Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Хуромонов Хуромон Мамадамонович

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА И НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик АН Республики
Таджикистан, доктор физ.-мат.
наук, профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е — 2 0 2 0

Содержание

Введение

В первой главе диссертационной работы найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье функций комплексного переменного по ортогональным функциям, регулярных в некоторых ограниченных областях комплексной плоскости на некоторых классах, характеризующихся обобщенным модулем непрерывности в пространстве Бергмана. Во второй главе решены экстремальные задачи отыскания наилучших линейных методов приближения аналитических в круге функций, реализующих точные значения гельфандовских и линейных поперечников некоторых классов функций.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В последнее время экстремальным задачам наилучшего полиномиального приближения функций комплексного переменного посвящен целый ряд работ [1, 13, 34, 36]. Первые результаты, связанные с вычислением точных значений верхних граней наилучшего приближения и вычисления точных значений n-поперечников классов комплексных аналитических в круге функций в пространстве Харди, принадлежат К.И.Бабенко [3], В.М.Тихомирову [28] и Л.В.Тайкову [26]. В дальнейшем эта тематика была развита в работах Л.В.Тайкова [25], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [2], С.Б. Вакарчука [6–9], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юусупова [40] и других. В пространстве Бергмана исследование указанных вопросов начал С.Б.Вакарчук, а первые результаты в весовом пространстве Бергмана были получены М.Ш.Шабозовым и О.Ш.Шабозовым [38].

Настоящая диссертационная работа посвящена дальнейшему развитию указанных вопросов как в обычном пространстве Бергмана, так и в весовом пространстве Бергмана и тем самым является актуальной для дальнейшего развития теории аппроксимации функций комплексного переменного.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами, темами). Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме „Теория аппроксимации функций”.

Цели и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точные константы неравенства Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- найти точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, в пространстве Бергмана B_2;
- найти наилучшие линейные методы приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ (1 \leq p \leq \infty)$;
- найти точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma},\ (1 \leq p \leq \infty)$;

Основные методы исследования. В диссертации используется метод Н.П.Корнейчука оценки верхних граней наилучших приближений классов функций подпространством фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников в любом нормированном пространстве.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные константы неравенства Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- найдены точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- найдены наилучшие линейные методы приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},$ $(1 \leq p \leq \infty)$;
- найдены точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma},$ $(1 \leq p \leq \infty)$;

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных константах в неравенствах Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка;
- теоремы о точных верхних гранях среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2;
- теорема о явном виде наилучших линейных методов приближения для классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},$ $(1 \leq p \leq \infty)$;
- теоремы о точных значениях n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma},$ $(1 \leq p \leq \infty)$;

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы можно использовать в случае функций двух комплексных переменных аналитических в бикруге и отыскании точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций комплексных переменных с ограниченными по норме смешанных производных в двумерном весовом пространстве Бергмана.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры „Математического анализа и теории функций“ и кафедры „Функционального анализа и дифференциальных уравнений“ Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016г.);
- международной научной конференции „Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций“ (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами“ (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);

Публикации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 работах, из них 2 статьи опубликованы в научных журналах Российской Федерации и 6 в научных журналах Республики Таджикистан, список которых приведен в конце диссертации. Из 8 работ 4 входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан и ВАК РФ, а 4 в других изданиях. Из совместных с М.Ш.Шабозовым двух статей соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 49 наименований, занимает 90 страниц машинописаного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Во введении освещается цель работы, апробация и краткое изложение результатов диссертационной работы. В первой главе диссертации изучается ряд экстремальных задач теории среднеквадратического наилучшего приближении функций комплексного переменного конечными суммами Фурье в пространстве Бергмана.

Первый параграф посвящен общим сведениям о пространстве Бергмана, определениям, обозначениям и предварительным фактам, используемые в дальнейшем. Всюду далее в диссертации $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а

$A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. При $R = 1$ вместо $A(U_1)$ будем писать просто $A(U)$.

Всюду далее полагаем $D := U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и полагая $B_2 := B_2(U)$ будем рассматривать пространство Бергмана B_2 функций $f(z)$, аналитических в области U с конечной нормой

$$\|f\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \rho|f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Во втором параграфе изучается вопросы среднеквадратичных приближений суммами Фурье комплексных функций f, регулярных в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ разложенных по ортогональным системам функций принадлежащих пространству $B_2 := B_2(\mathcal{D})$.

Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z), \tag{0.0.1}$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{\varphi_k(z)}d\sigma \tag{0.0.2}$$

Пусть

$$S_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\varphi_k(z) \tag{0.0.3}$$

– частичная сумма n-го порядка ряда (0.0.1). Множество всевозможных обобщенных полиномов вида $p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k\varphi_k(z)$, назовём обобщённая полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ – произвольные комплексные коэффициенты.

Лемма 1.2.1. [24] *Пусть* $f \in B_2$. *Тогда*

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_2} : d_k \in \mathbb{C}\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_{B_2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2\right\}^{1/2}, \tag{0.0.4}$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f, а $S_{n-1}(f,z)$– частная сумма n–го порядка ряда (0.0.1), определённая равенством (0.0.3).

В случае приближения в среднем функции комплексной переменной, регулярной в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина изучалась в работе [1]. Напомним, что под неравенствами Джексона-Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль непрерывности самой функции или некоторой её производной. В рассматриваемом нами случае воспользуемся подходом, предложенным в работах [34, 36, 37]. Пусть

$$T(\xi,\eta;h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k, \tag{0.0.5}$$

где $h \in (0,1), (\xi,\eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (0.0.5) понимается в смысле сходимости в $B_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$. В пространстве B_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta)T(z,\zeta;1-h)d\sigma,$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига.

Следуя работам [1, 34, 37], для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков как и в классическом случае следующим образом

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I})f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(z),$$

где

$$F_h^0 f(z) = \mathbb{I} f(z) = f(z), \;\; F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z)),$$

$k = 1, 2, ..., m; m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве B_2.

Величину

$$\Omega_m(f;t)_{B_2}=\sup\Big\{\|\Delta_h^m f\|_{B_2}:0<h\le t\Big\}=$$

$$=\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty}[1-(1-t)^k]^{2m}|a_k(f)|^2\Bigg\}^{1/2} \tag{0.0.6}$$

назовем обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f\in B_2$.

В третьем параграфе рассматривается задача отыскания точных констант в неравенстве Джексона–Стечкина для обобщённого модуля непрерывности (0.0.6). Всюду далее через $B_2^{(r)}:=B_2^{(r)}(U)$ $(B_2^{(0)}:=B_2(U))$ обозначим класс функций $f\in B_2$, у которых $z^r f^{(r)}\in B_2$. Доказывается, что

$$\Omega_m^2(z^r f^{(r)};t)_{B_2}=\sum_{k=r}^{\infty}[1-(1-t)^k]^{2m}\alpha_{k,r}^2\cdot\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Далее, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f\in B_2^{(r)}$ автоматически предполагается, что $f\notin\mathcal{P}_r$.

Лемма 1.3.2. *Для любых $n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\ge s$ справедливы равенства*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{E_{n-1}(z^s f^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}}=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}.$$

Одним из основных результатов третьего параграфа является следующая

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ при любых $n,m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $t\in(0,1)$ имеет место неравенство типа Джексона–Стечкина*

$$E_{n-1}(f)_{B_2}\le\alpha_{n,r}^{-1}\cdot[1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^r f^{(r)},t\big)_{B_2}, \tag{0.0.7}$$

причём при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ константа в правой части неравенства (0.0.7) уменьшена быть не может.

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^r f^{(r)},t\right)_{B_2}}=\frac{1}{\big[1-(1-t)^n\big]^m},\ 0<t<1. \tag{0.0.8}$$

Полагая в (0.0.8), в частности $t = 1/n,\ n \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^rf^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{B_2}}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}=\left(1-\frac{1}{e}\right)^{-m}. \quad (0.0.9)$$

Отметим, что теорему 1.3.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3.2. *Для произвольной функции* $f \in B_2^{(r)}$ *при любых* $n, m \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > r \geq s$ *и* $t \in (0,1)$ *справедлива оценка*

$$E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_{B_2}\leq\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot[1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2}, \quad (0.0.10)$$

причём при каждом фиксированном $m, n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ n > r \geq s$ *константа в правой части неравенства (0.0.10) уменьшена быть не может.*

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.2 при всех* $s = 0, 1, 2, \cdots, r$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $t \in (0,1)$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2}}=\frac{1}{[1-(1-t)^n]^m},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-1}\big(z^sf^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^rf^{(r)},1/n\big)_{B_2}}=\left(1-\frac{1}{e}\right)^m.$$

Наиболее общим результатом третьего параграфа является

Теорема 1.3.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r,\ h \in (0,1),\ q$ *– весовая на интервале* $(0,h)$ *функция. Тогда при всех* $0 < p \leq \infty$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p\big(z^rf^{(r)},t\big)_{B_2}q(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^n\big]^{mp}q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Из теоремы 1.3.3 вытекает утверждения.

Следствие 1.3.4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.3.3. Положим*

$$q(t) := n(1-t)^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ 0 < t < 1.$$

Тогда для любого $h \in (0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^h \Omega_m^p \left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h)^n\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}.$$

Отсюда, в частности при $h = 1/n,\ n \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty$ имеем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p \left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)^{m+1/p}}.$$

При $p = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$ из последнего равенство следует, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m} \left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{m}} = 2^m \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

В четвёртом параграфе первой главы доказаны точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{B_2}$ функций f, принадлежащих классу $B_2^{(r)}$, посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре. Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам B_2 и $B_2^{(m)}$:

$$\mathscr{K}_m(f, t^m)_{B_2} := \mathscr{K}\left(f, t^m; B_2; B_2^{(m)}\right) =$$

$$\inf\left\{\|f-g\|_2 + t^m \|z^m g^{(m)}\|_2 : g \in B_2^{(m)}\right\}, \qquad (0.0.11)$$

где $m \in \mathbb{N},\ 0 < t \leq 1$. Представляет интерес точно вычислить экстремальную характеристику величины, подобной левой части (0.0.8), но содержащей вместо модуля непрерывности m-го порядка (0.0.6) $\mathscr{K}$-функционал (0.0.11). Весьма важной задачей является установление слабой эквивалентности $\mathscr{K}$-функционала и различных обобщенных модулей непрерывности m-го порядка. В нашем случае эквивалентности указанных гладкостных величин вытекают из сравнения результата теоремы 1.3.1 и нижеприведенного следствия 1.4.1. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ – произвольные числа, такие, что $n \geq r + m$. Тогда справедливо следующее соотношение*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m \left(z^r f^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}} \right)_{B_2}} = 1.$$

Следствие 1.4.1. *В условиях теоремы 1.4.1, при $r = 0$ и любых $m, n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m \left(f; \dfrac{1}{\alpha_{n,m}} \right)_{B_2}} = 1. \tag{0.0.12}$$

Отметим, что сравнивая результаты теорем 1.3.1 и 1.4.1, а также следствие 1.4.1, приходим к соотношению

$$\mathscr{K}\left(z^r f^{(r)}, t^m\right)_{B_2} \sim \Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, 0 < t < 1$. Заметим, что из равенства (0.0.12) получаем точное на классе B_2 неравенство типа Джексона-Стечкина, в котором вместо обобщенного модуля непрерывности m-го порядка Ω_m использован $\mathscr{K}$-функционал (0.0.11), в то время как для неравенства типа Джексона-Стечкина с модулем непрерывности Ω_m в случае $r = 0$ из (0.0.9) вытекает лишь асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m(f; 1/n)_{B_2}} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m}, \ m \in \mathbb{N}.$$

В пятом параграфе первой главы вычислены точные значения $n-$поперечников некоторых классов функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности. Приведём необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть S — единичный шар в пространстве B_2; $\Lambda_n \subset B_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset B_2$— подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : B_2 \to \Lambda_n$— линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : B_2 \to \Lambda_n$— непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$—выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2. Величины

$$b_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset B_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset B_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}B_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset B_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\Big\} : \mathscr{L}^{\perp}B_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset B_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве B_2. Приводим определение классов функций, естественно вытекающих из результатов теорем 1.3.1 — 1.4.1, доказанных нами в предыдущих параграфах этой главы. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, 1)$. Обозначим через $W_m^{(r)}B_2(\Phi) := W^{(r)}B_2(\Omega_m; \Phi)$ - класс функций $f \in B_2^{(r)}$, обобщенный модуль непрерывности (0.0.6) которых удовлетворяет неравенству

$$\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, h\big)_{B_2} \le \Phi(h),$$

где Φ - неотрицательная, монотонно возрастающая функция на положительной полуоси $\mathbb{R} := [0, +\infty)$, причем $\Phi(0) = 0$. Далее, пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, 1)$, $0 < p \le \infty$; $g(t)$ - весовая на отрезке $[0, h]$ функция. Обозначим через $W_{2,m,p}^{(r)}(h, q) := W_p^{(r)}B_2(\Omega_m, h; q)$ - класс, состоящий из функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $z^r f^{(r)}(z)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^h \Omega_m^p\big(z^r f^{(r)};t\big)_{B_2} q(t)dt \le 1.$$

Напомним, что неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция Ψ называется k-мажорантой, если функция $t^{-k}\Psi(t)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\Psi(0)=0$ и $\Psi(t)\to 0$ при $t\to 0$. При $k=1$ функцию Ψ будем называть мажорантой.

Через $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)(r\in\mathbb{Z}_+, m\in\mathbb{N})$ обозначим класс функций, состоящих из элементов $f\in B_2^{(r)}$, у которых производные $z^r f^{(r)}(z)$ удовлетворяют условию

$$\mathscr{K}_m(z^r f^{(r)},t^m)_2 \le \Psi(t^m),\ 0<t<1.$$

В определении введенного класса функция Ψ является некоторой мажорантой и $B_2^{(0)}\equiv B_2$, $W_2^{(0)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)=W_2(\mathscr{K}_m,\Psi)$. Для произвольного подмножества $\mathfrak{M}\subset B_2$ положим $E_{n-1}(\mathfrak{M})_{B_2} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_2}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}$.

Теорема 1.5.1. *При любых $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$ и $h\in(0,1)$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi),B_2\big)=E_{n-1}(W_m^{(r)}B_2(\Phi))_{B_2}=\alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\cdot\Phi(h)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ - любой из n-поперечников $b_n(\cdot),d_n(\cdot),d^n(\cdot),\delta_n(\cdot),\Pi_n(\cdot)$.

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 при $h=1/n, n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+$ имеет место асимптотическое равенство*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi),B_2\big)=E_{n-1}\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi)\big)_{B_2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha_{n,r}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right)\sim\left(1-e^{-1}\right)^{-m}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

В ряде работ по теории приближений найдены верхние грани модулей коэффициентов Фурье, для определенных систем ортогональных с весом полиномами на определённых классов функций. Для введенных в этой работе классов функций данный вопрос тоже представляет определенный интерес.

Теорема 1.5.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $h \in (0,1)$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup\Big\{|c_n(f)| : f \in W_m^{(r)} B_2(\Phi)\Big\} = \frac{\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}}{\alpha_{n,r}\sqrt{n+1}}\Phi(h).$$

Одним из основных результатом пятого параграфа является

Теорема 1.5.3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0,1)$, $q(t)$ – весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда для произвольной $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)} B_2; B_2) = E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)} B_2; B_2\big) = \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

Теорема 1.5.4. *Пусть Ψ — мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right)_{B_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

В качестве следствия из теоремы 1.5.4 вытекает следующее утверждение о точном значении модулей коэффициентов Фурье на рассматриваемом классе функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big)$.

