулу общего вида

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right), \tag{0.0.26}$$

задаваемую произвольными векторами узлов

$$T = \{t_k : \ -1 \le t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n \le 1\}$$

и коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)$ — погрешность формулы на функции f. Требуется найти наилучшую весовую квадратурную формулу вида (0.0.26) для класса $H^\omega[-1,1]$. Поступая как и выше, при помощи замены

$$t = \cos\tau, \ -1 \le t \le 1, \ 0 \le \tau \le \pi, \ \varphi(\tau) = f(\cos\tau)$$

и равенств

$$t_k = \cos\tau_k, \quad 0 \le \tau_k \le \pi, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

вместо формулы (0.0.26) вводим в рассмотрение квадратурную формулу

$$\int\limits_0^{\pi} \varphi(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{n} p_k \varphi(\tau_k) + R_n(\varphi).$$

Очевидно, что и в этом случае имеют место соотношения

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[-1,1]; \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = \mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right)$$

и

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^{\omega}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \equiv \mathscr{E}_n\left(H_2[0,\pi]\right).$$

Теорема 1.3.4. *Для классов $H^{\omega}[-1,1]$ и $H_2^{\omega}[-1,1]$ наилучшая квадратурная формула вида (0.0.26) является классическая квадратурная формула Эрмита-Чебышёва*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right). \qquad (0.0.27)$$

Точная оценка погрешности формулы (0.0.27) на вышеуказанных классах функций равна

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \mathscr{E}_n\left(H_2^{\omega}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau.$$

В четвертом параграфе первой главы мы дадим приложение теорем 1.2.2 и 1.3.1 к более общему сингулярному интегралу

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}} u(x)dx, \qquad (0.0.28)$$

имеющему сингулярности как в центре круга $r=0$, так и на границе круга $r=\pm 1$. Отметим, что необходимое условие существования как двумерного сингулярного интеграла следующего вида

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r^2} u(x)dx, \quad r = r(0,x),$$

так и интеграла (0.0.28) является выполнение условия

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0. \tag{0.0.29}$$

Переходя к полярным координатам, интеграл (0.0.28) приводим к следующему виду

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx = \begin{vmatrix} x_1 = r\cos\theta, & 0 \le r \le 1, & dx = rdrd\theta \\ x_2 = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, & r = x_1^2 + x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)u(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta}{r\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{0.0.30}$$

где положено

$$F_u(r) = \int_0^{2\pi} f(\theta)u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta,$$

причем

$$F_u(0) = \int_0^{2\pi} f(\theta)u(0,0)d\theta = u(0,0)\cdot\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0. \tag{0.0.31}$$

Обозначим через $W_0^{(1)}(M;S)$ класс функций $u(x_1,x_2)$ и непрерывных в круге S и удовлетворяющих условию $F_u(r) \in W_0^{(1)}(M;0,1)$. Аналогичным образом класс $H^\omega(S)$ – функций $u(x_1,x_2) \subset C(S)$ таких, для которых $F_u(r) \in H^\omega[0,1]$.

Для нахождения наилучшей квадратурной формулы для сингулярного интеграла (0.0.28), исходя из интеграла, стоящего в первой части равенства (0.0.30), введём в рассмотрение квадратурную формулу

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sum_{k=1}^n p_k F_u(r_k) + R_n(F_u), \tag{0.0.32}$$

которая задана векторами узлов $X = \{r_k\}_{k=1}^n$, $(0 < r_1 < ... < r_n < 1)$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n(F_u) = R_n(F_u; X, P)$ - погрешность формулы (0.0.32).

Применяя формулы (0.0.12) и (0.0.13) нахождения наилучших весовых квадратурных формул к формуле (0.0.31), приходим к следующему утверждению

Теорема 1.4.1 *Среди всевозможных кубатурных формул вида (0.0.32) наилучшей для класса функций $W_0^{(1)}(M;S)$ является формула*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} p_k F_u\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(F_u). \tag{0.0.33}$$

При этом для погрешности наилучшей кубатурной формулы (0.0.33) на всём классе функций $W_0^{(1)}(M;S)$ справедлива точная оценка

$$\mathcal{E}\big(W_0^{(1)}(M;S)\big) = \frac{\pi M}{4n}.$$

Аналогичным образом, применяя теорему 1.3.1 к формуле (0.0.32), приходим к следующей теореме

Теорема 1.4.2 *Для класса функций $H^{\omega}(S)$ наилучшей формула вида (0.0.32) является*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left\{\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n\left(f;\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right). \tag{0.0.34}$$

Оценка погрешности формулы (0.0.34) на всём классе функций $H^{\omega}(S)$ равна

$$\mathscr{E}_n\big(H^{\omega}(S)\big) = \mathscr{E}\big(H^{\omega}[0,1]\big) = n\int\limits_0^{\pi/n} \omega(t)dt.$$

Отсюда для класса Гёльдера $H^{\alpha}[0,1]$ $(0<\alpha\le 1)$ имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\alpha}(S);\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}\ (0<\alpha\le 1).$$

При $\alpha=1$, для класса Липщица имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H^{1}(S);\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi^2}{2n}.$$

В первом параграфе второй главы приводится обобщение результатов третьего параграфа первой главы на двумерного случая.

Для функции $f(x,y)$, заданной и интегрируемой на прямоугольнике $Q = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, рассмотрим кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki}f(x_k,y_i) + R_{mn}(f;q), \qquad (0.0.35)$$

определяемую вектором $(X,Y;P)$ узлов

$$X := \{x_k : a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b\},$$

$$Y := \{y_i : c = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = d\}$$

и коэффициентов $P = \{p_{ki}\}_{k=0,i=0}^{m,n}$, а неотрицательная весовая функция $q(x,y)$ интегрируема хотя бы в несобственном смысле Римана в области $Q, R_{mn}(f,q) = R_{mn}(f;q;X,Y;P)$ – погрешность формулы (0.0.35) на функцию f. Точки прямоугольника Q иногда обозначим через $M = M(x,y)$, а узлы решётки через $M_{kl} := M(x_k,y_l)$ $(k = \overline{0,m};\ l = \overline{0,n})$.

Всюду далее введём в рассмотрении векторов узлов и коэффициентов $(X,Y;P)$, для которых кубатурная формула (0.0.35) имеет смысл, то есть только те векторов $(X,Y;P)$ для которых значение интеграла в левой части (0.0.35) приближённо равно кубатурной сумме стоящей в правой части равенства (0.0.35).

Напомним общую постановку экстремальной задачи отыскания наилучших или оптимальных весовых кубатурных формул в смысле С.М.Никольского [20, с.176]. В сущности, это постановка такая же, как в одномерном случае, но, ради полноты изложения, приводим указанную постановку для функции двух переменных, интегрируемых с весом $q(x,y)$.

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс заданных и определённых в области Q функций $\{f\}$, то положим

$$R_{mn}(\mathfrak{M};q;X,Y;P) = \sup\{|R_{mn}(f;q;X,Y;P)| : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M};q) := \inf\{R_{mn}(\mathfrak{M};q;X,Y;P) : (X,Y;P)\} \tag{0.0.36}$$

и указать вектор узлов и коэффициентов $(X^0, Y^0; P^0)$ $(X^0 = \{x_k^0\}, Y^0 = \{y_i^0\}$, $P^0 = \{p_{ki}^0\})$, на котором реализуется нижняя грань в (0.0.36), то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M};q) := R_{mn}(\mathfrak{M};q;X^0,Y^0;P^0).$$

Кубатурная формула (0.0.35) с решёткой узлов $M_{ki}^0 = (x_k^0, y_i^0)$ и коэффициентов p_{ki} даёт наименьшую на всем классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди кубатурных формул вида (0.0.35), и в этом смысле является *наилучшей* или *оптимальной* для класса функций $\mathfrak{M}$.

Отметим, что наилучшие весовые квадратурные и кубатурные формулы для некоторых классов функций найдены в работах [8,13,22,36,38]. Приведём определение классов функций двух переменных, для которых решим задачу (0.0.36) для конкретных весовых функций.

Обозначим через $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ – класс определённых на прямоугольнике $Q := \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ функций $f(x,y)$, для любых точек $(x',y'),(x'',y'') \in Q$ удовлетворяющих условию

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| \le \omega_1(|x'-x''|) + \omega_2(|y'-y''|), \tag{0.0.37}$$

где $\omega_1(t), \omega_2(t)$ – заданные модули непрерывности, то есть непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$0 \le \omega_1(t'') - \omega_1(t') \le \omega_1(t''-t'),\ \ 0 \le t' \le t'' \le b-a,\ \omega_1(0) = 0,$$

$$0 \le \omega_2(\tau') - \omega_2(\tau'') \le \omega_2(\tau''-\tau'),\ \ 0 \le \tau' \le \tau'' \le d-c,\ \omega_2(0) = 0.$$

Параллельно будем рассматривать класс $H^{\omega}(\rho_p, Q)$ функций $f(x,y)$, заданных и непрерывных на Q и таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega\left[\rho_p(M',M'')\right], \tag{0.0.38}$$

где $\rho_p(M',M'')$ – l_p $(1 \le p < \infty)$ - расстояние между точками $M'(x',y')$ и $M''(x'',y'')$ из Q:

$$\rho_p(M',M'') = \sqrt[p]{|x'-x''|^p + |y'-y''|^p}\ \ (1 \le p < \infty),$$

а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0 \le t \le \sqrt[p]{(b-a)^p+(d-c)^p}$, $(1 \le p < \infty)$ модуль непрерывности. Сформулируем основной результат данного параграфа в виде следующего утверждения

Теорема 2.1.1. *Пусть в области $Q = \{-1 \le x, y \le 1\}$ задана весовая функция $q(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, интегрируемая в несобственном смысле.*

Тогда среди всех кубатурных формул вида (0.0.35) наилучшей для классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \le p < \infty)$ является обобщённая формула трапеций следующего вида

$$\iint\limits_{(Q)} \frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{mn}\Big\{\frac{1}{4}[f(-1,-1)+f(-1,1)+f(1,-1)+f(1,1)]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f\left(-1,\cos\frac{i\pi}{n}\right)+f\left(1,\cos\frac{i\pi}{n}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\cos\frac{k\pi}{m},-1\right)+f\left(\cos\frac{k\pi}{m},1\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{m},\cos\frac{i\pi}{n}\right)\Big\}+R_{mn}(f,q). \tag{0.0.39}$$

При этом точная оценка погрешности наилучшей кубатурной формулы (0.0.39) на указанных классах функций равна

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega_1,\omega_2}(Q),q\right) = 2\pi m \int\limits_0^{\pi/(2m)} \omega_1(t)dt + 2\pi n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(\tau)d\tau, \tag{0.0.40}$$

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p Q),q\right) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \tag{0.0.41}$$

Из теоремы 2.1.1 вытекает

Следствие 2.1.1. *Для класса $H^{\omega}(\rho_p, G)$ в условиях теоремы 2.1.1 при $p=\infty$ и $p=1$ соответственно справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}\big(H^{\omega}(\rho_\infty, G)\big) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \max\{\omega(t), \omega(\tau)\} dt d\tau, \tag{0.0.42}$$

$$\mathcal{E}_{mn}\big(H^{\omega}(\rho_1, G)\big) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t+\tau) dt d\tau =$$

$$= 4mn \begin{cases} \int\limits_0^{\pi/(2m)} t\omega(t)dt + \dfrac{\pi}{2m} \int\limits_{\pi/(2m)}^{\pi/(2n)} \omega(t)dt + \int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/(2n)+\pi/(2m)} \left(\dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{\pi}{2m} - t\right) \omega(t)dt, \quad n<m; \\ \int\limits_0^{\pi/(2n)} t\omega(t)dt + \dfrac{\pi}{2n} \int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/(2m)} \omega(t)dt + \int\limits_{\pi/2m}^{\pi/(2m)+\pi/(2n)} \left(\dfrac{\pi}{2m} + \dfrac{\pi}{2n} - t\right) \omega(t)dt, \quad n>m; \\ \int\limits_0^{\pi/(2n)} t\omega(t)dt + \int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi/n} \left(\dfrac{\pi}{n} - t\right) \omega(t)dt, \quad m=n. \end{cases} \tag{0.0.43}$$

В частности, если $\omega(t) = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$, то есть для класса Гёльдера из (0.0.31) и (0.0.32) получаем

$$\mathcal{E}_{mn}\big(H^{\omega}(\rho_\infty, G)\big) = \frac{4\pi^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}} \max\left\{\frac{n}{m^{\alpha}}, \frac{m}{n^{\alpha}}\right\},$$

$$\mathcal{E}_{mn}\big(H^{\omega}(\rho_1, G)\big) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2n)} \int\limits_0^{\pi/(2m)} (t+\tau)^{\alpha} dt d\tau =$$

$$= \frac{4mn}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha+2}\right].$$

Пусть $\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ - классы функций $f(x,y)$, определённых в квадрате $Q = \{-1 \le x, y \le 1\}$, для которых в точках $(x,y) \in Q$ и $(x \pm t, y \pm \tau) \in Q$ выражение

$$|f(x+t, y+\tau) + f(x+t, y-\tau) + f(x-t, y+\tau) + f(x-t, y-\tau) - 4f(x,y)|$$

не превосходит $4[\omega_1(|t|)+\omega_2(|\tau|)]$ или $4\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)$.

Легко проверить, что имеют место включения $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\subset\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}(\rho_p,Q)\subset\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$, то есть вновь введенные классы функций $\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$ являются шире, чем соответствующие классы $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}(\rho_p,Q)$. Тем не менее, имеет место следующая

Теорема 2.1.2. *Среди всех кубатурных формул вида*

$$\iint\limits_{(Q)}\frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f,q)$$

с произвольными векторами узлов и коэффициентов $(X,Y;P)$ наилучшей для классов $\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q)$, $(1\le p\le\infty)$ является формула (0.0.39). При этом для погрешности формулы (0.0.39) справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q),q\right)=\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega_1,\omega_2}(Q),q\right)=$$

$$=2\pi m\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_1(t)dt+2\pi n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(\tau)d\tau, \tag{0.0.44}$$

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q),q\right)=\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p,Q),q\right)=$$

$$=4mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau, \tag{0.0.45}$$

где величины, стоящие в правых частях равенств (0.0.44) и (0.0.45), соответственно совпадают с соотношениями (0.0.40) и (0.0.41).