Следствие 1.5.3. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство*

$$\sup\Big\{\big|c_n(f)\big| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\Big\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

В теореме 1.5.4, в частности, найдено значение точной верхней грани наилучшего приближения $E_{n-1}\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\big)_{B_2}$ класса функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big)$ комплексными полиномами из подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ ее промежуточные производные $z^\nu f^{(\nu)}(z), 1 \leq \nu \leq r$

также принадлежат классу B_2, то представляет интерес изучение поведения величины $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ на классе $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$. В этом случае имеет место

Теорема 1.5.5. *Пусть $r,\nu\in\mathbb{N}$ $(1\le\nu\le r)$. Тогда для произвольной функции $f\in B_2^{(r)}$ справедливо точное на $B_2^{(r)}$ неравенство типа Колмогорова*

$$E_{n-1}^2\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}\le\frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,r})^{\nu/r}}\Big(E_{n-1}(f)\Big)_{B_2}^{1-\nu/r}\Big(E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)\Big)_{B_2}^{\nu/r},$$

обращающееся в равенство для $f_0(z)=z^n\in B_2^{(r)}$.

В заключительной теореме этого параграфа вычислена верхняя грань наилучшего совместного приближения самой функции и последовательности её производных $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ на классе функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m,\Psi\big)$.

Теорема 1.5.6. *Пусть Ψ — некоторая мажоранта, задающая класс функций $W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)$ где $m\in\mathbb{N},r=2,3,\ldots$. Тогда для любого числа $n\ge m+r$ и произвольного натурального числа ν $(1\le\nu\le r-1)$ справедливо равенство*

$$\sup\left\{E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_{B_2}:f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)\right\}=\frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Во второй главе диссертационной работы решается ряд экстремальных задач отыскания наилучших линейных методов приближения и их приложения в задачах отыскания точных значений гельфандовскых и линейных n-поперечников.

Задачи отыскания наилучших линейных методов в обычных пространствах Бергмана B_p, $1\le p\le\infty$ (без веса) в разное время решены С.Б.Вакарчуком [8], С.Б.Вакарчуком и М.Ш.Шабозовым [13], М.Ш.Шабозовым и М.Р.Лангаршоевым [32, 33] и многим другим.

В первом параграфе приведены общие сведения о весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$, а также некоторые обозначения и определения, используемые в дальнейшем. Через $L_p := L_p(U), 1 \le p < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint\limits_U |f(z)|^p dxdy \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^p dt d\rho \right)^{1/p},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(z)$ – некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U. Через $L_{p,\gamma} \overset{def}{=} L_p(U, \gamma)$, $1 \le p < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых

$$\gamma^{1/p} f \in L_p(U), \ \|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{L_p}.$$

Определение 2.1.2. [38] *Пусть D – ограниченная область на плоскости комплексного переменного, $f(z)$ – аналитическая в D функция, $\gamma(|z|)$ – произвольная положительная суммируемая по области D весовая функция, причём*

$$\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^p d\sigma < \infty, \ 1 \le p \le \infty, \tag{0.0.13}$$

где $d\sigma$ – элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Множества всех аналитических функций $f(z) \in D$, для которых выполнено условие (0.0.13), образует банахово пространство, которое называется весовым пространством Бергмана $B_{p,\gamma}(D)$, $1 \le p \le \infty$.

Рассмотрим пространство Бергмана $B_{p,\gamma}$ функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| < R$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \cdot |f(\rho e^{it})|^p d\rho dt \right)^{1/p} < \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ - положительная суммируемая в круге $|z| < R$ весовая функция, $d\sigma$ - элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега. В работе

С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [13] рассматривается конкретная весовая функция γ_*, которая позволяет получить пространства $B_{p,\gamma_*}(U_R)$ аналитических в U_R функций с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы $|z| = R$ круга U_R по сравнению с функциями, принадлежащими пространству $B_{p,R}$.

Далее, в первом параграфе приводится определение модулей непрерывности в пространствах Харди $H_{p,R}$ $(p \geq 1)$ и весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$ $(p \geq 1)$, а также некоторые примеры вычисления конкретных задач.

Модуль непрерывности первого порядка в пространстве $B_{p,\gamma} := B_{p,\gamma}(U)$, $U := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ определим следующей формулой

$$\omega(f,t)_{B_{p,\gamma}} = \sup_{|h|\leq t} \|f(\rho e^{i(h+\cdot)}) - f(\rho e^{i(\cdot)})\|_{B_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup_{|h|\leq t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| f(\rho e^{i(t+h)}) - f(\rho e^{it}) \right|^p d\rho dt \right)^{1/p}.$$

Равенством

$$\omega_2(f,t)_{B_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup_{|h|\leq t} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) \left| f(\rho e^{i(t+h)}) - 2f(\rho e^{it}) + f(\rho e^{i(t-h)}) \right|^p d\rho dt \right)^{1/p}$$

определим модуль гладкости. При $m \geq 2$ величину

$$\omega_m(f,t)_{B_{p,\gamma}} = \sup\left\{ \|\Delta_m(f,\cdot,\cdot,h)\|_{B_{p,\gamma}} : |h| \leq t \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_m(f;\rho,u,h)|^p d\rho du \right)^{1/p} : |h| \leq t \right\},$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

— разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

Во втором параграфе решаются задачи наилучшего приближения функций в пространстве Харди $H_p, 1 \le p < \infty$ и найдены значения поперечников некоторых классов функций, точнее, в банаховых пространтсвах Харди H_p, Бергмана $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ 1 \le p < \infty$ с весом γ вычислены точные значения различных n-поперечников классов $W_{p,R}^{(r)}(\Phi),\ r \in \mathbb{N}$, аналитических в круге радиуса $R \ge 1$ функций, у которых усреднённые модули гладкости r-х производных $f^{(r)} \in H_{p,R}$ ограничены заданной мажорантой Φ. Пусть $\Phi(t),\ t \ge 0$ - произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Выбирая в качестве мажоранты функцию $\Phi(t)$ для произвольной $h \in (0, \pi/2]$, вводим в рассмотрение следующий класс функций

$$W_{p,R}^{(r)}(\Phi) \stackrel{def}{=} \left(f \in A(U_R) :\ \frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_2(f^{(r)}; 2t)_{H_{p,R}} dt \le \Phi(h) \right),$$

где $r \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty,\ R \ge 1$. При $R = 1$ полагаем $W_{p,1}^{(r)}(\Phi) = W_p^{(r)}(\Phi)$.

Пусть X — произвольное банахово пространство; S — единичный шар в X; $\mathfrak{M}$ — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $\Lambda_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ — подпространство коразмерности n, $L : X \to \Lambda_n$ — линейный непрерывный оператор, отображающий X в Λ_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством Λ_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=} \sup\{E(f, \Lambda_n)_X : f \in \mathfrak{M}\} := \sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величина

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \stackrel{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - L(f)\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : LX \subset \Lambda_n\} \qquad (0.0.14)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $\Lambda_n \in X$. Линейный оператор $L^*, L^*X \subset \Lambda_n$, если он существует и реализует в (0.0.14) точную нижнюю грань, то есть когда

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X = \sup\Big\{\|f - L^*(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения. Пусть

$$(1 - cosx)_* = \{1 - cosx, \text{если } 0 \le x \le \pi; \ 2, \text{если } x \ge \pi\}\,.$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N}, \ n > r$ и мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/2(n-r)\right)} \ge \frac{\pi}{\pi - 2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (1 - cosx)_* dx, \tag{0.0.15}$$

тогда при всех $1 \le p \le \infty$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) = d_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) =$$

$$= E\left(W_p^{(r)}(\Phi); \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_p} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right),$$

где

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1), \ n \ge r, \ n, r \in \mathbb{N}.$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (0.0.15), не пусто.

В третьем параграфе второй главы найдены наилучшие линейные методы приближения класса функций $W_{p,R}^{(r)}(\Phi), R \ge 1$ в пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$ и распространен результат теоремы 2.2.1 для класса $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, для ряда n-поперечников. Приводим основной результат этого параграфа.

Теорема 2.3.1. *Пусть $R \ge 1, \ 1 \le p < \infty, \ r \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (0.0.15). Тогда для любого натурального числа*

$n > r$ имеют место следующие равенства

$$b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) =$$

$$= d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = \delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) =$$

$$= E\left(W^{(r)}_{p,R}; \overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} = E\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup\left\{\|f - L_*(f)\|_{L_{p,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\left(\int_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}.$$

При этом:

1) в случае $d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right)$ и $\delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right)$ подпространство

$$\Lambda^*_n \stackrel{def}{=} span\left\{\{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \left\{\left[R^{2(n-k)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]|z|^{2(n-k)}\right]z^k\right\}_{k=r}^{n-1}\right\},$$

где

$$\sigma_{k,r} \stackrel{def}{=} \frac{2(n-r)}{\pi-2}\int_0^{\pi/[2(n-r)]}(1 - sin(n-r)x)cos(k-r)xdx,\ k \geq r,$$

является экстремальным для класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ в пространстве $L_{p,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$L^*_{n-1}(f,z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+ \sum_{k=r}^{n-1}\left\{1 + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]\left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right\}c_k(f)z^k$$

является наилучшим для класса $W^{(r)}_{p,R}$ линейным методом приближения в пространстве $L_{p,\gamma}$;

3) подпространство $\Lambda_*^n \stackrel{def}{=} \{f \in B_{p,\gamma} : f^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ – *экстремальное для* n*-поперечника* $d^n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$;

4) экстремальным для n*-поперечника* $b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$ *является подпространство* $\overline{\Lambda}_{n+1} \stackrel{def}{=} span\{1, z, \ldots, z^n\}$.

Заключительный четвертый параграф второй главы посвящен вычислению точных верхних граней модулей коэффициентов Тейлора на классе $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$. Здесь доказана

Теорема 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 имеет место следующее равенство:*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^{(r)}(\Phi)\right\} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

где $n, r \in \mathbb{N},\ n > r,\ R \geq 1,\ 1 \leq p < \infty$.

Глава I. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана

§1.1. Общие сведения о пространстве Бергмана

1.1.1. Определение и обозначения. Предварительные факты

Всюду в дальнейшем придерживаемся следующих обозначений: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций. При $R = 1$ вместо $A(U_1)$ будем писать просто $A(U)$.

Определение 1.1.1. *Пусть D – ограниченная область на плоскости комплексного переменного, $f(z)$ – аналитическая в D функция, причём*

$$\iint\limits_{(D)} |f(z)|^p d\sigma = \iint\limits_{(D)} |f(x+iy)|^p dxdy < \infty, 1 \leq p < \infty, \tag{1.1.1}$$

где $d\sigma = dxdy$ – элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Множество всех аналитических функций $f(z) \in D$, для которых выполнено условие (1.1.1), образует банахово пространство, которое называется пространство Бергмана $B_p(D)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Всюду далее полагаем $D := U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и, полагая $B_2 := B_2(U)$, будем рассматривать пространство Бергмана B_2 функций $f(z)$, аналитических в области U с конечной нормой

$$\|f\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1.2}$$

Переходя к полярным координатам норму (1.1.2) также запишем в виде

$$\|f\|_{B_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \rho |f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1.3}$$

В последующих параграфах в исследуемых нами экстремальных задачах во многих случаях в качестве экстремальной функции вводится в рассмотрение функция $f_0(z) = z^n, z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, норма которой в силу формулы (1.1.3) равна

$$\|f_0\|_{B_2} := \|z^n\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |f_0(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \rho |\rho e^{it}|^{2n} d\rho dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 \rho^{2n+1} d\rho dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

§1.2. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве Бергмана

В настоящем параграфе изучаются вопросы среднеквадратичных приближений суммами Фурье комплексных функций f, регулярных в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ разложенных по ортогональным системам функций, принадлежащим пространству $B_2 := B_2(\mathcal{D})$.

Определение 1.2.1. *[24] Последовательность функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ назовем ортогональной по области $\mathcal{D}$ системой комплексных функций, если*

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}d\sigma = 0, \text{ при } k \neq l.$$

Такая система функций называется ортонормированной системой, если

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}d\sigma = \delta_{k,l},$$

где $\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$ и $\delta_{k,k} = 1$ при $k = l$, $k \in \mathbb{N}$. Если $f \in B_2$, то числа

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{\varphi_k(z)}d\sigma \tag{1.2.1}$$

называются коэффициентами Фурье функции f по отношению к ортонормированной системе $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$.

Функции f сопоставляется ее ряд Фурье по указанной ортогональной системе

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z), \tag{1.2.2}$$

где коэффициенты $a_k(f)$ определены в равенстве (1.2.1).

Пусть

$$S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\varphi_k(z) \tag{1.2.3}$$

– частичная сумма n-го порядка ряда (1.2.2). Множество всевозможных обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(z), \tag{1.2.4}$$

назовём обобщённым полиномом, где $d_k \in \mathbb{C}$ – произвольные комплексные коэффициенты. Докажем следующее утверждение

Лемма 1.2.1. *[24] Пусть $f \in B_2$. Тогда*

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{B_2} : \ d_k \in \mathbb{C}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\|_{B_2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^2\right\}^{1/2}, \tag{1.2.5}$$

где $a_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f, определённые равенством (1.2.1), а $S_{n-1}(f,z)$– частная сумма n–го порядка ряда (1.2.2).

Доказательство. Действительно, для произвольного обобщенного полинома вида (1.2.4) из подпространства полиномов $\mathcal{P}_{n-1}$, пользуясь разложением (1.2.2), в силу ортогональности системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ имеем:

$$\|f - p_{n-1}\|_{B_2}^2 = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(D)} |f(z) - p_{n-1}(z)|^2 d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(D)} \Big| \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) - d_k)\varphi_k(z) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z) \Big|^2 d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(D)} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k(f) - d_k)\varphi_k(z) + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z) \Big) \times$$

$$\times \Big(\sum_{l=0}^{n-1} (\overline{a_l}(f) - \overline{d_l})\overline{\varphi_l}(z) + \sum_{l=n}^{\infty} \overline{a_l}(f)\overline{\varphi_l}(z) \Big) d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(D)} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \big(a_k(f) - d_k\big)\big(\overline{a_l(f)} - \overline{d_l}\big) \varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z) \right\} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=n}^{\infty}\big(a_k(f)-d_k\big)\overline{a_l(f)}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)\right\}d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}a_k(f)\big(\overline{a_l(f)}-\overline{d}_l\big)\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)\right\}d\sigma+$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}a_k(f)\overline{a_l(f)}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)\right\}d\sigma=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}\big(a_k(f)-d_k\big)\big(\overline{a_l(f)}-\overline{d}_l\big)\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)d\sigma+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=n}^{\infty}\big(a_k(f)-d_k\big)\overline{a_l(f)}\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)d\sigma+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}a_k(f)\big(\overline{a_l(f)}-\overline{d}_l\big)\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)d\sigma+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}a_k(f)\overline{a_l(f)}\cdot\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)}\varphi_k(z)\overline{\varphi_l}(z)d\sigma=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\Big|a_k(f)-d_k\Big|^2+\sum_{k=n}^{\infty}\Big|a_k(f)\Big|^2.$$

Таким образом, имеют место равенства

$$\Big\|f-p_{n-1}\Big\|_{B_2}^2=\sum_{k=0}^{n-1}\Big|a_k(f)-d_k\Big|^2+\sum_{k=n}^{\infty}\Big|a_k(f)\Big|^2$$

$$\min\Big\{\big\|f-p_{n-1}\big\|_{B_2}^2:p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\Big\}=$$

$$=\min_{d_k}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\Big|a_k(f)-d_k\Big|^2+\sum_{k=n}^{\infty}\Big|a_k(f)\Big|^2\right\}=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\Big|a_k(f)\Big|^2=\Big\|f-S_{n-1}\Big\|_{B_2}^2.$$

Лемма 1.2.1 доказана.

В случае приближения в среднем функций комплексной переменной, регулярной в односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, рядами Фурье по ортогональной в $\mathcal{D}$ системе функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина изучалась в работе [1]. Напомним, что под неравенствами Джексона-Стечкина понимают соотношения, в которых величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством в заданном нормированном пространстве оценивается через модуль гладкости самой функции или некоторой её производной. В рассматриваемом нами случае воспользуемся подходом, предложенным в работах [1, 34, 36, 37]. Пусть

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k, \tag{1.2.6}$$

где $h \in (0,1), (\xi, \eta) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, а равенство (1.2.6) понимается в смысле сходимости в $B_2(\mathcal{D} \times \mathcal{D})$.

Отметим, что в ряде частных случаев можно определить явные выражения для функции (1.2.6). Так, например, если $\mathcal{D} := U = \{z : |z| < 1\}$, то система функций $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1}z^k, k \in \mathbb{Z}_+$ является ортонормированной (см., например, [24], с.208) и в этом случае имеем:

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\xi\overline{\eta}h)^k = (1 - \xi\overline{\eta}h)^{-2}.$$

В пространстве B_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta)T(z, \zeta; 1-h)d\sigma, \tag{1.2.7}$$

который будем называть оператором обобщенного сдвига. Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор (1.2.7) обладает следующими свойствами (см., например, [1, 34, 37]):

1) $F_h(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha F_h(f_1) + \beta F_h(f_2),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

2) $\|F_h(f)\|_{B_2} \le \|f\|_{B_2}$;

3) $F_h\varphi_k(z) = (1-h)^k\varphi_k(z)$;

4) $\|F_h(f) - f\|_{B_2} \to 0,\ h \to 0+$.

Учитывая соотношение (1.2.6), оператор (1.2.7) представим в следующем виде

$$F_hf(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta)T(z,\zeta;1-h)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)} f(\zeta)\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)}(1-h)^k\right\}d\sigma =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)\cdot\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(D)} f(\zeta)\overline{\varphi_k(\zeta)}d\sigma\right\}(1-h)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z)(1-h)^k. \tag{1.2.8}$$

Следуя работам [1, 34, 36, 37], для функции $f \in B_2$ определим конечные разности первого и высших порядков как и в классическом случае следующим образом

$$\Delta_h^1 f(z) = F_hf(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I})f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(z),$$

где

$$F_h^0 f(z) = \mathbb{I}f(z) = f(z),\ \ F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1}f(z)),$$

$k = 1, 2, ..., m; m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ – единичный оператор в пространстве B_2. Из формул (1.2.2) и (1.2.8) в смысле сходимости в $B_2(\mathcal{D})$ получаем

$$\Delta_h^1 f(z) = F_hf(z) - f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z)((1-h)^k - 1).$$

Воспользуясь последним равенством, далее методом математической индукции при любом $m \in \mathbb{N}$ легко доказать формулу

$$\Delta_h^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^m \left[1 - (1-h)^k\right]^m a_k(f)\varphi_k(z),\ h \in (0,1).$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, в силу ортонормированности системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ будем иметь соотношение

$$\|\Delta_h^m f\|_{B_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} [1-(1-h)^k]^{2m} |a_k(f)|^2. \tag{1.2.9}$$

Величину

$$\Omega_m(f;t)_{B_2} = \sup\Big\{ \|\Delta_h^m f\|_{B_2} : 0 < h \le t \Big\} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} [1-(1-t)^k]^{2m} |a_k(f)|^2 \right\}^{1/2} \tag{1.2.10}$$

назовем обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in B_2$.

Непосредственной проверкой убедимся, что функция $\Omega_m(f,t)_{B_2}$, определенная равенством (1.2.10), обладает всеми свойствами модуля непрерывности m-го порядка, приведенного в монографии (см. [17], с.157-166). Для функции $f_0(z) = z^n \in B_2$ в силу равенства (1.2.10) запишем

$$\Omega_m(f_0,t)_{B_2} = [1-(1-t)^n]^{2m} \cdot |a_n(f_0)|, \tag{1.2.11}$$

где согласно равенств (1.2.1) для коэффициента $a_n(f_0)$ в области $D := U = \{z : |z| < 1\}$ будем иметь (см. чуть далее формулу (1.3.6) при $r = 0$):

$$|a_n(f_0)| = \frac{|c_n(f_0)|}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

и из (1.2.11) следует равенство

$$\Omega_m(f_0,t)_{B_2} = [1-(1-t)^n]^m \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{1.2.12}$$

§1.3. Точные константы в неравенстве Джексона–Стечкина

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{D}$ есть круг $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Очевидно, что в этом случае система функций $\varphi_k(z) = z^k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ является ортогональной в круге U:

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} \varphi_k(z)\overline{\varphi_l(z)}d\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} r^{k+l+1}e^{i(k-l)t}drdt = 0,\ k \neq l.$$

Но эта система не является ортонормированной, поскольку

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |\varphi_k(z)|^2 d\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} r^{2k+1}drdt = \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, система функций $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1}z^k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ является ортонормированной системой. Через $\mathcal{A}(U)$ обозначим множество аналитических в U функций f. Ряд Маклорена функции $f \in U$ имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \tag{1.3.1}$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Маклорена функции f. При этом в силу (1.2.5) запишем:

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{B_2}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \tag{1.3.2}$$

В монографии (см. [24], с.209) доказано, что ряд Фурье функции f по ортонормированной системе $\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1}z^k (k = 0, 1, 2, ...)$ совпадает с рядом (1.3.1) функций $f \in \mathcal{A}(U)$, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \tag{1.3.3}$$

а потому ряд (1.3.3) можно сколько угодно раз почленно продифференцировать.

Обозначим через $f^{(r)}(z)$ обычную производную r-го порядка функции $f(z)$ по переменному z :

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1)c_k z^{k-r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r}, \tag{1.3.4}$$

где, ради краткости, положено

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1),\ k \geq r,\ k, r \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что из (1.3.4) вытекает равенство

$$z^r f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^k. \tag{1.3.5}$$

Всюду далее через $B_2^{(r)} := B_2^{(r)}(U)$ $(B_2^{(0)} := B_2(U))$ обозначим класс функций $f \in B_2$, у которых $z^r f^{(r)} \in B_2$. Заменив в формуле (1.2.10) функцию f на $z^r f^{(r)}$ с учетом (1.3.4), получаем выражение модуля непрерывности m-го порядка производной $z^r f^{(r)}(z)$:

$$\Omega_m^2(z^r f^{(r)}; t)_{B_2} = \sum_{k=r}^{\infty} [1-(1-t)^k]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \tag{1.3.6}$$

Далее, в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ автоматически предполагается, что $f \notin \mathcal{P}_r$.

Лемма 1.3.1. *Для любых $n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ n \geq r$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} := \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}. \tag{1.3.7}$$

Доказательство. Из равенства (1.3.4) следует

$$S_{n-1}(z^r f^{(r)}, z) = \sum_{k=r}^{n-1} \alpha_{k,r} c_k(f) z^k,$$

поэтому

$$z^r f^{(r)}(z) - S_{n-1}(z^r f^{(r)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^k,$$

откуда сразу вытекает равенство

$$E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_{B_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \tag{1.3.8}$$

Учитывая равенство (1.3.8) и тот факт, что при любом $k \geq n$, $\alpha_{k,r}/\alpha_{n,r} \geq 1$, получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{n,r}}\right)^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} E_{n-1}^2\big(z^r f^{(r)}\big)_{B_2},$$

откуда для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.3.9}$$

Так как для функции $f_0(z) = z^n$, принадлежащей пространству $B_2^{(r)}$, в силу равенств (1.3.2) и (1.3.8)

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad E_{n-1}\big(z^r f_0^{(r)}\big)_{B_2} = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}}, \tag{1.3.10}$$

то для величины, стоящей в левой части неравенства (1.3.9), имеем оценку снизу

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)_{B_2}} \geq \frac{E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{E_{n-1}\big(z^r f_0^{(r)}\big)_{B_2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.3.11}$$

Требуемое равенство (1.3.7) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.3.9) и оценки снизу (1.3.11). Лемма 1.3.1 доказана.

Приводим обобщение леммы 1.3.1 в следующей формулировке

Лемма 1.3.2. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(z^s f^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.3.12}$$

Доказательство. Так как

$$S_{n-1}(z^s f^{(s)}, z) = \sum_{k=s}^{n-1} \alpha_{k,s} c_k(f) z^k,$$

то имеем

$$z^s f^{(s)} - S_{n-1}(z^s f^{(s)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^k,$$

откуда сразу вытекает равенство

$$E_{n-1}^2 \left(z^s f^{(s)} \right)_{B_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1},$$

учитывая которое получаем

$$E_{n-1}^2 \left(z^s f^{(s)} \right)_{B_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \le \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \right)^2 \cdot \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \le$$

$$\le \max_{k \ge n} \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \right)^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= \max_{k \ge n} \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \right)^2 \cdot E_{n-1}^2 \left(z^r f^{(r)} \right)_{B_2}. \tag{1.3.13}$$

Так как

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)\cdots(k-r+1) =$$

$$= \underbrace{k(k-1)\cdots(k-s+1)}\underbrace{(k-s)\cdots\big((k-s)-(r-s)+1\big)} = \alpha_{k,s}\alpha_{k-s,r-s},$$

то имеем

$$\left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \right)^2 = \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s} \cdot \alpha_{k-s,r-s}} \right)^2 = \frac{1}{\alpha_{k-s,r-s}^2} =$$

$$= \frac{1}{\big[(k-s)\cdots\big((k-s)-(r-s)+1\big)\big]^2},$$

откуда сразу вытекает, что

$$\max_{k \ge n} \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \right)^2 = \max_{k \ge n} \frac{1}{\alpha_{k-s,r-s}^2} = \frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}^2} = \left(\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \right)^2. \tag{1.3.14}$$

Учитывая равенство (1.3.14), неравенство (1.3.13) запишем в виде

$$E_{n-1}^2 \left(z^s f^{(s)} \right)_{B_2} \le \left(\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \right)^2 \cdot E_{n-1}^2 \left(z^r f^{(r)} \right)_{B_2},$$

из которого следует, что

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(z^s f^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}} \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.3.15}$$

Для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, для которой

$$E_{n-1}\left(z^s f_0^{(s)}\right)_{B_2} = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n+1}}, \quad E_{n-1}\left(z^r f_0^{(r)}\right)_{B_2} = \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}},$$

получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(z^s f^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_2}} \ge \frac{E_{n-1}(z^s f_0^{(s)})_{B_2}}{E_{n-1}(z^r f_0^{(r)})_{B_2}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.3.16}$$

Утверждение леммы 1.3.2 вытекает из сопоставления неравенств (1.3.15) и (1.3.16).

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \le \alpha_{n,r}^{-1} \cdot [1-(1-t)^n]^{-m} \Omega_m\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2}, \tag{1.3.17}$$

причём при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ константа в правой части неравенства (1.3.17) уменьшена быть не может.

Доказательство. Пусть $f \in B_2$. В работе [1] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2$ при любом $t \in (0,1)$ справедлива оценка

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \le [1-(1-t)^n]^{-m} \Omega_m(f,t)_{B_2}, \ n, m \in \mathbb{N}, \tag{1.3.18}$$

причем при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ константа в правой части неравенства (1.3.18) уменьшена быть не может. Используя неравенство (1.3.18), при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, n \geq r$ и $t \in (0,1)$ для величины наилучшего приближения $E_{n-1}\left(z^r f^{(r)}\right)_{B_2}$ получаем

$$E_{n-1}\left(z^r f^{(r)}\right)_{B_2} \leq [1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2}. \tag{1.3.19}$$

Учитывая неравенства (1.3.9) и (1.3.19), будем иметь

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \alpha_{n,r}^{-1} \cdot E_{n-1}\left(z^r f^{(r)}\right)_{B_2} \leq$$
$$\leq \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}\Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2}, \tag{1.3.20}$$

откуда и следует неравенство (1.3.17). Покажем точность неравенства (1.3.17). С этой целью рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, использованную нами при доказательстве леммы 1.3.1. Для этой функции из соотношения (1.3.6) сразу получаем

$$\Omega_m\left(z^r f_0^{(r)}, t\right)_{B_2} = \big[1-(1-t)^n\big]^m \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}}. \tag{1.3.21}$$

Из (1.3.21) и первого из равенств в (1.3.10) получаем

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\big[1-(1-t)^n\big]^m\alpha_{n,r}}{\big[1-(1-t)^n\big]^m\alpha_{n,r}} =$$
$$= \frac{\Omega_m(z^r f_0^{(r)}, t)_{B_2}}{\alpha_{n,r}\big[1-(1-t)^n\big]^m},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1. Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2}} = \frac{1}{\big[1-(1-t)^n\big]^m}, \ 0 < t < 1. \tag{1.3.22}$$

Полагая в (1.3.22), в частности при $t = 1/n, \ n \in \mathbb{N}$, *имеем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^r f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{B_2}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m} = \left(1-\frac{1}{e}\right)^{-m}. \tag{1.3.23}$$

Действительно, так как неравенство (1.3.20) справедливо для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то для величины, стоящей левой части (1.3.22), имеем оценки сверху

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\left(z^r f^{(r)},t\right)_{B_2}} \le \frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m}. \tag{1.3.24}$$

С целью получения оценки снизу той же величины достаточно заметить, что для рассмотренной выше функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ имеем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^r f^{(r)},t\big)_{B_2}} \ge \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^r f_0^{(r)},t\big)_{B_2}} = \frac{1}{\left[1-(1-t)^n\right]^m}. \tag{1.3.25}$$

Требуемое равенство (1.3.22) вытекает из сопоставления неравенств (1.3.24) и (1.3.25). Отметим, что теорему 1.3.1 можно обобщить следующим образом.

Теорема 1.3.2. *Для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$ и $t \in (0,1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2} \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot [1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^r f^{(r)},t\big)_{B_2}, \tag{1.3.26}$$

причём при каждом фиксированном $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \ge s$, константа в правой части неравенства (1.3.26) уменьшена быть не может.

Доказательство. В самом деле, учитывая соотношение

$$E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2} \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)_{B_2}$$

и неравенство (1.3.19), будем иметь

$$E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2} \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot [1-(1-t)^n]^{-m}\Omega_m\big(z^r f^{(r)}\big)_{B_2}$$

и тем самым неравенство (1.3.26) доказано. Так как для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$,

$$\Omega_m\big(z^r f_0^{(r)},t\big)_{B_2} = [1-(1-t)^n]^m \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}},$$

то получаем

$$E_{n-1}(z^s f_0^{(s)})_{B_2} = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{[1-(1-t)^n]^m}{[1-(1-t)^n]^m} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\Omega_m\big(z^r f_0^{(r)}, t\big)_{B_2}}{[1-(1-t)^n]^m}.$$

Этим теорема 1.3.2 доказана.