Из теоремы 2.1.2 вытекает следующее

Следствие 2.1.2. *В условиях теоремы 2.1.2 справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(G))=$$

$$=\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(G))=2\pi m\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_1(t)dt+2\pi n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(t)dt;$$

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p,Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p,G))=$$

$$= \mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p, G)) = 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau.$$

Во втором параграфе второй главы рассматривается экстремальная задача отыскания наилучшей кубатурной формулы для одного класса функций задаваемых модулями непрерывности. Решение экстремальной задачи отыскания наилучшей для заданного класса функции кубатурной формулы и нахождение точной оценки её остатка является одной из наиболее важных задач численного анализа.

В этом направлении получен ряд существенных результатов, тем не менее до настоящего времени для многомерных случаев ещё немало задач такого рода не решено. В этом параграфе рассматривается задача минимизации погрешности кубатурных формул на одном классе функций двух переменных, заданная модулем непрерывности от l_p $(1 \le p \le \infty)$ - расстояние между точками области интегрирования.

Во втором параграфе экстремальная задача (0.0.36) рассматривается для $q(x,y) \equiv 1$, для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности от расстояния между точками решётки узлов области, а именно рассматривается кубатурная формула

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) + R_{mn}(f), \qquad (0.0.46)$$

определяемая вектором $(X, Y; P)$ узлов

$$X = \{x_k : a \le x_1 < x_2 < ...x_{m-1} < x_m \le b\},$$

$$Y = \{y_l : c \le y_1 < y_2... < y_{n-1} < y_n \le d\}$$

и коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$ $(k = \overline{1,m};\ l = \overline{1,n})$, $R_{mn}(f) := R_{mn}(f : X, Y; P)$ – погрешность формулы на функции $f(x,y)$.

В качестве $\mathfrak{M}$ во втором параграфе рассмотрен класс $H^\omega(\rho_p; Q)$ – функций $f(x,y)$, определённых на Q, для любых двух точек $(x^{'}, y^{'}), (x^{''}, y^{''}) \in Q$ удовлетворяющих условию

$$|f(x^{'}, y^{'}) - f(x^{''}, y^{''}| \le \omega\left(\sqrt[p]{|x^{'} - x^{''}|^p + |y^{'} - y^{''}|^p}\right), (1 \le p < \infty). \qquad (0.0.47)$$

В случае $p=\infty$, неравенство (0.0.47) превращается в следующее

$$|f(x^{'},y^{'})-f(x^{''},y^{''}|\leq\omega\left(\max\left\{|x^{'}-x^{''}|,|y^{'}-y^{''}|\right\}\right)=$$

$$=\max\left\{\omega\left(|x^{'}-x^{''}|\right),\omega\left(|y^{'}-y^{''}|\right)\right\}.$$

Сформулируем основной результат второго параграфа второй главы.

Теорема 2.2.1. *Среди всевозможных кубатурных формул (0.0.46) для классов* $H^{\omega}(\rho_p,Q)$ $(1\leq p\leq\infty)$ *наилучшей является формула*

$$\iint\limits_{(Q)}f(x,y)dxdy=4h\eta\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}f[a+(2k-1)h,\ c+(2l-1)\eta]+R_{mn}(f),\quad(0.0.48)$$

где $h=(b-a)/(2m),\ \eta=(d-c)/(2n)$. *Для точной оценки погрешности формулы (0.0.48) на рассматриваемой классе функций*

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p,Q))=\begin{cases}4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^{\eta}\omega(\sqrt[p]{t^p+\tau^p})dtd\tau,\ 1\leq p<\infty,\\ 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^{\eta}\max\{\omega(t),\omega(\tau)\}dtd\tau,\ p=\infty.\end{cases}$$

Отметим, что из теоремы 2.2.1 в случае $p=2$ следует результат Н.П.Корнейчука, приведенный в монографии С.М.Никольского [20, с.185]. Приводим некоторые обобщения теоремы 2.2.1.

Пусть $H_1^{\omega}(\rho_p,Q)$ $(1\leq p\leq\infty)$ – класс функций $f(x,y)$, удовлетворяющих в прямоугольнике Q условию

$$|f(x+t,y+\tau)+f(x+t,y-\tau)+f(x-t,y+\tau)+f(x-t,y-\tau)-4f(x,y)|\leq$$

$$\leq4\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right),$$

при $1\leq p<\infty$ и

$$|f(x+t,y+\tau)+f(x+t,y-\tau)+f(x-t,y+\tau)+f(x-t,y-\tau)-4f(x,y)|\leq$$

$$\leq4\max\{\omega(t),\omega(\tau)\},$$

при $p=\infty$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Среди всевозможных кубатурных формул вида (0.0.46) наилучшей для класса* $H_1^\omega(\rho_p;Q)$ $(1\le p\le\infty)$ *является формула (0.0.48) с наилучшими узлами*

$$X^0 := \{x_k^0 : x_k^0 = a + (2k-1)h,\ k = 1,2,...,m;\ h = (b-a)/(2m)\},$$

$$Y^0 := \{y_l^0 : y_l^0 = c + (2l-1)\eta,\ l = 1,2,...,n;\ \eta = (d-c)/(2n)\}$$

и наилучшим вектором коэффициентов $P^0 = \{p_{kl}^0\}$ $(k = \overline{1,m};\ l = \overline{1,n})$. *При этом точные оценки погрешности на классах* $H^\omega(\rho_p;Q)$ *и* $H_1^\omega(\rho_p;Q)$ *совпадают*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H_1^\omega(\rho_p;Q)\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^\omega(\rho_p;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dt d\tau.$$

Из теорем 2.2.1 и 2.2.2 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теорем 2.2.1 и 2.2.2 при* $p = 1$ *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H_1^\omega(\rho_1;Q)\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^\omega(\rho_1;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(t+\tau\right)dt d\tau :=$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^\eta t\omega(t)dt + \eta\int\limits_\eta^h \omega(t)dt + \int\limits_h^{\eta+h}(\eta+h-t)\,\omega(t)dt,\ h>\eta; \\ \int\limits_0^h t\omega(t)dt + h\int\limits_h^\eta \omega(t)dt + \int\limits_\eta^{\eta+h}(h+\eta-t)\,\omega(t)dt,\ h<\eta; \\ \int\limits_0^h t\omega(t)dt + \int\limits_h^{2h}(2h-t)\omega(t)dt,\ h=\eta. \end{cases}$$

ГЛАВА I

О ПОГРЕШНОСТИ НЕКОТОРЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§1.1. Постановка задачи отыскания наилучших (оптимальных) весовых квадратурных формул. Классы функций

Сформулированная в заглавии параграфа задача о нахождении оптимальных квадратурных формул в смысле С.М.Никольского ставится следующим образом.

Вводится в рассмотрении квадратурная формула

$$\int\limits_a^b q(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1.1.1}$$

в котором весовая функция $q(x)$ интегрируема в смысле главного значения Коши, где $X = \{x_k : a \le x_1 < \ldots < x_n \le b\}$ - вектор узлов, $P = \{p_k\}_{k=1}^n$ - вектор коэффициентов а $R_n(f) := R_n(f; q, P, X)$ – погрешность квадратурной формулы (1.1.1) на функцию $f(x)$.

Если задан некоторый класс $\mathfrak{M}$ функций $f(x)$, определенных на конечном или бесконечном отрезке $[a, b]$, то через

$$R_n(\mathfrak{M}; q, P, X) = \sup\{|R_n(f; q, P, X)| : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\int\limits_a^b q(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)\right| : \ f \in \mathfrak{M}\right\} \tag{1.1.2}$$

обозначим точную верхнюю грань погрешность квадратурной формулы (1.1.1) на всём классе функций $\mathfrak{M}$.

Всюду далее, множество векторов узлов и коэффициентов обозначим через $\mathcal{A}$, для которых квадратурная формула (1.1.1) имеет смысл. Задача состоит в нахождении наименьшего значения погрешности

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q)=\inf\left\{R_n(\mathfrak{M};q,P,X):\ (P,X)\subset\mathcal{A}\right\}. \tag{1.1.3}$$

Если удаётся найти вектор узлов X^0 и вектор коэффициентов P^0, для которых достигается *infimum* в (1.1.3)

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{M};q)=R_n(\mathfrak{M};q,P^0,X^0),$$

то квадратурная формула (1.1.1) называется *наилучшей* (*оптимальной*) квадратурной формулой на классе $\mathfrak{M}$ в смысле С.М.Никольского [20], а вектор (P^0,X^0) называется наилучшим вектором коэффициентов и узлов из всех векторов $(P,X)\in\mathcal{A}$ квадратурной формулы (1.1.1).

Хотя задача (1.1.3) для много известных классов функций решена, возникают и существуют много других задач, связанных с задачей С.М.Никольского [20], которых нужно решать и оптимизировать. К ним, в частности относится задача (1.1.3) с весовыми функциями, имеющие слабые особенности на отрезке интегрирования или, другими словами, задачи отыскания наилучших квадратурных формул для интегралов в смысле главного значения Коши на классах функций малой гладкости. Задача отыскания оптимальных квадратурных формул для указанных интегралов или весовых формул, когда вес $q(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет слабые особенности, ранее рассматривалась в работах В.А.Бойкова [5], Л.А.Онегова [22], М.Ш.Шабозова [38], М.Ш.Шабозова и Р.С.Сабоиева [40, 41].

Иногда в число узлов квадратурной формулы (1.1.1) включают концевые точки отрезка $[a,b]:\ x_0=a, x_n=b$ и на вектор узлов $X=\{x_k\}$ налагают условие

$$X=\{x_k:\ x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$$

включения концов отрезка в число узлов. При этом квадратурная формула (1.1.1) принимает следующий вид

$$\int_a^b q(x)f(x)dx = p_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(x_k) + p_n f(b) + R_n(f) \qquad (1.1.4)$$

и называется квадратурной формулой типа Маркова. Во многих задачах приближенного вычисления интегралов, когда $f(a)$ и $f(b)$ заданы формулой (1.1.4), которая предпочтительнее, чем формула (1.1.1).

Приводим определение классов функций, для которых решим экстремальную задачу (1.1.3) для квадратурных формул (1.1.1) или (1.1.4) в первой главе.

Приводим теперь определения классов функций, рассматриваемые нами в дальнейшем. Пусть $[a, b]$ - конечный сегмент или положительная полуось. В первой главе диссертации задача (1.1.3) решается для следующих нижеприведенных классов функций: $C[a, b]$ – множество непрерывных функций определенных на отрезке $[a, b]$; $C^{(r)}[a, b](r = 0, 1, 2, \ldots;\ C^{(0)}[a, b] \equiv C[a, b])$ – множество функций $f(x)$, у которых все производные до r-го порядка на отрезке $[a, b]$ непрерывны. $H^{\omega}[a, b]$ – множество функций $f \in C[a, b]$, для любых двух точек $x^{'}, x^{''} \in [a, b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(x'') - f(x')| \le \omega\left(|x'' - x'|\right), \quad \forall\ x', x'' \in [a, b],$$

где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, неубывающая полуаддитивная на отрезке $[0, b-a]$ функция, для которой $\omega(0) = 0$. При $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$, класс $H^{\omega}[a, b]$ превращается в класс Гёльдера $H^{\alpha}[a, b]$:

$$|f(x'') - f(x')| \le |x'' - x'|^{\alpha}, \quad \forall\ x', x'' \in [a, b],$$

а при $\alpha = 1$ имеем $H^1[a, b]$ - класс Липщица:

$$H^1[a, b] = \{f :\ |f(x'') - f(x')| \le |x'' - x'|,\ x', x'' \in [a, b]\}.$$

Очевидно, что класс $H^1[a, b]$ совпадает с классом $W^1[a, b]$ – функций $f \in C[a, b]$, у которых производная $f'(x)$, удовлетворяет условию

$$\underset{a \le x \le b}{supvrai} |f'(x)| \le 1.$$

Обозначим через $W^{(r)}H^{\omega}[a,b]$ $(r = 0,1,2,\ldots; W^{(0)}H^{\omega}[a,b] \equiv H^{\omega}[a,b])$ – множество функций $f(x) \in C^{(r-1)}[a,b]$, у которых производная $f^{(r)}(x)$, принадлежащая классу $H^{\omega}[a,b]$. $W^{(r)}L_p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$ $(r = 0,1,2,\ldots;$ $W^{(0)}L_p[a,b] \equiv L_p[a,b])$ – класс функций $f(x)$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ порядка $r-1$ абсолютно непрерывна, существует производная $f^{(r)}(x)$ порядка r, принадлежащая пространству $L_p[a,b]$ и удовлетворяющая условию

$$\left\|f^{(r)}\right\|_p := \left\|f^{(r)}\right\|_{L_p} = \left(\int\limits_a^b |f^{(r)}(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq 1.$$

Обозначим через $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L\left(M;(a,b)\right)$ – множество функций $f(t)$, представимых в виде

$$f(t) = f(c) + |t-c|^{m-1+\alpha} sgn(t-c)\varphi(t), \quad c \in (a,b), \tag{1.1.5}$$

где $m \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leq 1$, а $\varphi(t) \in W^{(1)}L\left(M;[a,b]\right)$ - класс функций, для которых $\|\varphi'\|_{L[a,b]} \leq M$.

§1.2. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярного интеграла Адамара

Здесь рассматривается задача отыскания наилучшей квадратурной формулы сингулярного интеграла Адамара вида

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-c)^m} dt, a < c < b, \tag{1.2.1}$$

для класса функций $W_c^{(m)} H^{(\alpha)} L(M; a, b)$, где $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Интеграл (1.2.1) понимается в смысле главного значения Коши, то есть когда существует предел

$$\mathcal{J}_m(f;c) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-c)^m} dt + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{(t-c)^m} dt + \frac{\psi(c)}{\varepsilon^{m-1}} \right), \tag{1.2.2}$$

где функция $\psi(c)$ выбирается так, чтобы указанный предел справа в (1.2.2) существовал [43].

Для приближённого вычисления сингулярного интеграла (1.2.1) введём в рассмотрение квадратурную формулу следующего вида

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{(t-c)^m} = Af(c) + \sum_{k=1}^n p_k f(t_k) = R_n(f), \tag{1.2.3}$$

где c и $t_k : a \leq t_1 < ... < t_k < ... < t_n \leq b$ – заданные узлы, A и p_k – коэффициенты, $R_n(f)$ – погрешность квадратурной формулы.