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.2 при всех* $s = 0, 1, 2, \cdots, r$, $r \in \mathbb{N}$ *и* $t \in (0,1)$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2}} = \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m},$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) E_{n-1}\big(z^s f^{(s)}\big)_{B_2}}{\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, 1/n\big)_{B_2}} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^m.$$

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ будем понимать вещественную неотрицательную измеримую и суммируемую на $[0,h]$ функцию q, не эквивалентную нулю. Нам понадобится следующая простая

Лемма 1.3.3. *Пусть q – весовая на отрезке $[0,h]$ функция,* $k, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n$, $t \in (0,1)$, $0 < p \leq \infty$. *Тогда имеет место равенство*

$$\inf_{k \geq n} \left\{ \alpha_{k,r}^p \int_0^h \left[1-(1-t)^k\right]^{mp} q(t)dt \right\}^{2/p} =$$

$$= \left\{ \alpha_{n,r}^p \int_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt \right\}^{2/p}. \tag{1.3.27}$$

Доказательство. Действительно, при всех $k \geq n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\alpha_{k,r} \geq \alpha_{n,r}, \ \left[1-(1-t)^k\right]^{2m} \geq \left[1-(1-t)^n\right]^{2m}, \ 0 < t < 1,$$

поэтому из последних двух одноименных неравенств следует, что

$$\alpha_{k,r}^2 \left[1-(1-t)^k\right]^{2m} \geq \alpha_{n,r}^2 \left[1-(1-t)^n\right]^{2m}. \tag{1.3.28}$$

Возведем обе части последнего неравенства в степень $p/2$ $(0 < p \le \infty)$, умножим на положительную на отрезке $[0, h]$ функцию q и, интегрируя по $[0, h]$ при любых $k \ge n$, $k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le \infty$, получаем

$$\alpha_{k,r}^p \int\limits_0^h \left[1 - (1-t)^k\right]^{mp} q(t)dt \ge \alpha_{n,r}^p \int\limits_0^h \left[1 - (1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt,$$

которое при $k = n$ обращается в равенство, и тем самым лемма 1.3.3 доказана.

Теорема 1.3.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+, n \ge r$, $h \in (0, 1)$, q *– весовая на интервале* $(0, h)$ *функция. Тогда при всех* $0 < p \le \infty$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p \big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1 - (1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (1.3.29)$$

Доказательство. Отметим, что в соотношении (1.3.29) для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \le \infty$, функционал $\|\Omega_m q^{1/p}\|_p$ определен соотношениями

$$\left\|\Omega_m q^{1/p}\right\|_p := \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p \big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}, \ 0 < p < \infty$$

$$\left\|\Omega_m\right\|_\infty := \lim_{p \to \infty} \left\|\Omega_m \cdot q^{1/p}\right\|_p = max \left\{\Omega_m \big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2} : t \in (0, h], 0 < h < 1\right\}.$$

При этом указанный функционал только при $1 \le p \le \infty$ является нормой. Переходим к доказательству равенства (1.3.29).

Сначала рассмотрим случай $0 < p \le 2$. Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского (см., например, [22], с.104)

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |g_k(t)|^2\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |g_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}, \qquad (1.3.30)$$

верного при всех $0 < p \le 2$ и $h \in \mathbb{R}_+$. Полагая в обеих частях неравенства (1.3.30) $g_k = f_k q^{1/p}$ $(0 < p \le 2)$, получаем [14]:

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2\right)^{p/2} q(t)dt\right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h |f_k(t)|^p q(t)dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \qquad (1.3.31)$$

Используя неравенство (1.3.31) и равенство (1.3.27), имеем

$$\left\{\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)}(z), t\right)_{B_2} q(t)dt\right\}^{1/p} =$$

$$\left\{\int\limits_0^h \left(\Omega_m^2\left(z^r f^{(r)}(z), t\right)_{B_2}\right)^{p/2} q(t)dt\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left[1-(1-t)^k\right]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|c_k|^2}{k+1}\right)^{p/2} q(t)dt\right\}^{1/p} \ge$$

$$\ge \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h \frac{|c_k|^p}{(k+1)^{p/2}} \cdot \left(\left[\alpha_{k,r}^2[1-(1-t)^k]\right]^{2m}\right)^{p/2} q(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} \ge$$

$$\ge \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \left(\inf_{k \ge n} \alpha_{k,r}^p \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^k\right]^{pm} q(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \left(\alpha_{n,r}^p \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{pm} q(t)dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left(\alpha_{n,r}^p \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{pm} q(t)dt\right)^{1/p} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left(\alpha_{n,r}^p \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{pm} q(t)dt\right)^{1/p} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2},$$

откуда следует

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.32}$$

С целью получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (1.3.32), в классе $B_2^{(r)}$ рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n$, использованную нами при доказательстве предыдущих утверждений. В силу первого из равенств (1.3.10) и равенства (1.3.21) получим оценку снизу

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(z^r f^{(r)}, t\big)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(z^r f_0^{(r)}, t\big)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,r}\big(1/\sqrt{n+1}\big)}{\alpha_{n,r}\big(1/\sqrt{n+1}\big)\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.33}$$

Рассмотрим теперь случай $2 \le p \le \infty$. Перепишем неравенство (1.3.17) в виде

$$\left[1-(1-t)^n\right]^m \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2} \le \Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2}. \qquad (1.3.34)$$

Возведя обе части неравенства (1.3.34) в степень p $(2 \le p \le \infty)$, умножив на весовую функцию $q(t)$ и интегрируя по t от $t=0$ до $t=h$, будем иметь

$$\alpha_{n,r} \cdot E_{n-1}(f)_{B_2} \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p},$$

откуда сразу получаем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2} q(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Обратное неравенство получаем из (1.3.33), которое верно также для $2 \le p \le \infty$. Теорема 1.3.3 полностью доказана.

Из теоремы 1.3.3 вытекает ряд утверждений.

Следствие 1.3.3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p = 1/m$, $h \in (0,1)$, $0 < p \le \infty$, q *– весовая функция на интервале* $(0,h)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2} q(t)dt\right)^{m}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right] q(t)dt\right)^{-m}. \qquad (1.3.35)$$

Из (1.3.35), в частности при $q(t)\equiv 1,\ n,m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+$, вытекает равенство

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left((n+1)\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{B_2}dt\right)^m}=$$

$$=\frac{1}{\left\{(n+1)h-1+(1-h)^{n+1}\right\}^m}. \qquad (1.3.36)$$

Полагая в (1.3.36), например $h=1/(n+1)$, получаем

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{B_2}dt\right)^m}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}, \qquad (1.3.37)$$

откуда сразу следует экстремальное равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}\left(z^rf^{(r)},t\right)_{B_2}dt\right)^m}=e^m.$$

Отметим, что равенства, приведенные в следствии 1.3.3, имеют место и для приближения вещественнозначных функций ортогональными полиномами (см. [14], с.1613).

Следствие 1.3.4. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.3.3. Положим*

$$q(t):=n(1-t)^{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ 0<t<1.$$

Тогда для любого $h\in(0,1)$ справедливо равенство

$$\sup_{f\in B_2^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n\int\limits_0^h\Omega_m^p\left(z^rf^{(r)},t\right)_{B_2}(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$= \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h)^n\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \tag{1.3.38}$$

Из (1.3.38), в частности при $h = 1/n,\ n \in \mathbb{N}, 0 < p \le \infty$, *имеем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p \left(z^r f^{(r)}, t \right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{(mp+1)^{1/p}}{\left(1-\dfrac{1}{e}\right)^{m+1/p}}. \tag{1.3.39}$$

При $p = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$ *из (1.3.38) следует, что*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \Omega_m^{1/m} \left(z^r f^{(r)}, t \right)_{B_2} (1-t)^{n-1} dt \right)^{m}} = 2^m \left(1-\frac{1}{e}\right)^{-2m}.$$

§1.4. Точные константы в неравенстве Джексона–Стечкина для $\mathscr{K}$ –функционала

В этом параграфе докажем некоторые точные неравенства, связывающие величину наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{B_2}$ функций f, принадлежащих классу $B_2^{(r)}$, посредством $\mathscr{K}$-функционала Петре. Определение и некоторые свойства $\mathscr{K}$-функционала Петре приведены, например, в [4]. В [18], [19] доказаны прямые и обратные теоремы теории приближения посредством $\mathscr{K}$-функционалов. Отметим, что в [18] также доказана слабая эквивалентность $\mathscr{K}$-функционала специальным обобщенным модулем непрерывности m-го порядка. Дальнейшее развитие теории $\mathscr{K}$-функционалов дано во многих работах, из которых отметим близкие к тематике данной работы [14], [11]. Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам B_2 и $B_2^{(m)}$:

$$\mathscr{K}_m(f, t^m)_{B_2} := \mathscr{K}\left(f, t^m; B_2; B_2^{(m)}\right) =$$
$$= \inf\left\{\|f-g\|_2 + t^m \cdot \|z^m g^{(m)}\|_2 : g \in B_2^{(m)}\right\}, \tag{1.4.1}$$

где $m \in \mathbb{N},\ 0 < t \leq 1$. Представляет интерес точно вычислить экстремальную характеристику величины, подобной левой части (1.3.22), но содержащей вместо модуля непрерывности m-го порядка (1.3.6) $\mathscr{K}$-функционал (1.4.1). Весьма важной задачей является установление слабой эквивалентности $\mathscr{K}$-функционала и различных обобщенных модулей непрерывности. В нашем случае эквивалентности указанных гладкостных величин вытекают из сравнения результата теоремы 1.3.1 и нижеприведенного следствия 1.4.1. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ *– произвольные числа, такие, что* $n \geq r + m$. *Тогда справедливо следующее соотношение*

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m\left(z^r f^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} = 1. \qquad (1.4.2)$$

Доказательство. Используя неравенство (1.3.6), для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-1}\left(z^r f^{(r)}\right)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\| z^r f^{(r)}(z) - S_{n-1}(g) \right\|_{B_2}, \qquad (1.4.3)$$

где $S_{n-1}(g)$ есть частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье произвольной функции $g \in L_2^{(m)}$. В силу равенства (1.3.2) и равенства (1.3.7) получаем

$$\left\| g - S_{n-1}(g) \right\|_{B_2} =$$
$$= E_{n-1}(g) \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} E_{n-1}\left(z^m g^{(m)}\right)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\| z^m g^{(m)} \right\|_{B_2}. \qquad (1.4.4)$$

Из неравенств (1.4.3) и (1.4.4) сразу следует, что

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \left\| z^r f^{(r)}(z) - g \right\|_{B_2} + \left\| g - S_{n-1}(g) \right\|_{B_2} \right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left\{ \left\| z^r f^{(r)}(z) - g \right\|_{B_2} + \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\| z^m g^{(m)} \right\|_{B_2} \right\}. \qquad (1.4.5)$$

Теперь заметим, что левая часть неравенства (1.4.5) не зависит от функции $g \in B_2^{(m)}$, а потому, переходя в правой части неравенства (1.4.5) к нижней грани по всем функциям $g \in B_2^{(m)}$ и используя определения $\mathscr{K}$-функционала (1.4.1), получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \mathscr{K}_m\left(z^r f^{(r)}, \frac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}.$$

Отсюда вытекает оценка сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (1.4.2)

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m\left(z^r f^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} \leq 1. \qquad (1.4.6)$$

С целью получения оценки снизу указанной экстремальной характеристики, в равенстве (1.4.1) полагаем $f(z) := p_n(z)$, где $p_n(z)$ – произвольный алгебраический комплексный полином из $\mathcal{P}_n$. Поскольку функция $g(z) \equiv 0$ принадлежит классу $B_2^{(m)}$, то из (1.4.1), в частности, следует оценка сверху

$$\mathscr{K}_m\big(p_n; t^m\big)_{B_2} \le \big\|p_n\big\|_{B_2}.$$

Так как функция $g(z) := p_n(z)$ принадлежит классу $B_2^{(m)}$, то из (1.4.3) также имеем

$$\mathscr{K}_m\big(p_n; t^m\big)_{B_2} \le t^m\big\|p_n^{(m)}\big\|_{B_2}. \tag{1.4.7}$$

Таким образом, для произвольного элемента $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ из двух последних соотношений вытекает неравенство

$$\mathscr{K}_m(p_n; t^m)_{B_2} \le \min\left\{\big\|p_n\big\|_{B_2};\ t^m\big\|p_n^{(m)}\big\|_{B_2}\right\}. \tag{1.4.8}$$

Рассмотрим снова ту же функцию $f_0(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$, использованную нами при доказательстве предыдующих утверждений. Поскольку для $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \ge r+m$

$$z^{r+m} f_0^{(r+m)}(z) = \alpha_{n,r+m} \cdot z^n,$$

то в силу (1.4.7) и неравенства $\alpha_{n,r+m} = \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n-r,m} \le \alpha_{n,r} \cdot \alpha_{n,m}$ будем иметь

$$\mathscr{K}\left(f_0^{(r)}(z); \frac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,m}}\big\|z^{r+m} f_0^{(r+m)}(z)\big\|_{B_2} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\alpha_{n,r+m}\big\|z^n\big\|_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,m}}\alpha_{n,r}\alpha_{n-r,m}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n+1}}\ .$$

Используя полученное неравенство и первое из равенств (1.3.10), получаем

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m\left(z^r f^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} \ge$$

$$\geq \frac{\alpha_{n,r}E_{n-1}(f_0)B_2}{\mathscr{K}_m\left(f_0^{(r)}, \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} \geq \frac{\alpha_{n,r}(\sqrt{n+1})^{-1}}{\alpha_{n,r}(\sqrt{n+1})^{-1}} = 1. \tag{1.4.9}$$

Так как $f_0 \in B_2^{(r)}$, то, сопоставляя оценку сверху (1.4.6) с оценкой снизу (1.4.9), получаем требуемое равенство (1.4.2), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Следствие 1.4.1. *В условиях теоремы 1.4.1, при любых* $m, n \in \mathbb{N}, r = 0$, *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\mathscr{K}_m\left(f; \dfrac{1}{\alpha_{n,m}}\right)_{B_2}} = 1. \tag{1.4.10}$$

Отметим, что сравнивая результаты теорем 1.3.1 и 1.4.1, а также следствие 1.3.3 и 1.4.1, приходим к соотношению

$$\mathscr{K}\left(z^r f^{(r)}, t^m\right)_{B_2} \sim \Omega_m\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{B_2},$$

где $m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+, 0 < t < 1$. Заметим, что из равенства (1.4.10) получаем точное на классе B_2 неравенство типа Джексона-Стечкина, в котором вместо обобщенного модуля непрерывности m-го порядка Ω_m использован $\mathscr{K}$-функционал (1.4.1), в то время как для неравенства типа Джексона-Стечкина с модулем непрерывности Ω_m в случае $r = 0$ из (1.3.23) вытекает лишь асимптотическое равенство

$$\sup_{f \in B_2} \frac{E_{n-1}(f)_{B_2}}{\Omega_m(f; 1/n)_{B_2}} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right)^{-m},\ m \in \mathbb{N}.$$

§1.5. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности

В этом параграфе излагаем необходимые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть S – единичный шар в пространстве B_2; $\Lambda_n \subset B_2$ – n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset B_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : B_2 \to \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : B_2 \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2. Величины

$$b_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset B_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset B_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}B_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset B_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\Big\} : \mathscr{L}^{\perp}B_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset B_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве B_2. Перечисленные выше n-поперечники монотонны по n и между ними в гильбертовом пространстве B_2 выполняются соотношения (см., например, [22, 27]):

$$b_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) \le d^n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) \le d_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \delta_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big) = \Pi_n\big(\mathfrak{M}, B_2\big). \qquad (1.5.1)$$

Приводим определение классов функций, естественно вытекающих из результатов теорем 1.3.1 – 1.4.1, доказанных нами в предыдущих параграфах.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0,1)$. Обозначим через $W_m^{(r)}B_2(\Phi) := W^{(r)}B_2(\Omega_m;\Phi)$ – класс функций $f \in B_2^{(r)}$, обобщенный модуль непрерывности (1.2.10) которых удовлетворяет неравенству

$$\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, h\big)_{B_2} \leq \Phi(h),$$

где Φ – неотрицательная, монотонно возрастающая функция на положительной полуоси $\mathbb{R} := [0,+\infty)$, причем $\Phi(0) = 0$. Далее, пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0,1)$, $0 < p \leq \infty$; $g(t)$ – весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Обозначим через $W_{2,m,p}^{(r)}(h,q) := W_p^{(r)}B_2(\Omega_m, h; q)$ – класс, состоящий из функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $z^r f^{(r)}(z)$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(z^r f^{(r)}; t\big)_{B_2} q(t)dt \leq 1.$$

Напомним (см., например, [41, с.25]), что неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция Ψ называется k-мажорантой, если функция $t^{-k}\Psi(t)$ не возрастает на $\mathbb{R}_+$, $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(t) \to 0$ при $t \to 0$. При $k = 1$ функцию Ψ будем называть мажорантой.

Через $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)(r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N})$ обозначим класс функций, состоящих из элементов $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $z^r f^{(r)}(z)$ удовлетворяют условию

$$\mathscr{K}_m(z^r f^{(r)}, t^m)_2 \leq \Psi(t^m),\ 0 < t < 1.$$

В определении введенного класса Ψ является некоторой мажорантой и $B_2^{(0)} \equiv B_2$, $W_2^{(0)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big) = W_2(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Для произвольного подмножества $\mathfrak{M} \subset B_2$ положим

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{B_2} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{B_2} :\ f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

Теорема 1.5.1. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ *и* $h \in (0,1)$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) = E_{n-1}(W_m^{(r)}B_2(\Phi))_{B_2} = \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\cdot\Phi(h), \quad (1.5.2)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху всех рассматриваемых n-поперечников класса $W_m^{(r)}B_2(\Phi)$ получаем из неравенства (1.3.17), поскольку

$$E_{n-1}(W_m^{(r)}B_2(\Phi))_{B_2} = \sup\Big\{E_{n-1}(f)_{B_2} : f \in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\Big\} \le$$

$$\le \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\sup\Big\{\Omega_m\big(z^r f^{(r)}, h\big)_{B_2} : f \in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\Big\} \le$$

$$\le \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\cdot\Phi(h). \tag{1.5.3}$$

Отсюда, учитывая соотношения (1.5.1) между n-поперечниками, получаем оценку сверху

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) \le E_{n-1}\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi)\big)_{B_2} \le \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\cdot\Phi(h). \tag{1.5.4}$$

Для получения оценки снизу всех вышеперечисленных n-поперечников в подпространстве комплексных алгебраических полиномов $\mathcal{P}_n$ степени $\le n$ рассмотрим $(n+1)$ -мерный шар

$$S_{n+1} := \Big\{p_n(z) \in \mathcal{P}_n :\ \|p_n\|_{B_2} \le \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h)\Big\},$$

$n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ и покажем, что шар $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}B_2(\Phi)$. Действительно, для произвольной $p_n(z) \in S_{n+1}$, в силу очевидного неравенства

$$\big[1-(1-t)^k\big]^{2m}\alpha_{k,r}^2 \le \big[1-(1-t)^n\big]^{2m}\alpha_{n,r}^2,$$

$r \le k \le n,\ m \in \mathbb{N}$ и определения модуля непрерывности (1.2.10), имеем

$$\Omega_m^2\left(z^r p_n^{(r)}; h\right) = \sum_{k=r}^{n}\big[1-(1-h)^k\big]^{2m}\alpha_{k,r}^2\frac{|d_k|^2}{k+1} \le$$

$$\le \big[1-(1-h)^n\big]^{2m}\cdot\alpha_{n,r}^2\sum_{k=0}^{n}\frac{|d_k|^2}{k+1} \le$$

$$\le \big[1-(1-h)^n\big]^{2m}\alpha_{n,r}^2\big\|p_n\big\|_{B_2}^2 \le \Phi^2(h),$$

откуда и следует включение $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}B_2(\Phi)$. Но тогда, согласно определению бернштейновского n-поперечника и соотношений (1.5.1) между n-поперечниками, для любого из перечисленных выше n-поперечников запишем оценку снизу

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) \geq b_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) \geq b_n\big(S_{n+1}, B_2\big) \geq$$
$$\geq \alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h). \tag{1.5.5}$$

Требуемое равенство (1.5.2) получаем из сопоставления оценки сверху (1.5.4) и оценки снизу (1.5.5). Теорема 1.5.1 доказана.

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы 1.5.1 при* $h = 1/n, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\lambda_n\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi), B_2\big) = E_{n-1}\big(W_m^{(r)}B_2(\Phi)\big)_{B_2} =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \sim \left(1-e^{-1}\right)^{-m}\cdot\alpha_{n,r}^{-1}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

В ряде работ найдены верхние грани модулей коэффициентов Фурье, полученных для определенных систем ортогональных с весом полиномов на некоторых классов функций (см., например, [15], [11] и литературу в них). Для введенных в этой работе классов функций данный вопрос тоже представляет определенный интерес.

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ n > r,\ h \in (0,1)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\right\} = \frac{\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}}{\alpha_{n,r}\sqrt{n+1}}\Phi(h). \tag{1.5.6}$$

Доказательство. В силу того, что система функций $\varphi_k(z) = z^k,\ k \in \mathbb{Z}_+$ ортогональна в единичном круге U, запишем

$$c_n(f) = \iint\limits_{(U)} f(z)\overline{\varphi}_n(z)d\sigma = \iint\limits_{(U)} f(z)\bar{z}^n d\sigma = \iint\limits_{(U)} [f(z) - S_{n-1}(f,z)]\,\bar{z}^n d\sigma, \tag{1.5.7}$$

где

$$S_{n-1}(f,z)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)z^k$$

– частная сумма n-го порядка ряда Фурье функции f. Применяя неравенство Коши к правой части (1.5.7), имеем:

$$\big|c_n(f)\big|\le\big\|f-S_{n-1}(f)\big\|_{B_2}\big\|\bar{z}^n\big\|_{B_2}=$$

$$=\big\|f-S_{n-1}(f)\big\|_{B_2}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}E_{n-1}(f)_{B_2}.$$

Отсюда, с учетом неравенства (1.5.3), находим

$$\sup\Big\{\big|c_n(f)\big|:f\in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\Big\}\le\frac{\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}}{\alpha_{n,r}\sqrt{n+1}}\Phi(h). \tag{1.5.8}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (1.5.8), введем функцию

$$f_1(z)=\alpha_{n,r}^{-1}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\cdot\Phi(h)z^n,$$

которая, как нетрудно проверить, является элементом шара S_{n+1}, построенного в ходе доказательства теоремы 1.5.1. Поскольку $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}B_2(\Phi)$, то

$$\sup\Big\{\big|c_n(f)\big|:f\in W_m^{(r)}B_2(\Phi)\Big\}\ge\big|c_n(f_1)\big|=$$

$$=\frac{\alpha_{n,r}^{-1}}{\sqrt{n+1}}\big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h). \tag{1.5.9}$$

Равенство (1.5.6) вытекает из неравенств (1.5.8) и (1.5.9). Теорема 1.5.2 доказана.

Теорема 1.5.3. *Пусть* $m\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le\infty,\ h\in(0,1)$, $q(t)$ *– весовая на отрезке* $[0,h]$ *функция. Тогда для произвольной* $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}B_2;B_2)=E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}B_2;B_2\big)=$$

$$= \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}, \qquad (1.5.10)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

Доказательство. Пользуясь равенством (1.4.10) и определением класса функций $W_{m,p}^{(r)}B_2$, запишем

$$E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}B_2\big) = \sup\Big\{E_{n-1}(f)_{B_2} : f \in W_{m,p}^{(r)}B_2\Big\} \le$$

$$\le \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.11)$$

Далее, учитывая соотношения (1.5.1) между всеми n-поперечниками, получаем оценку сверху

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}B_2; B_2) \le E_{n-1}\big(W_{m,p}^{(r)}B_2\big)_2 \le$$

$$\le \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.12)$$

Для получения соответствующих оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ введем в рассмотрение $(n+1)$-мерный шар

$$\mathscr{B}_{n+1} = \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \big\|p_n\big\|_{B_2} \le \alpha_{n,r}^{-1}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^n\big]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}\right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_{m,p}^{(r)}B_2$. С этой целью для произвольного $p_n \in \mathscr{B}_{n+1}$ запишем вытекающее из (1.3.6) неравенство

$$\Omega_m^2\big(z^r p_n^{(r)}, t\big)_{B_2} \le \alpha_{n,r}^2\big[1-(1-t)^n\big]^{2m}\big\|p_n\big\|_{B_2}^2. \qquad (1.5.13)$$

Возводя обе части неравенства (1.5.13) в степень $p/2$ $(0 < p \le \infty)$, умножая на весовую функцию $q(t)$ и интегрируя по отрезку $[0, h]$, для любой $p_n \in \mathscr{B}_{n+1}$

получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(z^r p_n^{(r)}, t)_{B_2} q(t)dt \le \alpha_{n,r}^p \cdot \left\|p_n\right\|_{B_2}^p \cdot \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt \le$$

$$\le \alpha_{n,r}^p \cdot \int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt \cdot \alpha_{n,r}^{-p} \cdot \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{-1} = 1$$

и, следовательно, имеет место включение $\mathscr{B}_{n+1} \subset W_{m,p}^{(r)} B_2$. Отсюда в силу соотношения (1.4.10) и определения бернштейновского n-поперечника запишем оценки снизу

$$\lambda_n(W_{m,p}^{(r)}(h,q); B_2) \ge b_n(W_{p,m}^{(r)}(h,q); B_2) \ge b_n(\mathscr{B}_{n+1}, B_2) \ge$$

$$\ge \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.14)$$

Равенство (1.5.10) получаем из сопоставления оценки сверху (1.5.12) и оценки снизу (1.5.14). Этим теорема 1.5.3 полностью доказана.

Следствие 1.5.2. *В условиях теоремы 1.5.3 имеет место равенство*

$$\sup\left\{\left|c_n(f)\right| : f \in W_{m,p}^{(r)} B_2\right\} = \alpha_{n,r}^{-1} \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t)^n\right]^{mp} q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Доказательство утверждения следствия 1.5.2 не приводим, поскольку оно повторяет схему доказательства теоремы 1.5.2.

Теорема 1.5.4. *Пусть Ψ – мажоранта, задающая класс $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right)_{B_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \quad (1.5.15)$$

Доказательство. Действительно, согласно определению класса функций $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$ из неравенства (1.4.6) и соотношения между различными n-поперечниками (1.5.1) получаем оценки сверху

$$\lambda_n \left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) \le d_n \left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) \le$$

$$\le E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right)_{B_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \tag{1.5.16}$$

Для нахождения соответствующей оценки снизу в силу (1.5.1) достаточно оценить бернштейновский n-поперечник класса $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Введем на множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ шар

$$\mathscr{M}_{n+1} := \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right)\right\}$$

и докажем, что $\mathscr{M}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Заметим, что для произвольного полинома

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k z^k \in \mathcal{P}_n$$

в силу формулы (1.3.4) имеет место равенство

$$z^{r+m} p_n^{(r+m)}(z) = \sum_{k=r+m}^{n} \alpha_{k,r+m} d_k z^k.$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, получаем неравенство типа Бернштейна

$$\left\|z^{r+m} p_n^{(r+m)}\right\|_{B_2} = \left\{\sum_{k=r+m}^{n} \alpha_{k,r+m}^2 \cdot \frac{|d_k|^2}{k+1}\right\}^{1/2} \le \alpha_{n,r+m}\left\|p_n\right\|_{B_2}. \tag{1.5.17}$$

Так как Ψ – мажоранта, то согласно определению для нее при любых $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$ имеет место неравенство $\tau_1\Psi(\tau_2) \le \tau_2\Psi(\tau_1)$. Поэтому для любых $0 < t_1 \le t_2 \le 1$, полагая $\tau_1 := t_1^m,\ \tau_2 := t_2^m$, получаем

$$t_1^{-m}\Psi(t_1^m) \ge t_2^{-m}\Psi(t_2^m). \tag{1.5.18}$$

Для справедливости включения $\mathscr{M}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$, для любых полиномов $p_n \subset \mathscr{M}_{n+1}$ требуется доказать неравенство

$$\mathscr{K}_m(z^r p_n^{(r)}, t^m) \leq \Psi(t^m),\ 0 < t \leq 1.$$

Рассмотрим два случая: 1) $0 < t \leq \alpha_{n,m}^{-1/m}$ и 2) $\alpha_{n,m}^{-1/m} \leq t \leq 1$.

1. В этом случае, используя неравенство (1.5.18), где

$$t_1 := t,\ t_2 := \alpha_{n,m}^{-1/m},$$

а также применяя неравенство (1.4.8), для любого $p_n \in \mathscr{M}_{n+1}$ в силу (1.5.17) получаем

$$\mathscr{K}_m\big(z^r p_n^{(r)}, t^m\big)_{B_2} \leq t^m \big\| z^{r+m} p_n^{(r+m)} \big\| \leq t^m \alpha_{n,r+m} \big\| p_n \big\|_{B_2} \leq$$
$$\leq t^m \alpha_{n,m} \alpha_{n,r} \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \leq t^m \alpha_{n,m} \Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) \leq \Psi(t^m). \qquad (1.5.19)$$

2. Используя неравенство (1.4.8) и неравенство типа Бернштейна

$$\big\| z^r p_n^{(r)} \big\|_{B_2} \leq \alpha_{n,r} \big\| p_n \big\|_{B_2},$$

а также учитывая, что мажоранта Ψ является неубывающей, имеем

$$\mathscr{K}_m\big(z^r p_n^{(r)}, t^m\big)_{B_2} \leq \big\| z^r p_n^{(r)} \big\|_{B_2} \leq \alpha_{n,r} \big\| p_n \big\|_{B_2} \leq \Psi\big(\alpha_{n.m}^{-1}\big) \leq \Psi(t^m). \qquad (1.5.20)$$

Таким образом, из определения класса $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$ и неравенств (1.5.19) и (1.5.20) вытекает, что $\mathscr{M}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Пользуясь определением бернштейновского n-поперечника и соотношениями (1.5.1), получаем оценку снизу

$$\lambda_n\left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) \geq b_n\left(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi), B_2\right) \geq$$
$$\geq b_n\Big(\mathscr{M}_{n+1}; B_2\Big) \geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \qquad (1.5.21)$$

Сопоставляя оценки (1.5.16) и (1.5.21), получаем требуемые равенства (1.5.15). Теорема 1.5.4 доказана.