При условии точности квадратурная формула (1.2.3) для функции $f(t) = const$, выполняется равенство

$$A = \frac{1}{m-1} \left[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1} \right] - \sum_{k=1}^n p_k. \tag{1.2.4}$$

Таким образом, задача заключается в том, что при выполнении условия (1.2.4) требуется найти величину

$$\mathcal{E}_n \left(W_c^{(m)} H^{(\alpha)} L(M; a, b) \right) = \inf_{(T,P)} R_n \left(W_c^{(m)} H^{(\alpha)} L(M; a, b) : T, P \right). \tag{1.2.5}$$

Решение задачи (1.2.5) при условия (1.2.4) сводиться к решению экстремальной задачи нахождении оптимальной весовой квадратурной формулы для класса $W^{(1)}L(M;a,b)$. Итак, с учётом формулы (1.1.5) и равенства (1.2.4) из (1.2.3) получаем

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{(t-c)^m} = \frac{1}{m-1}\big[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1}\big]f(c)+$$

$$+\sum_{k=1}^n p_k\big[f(t_k)-f(c)\big] + R_n(f) = \frac{1}{m-1}\big[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1}\big]f(c)+$$

$$+\sum_{k=1}^n p_k|t_k-c|^\alpha sgn(t_k-c)\varphi(t_k) + R_n(f). \qquad (1.2.6)$$

Теперь, согласно формулу (1.1.5) имеем

$$\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{(t-c)^m} = \frac{1}{m-1}\big[(a-c)^{-m+1} - (b-c)^{-m+1}\big]f(c) + \int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|t-c|^{1-\alpha}}.$$

Из последнего равенства и формулы (1.2.6) сразу следует, что

$$R_n(f) = \int\limits_a^b \frac{f(t)}{(t-c)^m}dt - Af(c) - \sum_{k=1}^n p_k f(t_k) =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|t-c|^{1-\alpha}} - \sum_{k=1}^n p_k|t_k-c|^\alpha sgn(t_k-c)\varphi(t_k) := R_n(\varphi). \qquad (1.2.7)$$

Итак, мы доказали, что погрешность формулы (1.2.3) равна погрешности квадратурной формулы вида

$$\int\limits_a^b \frac{\varphi(t)dt}{|t-c|^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^n A_k\varphi(t_k) + R_n(\varphi), \qquad (1.2.8)$$

где положено $A_k = p_k|t_k-c|^\alpha sgn(t_k-c), t_k \neq c$.

Таким образом, отыскание наилучшей квадратурной формулы вида (1.2.3) для класса $W_c^{(m)}H^{(\alpha)}L(M;a,b)$ при выполнении условия (1.2.4) эквивалентно отысканию оптимальной квадратурной формулы вида (1.2.8) с несовпадающими с точкой узлами t_k $(k = \overline{1,n})$ на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$. Рассмотренный сингулярный интеграл (1.2.1) в случае $m = 1$, то есть в случае, когда интеграл понимается в смысле главного значения по Коши ранее по приведенной выше схеме подробно исследован А.Л.Кузьминой [13].

Пусть теперь функция $q(t) \geqslant 0$ и интегрируема на $[a,b]$ имеет на концах отрезка особенности, а $\varphi \in W^{(1)}L(M;a,b)$. Требуется найти наилучшую весовую квадратурную формулу вида

$$\int\limits_a^b q(t)\varphi(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(t_k) + R_n(\varphi) \tag{1.2.9}$$

на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$, которая задана векторами узлов

$$T = \{t_k : \ a \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \leq b\}$$

и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$, остаточный член $R_n(\varphi) := R_n(\varphi;T,P)$. Решение этой последней задачи для различных областей интегрирования имеется в работах [8, 13], где доказывается, что единственной наилучшей на множестве $W^{(1)}L(M;a,b)$ квадратурной формулой вида (1.2.9) является формула

$$\int\limits_a^b q(t)\varphi(t)dt = \frac{\omega(a)}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k) + R_n(\varphi), \tag{1.2.10}$$

причём узлы t_k находятся как единственное решение системы уравнений

$$\omega(t_k) = \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)\omega(a), \quad k = \overline{1,n}, \quad \omega(t) = \int\limits_t^b q(u)du, \quad a \leq t \leq b. \tag{1.2.11}$$

При выполнении условий (1.2.11) на всём классе функций $W^{(1)}L(M;a,b)$ оценка погрешности квадратурной формулы (1.2.10) в точности равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b),q\right) = \frac{M\omega(a)}{2n} = \frac{M}{2n}\int\limits_a^b q(u)du. \tag{1.2.12}$$

В частности, когда $q(t) = \dfrac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}$ $(0 < \alpha \le 1)$, то, полагая

$$\omega(t) = \int\limits_t^b \frac{du}{|u-c|^{1-\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left[(b-c)^\alpha - |t-c|^\alpha sgn(t-c)\right], a \le t \le b, \qquad (1.2.13)$$

получим следующая

Теорема 1.2.1. *Среди всевозможных квадратурных формул (1.2.8) точной для $\varphi(t) \equiv const$, наилучшей на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$ является формула с коэффициентами*

$$A_k = \frac{(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha}{\alpha n}, \ k = \overline{1,n}$$

и узлами t_k, являющаяся решениями системы уравнений

$$(b-c)^\alpha - |t_k - c|^\alpha sgn(t_k - c) =$$
$$= [(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha]\left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right), \ k = \overline{1,n}.$$

При этом

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b), \frac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}\right) = \frac{M\left[(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha\right]}{2\alpha n}, \quad (0 < \alpha \leqslant 1).$$

Доказательство. В силу (1.2.13) при $t = a$ получаем

$$\omega(a) = \frac{1}{\alpha}\left[(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha\right]. \qquad (1.2.14)$$

Требуемое равенство в теореме получаем из равенство (1.2.14) и решение системы (1.2.11). В самом деле, так как

$$[(b-c)^\alpha - |t_k - c|^\alpha sgn(t_k - c)] =$$
$$= \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)[(b-c)^\alpha + (c-a)^\alpha], \qquad (1.2.15)$$

то, решая полученную систему уравнений, определим узлы t_k как решение системы (1.2.15), которые являются наилучшими узлами квадратурной формулы (1.2.8).

Таким образом точную оценку погрешности наилучшей квадратурной формулы на всём классе функций определим из равенств (1.2.12) и (1.2.14)

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;a,b),\frac{1}{|t-c|^{1-\alpha}}\right)=\frac{M\omega(a)}{2n}=\frac{M\left[(b-c)^{\alpha}+(c-a)^{\alpha}\right]}{2\alpha n}.$$

Теорема 1.2.1 доказана.

Замечание 1.2.1. Если в утверждение теореме 1.2.1 полагать $\alpha\equiv 1$, то будем иметь точная оценка на классе $W^{(1)}L(M;a,b)$:

$$\mathcal{E}\left(W^{(1)}L(M;a,b)\right)=\frac{M(b-a)}{2n}.$$

Замечание 1.2.2. Схему рассуждений можно применить и для сингулярного интеграла Адамара следующего вида

$$\mathcal{J}_{\gamma}(f,\tau)=\int\limits_a^b\frac{f(t)dt}{|t-\tau|^{\gamma}},\quad f\in W_c^{[\gamma]}H^{(\alpha)}L(M;a,b),$$

где $\gamma\in R_+(\gamma\geqslant 1)$ - произвольное число из положительной полуоси и, в отличие от предыдущих параграфов, может принимать и нецелые значения, а $[\gamma]$ – целая часть числа γ.

В качестве второго приложения квадратурной формулы (1.2.10) находим точную оценку погрешности квадратурной формулы следующего вида

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sum_{k=1}^{n}p_kf(t_k)+R_n(f)\tag{1.2.16}$$

на классе $W^{(1)}L(M;-1,1)$. Имеет место следующая

Теорема 1.2.2. *Единственной наилучшей на классе $W^{(1)}L(M;-1,1)$ квадратурной формулой вида (1.2.16), точной для $f(t)\equiv const$, имеет вид*

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi\right)+R_n(f).\tag{1.2.17}$$

Таким образом на всём классе функций $W^{(1)}L(M;-1,1)$ для точной оценки погрешности наилучшей формулы (1.2.17) справедливо оценка

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M;-1,1),\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)=\frac{M\pi}{2n}.$$

Доказательство. В этом случае, полагая $q(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, будем иметь

$$\omega(-1) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi. \tag{1.2.18}$$

С другой стороны, учитывая равенства (1.2.11) и (1.2.18), получаем

$$\int\limits_{t_k}^{1} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)\pi,$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin t_k = \pi - \frac{2k-1}{2n}\pi.$$

Из последнего равенства и (1.2.18) вытекает, что

$$t_k = \cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi \quad \text{и} \quad p_k = \frac{\omega(-1)}{n} = \frac{\pi}{n} \ (k = \overline{1,n}).$$

Теперь, пользуясь последними формулами для узлов и коэффициентов, точная оценка погрешности квадратурной формулы (1.2.16) примет следующий вид

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2n-2k+1}{2n}\pi\right) + R_n(f).$$

В силу (1.2.12) и (1.2.18) имеем

$$\mathcal{E}_N\left(W^{(1)}L(M;-1,1), \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{M\pi}{2n}.$$

Таким образом мы доказали теорема 1.2.2.

Приведём ещё одно приложение квадратурной формулы (1.2.10). Пусть требуется найти точную оценку погрешности квадратурной формулы

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f), \tag{1.2.19}$$

где $P = \{p_k\}_{k=1}^{n}$ – произвольный вектор-коэффициентов, а

$$T = \left\{t_k : 0 \le t_1 < t_2 < ... < t_n < +\infty\right\}$$

– произвольный вектор узлов, $R_n(f)$ – погрешность формулы (1.2.19) на функцию $f \in W^{(1)}L(M; 0, +\infty)$. Имеет место

Теорема 1.2.3. *Среди всех формул вида (1.2.19) точной для $f(t) = const$, наилучшей для класса $W^{(1)}L(M; 0, +\infty)$, является формула*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(f). \tag{1.2.20}$$

На всём классе погрешность формулы (1.2.20) равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; 0, +\infty), \frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{M\pi}{4n}.$$

Доказательство. В самом деле, в данном случае $q(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, а потому

$$\omega(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}. \tag{1.2.21}$$

Пользуясь равенствами (1.2.11) и (1.2.21), имеем

$$t_k = \operatorname{tg}\frac{2k-1}{4n}\pi \quad \text{и} \quad p_k = \frac{\omega(0)}{n} = \frac{\pi}{2n}.$$

С учётом полученных формул для узлов и коэффициентов наилучшая формула имеет вид

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\operatorname{tg}\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R_n(f).$$

Таким образом, на всём классе $W^{(1)}L(M; a, b)$ для погрешности наилучшей квадратурной формулы имеет место равенство

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L(M; a, b), \frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{M\omega(0)}{2n} = \frac{M\pi}{4n},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.3.

В качестве третьего приложения формулы (1.2.10) приведём ещё одну квадратурную формулу. Требуется найти наилучшую квадратурную формулу для вычислении определённого интеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha}, \quad 0<\alpha<1.$$

Теорема 1.2.4. *Единственной наилучшей квадратурной формулой вида*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f) \tag{1.2.22}$$

на классе $W^{(1)}L\,(M,-1,1)$, точной для $f(t)=const$, является формула

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n} \sum_{k=1}^{n} f\left(2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1\right) + R_n(f). \tag{1.2.23}$$

На всём классе $W^{(1)}L\,(M;-1,1)$ погрешность формулы (1.2.23) равна

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\,(M;-1,1)\,, \frac{1}{(1+t)^\alpha}\right) = \frac{M}{2^\alpha(1-\alpha)n}, \quad (0<\alpha<1).$$

Доказательство. Приведенная теорема 1.2.4 доказывается так же по указанной выше схеме. Так как $q(t)=\dfrac{1}{(1+t)^\alpha}$, то

$$\omega(-1) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\omega(t_k) = \int\limits_{t_k}^{1} \frac{dt}{(1+t)^\alpha} = \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1+t_k)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Теперь из системы уравнений

$$\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(1+t_k)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \left(1 - \frac{2k-1}{2n}\right)\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

или, что то же, из системы

$$(1+t_k)^{1-\alpha} = \frac{2k-1}{2n}2^{1-\alpha}$$

определим оптимальные узлы

$$t_k = 2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1,\ k = 1, 2, ..., n \tag{1.2.24}$$

а наилучшие коэффициенты имеют вид

$$p_k = \frac{\omega(-1)}{n} = \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)n},\ k = 1, 2, ..., n.$$

Подставляя наилучшие узлов (1.2.24) и коэффициентов в формулу (1.2.22), получаем наилучшую квадратурную формулу (1.2.23) с погрешностью

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\left(M;-1,1\right), \frac{1}{(1+t)^\alpha}\right) = \frac{M\omega(-1)}{2n} = \frac{M}{2^\alpha(1-\alpha)n}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.4 при* $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *наилучшая квадратурная формула имеет вид*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{2\sqrt{2}}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2\left(\frac{2k-1}{2n}\right)^2 - 1\right) + R_n(f).$$

При этом

$$\mathcal{E}_n\left(W^{(1)}L\left(M;-1,1\right), \frac{1}{(1+t)^\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2}M}{n}.$$

В завершении параграфа введём в рассмотрение квадратурную формулу с общим весом Якоби $q(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta, \quad \alpha, \beta \geq 1$ следующего вида

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-t)^\alpha(1+t)^\beta f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f). \tag{1.2.25}$$

Хорошо известно [12, с.130], что квадратурная формула (1.2.25) точна на множестве алгебраических многочленов степени $2n-1$. Желая найти явный вид оптимальной квадратурной формулы вида (1.2.25) для класса $W^{(1)}L(M;-1,1)$, заметим, что в данном случае имеем

$$q(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1,$$

$$\omega(t_k) = \int\limits_{t_k}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} dt, \quad k = \overline{1,n};$$

$$\omega(-1) = \int\limits_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} dt = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

$$p_k = \frac{\omega(-1)}{n} = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{1}{n}, \quad k = \overline{1,n}; \tag{1.2.26}$$

$$\mathcal{E}_n \left(W^{(1)} L \left(M; -1, 1 \right); (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} \right) = \frac{M\omega(-1)}{2n} =$$
$$= 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{M}{2n}. \tag{1.2.27}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1.2.5. *Среди всех квадратурных формул (1.2.25) для класса* $W^{(1)}L(M; -1, 1)$ *наилучшей является формула, у которой узлы определяются как решение системы*

$$\int\limits_{t_k}^{1} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta} dt = \left(1 - \frac{2k-1}{2n} \right) \cdot 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \quad k = \overline{1,n},$$

коэффициенты p_k *определены равенствами (1.2.26), а точная оценка погрешности равенством (1.2.27).*

Замечание 1.2.3. Отметим, что квадратурная формула (1.2.9) в случае $[a, b] = [0, +\infty)$ с узлами t_k, удовлетворяющими условиям (1.2.11), для класса $W^{(1)}L(M; 0, +\infty)$ ранее была найдена Ю.Гиршовичем в работе [8], а в случае конечного отрезка $[a, b]$ с весовой функцией $q(t) = \dfrac{1}{t-c}$, $(a < c < b)$ в работе А.Л.Кузьмина [13]. Для весовых функций, имеющих устранимые особенности на концах промежутка интегрирования, наилучшие квадратурные формулы на классе функций $W^{(1)}L(M; a, b)$ найдены в работах [38, 39].