В качестве следствия из теоремы 1.5.4 вытекает следующее утверждение о точном значении модулей коэффициентов Фурье на рассматриваемом классе функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big)$.

Следствие 1.5.3. *Пусть* $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$, *справедливо равенство*

$$\sup\left\{\big|c_n(f)\big| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

В теореме 1.5.4, в частности, найдено значение точной верхней грани наилучшего приближения $E_{n-1}\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\big)_{B_2}$ класса функций $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big)$ комплексными полиномами из подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, ее промежуточные производные $z^\nu f^{(\nu)}(z), 1 \le \nu \le r$ также принадлежат классу B_2, то представляет интерес изучение поведения величины $E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2}$ на классе $W_2^{(r)}\big(\mathscr{K}_m, \Psi\big)$. В этом случае имеет место

Теорема 1.5.5. *Пусть* $r, \nu \in \mathbb{N}$ $(1 \le \nu \le r)$. *Тогда для произвольной функции* $f \in B_2^{(r)}$ *справедливо точное на* $B_2^{(r)}$ *неравенство типа Колмогорова*

$$E_{n-1}^2\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2} \le \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,r})^{\nu/r}}\Big(E_{n-1}(f)\Big)_{B_2}^{1-\nu/r}\Big(E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)\Big)_{B_2}^{\nu/r}, \qquad (1.5.22)$$

обращающееся в равенство для $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$.

Доказательство. Действительно, для произвольной ν $(1 \le \nu \le r)$ из равенства

$$z^\nu f^{(\nu)}(z) - S_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f)\alpha_{k,\nu} z^k.$$

применением равенства Парсеваля получаем

$$E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2} = \big\|z^\nu f^{(\nu)} - S_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})\big\|_{B_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \qquad (1.5.23)$$

Пользуясь соотношением (1.5.23) и при фиксированных r и ν введём обозначение

$$\mathcal{A}_{r,\nu}(k) = \alpha_{k,\nu}^2/(\alpha_{k,r}^2)^{\nu/r} \ \ (1 \le \nu \le r),$$

запишем

$$E_{n-1}^2(z^\nu f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{(\alpha_{k,r}^2)^{\nu/r}} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{1-\nu/r} \left(\alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{\nu/r} \leq$$

$$\leq \sup\Big\{\mathcal{A}_{r,\nu}(k) : k \geq n\Big\} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{1-\nu/r} \left(\alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{\nu/r}. \qquad (1.5.24)$$

Применяя неравенство Гельдера к сумме, стоящей в правой части соотношения (1.5.24), и используя формулы (1.2.5) и (1.3.8), получаем

$$E_{n-1}^2(z^\nu f^{(\nu)}) \leq \sup\Big\{\mathcal{A}_{r,\nu}(k) : k \geq n\Big\} \times$$

$$\times \Big(E_{n-1}(f)\Big)^{2(1-\nu/r)} \cdot \Big(E_{n-1}(z^r f^{(r)})\Big)^{2\nu/r}. \qquad (1.5.25)$$

Заметим, что $\alpha_{k,r} := \alpha_{k,\nu} \cdot \alpha_{k-\nu,r-\nu}$ для $k \geq n \geq r$ и $r \geq \nu$, а потому имеем:

$$\mathcal{A}_{r,\nu}(k) := \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{(\alpha_{k,r}^2)^{\nu/r}} = \frac{(\alpha_{k,\nu})^{2(1-\nu/r)}}{(\alpha_{k-\nu,r-\nu})^{\nu/r}} =$$

$$= \frac{[k(k-1)\cdots(k-\nu+1)]^{2(1-\nu/r)}}{[(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(k-r+1)]^{2\nu/r}}.$$

В [11] доказано, что

$$\sup\Big\{\mathcal{A}_r(x) : x \geq n\Big\} = \mathcal{A}_{r,\nu}(n) = \frac{(\alpha_{n,\nu})^{2(1-\nu/r)}}{(\alpha_{n-\nu,r-\nu})^{2\nu/r}}. \qquad (1.5.26)$$

Таким образом, учитывая соотношения (1.5.26), получаем неравенство типа Харди-Литтльвуда-Полиа в B_2

$$E_{n-1}\big(z^\nu f^{(\nu)}\big)_{B_2} \leq \frac{(\alpha_{n,\nu})^{1-\nu/r}}{(\alpha_{n-\nu,r-\nu})^{\nu/r}} \cdot \Big(E_{n-1}(f)\Big)_{B_2}^{1-\nu/r} \cdot \Big(E_{n-1}\big(z^r f^{(r)}\big)\Big)_{B_2}^{\nu/r}. \quad (1.5.27)$$

Знак равенства для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$ проверяется непосредственным вычислением. Теорема 1.5.5 полностью доказана.

Теорема 1.5.6. *Пусть Ψ – некоторая мажоранта, задающая класс функций $W_2^{(r)}(\mathscr{K}, \Psi)$, где $m \in \mathbb{N}, r = 2, 3, \ldots$. Тогда для любого числа*

$n \geq m+r$ и произвольного натурального числа ν $(1 \leq \nu \leq r-1)$ справедливо равенство

$$\sup\left\{E_{n-1}(z^{\nu}f^{(\nu)})_{B_2} : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)\right\} = \frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \qquad (1.5.28)$$

Доказательство. В самом деле, учитывая, что $f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K},\Psi)$ и $z^r f^{(r)} \in W_2\big(\mathscr{K},\Psi\big)$, из неравенства (1.5.27) получаем

$$E_{n-1}\big(z^{\nu}f^{(\nu)}\big)_{B_2} \leq$$

$$\leq \frac{(\alpha_{n,\nu})^{1-\nu/r}}{(\alpha_{n-\nu,r-\nu})^{\nu/r}}E_{n-1}^{1-\nu/r}\big(W^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\big)_{B_2}\cdot E_{n-1}^{\nu/r}\big(W_2(\mathscr{K}_m,\Psi)\big)_{B_2}. \qquad (1.5.29)$$

Но так как, в силу (1.5.15)

$$E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\right)_{B_2} = \frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right),$$

$$E_{n-1}\Big(W_2(\mathscr{K}_m,\Psi)\Big)_{B_2} = \Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right),$$

то из неравенства (1.5.29) получаем оценку сверху

$$\sup\left\{E_{n-1}\big(z^{\nu}f^{(\nu)}\big)_{B_2} : f \in W_2^{(r)}\big(\mathscr{K},\Psi\big)\right\} \leq \frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right). \qquad (1.5.30)$$

С целью получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (1.5.30), вводим в рассмотрение функцию

$$f_1(z) = \frac{\sqrt{n+1}}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right)z^n.$$

В силу равенств (1.3.4), (1.5.23) и тождества $\alpha_{n,r} = \alpha_{n,\nu}\alpha_{n-\nu,r-\nu}$, $n \geq r \geq \nu$ запишем

$$z^{\nu}f_1^{(\nu)}(z) = \frac{\sqrt{n+1}\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\right)z^n,$$

$$E_{n-1}\big(z^{\nu}f_1^{(\nu)}\big)_{B_2} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,r}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,\nu}\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right) = \frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Так как функция f_1 принадлежит шару $\mathscr{M}_{n+1}$, введенному при доказательстве теоремы 1.5.4, то она принадлежит классу $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)$ и мы можем написать

$$\sup\left\{E_{n-1}(z^\nu f^{(\nu)})_2 : f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\right\}\geq$$
$$\geq E_{n-1}(z^\nu f_1^{(\nu)})_2=\frac{1}{\alpha_{n-\nu,r-\nu}}\cdot\Psi\left(\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\right). \qquad (1.5.31)$$

Требуемое равенство (1.5.28) следует из сопоставления оценки сверху (1.5.30) с оценкой снизу (1.5.31), чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.6.

Глава II. О наилучших линейных методах и поперечниках некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана

§2.1. Общие сведения о весовом пространстве Бергмана

2.1.1. Основные обозначения и определения

В второй главе получены некоторые результаты, связанные с построением наилучших линейных методов приближения и вычислением точных значений различных n-поперечников некоторых классов функций, аналитических в круге радиуса $R \geq 1$, принадлежащих весовому пространству Бергмана, усредненные модули гладкости которых мажорируются заданной функцией.

Первые результаты, связанные с вычислением колмогоровских n-поперечников в банаховом пространстве Харди H_p, $1 \leq p \leq \infty$ для классов аналитических функций с ограниченной по норме H_p r-й производной, найдены В.М.Тихомировым [28] ($p = \infty$) и Л.В.Тайковым [25] ($1 \leq p < \infty$). Оценка сверху ранее была получена К.И.Бабенко [3]. Затем это направление исследований продолжено, например, в работах [26–32, 39]. С.Б.Вакарчук [5] изучал аналогичные задачи в пространствах Бергмана и вычислил точные значения серии n-поперечников для некоторых классов аналитических функций. Им же построены наилучшие линейные методы приближения [7–9, 12] для ранее изучавшихся Л.В.Тайковым [26], Н.Айнуллоевым и Л.В.Тайковым [2] классов функций. Ряд окончательных результатов в этом направлении еще ранее был получен в работах [16, 22, 29, 30]. Продолжая исследование указанных авторов, С.Б.Вакарчуком и М.Ш.Шабозовым в работе [13] построены наилучшие линейные методы приближения в пространстве Бергмана с произвольным суммируемым весом. Здесь мы продолжаем исследование в этом направлении и излагаем некоторые новые результаты.

Напомним некоторые обозначения и определения, используемые в дальнейшем: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество положительных чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел; $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ – круг радиуса $R \geq 1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $A(U_R)$ – множество аналитических в U_R функций.

Определение 2.1.1. *Говорят, что произвольная функция*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \ z = \rho e^{it}, \ 0 \leq \rho < R, \ 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{2.1.1}$$

аналитическая в круге U_R, *принадлежит пространству Харди* $H_{p,R}, \ 1 \leq p \leq \infty, \ R \geq 1$, *если*

$$\|f\|_p := \|f\|_{H_{p,R}} = \lim_{\rho \to R-0} \{M_p(\rho, f)\} := \lim_{\rho \to R-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt \right)^{1/p} :=$$

$$:= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R(e^{it})|^p dt \right)^{1/p} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \tag{2.1.2}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, а

$$F(t) := f(Re^{it}) = \lim_{\rho \to R-0} f(\rho e^{it})$$

— угловое граничное значение $f(z)$ *(см., например, [21], стр. 192).*

В случае $p = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\overline{U}_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ граничные значения которой непрерывны вплоть до границы. При этом

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \max\{|f(z)| : |z| \leq R\} = \max\left\{|f(Re^{it})| : 0 \leq t \leq 2\pi\right\},$$

а в случае $R = 1$ полагаем $U := U_1, \ H_p := H_{p,1}$ и $\|f\|_{H_p} := \|f\|_{H_{p,1}}$.

Через $L_p := L_p(U), 1 \leq p < \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{U} |f(z)|^p dxdy\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^p dtd\rho\right)^{1/p}, \quad (2.1.3)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(z)$ – некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве U. Через $L_{p,\gamma} \stackrel{def}{=} L_p(U,\gamma)$, $1 \leq p < \infty$ обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых

$$\gamma^{1/p} f \in L_p(U), \ \|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|\gamma^{1/p} f\|_{L_p}.$$

Определение 2.1.2. [38] *Пусть D – ограниченная область на плоскости комплексного переменного, $f(z)$ – аналитическая в D функция, $\gamma(|z|)$ – произвольная положительная суммируемая по области D весовая функция, причём*

$$\iint\limits_{(D)} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^p d\sigma < \infty, \ 1 \leq p \leq \infty, \quad (2.1.4)$$

где $d\sigma$ – элемент площади, а интеграл понимается в смысле Лебега. Множество всех аналитических функций $f(z) \in D$, для которых выполнено условие (2.1.4), образует банахово пространство, которое называется весовым пространством Бергмана $B_{p,\gamma}(D)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Всюду далее полагаем $D := U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ и будем рассматривать пространство Бергмана $B_{p,\gamma}$ функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| < R$ с конечной нормой

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|z|<R} \gamma(|z|) \cdot |f(z)|^p d\sigma\right)^{1/p} < \infty, \quad (2.1.5)$$

где $\gamma(|z|)$ – положительная суммируемая в круге $|z| < R$ весовая функция, $d\sigma$ – элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Переходя в полярные координаты, норму (2.1.5) в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$ запишем в следующим выде

$$\|f\|_{B_{p,\gamma}(U_R)} = \|f\|_{B_{p,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)\cdot|f(\rho e^{it})|^p d\rho dt\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_0^R \rho\gamma(\rho)M_p^p(f,\rho)d\rho\right)^{1/p} < \infty,\ 1 \le p \le \infty, \qquad (2.1.6)$$

где

$$M_p^p(f,\rho) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt.$$

В частном случае, при $\gamma \equiv 1$ пространство $B_p(U_R) = B_{p,R}$ есть известное пространства Бергмана, а в общем случае пространство $B_{p,\gamma}$ было введено в работе [38]. В [13] рассматривается конкретная весовая функция γ_*, которая позволяет получить пространства $B_{p,\gamma_*}(U_R)$ аналитических в U_R функций с менее жесткими ограничениями на их поведение вблизи границы $|z| = R$ круга U_R по сравнению с функциями, принадлежащими пространству $B_{p,R}$.

2.1.2. Модули непрерывности в пространствах Харди H_p и Бергмана $B_{p,\gamma}$

В этом параграфе определим модуль непрерывности в пространствах Харди H_p и Бергмана $B_{p,\gamma},\ 1 \le p \le \infty$.

Символом $f^{(r)}(z), r \in \mathbb{N}$ обозначим обычную производную r-го порядка по переменной z функции $f \in A(U_R)$. Равенством

$$\omega_2(f, 2t)_{H_{p,R}} := \sup\{\|f(ze^{ix}) - 2f(z) + f(ze^{-ix})\|_{H_{p,R}} : |x| \le t\} =$$

$$= \sup_{|x|\le t}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f\left(Re^{i(\tau+x)}\right) - 2f\left(Re^{i\tau}\right) + f\left(Re^{i(\tau-x)}\right)\right|^p d\tau\right\}^{1/p}$$

определим модуль гладкости функции $f \in H_{p,R}$, и структурные свойства указанных функций охарактеризуем скоростью убывания к нулю модуля гладкости граничных значений производных $f^{(r)}(z)$, задавая эту скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой величины $\omega_2(f^{(r)}, 2t)_{H_{p,R}}$.

Теперь определим модуль непрерывности первого порядка в пространстве $B_{p,\gamma} := B_{p,\gamma}(U)$:

$$\omega(f, t)_{B_{p,\gamma}} = \sup_{|h|\le t}\|f(\rho e^{i(h+\cdot)}) - f(\rho e^{i(\cdot)})\|_{B_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup_{|h|\le t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)\left|f(\rho e^{i(t+h)}) - f(\rho e^{it})\right|^p d\rho dt\right)^{1/p}.$$

Равенством

$$\omega_2(f, t)_{B_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup_{|h|\le t}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)\left|f(\rho e^{i(t+h)}) - 2f(\rho e^{it}) + f(\rho e^{i(t-h)})\right|^p d\rho dt\right)^{1/p}$$

определим модуль гладкости, поскольку функции $\omega(f,t)_{B_{p,\gamma}}$ и $\omega_2(f,t)_{B_{p,\gamma}}$ обладают всеми свойствами модуля непрерывности и модуля гладкости. При $m \geq 2$ величину

$$\omega_m(f,t)_{B_{p,\gamma}} = \sup\left\{\|\Delta_m(f,\cdot,\cdot,h)\|_{B_{p,\gamma}} : |h| \leq t\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_m(f;\rho,u,h)|^p d\rho du\right)^{1/p} : |h| \leq t\right\}, \qquad (2.1.7)$$

где

$$\Delta_m(f;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

– разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка. В качестве примера вычислим модуль непрерывности m-го порядка для функции $f_0(z) = z^n$. Имеем

$$\Delta_m(f_0;\rho,u,h) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f_0\left(\rho e^{i(u+kh)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)^n = \rho^n e^{inu}\left(1-e^{inh}\right)^m,$$

откуда получаем

$$\|\Delta_m(f_0,\cdot,\cdot,h)\|_{B_{p,\gamma}}^p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho\gamma(\rho)|\Delta_m(f_0;\rho,u,h)|^p d\rho dt =$$

$$= \left|1-e^{inh}\right|^{pm}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho dt = \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{pm}\cdot\int\limits_0^1\rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho.$$

Теперь из (2.1.6) следует, что

$$\omega_m(f_0,t)_{B_{p,\gamma}} = \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^m \cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p},\ 1\le p\le\infty.$$

Пусть далее r – целое положительное число. Обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ обычную производную, а через

$$f_a^{(r)}(z) = \partial^r f(\rho e^{it})/\partial t^r,\ 0\le\rho<1$$

обозначим производную r-го порядка по аргументу функции $f(z)$. При этом

$$f_a^{'}(z) = f^{'}(z)\cdot z_t^{'} = f^{'}(z)\cdot zi$$

и вообще, для $r\ge 2$ справедливо рекуррентное соотношение

$$f_a^{(r)}(z) = \left\{f_a^{(r-1)}(z)\right\}_a^{'}.$$

Вычислим модуль непрерывности m-го порядка для производных r-го порядка функции $f_0(z) = z^n \in B_{p,\gamma}, 1\le p\le\infty$. Всюду, ради краткости, полагая

$$\alpha_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) := n!\left\{(n-r)!\right\}^{-1},\ n\ge r,$$

будем иметь

$$f_0^{(r)}(z) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot z^{n-r} = \alpha_{nr}\cdot z^{n-r},$$

$$f_{0,a}^{(r)}(z) = \partial^r f_0(\rho e^{it})/\partial t^r = (in)^r\cdot\rho^n e^{int} = (in)^r z^n.$$

Выполнив простые вычисления, из (2.1.7) получаем

$$\omega_m(z^r f_0^{(r)},t)_{B_{p,\gamma}} = \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^m \cdot\alpha_{nr}\cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}, \tag{2.1.8}$$

$$\omega_m(f_{0,a}^{(r)},t)_{B_{p,\gamma}} = \left(2\sin\frac{nt}{2}\right)^m \cdot n^r\cdot \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}. \tag{2.1.9}$$

§2.2. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов функций

В банаховых пространтсвах Харди H_p, Бергмана $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma},\ 1 \le p < \infty$ с весом γ вычислены точные значения различных n-поперечников классов $W^{(r)}_{p,R}(\Phi),\ r \in \mathbb{N}$, аналитических в круге радиуса $R \ge 1$ функций, у которых усреднённые модули гладкости r-х производных $f^{(r)} \in H_{p,R}$ ограничены заданной мажорантой Φ.

Пусть $\Phi(t),\ t \ge 0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Выбирая в качестве мажоранты функцию $\Phi(t)$, для произвольной $h \in (0, \pi/2]$, вводим в рассмотрение следующий класс функций

$$W^{(r)}_{p,R}(\Phi) \overset{def}{=} \left(f \in A(U_R) :\ \frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2(f^{(r)}; 2t)_{H_{p,R}} dt \le \Phi(h) \right),$$

где $r \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty,\ R \ge 1$. При $R = 1$ полагаем $W^{(r)}_{p,1}(\Phi) = W^{(r)}_p(\Phi)$.

Пусть X – произвольное банахово пространство; S – единичный шар в X; $\mathfrak{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $\Lambda_n \subset X$ – n-мерное линейное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ – подпространство коразмерности n, $L : X \to \Lambda_n$ – линейный непрерывный оператор, отображающий X в Λ_n. Приближение фиксированного множества $\mathfrak{M} \subset X$ фиксированным подпространством Λ_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \overset{def}{=} \sup\{E(f, \Lambda_n)_X : f \in \mathfrak{M}\} :=$$
$$= \sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Величина

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X \overset{def}{=} \inf\{\sup\{\|f - L(f)\|_X : f \in \mathfrak{M}\} : LX \subset \Lambda_n\} \qquad (2.2.1)$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества $\mathfrak{M}$ элементами подпространства $\Lambda_n \in X$. Линейный оператор $L^*, L^*X \subset \Lambda_n$, если он существует и реализует в (2.2.1) точную нижнюю грань, то есть когда

$$E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X = \sup\Big\{\|f - L^*(f)\|_X : \ f \in \mathfrak{M}\Big\},$$

является наилучшим для $\mathfrak{M}$ линейным методом приближения.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\Big\{\sup\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : \Lambda_{n+1} \subset X\Big\}, \tag{2.2.2}$$

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \in X\Big\}, \tag{2.2.3}$$

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{\sup\{\|f\|_X : \ f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\} : \Lambda^n \subset X\Big\}, \tag{2.2.4}$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = \inf\Big\{E(\mathfrak{M}, \Lambda_n)_X : \Lambda_n \subset X\Big\} \tag{2.2.5}$$

соответственно называют бернштейновским, колмогоровским, гельфандовским и линейным n-поперечниками (см., например, [22, с.5], [27, с.17]). Если существует подпространство Λ^*_{n+1}, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda^*_{n+1} \subset \mathfrak{M}\},$$

то оно является экстремальным для бернштейновского n-поперечника. Подпространство $\Lambda^n_* \subset X$ коразмерности n, если оно существует, такое что

$$d^n(\mathfrak{M}; X) = \sup\{\|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n_*\},$$

называют экстремальным для гелфандовского n-поперечника. Если существует $\widetilde{\Lambda}_n \subset X$, для которого

$$d_n(\mathfrak{M}; X) = E(\mathfrak{M}, \widetilde{\Lambda}_n)_X,$$

то $\widetilde{\Lambda}_n$ называют экстремальным подпространством для колмогоровского n-поперечника. Подпространство $\overline{\Lambda}_n \subset X$, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M}; X) = E(\mathfrak{M}, \overline{\Lambda}_n)_X,$$

называют экстремальным для линейного n-поперечника. Между перечисленными выше n-поперечниками имеют место соотношения [20, 22, 27]

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \begin{array}{c} d_n(\mathfrak{M}, X) \\ d^n(\mathfrak{M}, X) \end{array} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X). \tag{2.2.6}$$

Теорема 2.2.1. *Пусть $r, n \in \mathbb{N},\ n > r$ и мажоранта $\Phi(h)$ при любом $h \in (0, \pi/2]$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/2(n-r)\right)} \geq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \frac{1}{(n-r)h} \int\limits_0^{(n-r)h} (1-cosx)_* dx, \tag{2.2.7}$$

где

$$(1-cosx)_* = \left\{1-cosx, \text{если } 0 \leq x \leq \pi;\ 2, \text{если } x \geq \pi\right\}. \tag{2.2.8}$$

Тогда при всех $1 \leq p \leq \infty$ имеют место равенства

$$b_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) = d_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) =$$

$$= E\left(W_p^{(r)}(\Phi); \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_p} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \tag{2.2.9}$$

где

$$\alpha_{n,r} := n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),\ n \geq r,\ n, r \in \mathbb{N}.$$

Множество мажорант $\{\Phi\}$, удовлетворяющих условию (2.2.7), не пусто.

Доказательство. В [26] доказано, что для произвольной функции $f(z) \in H_p, 1 \leq p \leq \infty$, у которой $f^{(r)}(z) \in H_p, 1 \leq p \leq \infty,\ r \in \mathbb{N}$, имеет место точная оценка

$$E_{n-1}(f, \mathcal{P}_{n-1})_{H_p} \leq \frac{n-r}{(\pi-2)\alpha_{n,r}} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2\left(f^{(r)}; 2t\right)_{H_p} dt,\quad n > r. \tag{2.2.10}$$

Знак равенства в (2.2.10) реализуют функции вида $f(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\Phi)$, из неравенства (2.2.10) для произвольной функции $f(z) \in W_p^{(r)}(\Phi)$ имеем

$$E_n(f, \mathcal{P}_{n-1})_{H_p} \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)\alpha_{n,r}} \left(\frac{2(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2(f^{(r)}; 2t)_{H_p} dt \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись соотношением (2.2.6), получаем оценку сверху для бернштейновского и колмогоровского n-поперечников

$$b_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) \leq d_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) \leq$$

$$\leq E\left(W_p^{(r)}(\Phi), \mathcal{P}_{n-1}\right)_{H_p} \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (2.2.11)$$

С целью получения оценки снизу указанных n-поперечников, равной правой части неравенства (2.2.11), в множестве $\mathcal{P}_n \cap H_p$ введём в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{H_p} \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \right\}$$

и покажем, что шар $S_{n+1} \subset W_p^{(r)}(\Phi)$. Для этого используем неравенство [26]

$$\omega_2\left(p_n^{(r)}; 2t\right)_{H_p} \leq 2\alpha_{n,r}\left(1 - cos(n-r)t\right)_* \|p_n\|_{H_p}, \qquad (2.2.12)$$

справедливое для любого полинома $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$. Учитывая ограничение (2.2.7) и определение класса $W_p^{(r)}(\Phi)$ для любого $p_n \in S_{n+1}$, из неравенства (2.2.12) получаем

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \omega_2\left(p_n^{(r)}; 2t\right)_{H_p} dt \leq 2\alpha_{n,r}\|p_n\|_{H_p} \cdot \frac{1}{h}\int\limits_0^h \left(1 - cos(n-r)t\right)_* dt \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{\pi-2}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\cdot\frac{1}{(n-r)h}\int\limits_{0}^{(n-r)h}(1-cos\ t)_{*}dt \leq \Phi(h).$$

Полученное соотношение означает, что $S_{n+1} \subset W_p^{(r)}(\Phi)$. Из этого включения и определения бернштейновского n-поперечника следует оценка снизу

$$b_n\left(W_p^{(r)}(\Phi); H_p\right) \geq b_n\left(S_{n+1}; H_p\right) \geq \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \qquad (2.2.13)$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.11) и оценку снизу (2.2.13), получаем требуемые равенства (2.2.9). Приступая к доказательству второй части теоремы, покажем, что функция $\Phi_*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = 2/(\pi-2)$ $(1 < \alpha < 2)$, удовлетворяет ограничению (2.2.7). Подставляя $\Phi_*(t)$ в (2.2.7), будем иметь неравенство

$$\left(\frac{2(n-r)h}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\int\limits_{0}^{(n-r)h}(1-cos\ t)_{*}dt, \qquad (2.2.14)$$

которое ещё предстоит доказать. Полагая $2(n-r)h = \mu\pi$ $(0 \leq \mu < \infty)$, с учётом (2.2.8) перепишем неравенство (2.2.14) в эквивалентном виде

$$\mu^{\alpha+1} \geq \frac{\pi}{\pi-2}\begin{cases}\mu-(2/\pi)\cdot\sin(\mu\pi/2), \text{ если } 0\leq\mu\leq 2,\\ 2(\mu-1), \text{ если } 2\leq\mu<\infty.\end{cases} \qquad (2.2.15)$$

Исходя из первого неравенства (2.2.15), на отрезке $[0,2]$ введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\psi(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{\pi}{\pi-2}\left(\mu - \frac{2}{\pi}sin\ \frac{\mu\pi}{2}\right)$$

и покажем, что для всех значений $\mu \in [0,2]$ функция $\psi(\mu) \geq 0$. Сначала установим этот факт на отрезке $[0,1]$. Так как при $\mu \to 0+0$

$$\psi(\mu) = \mu^{\alpha+1}\left[1 - O(\mu^{2-\alpha})\right],$$

то в достаточно малой окрестности нуля $\psi(\mu) > 0$ и если бы $\psi(\mu)$ сменила знак в некоторой точке $\xi \in [0,1]$, то, учитывая равенства $\psi(0) = \psi(1) = 0$, пришли бы к выводу, что производная первого порядка

$$\psi'(\mu) = (\alpha+1)\left(\mu^\alpha - 1 + cos\,\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

имеет на интервале $(0,1)$ два различных нуля и ещё $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$. Но тогда вторая производная

$$\psi''(\mu) = (\alpha+1)\left(\alpha\mu^{\alpha-1} - \frac{\pi}{2} sin\,\frac{\mu\pi}{2}\right)$$

имеет на интервале $(0,1)$ не менее трёх нулей и, кроме того, в силу того, что $1 < \alpha < 2$, имеем $\psi''(0) = 0$. Отсюда следует существование трёх различных нулей на интервале $(0,1)$ производной третьего порядка

$$\psi'''(\mu) = (\alpha+1)\left(\alpha(\alpha-1)\mu^{\alpha-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 cos\,\frac{\mu\pi}{2}\right). \tag{2.2.16}$$

Но это невозможно, поскольку функция (2.2.16) представляет собой разность выпуклой вниз и выпуклой вверх функций. Из геометрических соображений ясно, что $\psi'''(\mu)$ не может иметь более двух нулей, а потому для $\mu \in [0,1]$ неравенство (2.2.15) выполняется.

Если $1 < \mu \leq 2$, то из условий $\psi(1) = \psi'(1) = 0$ и $\psi'' > 0$ сразу следует, что $\psi(\mu) \geq 0$, и таким образом для значений $0 \leq \mu \leq 2$ первое неравенство в (2.2.15) имеет место. Пусть $2 \leq \mu < \infty$. В этом случае достаточно доказать, что при всех $2 \leq \mu < \infty$ всегда

$$\psi_1(\mu) = \mu^{\alpha+1} - \frac{2\pi}{\pi-2}(\mu-1) := \mu^{\alpha+1} - 2(\alpha+1)(\mu-1) \geq 0.$$

Так как $1 < \alpha < 2,\ \mu \geq 2$, то $\psi_1'(\mu) = (\alpha+1)(\mu^\alpha - 2) \geq 0$, и поскольку $\psi_1(2) = 2^{\alpha+1} - 2\pi/(\pi-2) > 0$, то $\psi_1(\mu) > 0$ при любом $2 \leq \mu < \infty$. Но это означает, что второе неравенство в (2.2.15) на множестве $2 \leq \mu < \infty$ выполняется, чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

§2.3. Наилучший линейный метод приближения класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ в пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$

В этом параграфе для классов $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ построены наилучшие линейные методы приближения в пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$.