Следует отметить, что результат А.Л.Кузьмина [13] вытекает из квадратурной формулы (1.2.3) и равенства (1.2.7) как частный случай при $m = 1$.

§1.3. О точной оценке погрешности квадратурой формулы Эрмита-Чебышева-Маркова на классе функций $H^{\omega}[-1,1]$

Здесь доказано, что рассмотренная нами в предшествующем параграфе классическая квадратурная формула Эрмита – Чебышева

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n(f)$$

для класса функций $H^{\omega}[-1,1]$, является наилучшей квадратурной формулой. Назовьём квадратурной формулой Эрмита-Чебышева-Маркова формулой вида

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = p_0 f(-1) + \sum_{k=1}^{n-1} p_k f(t_k) + p_n f(1) + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right), \quad (1.3.1)$$

заданной векторами $(T;P)$ узлов

$$T = \left\{t_k : \ -1 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1\right\}$$

и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=0}^{n}$. Для отыскании точной оценки погрешности формулы (1.3.1) на классе $H^{\omega}[-1,1]$ будем изучать задачу отыскания наилучшей квадратурной формулы вида (1.3.1), когда заранее зафиксированы в качестве узлов концы промежутка интегрирования: $t_0 = -1$ и $t_n = 1$, а коэффициенты $p_0, p_1, ..., p_n$ и узлы $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ следует выбрать оптимальным образом. Имеет место следующая

Теорема 1.3.1 *Среди всевозможных квадратурных формул вида (1.3.1) на классе $H^{\omega}[-1,1]$ наилучшей является квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n}\left\{\frac{f(-1)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} +$$

$$+R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right). \quad (1.3.2)$$

На всём классе $H^\omega[-1,1]$ точная оценка погрешности наилучшей формулы равна

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(t)dt. \tag{1.3.3}$$

Пологая $\omega(t)=t^\alpha$ $(0<\alpha\leq 1)$ из (1.3.3) для класса Гёльдера $H^\alpha[-1,1]$ получаем

$$\mathscr{E}_n\left(H^\alpha[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\frac{\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{n^\alpha}. \tag{1.3.4}$$

Если, в частности, $\alpha=1$, то из (1.3.4) имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H^1[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\frac{\pi^2}{4n}.$$

Доказательство. Полагая

$$t=\cos\tau,\ \ -1\leq t\leq 1,\ 0\leq\tau\leq\pi,\ \varphi(\tau)=f(\cos\tau), \tag{1.3.5}$$

имеем

$$t_k=\cos\tau_k,\quad 0\leq\tau_k\leq\pi,\quad k=\overline{0,n},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{1.3.6}$$

Вместо квадратурной формулы (1.3.2), пользуясь формулой (1.3.1) и равенствами (1.3.5) и (1.3.6), вводим в рассмотрение соответствующую формулу

$$\int\limits_0^\pi\varphi(\tau)d\tau=p_0\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n-1}p_k\varphi(\tau_k)+p_n\varphi(\pi)+R_n(\varphi). \tag{1.3.7}$$

Таким образом, из (1.3.1) и (1.3.7) в силу равенств (1.3.5) и (1.3.6) получаем

$$R_n\left(f,\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\int\limits_{-1}^1\frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}-\left[p_0f(-1)+\sum_{k=1}^{n-1}p_kf(t_k)+p_nf(1)\right]=$$

$$=\int\limits_0^\pi\varphi(\tau)d\tau-\left[p_0\varphi(0)+\sum_{k=1}^{n-1}p_k\varphi(\tau_k)+p_n\varphi(\pi)\right]=R_n(\varphi). \tag{1.3.8}$$

Учитывая полученное равенство (1.3.8) имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1];\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)=\mathscr{E}_n\left(H^\omega[0,\pi]\right), \tag{1.3.9}$$

а потому для доказательства теоремы 1.3.1 достаточно найти величину, стоящую в правой части (1.3.9) на классе функций $H^\omega[0,\pi]$. С этой целью поставим в соответствие произвольному вектору узлов $\mathcal{T}=\big\{\tau_k:\ 0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_{n-1}<\tau_n=\pi\big\}$ квадратурной формулы (1.3.7) класс функций $H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]$ обращающихся в узлах сетки в нуль:

$$H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]:=\big\{\varphi:\varphi\in H^\omega[0,\pi],\varphi(\tau_k)=0,\ k=\overline{1,n}\big\}.$$

Таким образом, если $P=\{p_k\}_{k=0}^n$ – произвольный вектор коэффициентов, то в силу включения $H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]\subset H^\omega[0,\pi]$ из равенство (1.3.8) следует, что

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[0,\pi]\right)\geq\mathscr{E}_n\left(H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]\right)=$$
$$=\inf_{(\mathcal{T},P)}\sup_{\varphi\in H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]}\left|R_n\left(\varphi;\mathcal{T},P\right)\right|=\inf_{(\mathcal{T},P)}\sup_{\varphi\in H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]}\left|\int\limits_0^\pi\varphi(\tau)d\tau\right|. \tag{1.3.10}$$

Очевидно, что если $\varphi\in H^\omega_{\mathcal{T}}[0,\pi]$, то для любой точки τ $(0\leq\tau\leq\pi)$ и любого узла τ_k $(0\leq\tau_k\leq\pi)$ выполняется неравенство

$$|\varphi(\tau)|=|\varphi(\tau)-\varphi(\tau_k)|\leq\omega(|\tau-\tau_k|),$$

в силу которой запишем

$$|\varphi(\tau)|\leq\min_{\tau_k}\omega(|\tau-\tau_k|)\equiv\Phi(\tau). \tag{1.3.11}$$

Но так как $\tau_k<\tau_{k+1},\quad k=\overline{0,n-1}$, то функцию $\Phi(\tau)=\Phi_{\mathcal{T}}(\tau)$, в силу монотонного возрастания модуля непрерывности $\omega(t)$ функция из правой части неравенство (1.3.11) запишем в виде

$$\Phi(\tau)=\Phi_{\mathcal{T}}(\tau)=\omega\left(\min_{\tau_k}|\tau-\tau_k|\right),$$

которая как легко видет содержатся в $H^\omega[0,\pi]$. В самом деле, для всех $\tau',\tau''\in[0,\pi]$ функция $\Phi_{\mathcal{T}}$ удовлетворяет неравенство

$$|\Phi(\tau^{'})-\Phi(\tau^{''})|=\left|\omega\left(\min_{\tau_k}|\tau^{'}-\tau_k|\right)-\omega\left(\min_{\tau_k}|\tau^{''}-\tau_k|\right)\right|\leq\omega(|\tau'-\tau''|),$$

откуда сразу вытекает, что $\Phi_{\mathcal{T}} \in H^{\omega}[0,\pi]$, и так как кроме этого $\Phi(\tau_k) = 0$, то получаем, что $\Phi \in H^{\omega}_{\mathcal{T}}[0,\pi]$. Это в связи с величиною стоящей в правой части неравенства (1.3.10), приводит к следующую соотношению

$$R_n\left(H^{\omega}_{\mathcal{T}}[0,\pi]\colon \mathcal{T}\right) = \sup_{f \in H^{\omega}_{\mathcal{T}}[0,\pi]} \left| \int\limits_0^{\pi} \varphi(\tau) d\tau \right| = \int\limits_0^{\pi} \Phi_T(\tau) d\tau = R_n(\Phi_{\mathcal{T}}). \qquad (1.3.12)$$

Пусть $\mathcal{T}^0 = \left\{ \tau_k^0 := \dfrac{k\pi}{n};\ k = \overline{0,n} \right\}$. Докажем, что для произвольного вектора узлов вида

$$\mathcal{T} = \left\{ \tau_k:\ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = \pi \right\}$$

с фиксированными узлами $\tau_0 = 0$ и $\tau_n = \pi$ выполняется неравенство

$$R_n(\Phi_{\mathcal{T}}) = \int\limits_0^{\pi} \Phi_{\mathcal{T}}(\tau) dt \geq \int\limits_0^{\pi} \Phi_{\mathcal{T}^0}(\tau) d\tau = R_n(\Phi_{\mathcal{T}^0}). \qquad (1.3.13)$$

Положим $\Psi(s) = \int\limits_0^{s} \Phi_{\mathcal{T}}(\tau) d\tau$. Если ввести узлы

$$\tau_0 = t_0 = 0,\ x_k = (\tau_{k-1} + \tau_k)/2, \quad k = \overline{1,n}; \quad x_{n+1} = \tau_n = \pi, \qquad (1.3.14)$$

то в силу монотонности модуля непрерывности ω запишем

$$\Phi_{\mathcal{T}}(\tau) = \omega(|\tau - \tau_k|), x_k < \tau < x_{k+1}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Учитывая последнее соотношение, будем иметь

$$\int\limits_0^{\pi} \Phi_{\mathcal{T}}(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(|\tau - \tau_k|) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} \omega(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int\limits_{x_k}^{\tau_k} \omega(\tau_k - \tau) d\tau + \int\limits_{\tau_k}^{x_{k+1}} \omega(\tau - \tau_k) d\tau \right) + \int\limits_{x_n}^{\pi} \omega(\pi - \tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{x_1} \omega(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int\limits_0^{(\tau_k - x_k)/2} \omega(\tau) d\tau + \int\limits_0^{(x_{k+1} - \tau_k)/2} \omega(\tau) d\tau \right) + \int\limits_0^{\pi - x_n} \omega(\tau) d\tau =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{(\tau_k-\tau_{k-1})/2} \omega(\tau)d\tau := 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{\beta_k} \omega(\tau)d\tau \overset{def}{=} 2\sum_{k=1}^{n} \Psi(\beta_k), \qquad (1.3.15)$$

где $\Psi(t) = \int\limits_0^t \omega(\tau)d\tau$, причём $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n = \pi/2$.

Докажем, что функция $\Psi(t)$ является выпуклой вниз функцией, то есть удовлетворяет условию

$$\Phi(t^{'}) + \Phi(t^{''}) - 2\Phi\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right) \geq 0.$$

В самом деле, если $t^{'}, t^{''}$ $(t^{'} < t^{''})$ - две произвольные точки из интервала (0,1), то мы имеем:

$$\Phi(t^{'}) + \Phi(t^{''}) - 2\Phi\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{t^{'}} \omega(\tau)d\tau + \int\limits_0^{t^{''}} \omega(\tau)d\tau - 2\int\limits_0^{(t^{'}+t^{''})/2} \omega(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t^{'}} \omega(\tau)d\tau + \int\limits_{(t^{'}+t^{''})/2}^{t^{''}} \omega(\tau)d\tau - \int\limits_0^{(t^{'}+t^{''})/2} \omega(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t^{'}} \omega(\tau)d\tau + \int\limits_{(t^{'}+t^{''})/2}^{t^{''}} \omega(\tau)d\tau - \int\limits_0^{t^{'}} \omega(\tau)d\tau - \int\limits_{t^{'}}^{(t^{'}+t^{''})/2} \omega(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{(t^{'}+t^{''})/2}^{t^{''}} \omega(\tau)d\tau - \int\limits_{t^{'}}^{(t^{'}+t^{''})/2} \omega(\tau)d\tau \geq$$

$$\geq \omega\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right)\left(\frac{t^{''} - t_{'}}{2}\right) - \omega\left(\frac{t^{'} + t^{''}}{2}\right)\left(\frac{t^{''} - t^{'}}{2}\right) = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что функция $\Psi(t)$ является выпуклой вниз функцией, а потому в силу неравенства Иенсена [35, с.92] для выпуклых вниз функций из правой части равенства (1.3.15) сразу получаем

$$2\sum_{k=1}^{n}\Psi(\beta_k)\geq 2n\Psi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)=2n\Psi\left(\frac{\pi}{2n}\right)=2n\int\limits_{0}^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau. \qquad (1.3.16)$$

Таким образом, нужное оценка снизу в силу (1.3.15)

$$\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_{\mathcal{T}}(\tau)d\tau\geq 2n\int\limits_{0}^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau \qquad (1.3.17)$$

сразу следует из неравенство (1.3.16). Теперь для установления неравенства (1.3.13) простыми вычислениями легко доказать, что имеет место равенство

$$\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_{\mathcal{T}^0}(\tau)d\tau=2n\int\limits_{0}^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau. \qquad (1.3.18)$$

С этой целью заметим, что так как

$$\mathcal{T}^0:=\{\tau_k^0=\frac{k\pi}{n}=kh,\ h=\frac{\pi}{n};\ k=\overline{0,n},\}, \qquad (1.3.19)$$

то согласно равенству (1.3.14) имеем:

$$\tau_0^0=\tau_0=0,\ x_k^0:=\frac{\tau_{k-1}^0+\tau_k^0}{2}=\frac{(k-1)h+kh}{2}=kh-\frac{h}{2},$$

$$k=\overline{1,n};\ x_{n+1}^0=\tau_n^0=\pi.$$

В силу возрастании модуля непрерывности ω для значений

$$x_k^0=kh-\frac{h}{2}<\tau<kh+\frac{h}{2}=x_{k+1}^0,\ k=\overline{0,n}$$

имеем

$$\Phi_{\mathcal{T}^0}(\tau):=\omega(|\tau-\tau_k^0|)=\omega\left(|\tau-kh|\right),\ k=\overline{0,n}.$$

Теперь интеграл в левой части (1.3.18) вычисляется простыми вкладками

$$\int\limits_{0}^{\pi}\Phi_{\mathcal{T}^0}(\tau)d\tau=\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0}\omega\left(|\tau-\tau_k^0|\right)d\tau=$$

$$= \int\limits_0^{x_1^0} \omega\left(|\tau-\tau_0^0|\right)d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} \omega\left(|\tau-\tau_k^0|\right)d\tau + \int\limits_{x_n^0}^{x_{n+1}^0} \omega\left(|\tau-\tau_k^0|\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{kh-h/2}^{kh+h/2} \omega\left(|\tau-kh|\right)d\tau + \int\limits_{\pi-h/2}^{\pi} \omega(\pi-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\int\limits_{kh-h/2}^{kh} \omega\left(kh-\tau\right)d\tau + \int\limits_{kh}^{kh+h/2} \omega\left(\tau-kh\right)d\tau \right) +$$

$$+ \int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau = 2\int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau + 2\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau =$$

$$= 2\int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau + 2(n-1)\int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau =$$

$$= 2n\int\limits_0^{h/2} \omega(\tau)d\tau = 2n\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau.$$

Этим равенство (1.3.18) доказано.

Таким образом неравенства (1.3.13), (1.3.17) и равенство (1.3.18) приводят к следующей оценке снизу

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[0,\pi]\right) \geq \mathscr{E}_n\left(H^\omega_{\mathcal{T}^0}[0,\pi]\right) = \int\limits_0^{\pi} \Psi_{\mathcal{T}^0}(\tau)d\tau = 2n\int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau. \qquad (1.3.20)$$

Чтобы получить оценку сверху величины, стоящей в левой части неравенства (1.3.20), введём в рассмотрение квадратурную формулу вида (1.3.7), заданную векторами узлов (1.3.19) и коэффициентов

$$P^0 = \{p_k^0 : p_k^0 = h,\ k=\overline{1,n-1};\ p_0 = p_n = h/2\}. \qquad (1.3.21)$$

По прежнему полагая

$$x_0^0 = 0,\ x_k^0 = \frac{(\tau_{k-1}^0 + \tau_k^0)}{2} = kh - \frac{h}{2} = \tau_k^0 - \frac{h}{2},\quad k=\overline{1,n};\ \tau_{n+1}^0 = \pi,$$

для произвольной функции $\varphi \in H^\omega[0,\pi]$ получаем

$$\left|R_n(f;\mathcal{T}^0,P^0)\right| = \left|\int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau - h\left\{\frac{\varphi(0)+\varphi(\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\tau_k^0)\right\}\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{x_1^0} |\varphi(\tau)-\varphi(0)|dt + \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{x_k^0}^{x_{k+1}^0} |\varphi(\tau)-\varphi(\tau_k^0)|d\tau + \int\limits_{x_n^0}^{\pi} |\varphi(\tau)-\varphi(\pi)|d\tau \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{h/2}\omega(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\tau_k^0-h/2}^{\tau_k^0+h/2}\omega(|\tau-\tau_k^0|)d\tau + \int\limits_{\pi-h/2}^{\pi}\omega(\pi-\tau)d\tau =$$

$$= 2\int\limits_0^{h/2}\omega(\tau)d\tau + 2(n-1)\int\limits_0^{h/2}\omega(\tau)d\tau = 2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau,$$

откуда сразу следует, что

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[0,\pi]\right) \leq R_n\left(H^\omega[0,\pi];\mathcal{T}^0,P^0\right) \leq 2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega(\tau)d\tau. \tag{1.3.22}$$

Требуемое равенство (1.3.3) с учётом соотношений (1.3.9) получаем из сопоставления оценки снизу (1.3.19) и оценки сверху (1.3.22). В частности, полагая $\omega(\tau)=\tau^\alpha$ $(0<\alpha\leq 1)$, для класса Гёльдера $H^\alpha[0,\pi]$ имеем:

$$\mathscr{E}_n\left(H^\alpha[0,\pi]\right) = 2n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\tau^\alpha dt = \frac{\pi^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{n^\alpha},\quad (0<\alpha\leq 1).$$

Теорема 1.3.1 полностью доказана.

Пусть $H_2^\omega[a,b]$ — класс функций f, определённых на отрезке $[a,b]$ и для любых точек $\tau, \tau\pm x \in [a,b]$ удовлетворяющих условию

$$|f(\tau+x)+f(\tau-x)-2f(\tau)| \leq 2\omega(|x|).$$

Ясно, что $H^\omega[0,\pi] \subset H_2^\omega[0,\pi]$, то есть класс $H_2^\omega[0,\pi]$, шире, чем класс $H^\omega[0,\pi]$. В этих обозначениях справедлива

Теорема 1.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида (1.3.7) на классе* $H_2^\omega[0,\pi]$ *наилучшей является квадратурная формула трапеций вида*

$$\int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau = \frac{\pi}{n}\left\{\frac{\varphi(0)+\varphi(\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n(\varphi). \qquad (1.3.23)$$

Погрешность формулы (1.3.23) равна

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[0,\pi]\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau. \qquad (1.3.24)$$

Доказательство. В самом деле, для рассматриваемой формулы (1.3.7), определённой узлами (1.3.19) и весами (1.3.21), оценка погрешности представима в виде

$$R_n(\varphi, \mathcal{T}^0, P^0) = \int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=0}^{n-1} p_k^0\varphi(\tau_k^0) =$$

$$= \int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau - \frac{\pi}{2n}[\varphi(0)+\varphi(\pi)] - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/(4n)} \left[\varphi(\tau)+\varphi(-\tau)-2\varphi(0)\right]d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/(4n)} \left[\varphi(\pi+\tau)+\varphi(\pi-\tau)-2\varphi(\pi)\right]d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left[\varphi\left(\frac{k\pi}{n}+\tau\right) + \varphi\left(\frac{k\pi}{n}-\tau\right) - 2\varphi\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right]d\tau.$$

Из полученного интегрального представления погрешности сразу имеем

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[0,\pi]\right) \le R_n\big(H_2^\omega[0,\pi], \mathcal{T}^0, P^0\big) \le$$

$$\le 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau = \mathscr{E}_n\left(H^\omega[0,\pi]\right). \qquad (1.3.25)$$

С другой стороны, в силу включение $H_2^\omega[0,\pi] \supset H^\omega[0,\pi]$, приходим к неравенству

$$\mathscr{E}_n(H_2^\omega[0,\pi]) \geq \mathscr{E}_n(H^\omega[0,\pi]) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau. \tag{1.3.26}$$

Сравнивая оценку сверху (1.3.25) с оценкой снизу (1.3.26), получаем нужное равенство (1.3.24). Теорема 1.3.2 доказана.

Следствие 1.3.1. *Для точной оценки погрешности формулы (1.3.2) на всём классе* $H_2^\omega[-1;1]$ *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau. \tag{1.3.27}$$

Доказательство. В самом деле, пользуясь равенством (1.3.8), как и в теореме 1.3.1, запишем нужное нам равенство

$$\mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \equiv \mathscr{E}_n\left(H_2[0,\pi]\right), \tag{1.3.28}$$

используя которое, благодаря равенству (1.3.24), сразу получаем соотношение (1.3.27). Следствие 1.3.1 доказано.

Легко заметит, что между двумя классами $H^\omega[-1,1]$ и $H_2^\omega[-1,1]$ можно определить промежуточный класс $H_{2-\alpha}^\omega[-1,1](0 \leq \alpha \leq 1)$ функций $f(x)$, определённых на отрезке $[-1,1]$ и для любых точек $x, x \pm t \in [-1,1]$ удовлетворяющих условию

$$|(1+\alpha)f(x+t) + (1-\alpha)f(x-t) - 2f(x)| \leq 2\omega(|t|). \tag{1.3.29}$$

Таким образом, из (1.3.29) при $\alpha = 1$ следует неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \omega(|t|), \tag{1.3.30}$$

а при $\alpha = 0$ имеем

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq 2\omega(|t|). \tag{1.3.31}$$

Из (1.3.30) и (1.3.31) вытекает следующее включение

$$H^{\omega}[-1,1] \subset H_{2-\alpha}[-1,1] \subset H_2[-1,1]. \qquad (1.3.32)$$

В этих обозначениях имеет место

Теорема 1.3.3. *Среди всевозможных квадратурных формул типа (1.3.1) на классе функций $H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1]$ единственной наилучшей формулой при любых α $(0 \le \alpha \le 1)$ является формула (1.3.2). На всем классе $H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1]$ точная оценка погрешности квадратурной формулы (1.3.2) равна*

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt. \qquad (1.3.33)$$

Доказательство. Из включения (1.3.32) сразу запишем

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \le$$

$$\le \mathscr{E}_n\left(H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) \le \mathscr{E}_n\left(H^{\omega}_{2}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right), \qquad (1.3.34)$$

и так как

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \mathscr{E}_n\left(H^{\omega}_{2}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt, \qquad (1.3.35)$$

то из (1.3.34) с учётом (1.3.35) следует, что

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt,$$

то есть для класса $H^{\omega}_{2-\alpha}[-1,1]$ $(0 \le \alpha \le 1)$ формула (1.3.2) является наилучшей. Теперь докажем, что формула (1.3.2) для класса $H^{2-\alpha}[-1,1]$ является единственной наилучшей квадратурной формулой типа Маркова. Допустим, что имеется другая квадратурная формула типа Маркова (1.3.1) с векторами узлов $T^* = \{t^*_k : -1 = t^*_0 < t^*_1 < \ldots < t^*_{n-1} < t^*_n = 1\}$ и коэффициентов $P^* := \{p_k^*\}_{k=0}^n$, которая на классе функций $H_{2-\alpha}^\omega[-1,1]$ $(0 \le \alpha \le 1)$ имеет точную оценку погрешности, равную правой части (1.3.33). А потому из экстремальной неравенства

$$2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt = \mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \inf_{(T,P)} R_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}; T, P\right) \le$$

$$\le R_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}; T^*, P^*\right) =$$

$$= 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt = \mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)$$

сразу следует, что

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= R_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}; T^*, P^*\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(t)dt.$$

Эта соотношение показывает, что квадратурная формула (1.3.2) с произвольными векторами узлов $T^* = \{t_k^* : -1 = t_0^* < t_1^* < ... < t_n^* = 1\}$ и коэффициентов $P^* := \{p_k^*\}_{k=0}^n$ должна быть также наилучшей для класса функций $H^\omega[-1,1]$, и мы пришли к противаречию. Теорема 1.3.3 доказана.

Теперь введём в рассмотрении квадратурную формулу крайние узлы которой не закреплены с концами отрезка $[-1,1]$ в общем виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right), \qquad (1.3.36)$$

задаваемую векторами узлов

$$T = \{t_k : \; -1 \le t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n \le 1\}$$

и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n^{(1)}\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right)$ — ошибка формулы на функции f. Требуется найти наилучшую весовую квадратурную формулу вида (1.3.36) для класса $H^\omega[-1,1]$. И здесь, при помощи замены (1.3.5) и равенств (1.3.6) вместо формулы (1.3.36) приходим к формулу

$$\int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(\tau_k) + R_n(\varphi). \tag{1.3.37}$$

Легко доказать, что для этой формулы имеют место соотношения (1.3.9) и (1.3.28).

Теорема 1.3.4. *Для классов $H^\omega[-1,1]$ и $H_2^\omega[-1,1]$ наилучшая квадратурная формула вида (1.3.36) является классическая квадратурная формула Эрмита-Чебышёва*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n\left(f, \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right). \tag{1.3.38}$$

Точная оценка погрешности формулы (1.3.38) на вышеуказанных классах функций равна

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \mathscr{E}_n\left(H_2^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau. \tag{1.3.39}$$

Доказательство. Равенство

$$\mathscr{E}_n\left(H^\omega[-1,1], \left(\sqrt{1-t^2}\right)^{-1}\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau \tag{1.3.40}$$

является следствием результата теоремы 1 из работы [10] для одномерного случая. В частности, из этой работы следует, что среди всех квадратурных формул вида (1.3.37) наилучшей на классе $H^\omega[0,\pi]$ является квадратурная формула

$$\int\limits_0^\pi \varphi(\tau)d\tau = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n(\varphi). \tag{1.3.41}$$

Точная оценка погрешности формулы (1.3.41) равна

$$\mathscr{E}_n\left(H^{\omega}[0,\pi]\right) = 2n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega(\tau)d\tau. \qquad (1.3.42)$$

В силу (1.3.5) и (1.3.6) наилучшая квадратурная формула (1.3.41) соответствует классической квадратурной формуле (1.3.38), погрешность которой на рассматриваемых классах определяется формулой (1.3.39), откуда и вытекает утверждение теоремы 1.3.4.

В заключение отметим, что полученный в теореме 1.3.4 результат означает следующее: наилучшая квадратурная формула типа Маркова (1.3.2) в качестве узлов имеет точки $\tau_k = \cos(k\pi/n)$ $(k = \overline{0,n})$, являющиеся экстремальными точками многочлена Чебышёва первого рода (см., напр. [25, с.78])

$$T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau) = 2^{n-1}\tau^n + \ldots \ \ (n \in \mathbb{N}),$$

то есть точки, в которых выполняются равенства

$$T_n(\tau_k) = \cos(n \arccos \tau_k) = (-1)^k, \quad k = \overline{0,n},$$

а узлы $t_k = \cos((2k-1)\pi)/(2n)$ $(k = \overline{0,n})$ квадратурной формулы Эрмита – Чебышёва являются нулями этого многочлена, то есть

$$T_n(t_k) = \cos(n \arccos t_k) \equiv 0, \ \ k = \overline{1,n}.$$

§1.4. Применение наилучших квадратурных формул (1.2.17) и (1.3.2) к вычислению двумерных сингулярных интегралов с неподвижными особенностями в круге

В работах [7, 22, 24], рассматривается задача приближённого вычисления двумерного сингулярного интеграла следующего вида

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r^2} u(x)dx, \quad r = r(0,x), \tag{1.4.1}$$

где $S := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ – единичный круг с центром в начале координат, $u(x) = u\big(x_1, x_2\big)$ – данная непрерывная плотность, $f(\theta)$ - характеристика интеграла, r и θ – полярные координаты точки $x = (x_1, x_2)$ относительно начале координат. В указанных работах для простейшего класса функций – класса Липщица доказывается сходимость кубатурного процесса полученных кубатурных формул.

Здесь мы дадим приложение теорем 1.2.2 и 1.3.1 к более общему сингулярному интегралу со особенностями следующего вида

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}} u(x)dx. \tag{1.4.2}$$

Вычисление интеграла (1.4.2) сводим к вычислению одномерных интегралов, для которых в предыдущем параграфе найдены оптимальные квадратурные формулы для конкретных классов функций. Отметим, что необходимым условием существования как интеграла (1.4.1), так и интеграла (1.4.2) является выполнение условия

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0. \tag{1.4.3}$$

Переходя к полярной координате, интеграл (1.4.2) приводим к следующему виду

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}} u(x)dx = \begin{vmatrix} x_1 = r\cos\theta, & 0 \leq r \leq 1, & dx = rdrd\theta \\ x_2 = r\sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, & r = x_1^2 + x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)u(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta}{r\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad (1.4.4)$$

где положено

$$F_u(r) = \int_0^{2\pi} f(\theta)u(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta,$$

причем

$$F_u(0) = \int_0^{2\pi} f(\theta)u(0,0)d\theta = u(0,0) \cdot \int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0. \qquad (1.4.5)$$

Обозначим через $W_0^{(1)}(M;S)$ класс функций $u(x_1, x_2)$ и непрерывных в круге S и удовлетворяющих условию $F_u(r) \in W_0^{(1)}(M;0,1)$. Таким образом класс $H^\omega(S)$ – функций $u(x_1, x_2) \subset C(S)$, таких, для которых $F_u(r) \in H^\omega[0,1]$.

Для сингулярного интеграла (1.4.2), исходя из интеграла, стоящего в правой части равенства (1.4.4), введём в рассмотрение квадратурную формулу

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} = \sum_{k=1}^n p_k F_u(r_k) + R(F_u), \qquad (1.4.6)$$

определяемая векторами узлов $X = \{r_k\}_{k=1}^n$, $(0 < r_1 < ... < r_n < 1)$ и коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^n$, $R_n(F_u) = R_n(F_u; X, P)$ - ошибка формулы (1.4.6) на функцию $F_u \in W_0^{(1)}(M;S)$.

Применяя теоремы 1.2.1 в силу (1.2.10) и (1.2.11) отыскании наилучших весовых квадратурных формул к формуле (1.4.6), получаем

Теорема 1.4.1 *Среди всевозможных кубатурных формул вида (1.4.6) наилучшей для класса функций $W_0^{(1)}(M;S)$ является единственная формула*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)u(x)dx}{r\sqrt{1-r^2}} = \int_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^n p_k F_u\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}\right) + R(F_u). \qquad (1.4.7)$$

Для погрешности наилучшей кубатурной формулы (1.4.7) на всём классе функций $W_0^{(1)}(M;S)$ *справедлива точная оценка*

$$\mathscr{E}\big(W_0^{(1)}(M;S)\big) = \mathscr{E}\big(W_0^{(1)}(M;0,1)\big) = \frac{\pi M}{4n}.$$

Применяя теорему 1.3.1 к формуле (1.4.6), получаем следующий результат.

Теорема 1.4.2 *Для класса функций* $H^\omega(S)$ *наилучшей формула вида (1.4.6) является*

$$\iint\limits_{(S)} \frac{f(\theta)}{r\sqrt{1-r^2}}u(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{F_u(r)dr}{\sqrt{1-r^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left\{\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)\right\} + R_n\left(f;\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right). \qquad (1.4.8)$$

Оценка погрешности формулы (1.4.8) на всём классе функций $H^\omega(S)$ *равна*

$$\mathscr{E}_n\big(H^\omega(S)\big) = \mathscr{E}\big(H^\omega[0,1]\big) = n\int\limits_0^{\pi/n} \omega(t)dt.$$

Отсюда для класса Гёльдера $H^\alpha[0,1]$ $(0<\alpha\le 1)$ *имеем*

$$\mathscr{E}_n\left(H^\alpha(S);\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{1}{n^\alpha}\ (0<\alpha\le 1).$$

При $\alpha=1$*, для класса Липщица имеем*

$$\mathscr{E}_n\left(H^1(S);\frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi^2}{2n}.$$

ГЛАВА II

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

§2.1. Обобщение результатов параграфа 1.3 первой главы на двумерный случай

Пусть функция $f(x,y)$, задана и интегрируема в прямоугольной области $Q=\{a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$. Рассмотрим весовую кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} q(x,y)f(x,y)dxdy=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f;q), \tag{2.1.1}$$

который задаётся векторами $(X,Y;P)$ узлами

$$X:=\{x_k : a=x_0<x_1<...<x_{m-1}<x_m=b\},$$

$$Y:=\{y_i : c=y_0<y_1<...<y_{n-1}<y_n=d\}$$

и коэффициентами $P=\{p_{ki}\}_{k=0,i=0}^{m,n}$, $R_{mn}(f,q)=R_{mn}(f;q;X,Y;P)$ – погрешность формулы (2.1.1). Предполагается, что весовая функция $q(x,y)\geq 0$ интегрируема хотя бы в несобственном смысле Римана в прямоугольнике Q. Точки прямоугольника Q обозначим через $M=M(x,y)$, а узлы формулы через $M_{kl}:=M(x_k,y_l)$ $(k=\overline{0,m}; l=\overline{0,n})$.

Всюду далее введём в рассмотрении векторов узлов и коэффициентов $(X,Y;P)$, для которых кубатурная формула (2.1.1) имеет смысл, то есть только те векторов $(X,Y;P)$, для которых значение интеграла в левой части (2.1.1) приближённо равно кубатурной сумме стоящей в правой части равенства (2.1.1).

Напомним общую постановку экстремальной задачи отыскания наилучших или оптимальных весовых кубатурных формул в смысле С.М.Никольского [20, с.176]. В сущности, это постановка такой же, как в одномерном случае, но ради полноты изложения сформулируем исследуемую задачу для функции двух переменных.

Для заданного и опрелелённого в области Q класс $\mathfrak{M}$ функций $\{f\}$, величина

$$R_{mn}(\mathfrak{M}; q; X, Y; P) = \sup\{|R_{mn}(f; q; X, Y; P)| : f \in \mathfrak{M}\}$$

определяет точную верхнюю грань погрешности на всем классе $\mathfrak{M}$.

Задача состоит в отыскании минимума значения величины

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q) := \inf\{R_{mn}(\mathfrak{M}; q; X, Y; P) : (X, Y; P)\} \tag{2.1.2}$$

и в указании явного вида вектор узлов и коэффициентов $(X^0, Y^0; P^0)$ $(X^0 = \{x_k^0\}, Y^0 = \{y_i^0\}, P^0 = \{p_{ki}^0\})$, на котором реализуется нижняя грань в (2.1.2), то есть выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{mn}(\mathfrak{M}; q) := R_{mn}(\mathfrak{M}; q; X^0, Y^0; P^0).$$

Если последнее равенство выполняется, то кубатурная формула (2.1.1) с решёткой узлов $M_{ki}^0 = (x_k^0, y_i^0)$ и коэффициентов p_{ki} даёт наименьшую на всем классе $\mathfrak{M}$ погрешность среди всевозможных кубатурных формул имеющий вид (2.1.1) и определяет *наилучшей* или *оптимальной* кубатурной формулы для класса функций $\mathfrak{M}$.

Приведём определение классов функций двух переменных, для которых решим задачу (2.1.2) для конкретных весовых функций.

Обозначим через $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ – класс заданных и непрерывных на прямоугольнике $Q := \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ функций $f(x, y)$, для любых двух точек $(x', y'), (x'', y'') \in Q$ удовлетворяющих условию

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \le \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|), \tag{2.1.3}$$

где $\omega_1(t), \omega_2(t)$ – заданные модули непрерывности, для которых выполняются неравенства

$$0 \le \omega_1(t'') - \omega_1(t') \le \omega_1(t'' - t'),\quad 0 \le t' \le t'' \le b - a,\ \omega_1(0) = 0$$

$$0 \le \omega_2(\tau') - \omega_2(\tau'') \le \omega_2(\tau'' - \tau'), \quad 0 \le \tau' \le \tau'' \le d - c, \; \omega_2(0) = 0.$$

Пусть $H^{\omega}(\rho_p, Q)$ – класс функций $f(x, y)$, заданных и непрерывных на области Q и таких, что

$$|f(M') - f(M'')| \le \omega\left[\rho_p(M', M'')\right], \tag{2.1.4}$$

где $\rho_p(M', M'')$ – $l_p(1 \le p \le \infty)$ - расстояние между точками $M'(x', y')$ и $M''(x'', y'')$ из Q:

$$\rho_p(M', M'') = \sqrt[p]{|x' - x''|^p + |y' - y''|^p} \;\; (1 \le p < \infty),$$

$$\rho_\infty(M', M'') = \max\{|x' - x''|, |y' - y''|\}, \; p = \infty,$$

а $\omega(t)$ – заданный на отрезке $0 \le t \le \sqrt[p]{(b-a)^p + (d-c)^p}$, $(1 \le p \le \infty)$ модуль непрерывности.

Основным результатом данного параграфа является следующая **Теорема 2.1.1** *Пусть в области* $Q = \{-1 \le x, y \le 1\}$ *задана весовая функция* $q(x, y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, *интегрируемая в несобственном смысле.*

Тогда среди всех кубатурных формул вида (2.1.1) наилучшей для классов функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ *и* $H^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \le p < \infty)$ *является следующая обобщённая трапеция*

$$\iint\limits_{(Q)} \frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \frac{\pi^2}{mn}\{\frac{1}{4}[f(-1,-1) + f(-1,1) + f(1,-1) + f(1,1)] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f\left(-1, \cos\frac{i\pi}{n}\right) + f\left(1, \cos\frac{i\pi}{n}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\cos\frac{k\pi}{m}, -1\right) + f\left(\cos\frac{k\pi}{m}, 1\right)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\cos\frac{k\pi}{m}, \cos\frac{i\pi}{n}\right)\} + R_{mn}(f, q). \tag{2.1.5}$$

На указанных классах функций точная оценка погрешности наилучшей кубатурной формулы (2.1.5) равна

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega_1,\omega_2}(Q),q\right)=2\pi m\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_1(t)dt+2\pi n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(\tau)d\tau, \qquad (2.1.6)$$

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p,Q),q\right)=4mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \qquad (2.1.7)$$

Доказательство. Запишем кубатурную формулу с весом $q(x,y)=1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ в виде формулу Маркова

$$\iint\limits_{(Q)}\frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)+R_{mn}(f,q). \qquad (2.1.8)$$

В левой части (2.1.8) выполним замену переменных

$$x=\cos t, y=\cos\tau,\ -1\le x,y\le 1,\ \ 0\le t,\tau\le\pi. \qquad (2.1.9)$$

Обозначая $f(\cos t,\cos\tau)=\varphi(t,\tau)$ и воспользуясь (2.1.9), запишем

$$x_k=\cos t_k, y_i=\cos\tau_i,\ -1\le x_k,y_i\le 1,\ \ 0\le t_k,\tau_i\le\pi, \qquad (2.1.10)$$

$$f(\cos t_k,\cos\tau_i)=\varphi(t_k,\tau_i),\quad k=\overline{0,m}; i=\overline{0,n}.$$

С учётом равенств (2.1.9) и (2.1.10) кубатурную формулу с весом q запишем в виде следующей кубатурной формулы без веса

$$\iint\limits_{(G)}\varphi(t,\tau)dtd\tau=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}\varphi(t_k,\tau_i)+R_{mn}(\varphi), \qquad (2.1.11)$$

где $G=\{0\le t,\tau\le\pi\}$.

Для нас важным является то обстоятельство, что при осуществлении замены (2.1.9) погрешности кубатурной формулы (2.1.8) для функции $f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ совпадает с погрешности кубатурной формулы (2.1.11) для функции $\varphi\in H^{\omega_1,\omega_2}(G)$. В самом деле, в силу (2.1.9) и (2.1.10) получаем

$$R_{mn}(f;q)=\iint\limits_{(Q)}\frac{f(x,y)dxdy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}-\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}p_{ki}f(x_k,y_i)=$$

$$= \iint\limits_{(G)} f(\cos t, \cos\tau)dtd\tau - \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki} f(\cos t_k, \cos\tau_i) =$$

$$= \iint\limits_{(G)} \varphi(t,\tau)dtd\tau - \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} p_{ki}\varphi(t_k,\tau_i) = R_{mn}(\varphi).$$

Таким образом, произвольной функций $f \in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ соответствует функция $\varphi \in H^{\omega_1,\omega_2}(G)$ и наоборот, а потому, переходя в равенстве

$$R_{mn}(f,q) = R_{mn}(\varphi)$$

к верхний грани по функциям из соответствующих классов, получаем

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(G)), \tag{2.1.12}$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega,p}_{\rho}(Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega,p}_{\rho}(G)), \tag{2.1.13}$$

Из (2.1.12) и (2.1.13) вытекает, что для нахождения точную оценку погрешности наилучшей кубатурной формулы вида (2.1.8) с весом q на соответствующих классах функции $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega}(\rho_p, Q)$, необходимо найти точную оценку погрешности наилучшей кубатурной формулы вида (2.1.11) на классах функции $H^{\omega_1,\omega_2}(G)$ и $H^{\omega}(\rho_p, G)$. Но этот факт следует из результат работы [37, 42], где доказано, что для наилучшей кубатурной формулы (2.1.11) на указанных классах функций справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(G)) = 2\pi m \int\limits_{0}^{\pi/(2m)} \omega_1(t)dt + 2\pi n \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega_2(\tau)d\tau, \tag{2.1.14}$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, G)) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2m)} \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dtd\tau. \tag{2.1.15}$$

В частности, если $\omega_1(t) = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha \le 1)$, $\omega_2(\tau) = \tau^{\beta}$ $(0 < \beta \le 1)$ и $\omega(t) = t$, то из (2.1.14) и (2.1.15) получаем

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{t^{\alpha}}(\rho_{\infty}, G)) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2m)} \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \max\left\{t^{\alpha}, \tau^{\alpha}\right\} dtd\tau =$$

$$= 4mn \begin{cases} \dfrac{\pi^{2+\alpha}}{(\alpha+1)(2m)^{\alpha}}, & m < n, \\ \dfrac{\pi^{2+\alpha}}{(\alpha+1)(2n)^{\alpha}}, & m \geq n. \end{cases}$$

Требуемые равенства (2.1.6) и (2.1.7) в силу (2.1.14) и (2.1.15) вытекают из соотношений (2.1.12) и (2.1.13). Теорема 2.1.1 доказана. Из теоремы 2.1.1 следует следующее

Следствие 2.1.1. *Для класса $H^{\omega}(\rho_p, G)$, условиях теоремы 2.1.1 при $p = \infty$ и $p = 1$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_{\infty}, G)) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2m)} \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \max\{\omega(t), \omega(\tau)\} dt d\tau, \tag{2.1.16}$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_{1}, G)) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2m)} \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \omega(t+\tau) dt d\tau. \tag{2.1.17}$$

Полагая в равенствах (2.1.16) и (2.1.17) $\omega(t) = t^{\alpha}$ $(0 < \alpha \leq 1)$, будем иметь

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_{\infty}, G)) = \frac{4\pi^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}} \max\left\{\frac{n}{m^{\alpha}}, \frac{m}{n^{\alpha}}\right\},$$

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_{1}, G)) = 4mn \int\limits_{0}^{\pi/(2n)} \left\{ \int\limits_{0}^{\pi/(2m)} (t+\tau)^{\alpha} dt \right\} d\tau =$$

$$= \frac{4mn}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{\pi}{2m}\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha+2} \right].$$

Пусть $\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ – классы функций $f(x,y)$, определённых в квадрате $Q = \{-1 \leq x, y \leq 1\}$, для которых в точках $(x,y) \in Q$ и $(x \pm t, y \pm \tau) \in Q$ выражение

$$|f(x+t, y+\tau) + f(x+t, y-\tau) + f(x-t, y+\tau) + f(x-t, y-\tau) - 4f(x,y)|$$

не превосходит $4[\omega_1(|t|) + \omega_2(|\tau|)]$ или $4\omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right)$.

Имеют место следующая включения $H^{\omega_1,\omega_2}(Q) \subset \tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}(\rho_p, Q) \subset \tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$, то есть вновь введенные классы функций $\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$ являются шире, чем соответствующие классы $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$, $H^{\omega}(\rho_p, Q)$.

Теорема 2.1.2. *Среди всевозможных кубатурных формул (2.1.8) для классов* $\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ *и* $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$, $(1 \le p \le \infty)$ *наилучшей является формула (2.1.5). Для погрешности формулы (2.1.5) имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q), q\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega_1,\omega_2}(Q), q\right) =$$

$$= 2\pi m \int\limits_0^{\pi/(2m)} \omega_1(t)dt + 2\pi n \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega_2(\tau)d\tau, \tag{2.1.18}$$

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q), q\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p, Q), q\right) =$$

$$= 4mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right) dt d\tau, \tag{2.1.19}$$

где величины, стоящие в правых частях равенств (2.1.18) и (2.1.19), соответственно определены соотношениями (2.1.6) и (2.1.7).

Доказательство. Докажем, например, равенство (2.1.18). Для этого, в силу установленного равенства

$$\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, Q), q) = \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, Q)),$$

нам достаточно доказать справедливость соотношения

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)) = \mathcal{E}_{mn}(H^{\omega}(\rho_p, Q)), \tag{2.1.20}$$

откуда, в силу очевидного равенства

$$\mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q), q\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)\right),$$

сразу следует соотношение (2.1.19). Итак, докажем (2.1.20). Для классической кубатурной формулы трапеций по области $G := \{0 \le t, \tau \le \pi\}$, заданной вектором $(T^*, \mathcal{T}^*; P^*)$ узлов и коэффициентов определяемые равенствами

$$T^* = \{t_k^* : t_k^* = kh, \ k = 0, 1, ..., m; \ h = \pi/m\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{\tau_i^* : \tau_i^* = i\eta,\ i = 0, 1, ..., n;\ \eta = \pi/n\},$$

$$P^* = \{p_{00}^* = p_{m0}^* = p_{0n}^* = p_{mn}^* = h\eta/4;$$

$$p_{0i}^* = p_{mi}^* = h\eta/2;\ i = 1, 2, ..., n-1;$$

$$p_{k0}^* = p_{kn}^* = h\eta/2;\ k = 1, 2, ..., m-1;$$

$$p_{ki}^* = h\eta;\ k = 1, 2, ..., m-1;\ i = 1, 2, ..., n-1;\}$$

легко проверить, что погрешность кубатурной формулы имеет вид

$$R_{mn}(f; T^*, \mathcal{T}^*; P^*) = \frac{1}{4}\iint\limits_{(G^*)}[f(\pm t, \pm\tau) - f(0,0)]\,dtd\tau +$$

$$+\frac{1}{4}\iint\limits_{(G^*)}[f(\pm t, \pi \pm \tau) - f(0, \pi)]dtd\tau + \frac{1}{4}\iint\limits_{(G^*)}[f(\pi \pm t, \pm\tau) - f(\pi, 0)]dtd\tau +$$

$$+\frac{1}{4}\iint\limits_{(G^*)}[f(\pi \pm t, \pi \pm \tau) - f[\pi, \pi]]dtd\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\iint\limits_{(G^*)}[f(t_k^* \pm \tau, \pm\tau) - f(t_k^*, 0)]dtd\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\iint\limits_{(G^*)}[f(t_k^* \pm t, \pi \pm \tau) - f(t_k^*, \pi)]dtd\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\iint\limits_{(G^*)}[f(\pm t, \tau_i^* \pm \tau) - f(0, \tau_i^*)]dtd\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\iint\limits_{(G^*)}[f(\pi \pm t, \tau_i^* \pm \tau) - f(\pi, \tau_i^*)]dtd\tau +$$

$$+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\iint\limits_{(G^*)}[f(t_k^* \pm t, \tau_i^* \pm \tau) - f(t_k^*, \tau_i^*)dtd\tau, \qquad (2.1.21)$$

где $G^* := \{-h/2 \le t \le h/2, \ \ -\eta/2 \le \tau \le \eta/2\}$.

Оценим по модулю равенство (2.1.21) и вспомнив определение класса $\tilde{H}^\omega(\rho_p, G)$, после выполнения элементарных вычислений приходим к следующую неравенству

$$|R_{mn}(f; T^*, \mathcal{T}^*; P^*)| \le$$

$$\le 4\int_0^{h/2}\int_0^{\eta/2}\omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right)dtd\tau + 4(m-1)\int_0^{h/2}\int_0^{\eta/2}\omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right)dtd\tau +$$

$$+4(n-1)\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{\eta/2}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau+4(m-1)(n-1)\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{\eta/2}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau=$$

$$=4mn\int\limits_0^{h/2}\int\limits_0^{\eta/2}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau=4mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau=$$

$$=\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p,G)). \tag{2.1.22}$$

Из неравенства (2.1.22) сразу следует оценка сверху

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^\omega(\rho_p,G))\le|R_{mn}(f;T^*,\mathcal{T}^*;P^*)|\le\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p,G)). \tag{2.1.23}$$

Противоположное неравенство

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^\omega(\rho_p,G))\ge\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p,G)) \tag{2.1.24}$$

получаем из включения $H^\omega(\rho_p,G)\subset\tilde{H}^\omega(\rho_p,G)$ $(1\le p\le\infty)$.

Из сопоставления оценки сверху (2.1.23) и оценки снизу (2.1.24) вытекает требуемое равенство (2.1.20), и тем самим равенства (2.1.18) доказаны. Аналогичными рассуждениями, используя равенство (2.1.20), легко убедиться в справедливости (2.1.18), и этим теорема 2.1.2 доказана.

Следствие 2.1.2. *В условиях теоремы 2.1.2 справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^{\omega_1,\omega_2}(G))=$$

$$=\mathcal{E}_{mn}(H^{\omega_1,\omega_2}(G))=2\pi m\int\limits_0^{\pi/(2m)}\omega_1(t)dt+2\pi n\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega_2(t)dt;$$

$$\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^\omega(\rho_p,Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p,Q),q)=\mathcal{E}_{mn}(\tilde{H}^\omega(\rho_p,G))=$$

$$=\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p,G))=4mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau.$$

§2.2. Оптимальная кубатурная формула общего вида для класса функций $H^{\omega}(\rho_p, Q)$

Хорошо известно, что решение экстремальной задачи отыскания наилучшей для заданного класса функций квадратурной и кубатурной формулы и нахождения точной оценки её остатка является одной из наиболее важных задач приближённого интегрирования. При решении этой важной задачи для различных классов функций получен ряд окончательных результатов, однако до настоящего времени для многомерных интегралов существенные результаты получены в небольшом количестве.

Исходя из этого контекста здесь рассматривается задача отыскании минимальной погрешности кубатурных формул на заданном классе функций двух переменных, определяемый модулем непрерывности от расстояния между точками в обычном l_p – метрике, где $1 \le p \le \infty$ области интегрирования.

В данном параграфе экстремальная задача (2.1.2) рассматривается для $q(x,y) \equiv 1$ для некоторых классов функций, задаваемых модулями непрерывности от l_p – расстояния между точками решётки узлов области $Q := [a,b] \times [c,d]$. Таким образом, рассматривается кубатурная формула

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} p_{kl} f(x_k, y_l) + R_{mn}(f), \qquad (2.2.1)$$

определяемая вектором $(X, Y; P)$ узлов

$$X = \{x_k : a \le x_1 < x_2 < ...x_{m-1} < x_m \le b\},$$

$$Y = \{y_l : c \le y_1 < y_2 ... < y_{n-1} < y_n \le d\}$$

и коэффициентов $P = \{p_{kl}\}$ $(k = \overline{1,m};\ l = \overline{1,n})$, $R_{mn}(f) := R_{mn}(f : X, Y; P)$ – погрешность формулы на функции $f(x,y)$.

Во втором параграфе в качестве $\mathfrak{M}$ рассмотрен класс $H^{\omega}(\rho_p, Q)$ – функций $f(x,y)$, определённых на Q, для любых двух точек $(x', y'), (x'', y'') \in$

Q, удовлетворяющих условию

$$|f(x^{'},y^{'})-f(x^{''},y^{''}|\leq\omega\left(\sqrt[p]{|x'-x''|^p+|y'-y''|^p}\right),(1\leq p<\infty). \qquad (2.2.2)$$

В случае $p=\infty$, неравенство (2.2.2) превращается в следующее

$$|f(x^{'},y^{'})-f(x^{''},y^{''}|\leq\omega\left(\max\left\{|x^{'}-x^{''}|,|y^{'}-y^{''}|\right\}\right)=$$

$$=\max\left\{\omega\left(|x^{'}-x^{''}|\right),\omega\left(|y^{'}-y^{''}|\right)\right\}.$$

При доказательство основного результата данного параграфа будем пользоваться хорошо известным леммой [10].

Лемма 2.2.1 [10]. *Пусть в области Q фиксирована произвольная система точек $M_1,M_2,...,M_\nu$ и функция $q(M)$ определена равенством*

$$q(M)=\min_{1\leq j\leq n}\varphi[\rho(M,M_j)],M\in Q,$$

где $\varphi(t)$ – неубывающая и полуаддитивная, то есть удовлетворяющая соотношениям

$$0\leq\varphi(t_2)-\varphi(t_1)\leq\varphi(t_2-t_1),\ 0\leq t_1\leq t_2\leq\theta,$$

(θ – диаметр области Q) функция, а $\rho(M,M_j)$ – какое-нибудь расстояние между точками M и M_j из Q. Тогда для точек $M^{'},M^{''}\in Q$ выполняется неравенство

$$|q(M^{'})-q(M^{''})|\leq\varphi[\rho(M^{'},M^{''})].$$

Лемма 2.2.2 [10]. *Пусть $\varphi(t)$ – неубывающая для $0\leq t\leq b-a$ функция. При фиксированном $n\in\mathbb{N}$ каждому вектору*

$$X=\{x_k:a\leq x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n\leq b\} \qquad (2.2.3)$$

сопоставим функцию

$$g(X;x)=\min_{1\leq k\leq n}\varphi(|x-x_k|),\ a\leq x\leq b.$$

Тогда, если

$$X^0 := \{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\},$$

где $x_k^0 = a + (2k-1)h,\ \ h = (b-a)/(2n)$, *то для любого вектора* X *вида (2.2.3) имеет место неравенство*

$$\int\limits_a^b g(X;x)dx \geq \int\limits_a^b g(X^0;x)dx.$$

Сформулируем основной результат работы второго параграфа второй главы.

Теорема 2.2.1. *Среди всевозможных кубатурных формул (2.2.1) для классов* $H^\omega(\rho_p, Q)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *наилучшей является формула*

$$\iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy = 4h\eta\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f[a+(2k-1)h,\ c+(2l-1)\eta] + R_{mn}(f), \quad (2.2.4)$$

где $h = (b-a)/(2m),\ \ \eta = (d-c)/(2n)$. *Для точной оценки погрешности формулы (2.2.3) на рассматриваемой классе функций*

$$\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p, Q)) = \begin{cases} 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega(\sqrt[p]{t^p+\tau^p})dtd\tau, \ 1 \leq p < \infty, \\ 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \max\{\omega(t), \omega(\tau)\}dtd\tau, \ p = \infty. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Доказательство. Пусть $\tilde{H}^\omega(\rho_p, Q)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ – совокупность функций $f \in H^\omega(\rho_p, Q)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, обращающихся в нуль в узлах $M_{kl} = M(x_k, y_l)$ решётки, задаваемой произвольным вектором узлов (X,Y). Если $f \in \tilde{H}^\omega(\rho_p, Q)$, то мы получим

$$|f(M)| = |f(M) - f(M_{kl})| \leq \omega\left(\sqrt[p]{|x-x_k|^p + |y-y_l|^p}\right)$$

и, следовательно,

$$|f(M)| \leq \min_{(x_k,y_l)} \omega\left(\sqrt[p]{|x-x_k|^p + |y-y_l|^p}\right) := \mu_{X,Y}(x,y)$$

и по лемме 2.2.1, $\mu_{X,Y}(x,y) \in \tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)$ $(1 \le p \le \infty)$. В силу монотонного возрастания функции ω, запишем

$$\mu_{X,Y}(x,y) := \omega\left(\sqrt[p]{\min_k |x-x_k|^p + \min_l |y-y_l|^p}\right).$$

Но тогда, имеем

$$R_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q); X, Y\right) := \iint\limits_{(Q)} \mu_{X,Y}(x,y)dxdy = R_{mn}(\mu_{X,Y}).$$

Пусть теперь (X,Y) – произвольной фиксированный вектор узлов. Дважды применяя лемму 2.2.2 сначала относительно вектора X, а затем относительно вектора Y, получаем оценку

$$R_{mn}(\mu_{X,Y}) = \iint\limits_{(Q)} \mu_{X,Y}(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \mu_{X,Y}(x,y)dx \ge$$

$$\ge \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b \mu_{X^0,Y}(x,y)dx \ge \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dy =$$

$$= \iint\limits_{(Q)} \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dxdy = R_{mn}(\mu_{X^0,Y^0}).$$

С другой стороны, в силу включения $\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q) \subset H^{\omega}(\rho_p, Q)$ и формулы (2.1.2) сразу запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_p, Q)\right) \ge \mathcal{E}_{mn}\left(\tilde{H}^{\omega}(\rho_p, Q)\right) =$$

$$= \inf_{(X,Y)} R_{mn}(\mu_{X,Y}) = R_{mn}(\mu_{X^0,Y^0}) = \iint\limits_{(Q)} \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dxdy. \tag{2.2.6}$$

Остаётся вычислить интеграл в правой части (2.2.6). Получаем

$$R_{m,n}(\mu_{X^0,Y^0}) = \iint\limits_{(Q)} \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \int\limits_{a+2(k-1)h}^{a+2kh} \int\limits_{c+2(l-1)\eta}^{c+2l\eta} \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(\int\limits_{a+2(k-1)h}^{a+(2k-1)h} + \int\limits_{a+(2k-1)h}^{a+2kh} \right) \left(\int\limits_{c+2(l-1)\eta}^{c+(2l-1)\eta} + \int\limits_{c+(2l-1)\eta}^{c+2l\eta} \right) \mu_{X^0,Y^0}(x,y)dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(\int\limits_{a+2(k-1)h}^{x_k^0} + \int\limits_{x_k^0}^{a+2kh} \right) \left(\int\limits_{c+2(l-1)\eta}^{y_l^0} + \int\limits_{y_l^0}^{c+2l\eta} \right) \omega \left(\sqrt[p]{|x - x_k^0|^p + |y - y_l^0|^p} \right) dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} 4 \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega \left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p} \right) dtd\tau = 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega \left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p} \right) dtd\tau.$$

откуда сразу следует оценка снизу

$$\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p, Q)) \geq 4mn \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \omega(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}) dtd\tau. \qquad (2.2.7)$$

С целью получения оценки сверху величины (2.1.2) введём в рассмотрении кубатурную формулу (2.2.1), заданную узлами

$$X^0 := \{x_k^0 : x_k^0 = a + (2k-1)h,\ k = 1, 2, ..., m;\ h = (b-a)/(2m)\},$$

$$Y^0 := \{y_l^0 : y_l^0 = c + (2l-1)\eta,\ l = 1, 2, ..., n;\ \eta = (d-c)/(2n)\}$$

и коэффициентами $p_{kl}^0 := 4h\eta$ ($k = \overline{1,m}$; $l = \overline{1,n}$). Заметим, что коэффициенты p_{kl}^0 определяют площадь прямоугольника

$$d_{kl}^0 := \{a + (2k-1)h < x < a + 2kh;\ c + (2l-1)\eta < y < c + 2l\eta\}$$

с центром решётке узлов $M(x_k^0, y_l^0) := M\big(a + (2k-1)h,\ c + (2l-1)\eta\big)$, а потому для любого $f \in H^\omega(\rho_p, Q)$ оценивая по модулю, получаем

$$R_{mn}(f; X^0, Y^0; P^0) = \left| \iint\limits_{(Q)} f(x,y)dxdy - \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} p_{kl}^0 f(x_k^0, y_l^0) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \iint\limits_{(d_{kl}^0)} [f(x,y) - f(x_k^0, y_l^0)] dxdy \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\iint\limits_{(d^0_{kl})}\omega\left(\sqrt[p]{|x-x_k^0|^p+|y-y_l^0|^p}\right)dxdy=$$

$$=4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \tag{2.2.8}$$

Таким образом, оценка сверху следует из неравенство (2.2.8)

$$\mathcal{E}_{mn}(H^\omega(\rho_p,Q))\leq 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega(\sqrt[p]{t^p+\tau^p})dtd\tau. \tag{2.2.9}$$

Равенства (2.2.5) получаем из сравнения оценок (2.2.7) и (2.2.9). Теорема 2.2.1 доказано.

Из результата теоремы 2.2.1, в частности, при $p=2$ получаем результат Н.П.Корнейчука [20, с.185].

Пусть $H_1^\omega(\rho_p,Q)$ $(1\leq p\leq\infty)$ – класс функций $f(x,y)$, удовлетворяющих в прямоугольнике Q условию

$$|f(x\pm t,y\pm\tau)-4f(x,y)|\leq 4\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right) \tag{2.2.10}$$

при $1\leq p<\infty$ и

$$|f(x\pm t,y\pm\tau)-4f(x,y)|\leq 4\max\{\omega(t),\omega(\tau)\}$$

при $p=\infty$. Имеет место

Теорема 2.2.2. *Среди всевозможных кубатурных формул вида (2.2.1) наилучшей для класса $H_1^\omega(\rho_p;Q)$ $(1\leq p\leq\infty)$ является формула (2.2.4) узлы которой заданы векторами*

$$X^0:=\{x_k^0 : x_k^0=a+(2k-1)h,\ k=1,2,...,m;\ h=(b-a)/(2m)\},$$

$$Y^0:=\{y_l^0 : y_l^0=c+(2l-1)\eta,\ l=1,2,...,n;\ \eta=(d-c)/(2n)\},$$

а наилучшие коэффициенты определены вектором $P^0=\{p_{kl}^0 : p_{kl}^0 = 4h\eta,\ k=\overline{1,m};\ l=\overline{1,n}\}$. Точные оценки погрешности на классах $H^\omega(\rho_p;Q)$

и $H_1^\omega(\rho_p;Q)$ *совпадают и имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H_1^\omega(\rho_p;Q)\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^\omega(\rho_p;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \quad (2.2.11)$$

Доказательство. Легко проверить, что для погрешности кубатурной формулы с вектор коэффициентами $P^0 = \{p_{kl}^0\}$ и вектор узлами (X^0, Y^0), где

$$x_k^0 = a + (2k-1)h,\ y_l^0 = c + (2l-1)\eta\ (k = \overline{1,m}; l = \overline{1,n})$$

в области $Q := \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, справедливо интегральное представление

$$R_{mn}(f; X^0, Y^0; P^0) =$$
$$= \sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^n \iint\limits_{(d_{kl}^0)} [f(x_k^0 \pm x, y_l^0 \pm y) - f(x_k^0, y_l^0)]dxdy. \quad (2.2.12)$$

С целью получении оценки сверху на классе $H_1^\omega(\rho_p;Q)$ $(1 \le p \le \infty)$ рассматриваемой кубатурной формулы, оценивая по модулю равенство (2.2.12) после некоторых упрощений, запишем

$$|R_{mn}(f; X^0, Y^0; P^0)| \le$$
$$\le \sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^n \iint\limits_{(d_{kl}^0)} \omega\left(\sqrt[p]{|x-x_k^0|^p + |y-y_l^0|^p}\right)dxdy =$$
$$= 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \quad (2.2.13)$$

Из неравенства (2.2.13) сразу следует оценка сверху

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H_1^\omega(\rho_p;Q)\right) \le \mathcal{E}_{mn}\left(H^\omega(\rho_p;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \quad (2.2.14)$$

Обратное неравенство

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H_1^\omega(\rho_p;Q)\right) \ge \mathcal{E}_{mn}\left(H^\omega(\rho_p;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau \quad (2.2.15)$$

получаем из того факта, что для этих классов $H_1^{\omega}(\rho_p;Q) \supset H^{\omega}(\rho_p;Q)$. Для получение требуемое равенство (2.2.11), сравниваем оценок (2.2.14) и (2.2.15), откуда и следует утверждение теоремы 2.2.2.

Следствие 2.2.1. *При $p=1$, в условиях теорем 2.2.1 и 2.2.2, имеет место следующее равенства*

$$\mathcal{E}_{mn}\left(H_1^{\omega}(\rho_1;Q)\right) = \mathcal{E}_{mn}\left(H^{\omega}(\rho_1;Q)\right) = 4mn\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \omega\left(t+\tau\right)dtd\tau :=$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^\eta t\omega(t)dt + \eta\int\limits_\eta^h \omega(t)dt + \int\limits_h^{\eta+h}\left(\eta+h-t\right)\omega(t)dt, \ h>\eta; \\ \int\limits_0^h t\omega(t)dt + h\int\limits_h^\eta \omega(t)dt + \int\limits_\eta^{\eta+h}\left(h+\eta-t\right)\omega(t)dt, \ h<\eta; \\ \int\limits_0^h t\omega(t)dt + \int\limits_h^{2h}(2h-t)\omega(t)dt, \ h=\eta. \end{cases}$$

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найдены наилучшие квадратурные формулы с заданными весами для классов функций, задаваемых модулями непрерывности на конечном отрезке и на полуоси.

- Найдены наилучшие квадратурные и кубатурные формулы типа Маркова для классов функций одной и двух переменных, задаваемых модулями непрерывности.

- Найдены наилучшие весовые квадратурные формулы для классов функций с ограниченной по норме пространства $L_1[a, b]$ старшей производной.

- Найдена наилучшая кубатурная формула для класса $H^\omega(\rho_p, Q),\ p \geq 1$.

Полученные в диссертационной работе результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Они могут быть использованы при приближённом вычислении как обыкновенных интегральных уравнений, так и сингулярных интегральных уравнений, возникающих при решение граничных задач теории функций и уравнение в частных производных.

Список литературы

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле. ЖВМ и МФ, 2002, т.42, №4, с.451-458.

[2] Бабенко В.Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул. Матем.заметки, 1976, т.19, №3, с.313-332.

[3] Бабенко В.Ф. Об оптимальной оценке погрешности кубатурных формул на некоторых классах непрерывных функций. Analysis Mathematica, 1977, т.3, №1, с.3-9.

[4] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 632 с.

[5] Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. Саратов: Из-во Саратовского университета, 1983, 210 с.

[6] Боянов Б.Д. Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцируемых функций. ДАН СССР, 1977, т.232, №6, с.1233-1236.

[7] Габдулхаев Б.Г., Онегов Л.А. Кубатурные формулы для сингулярных интегралов. Изв. вузов. Матем., 1976, №7, с. 100-105.

[8] Гиршович Ю. О некоторых наилучших квадратурных формулах на бесконечном интервале. Изв. АН Эст.ССР. Сер. физ-мат. наук., 1975, №24/1, с.121-123.

[9] Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы. Успехи матем.наук, 1981, т.36, №4, с.107-159.

[10] Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных. Мат. заметки, 1968, т.3, №5, с.565-576.

[11] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. М: 1976.

[12] Крылов В.И. Приближённое вычисление интегралов. М.:Наука,1967. 130с.

[13] Кузьмина А.Л. Об одной наилучшей квадратурной формуле для интегралов с ядром Коши. Изв. вузов. Математика, 1980, т.216, №5, с.28-31.

[14] Левин М.И., Гиршович Ю.Г. Экстремальные задачи для кубатурных формул. ДАН ССР, 1977, т. 236, №6, с.1303-1306.

[15] Левин М.И., Гиршович Ю.Г. Наилучшие кубатурные формулы на множествах периодических функций. Изв.АН Эст.ССР, сер.физ.-матем., 1977, т.26, №2, с.114-122.

[16] Лигун А.А. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций. Мат. заметки, 1976, т. 19, №6, с.913-926.

[17] Лушпай Н.Е. О наилучших кубатурных формулах для одного класса дифференцируемых функций двух переменных. Сб.работ асп.ДГУ (матем. и механика). Днепропетровск, 1972, с.35-39.

[18] Лушпай Н.Е., Переверзев С.В. О наилучших кубатурных формулах для классов дифференцируемых функций двух переменных. В сб. Исслед. по совр. проблемам суммирования и приближения функций и их приложениями. Днепропетровск, 1976, с.38-45.

[19] Моторный В.П. О квадратурных формулах с равными коэффициентами. Укр.матем.журнал, 1995, т.47, №9, с. 1205-1208.

[20] Никольский С.М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988. - 254 с.

[21] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969, 500 с.

[22] Онегов Л.А. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярных интегралов с неподвижной особенностью. Изв.вузов, Математика, 1981, №9, с.76-79.

[23] Оскольков К.И. Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций. ДАН СССР. – 1979. – 249, №1. – с. 49-52.

[24] Пономаренко А. К. О построении кубатурных формул для некоторых двойных сингулярных интегралов. В. сб.: Вопр. вычисл. и прикл. матем. Ташкент, 1978, вып. 51, с. 110-118.

[25] Суетин П.К., Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979.

[26] Фарайдунов О.К. Об оценке погрешности квадратурной формулы Эрмита – Чебышёва. Изв. АН РТ, 2013, т.153, №4, с. 47-56.

[27] Фарайдунов О.К. О приближении суммами Фурье - Чебышёва в L_2 и значение поперечников некоторых классов функций. ДАН РТ, 2014, т. 57, №5, с. 352-362.

[28] Фарайдунов О.К. Об одной наилучшей квадратурной формуле для сингулярного интеграла Адамара. ДАН РТ, 2015, т. 58, №6, с. 476 - 482.

[29] Фарайдунов О.К. Наилучшая квадратурная формула для сингулярного интеграла Адамара. Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений. Душанбе, 2015, с. 51-53.

[30] Фарайдунов О.К. Приближение в среднем алгебраическими полиномами с весом. Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел. Душанбе, 2015, с. 56-57.

[31] Фарайдунов О.К. О наилучшем приближении в среднем алгебраическими полиномами с весом и значение поперечников некоторых функциональных классов. ДАН РТ, 2016, т. 59, №3-4 с. 106-113.

[32] Фарайдунов О.К. Оценки погрешности квадратурной формулы Чебышёва-Эрмита на некоторых классах функций. Труды международной летней математической школы-конференции С.Б. Стечкина по теории функций, 2016, с. 256-259.

[33] Фарайдунов О.К. О погрешности наилучших весовых квадратурных формул для некоторых классов функций. ДАН РТ, 2016, т. 59, №9-10, с. 361 - 366.

[34] Фарайдунов О.К. Об погрешности весовых квадратурных формул типа Маркова. Дифференциальные и интегральные уравнения с син-

гулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции. Душанбе, 2018, с. 162-164.

[35] Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г., Неравенства. Издательство иностранной литературы, М: 1952.

[36] Шабозов М.Ш. О наилучших кубатурных формулах с весом. ИАН Тадж. ССР, серия физ-мат. и геолого-хим. наук, 1980,№4, с.86-90.

[37] Шабозов М.Ш. Об одной оптимальной кубатурной формуле для классов функций, задаваемых модулями непрерывности. Моделирование и анализ информ. систем. 2014, т. 21, №3, с. 91-105.

[38] Шабозов М.Ш. Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью. Укр.матем.журнал, 1995, т.47, №9, с.1300-1305.

[39] Шабозов М.Ш., Каландаршоев С. Точные оценки погрешности квадратурных формул на классах функций малой гладкости. ДАН РТ, 1998, т.41, №10, с.69-75.

[40] Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С. О наилучших по коэффициентам весовых квадратурных формулах, имеющих фиксированные особенности. Вестник ХоГУ, серия 1, 2006, №7, с.42-54.

[41] Шабозов М.Ш., Сабоиев Р.С. Об оптимальном вычислении интегралов от быстроосцилирующих функций. Вестник ХоГУ, серия 1, 2004, №6, с. 17-22

[42] Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Наилучшая квадратурная формула типа Маркова для класса функций, задаваемых модулями непрерывности. Вестник Санкт-Петербургского университета, 1:1 (2014), с. 79-86.

[43] Эдвардс Р. Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1071 с.