Распространим результат (2.2.9) для класса функций $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $R \ge 1$ на пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $R \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $r \in \mathbb{N}$ и мажоранта Φ удовлетворяет ограничению (2.2.7). Тогда для любого натурального числа $n > r$ имеют место следующие равенства*

$$b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) =$$

$$= d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) = d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = \delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) =$$

$$= E\left(W^{(r)}_{p,R}; \overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} = E\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \overline{\Lambda}_n\right)_{L_{p,\gamma}} =$$

$$= \sup\left\{\|f - L_*(f)\|_{L_{p,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}. \qquad (2.3.1)$$

При этом:

1) в случае $d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right)$ и $\delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right)$ подпространство

$$\Lambda^*_n \stackrel{def}{=} span\left\{\{z^k\}_{k=0}^{r-1}, \left\{\left[R^{2(n-k)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1 - \left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right) - 1\right]|z|^{2(n-k)}\right] z^k\right\}_{k=r}^{n-1}\right\},$$

где

$$\sigma_{k,r} \stackrel{def}{=} \frac{2(n-r)}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/[2(n-r)]} (1 - sin(n-r)x)cos(k-r)xdx, \ k \ge r,$$

является экстремальным для класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ *в пространстве* $L_{p,\gamma}$;

2) линейный непрерывный оператор

$$L^*_{n-1}(f,z) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f)z^k +$$

$$+\sum_{k=r}^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left[\sigma_{k,r}\left(1-\left(\frac{k-r}{2n-r-k}\right)^2\right)-1\right]\left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right\}c_k(f)z^k$$

является наилучшим для класса $W^{(r)}_{p,R}$ *линейным методом приближения в пространстве* $L_{p,\gamma}$;

3) подпространство $\Lambda^n_* \overset{def}{=} \{f\in B_{p,\gamma} : f^{(k)}(0)=0,\ k=0,1,\ldots,n-1\}$ – *экстремальное для* n*-поперечника* $d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$;

4) экстремальным для n*-поперечника* $b_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$ *является подпространство* $\overline{\Lambda}_{n+1} \overset{def}{=} span\{1,z,\ldots,z^n\}$.

Доказательство. Следуя работе [22, с.254], воспользуемся следующим представлением

$$f(\rho e^{it})-\Omega_{m-1}(f,\rho e^{it})=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(Re^{i\theta})e^{im\theta}G_R(\rho,t-\theta)d\theta,\ 0<\rho<R,\ 0\le t<2\pi, \tag{2.3.2}$$

справедливым для произвольной функции $f\in H^{(r)}_{p,R}$, где

$$G_R(\rho,t)\overset{def}{=} R^r\left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{int}\left(\frac{1}{\alpha_{n,r}}+2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{R}\right)^k\frac{cos\ kt}{\alpha_{n+k,r}}\right),$$

$$\Omega_{n-1}(f,z)\overset{def}{=}\sum_{k=0}^{r-1}c_k(f)z^k+\sum_{k=r}^{n-1}c_k(f)z^k\left(1-\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}\left(\frac{|z|}{R}\right)^{2(n-k)}\right).$$

Равенство (2.3.2) проверяется непосредственным вычислением, путём разложения производной $f^{(r)}(Re^{i\theta})$ в ряд Тейлора и последующим почленным интегрированием. В работе [13, с.15] доказано, что для произвольной функции

$f \in A(U_R)$, у которой $f^{(r)} \in H^{(r)}_{p,R}$, имеет место неравенство

$$\|f - L^*_{n-1}(f)\|_{L_{p,\gamma}} \leq$$

$$\leq \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/p} \frac{n-r}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/[2(n-r)]} \omega_2\left(f^{(r)}, 2x\right)_{H_p,R} dx. \tag{2.3.3}$$

Учитывая определение класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$, из правой части неравенства (2.3.3) получаем

$$\frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/p} \frac{n-r}{\pi-2} \int\limits_0^{\pi/[2(n-r)]} \omega_2\left(f^{(r)}, 2x\right)_{H_p,R} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\frac{2(n-r)}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2(n-r)} \omega_2\left(f^{(r)}, 2x\right)_{H_p,R} dx \right) \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \times$$

$$\times \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \ n > r, \ n, r \in \mathbb{N}. \tag{2.3.4}$$

Из неравенства (2.3.3) с учётом (2.3.4) для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ имеем

$$\|f - L^*_{n-1}(f)\|_{L_{p,\gamma}} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/p}. \tag{2.3.5}$$

Из соотношения (2.2.6) и неравенства (2.3.5) вытекает, что

$$\gamma_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) \leq \delta_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) \leq E\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); \Lambda^*_n\right)_{L_{p,\gamma}} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\|f - L^*_{n-1}(f)\|_{L_{p,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}, \qquad (2.3.6)$$

где $\gamma(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot),\ d_n(\cdot)$ или $d^n(\cdot)$. С другой стороны, согласно определению колмогоровского n-поперечника, имеем

$$d_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) \leq E\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); \Lambda_n^*\right) \leq E\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); \Lambda_n^*\right)_{L_{p,\gamma}} \qquad (2.3.7)$$

В монографии [22, гл. II, §3, предложение 3.2] доказано, что если X и Y – линейные нормированные пространства и X является подпространством Y, то для произвольного множества $\mathfrak{N} \subset X$ выполняется равенство $d^n(\mathfrak{N}, X) = d^n(\mathfrak{N}, Y)$. Поскольку $B_{p,\gamma} \subset L_{p,\gamma}$ и $W_{p,R}^{(r)}(\Phi) \subset B_{p,\gamma}$, то можем записать

$$d^n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = d^n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right). \qquad (2.3.8)$$

Используя определение бернштейновкого n-поперечника, имеем

$$b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); L_{p,\gamma}\right) = b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right), \qquad (2.3.9)$$

и дело сводится к оценке снизу бернштейновского n-поперечника в правой части равенство (2.3.9). В работах [13, 31] доказано, что для любого полинома $p_n(z) \in P_n$ при всех $1 \leq p < \infty$ и $R \geq 1$ и любых $r, n \in \mathbb{N},\ n > r$ имеет место точное неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,R}} \leq R^{n-r}\alpha_{n,r} \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/p} \cdot \|p_n\|_{B_{p,\gamma}},\ n \geq r, \qquad (2.3.10)$$

которое обращается в равенство для полинома $q_n(z) = az^n,\ a \in \mathbb{C}$. Рассмотрим $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}^* \overset{def}{=} \left\{ p_n \in P_n : \|p_n\|_{B_p,\gamma} \leq \right.$$

$$\left. \leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p} \right\}$$

и докажем, что S_{n+1}^{*} содержится в $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$. Воспользовавшись приведённым в работе [13, с.16] неравенством

$$\omega\left(p_n^{(r)}, 2x\right)_{H_{p,R}} \leq 2(1 - cos(n-r)x)_{*}\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,R}}, \tag{2.3.11}$$

с учётом определения класса $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$, соотношения (2.3.10) и ограничения (2.2.6), для произвольной $p_n \in S_{n+1}$ получаем

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega_2\left(p_n^{(r)}, 2x\right)_{H_{p,R}} \leq 2\cdot\|p_n^{(r)}\|_{H_{p,R}}\cdot\frac{1}{h}\int_0^h (1 - cos(n-r)x)_{*}dx \leq$$

$$\leq 2\alpha_{n,r}\cdot R^{n-r}\left(\int_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{-1/p}\|p_n\|_{B_{p,\gamma}}\cdot\frac{1}{(n-r)h}\int_0^{(n-r)h}(1 - cosx)_{*}dx \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\frac{1}{(n-r)h}\int_0^{(n-r)h}(1 - cosx)_{*}dx \leq \Phi(h).$$

Последнее неравенство означает, что $S_{n+1} \subset W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$. Учитывая доказанное включение и определение бернштейновского n-поперечника, запишем

$$b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) \geq b_n\left(S_{n+1}; B_{p,\gamma}\right) \geq$$

$$\geq \frac{\pi}{2(\pi-2)}\cdot\frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\left(\int_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}. \tag{2.3.12}$$

Сравнивая неравенства (2.3.6), (2.3.7), равенство (2.3.9),(2.3.8) и неравенства (2.3.12), получаем требуемые равенства (2.3.1). Из приведённого выше доказательства следует, что подпространство Λ_n^{*} является экстремальным для класса $W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ в пространстве $L_{p,\gamma}$ в случае вычисления точных значений колмогоровского и линейного n-поперечников, а подпространство $\overline{\Lambda}_{n+1}$ – экстремальное для бернштейновского n-поперечника $b_n\left(W_{p,R}^{(r)}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$. Линейный оператор L_{n-1}^{*} будет наилучшим линейным методом приближения для класса $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ в пространстве $L_{p,\gamma}$. Докажем, что подпространство Λ^*_n коразмерности n будет экстремальным для гельфандовского $n-$поперечника $d_n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$. В самом деле, для произвольного элемента $f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi) \cap \Lambda^n_*$, в силу равенства (2.3.2) и соотношения $c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, справедливо интегральное представление

$$f(\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(Re^{i\theta})e^{im\theta}G_R(\rho, t-\theta)d\theta,$$

где $0 < \rho < R,\ 0 \leq t < 2\pi$. Из неравенства (2.3.5) и из определения гельфандовского n-поперечника получаем

$$d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right) \leq \sup\left\{\|f\|_{B_{p,\gamma}} : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi) \cap \Lambda^n_*\right\} \leq$$

$$\geq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right)\left(\int\limits_0^1 \rho^{np+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/p}. \tag{2.3.13}$$

Сопоставляя неравенства (2.3.12) и (2.3.13) и учитывая соотношения (2.2.6) между n-поперечниками, убедимся, что подпространство Λ^n_* коразмерности n является экстремальным для n-поперечника $d^n\left(W^{(r)}_{p,R}(\Phi); B_{p,\gamma}\right)$. Теорема 2.3.1 доказана.

§2.4. Точные значения верхних граней модулей коэффициентов Тейлора на классе $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$

В теории приближения периодических функций тригонометрическими полиномами актуальной является задача вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций. Эта задача в разное время рассматривалась многим математикам (см., например, [23] и приведённую там литературу). Подобная задача для классов аналитических функций рассматривалась, например, в работе [13]. Напомним, что для произвольной функции $f \in A(U_R)$ её коэффициенты Тейлора $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ определяются формулой

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=\rho} \xi^{-(n+1)} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \rho < R.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 имеет место следующее равенство:*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)\right\} = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \tag{2.4.1}$$

где $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $R \geq 1$, $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. Используя ортогональность функции e^{-int} ко всем полиномам

$$p_{n-1}(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(p_{n-1}) \rho^k e^{ikt}$$

с учётом вида оператора $L^*_{n-1}(f)$, для произвольной функции $f \in W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ запишем

$$\rho^n c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left[f(\rho e^{it}) - L^*_{n-1}(f, \rho e^{it})\right] e^{-int} dt. \tag{2.4.2}$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.4.2) и повторяя буквально схему рассуждений, приведенную в [13, с.17-18], получаем оценку сверху:

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^{(r)}(\Phi)\right\} \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right), \ (1 \leq p < \infty, R \geq 1, n > r, \ n, r \in \mathbb{N}). \quad (2.4.3)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) z^n$$

и покажем, что $f_0 \in W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$. Используя неравенство (2.3.11), имеем

$$\omega_2\left(f_0^{(r)}, 2x\right)_{H_{p,R}} \leq 2(1 - cos(n-r)x)_* \|f_0^{(r)}\|_{H_{p,R}} =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot R^{r-n} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot 2(1 - cos(n-r)x)_* \|z^{n-r}\|_{H_{p,R}} =$$

$$= \frac{\pi}{\pi-2} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \cdot (1 - cos(n-r)x)_* \ .$$

Отсюда с учётом определения класса и ограничения (2.2.7) будем иметь

$$\frac{1}{h}\int_0^h \omega_2\left(f_0^{(r)}, 2x\right)_{H_{p,R}} dx \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{\pi-2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right) \frac{1}{(n-r)h} \int_0^{(n-r)h} (1 - cosx)_* dx \leq \Phi(h).$$

Следовательно, функция $f_0 \in W_{p,R}^{(r)}(\Phi)$ и для этой функции

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W_{p,R}^{(r)}(\Phi)\right\} \geq |c_n(f_0)| =$$

$$= \frac{\pi}{2(\pi-2)} \cdot \frac{R^{r-n}}{\alpha_{n,r}} \Phi\left(\frac{\pi}{2(n-r)}\right). \quad (2.4.4)$$

Сравнивая оценки (2.4.3) и (2.4.4), получаем равенство (2.4.1), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Заключение

- Найдены точные константы неравенства Джексона-Стечкина для обобщённого модуля непрерывности высшего порядка.
- Найдены точные верхние грани среднеквадратичных приближений некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка в пространстве Бергмана B_2.
- Найдены наилучшие линейные методы приближения для классов $W^{(r)}_{p,R}(\Phi)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ в весовых пространствах $B_{p,\gamma}$ и $L_{p,\gamma}$, $(1 \leq p \leq \infty)$.
- Найдены точные значения различных n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных в весовом пространстве Бергмана $B_{p,\gamma}$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно использовать в случае аналитических функций двух комплексных переменных в бикруге и отыскании точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций двух комплексных переменных с ограниченными смешанных по норме производных в двумерном весовом пространстве Бергмана.

Список литературы

[1] Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // ЖВММФ. – 2010. – Т.50. – №6. – С. 999-1004.

[2] Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. – 1986. – Т.40. – №3. – С.341-351.

[3] Бабенко К.И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. – 1958. – Т.22. – №5. – С.631-640.

[4] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства // Введение. – М.: Мир. – 1980.

[5] Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. журнал. – 1990. – Т.42. – №7. – С.873-881.

[6] Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и точные оценки n-поперечников классов аналитических функций // Докл. АН Украины. Математика, естествознание, технические науки. – 1994. – №6. – С.15-20.

[7] Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. – 1995. – Т.57. – №1. – С.30-39.

[8] Вакарчук С.Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1999. – Т.65. – №2. – С.186-193.

[9] Вакарчук С.Б. Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения // Матем. заметки. – 2002. – Т.72. – №5. – С.665-669.

[10] Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр. мат. журнал. – 2004. – Т.56. – №9. – С.1155-1171.

[11] Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева-Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95. – №5. – С. 666-684.

[12] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$, $q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. – 2009. – Т.85. – №3. – С.323-329.

[13] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций аналитических в круге // Матем. сборник. – 2010. – Т.201. – №8. – С.3-22.

[14] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. мат. журн. – 2013. – Т.65. – №12. – С. 1604-1621.

[15] Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении в среднем с весом Чеюышева-Эрмита алгебраическими полиномами на всей вещественной оси // Збірник проц Інституту математики НАН Украіни. – 2013. – Т.10. – №1. – С. 28-38.

[16] Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка. – 1983. – С.62-73.

[17] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами // – М.: Наука. – 1977.

[18] Ditzian Z., Totik V. K-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory. – 1986. – T.46. – №1.– С. 38-41.

[19] Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothnees // Berlin: Springer-Verlag. Haidelberg, New York, Tokyo. 1987.

[20] Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения – М.: Наука. – 1987. – 424 с.

[21] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций – М.: Гостехиздат. – 1950. – 350 с.

[22] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory // Berlin: Springer-Verlag. – Heidelberg. – New York. – Tokyo. – 1985. – 252 p.

[23] Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами – Киев: Наукова думка. – 1981. – 339с.

[24] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного // – М. Л.: Наука. – 1964.

[25] Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1967. – Т.1. – №2. – С.155-162.

[26] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №2. – С.285-295.

[27] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – М. – 1976. – 325 с.

[28] Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. – 1960. – Т.15. – №3(93). – С.81-120.

[29] Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}_n$ // Успехи мат. наук. – 1990. – Т.45. – №3. – С.197-198.

[30] Fisher S.D., Stessin V.I. The n-width of the unit ball of H^q // Journal Approx. Theory. – 1991. – V.67. – №3. – P.347-356.

[31] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2009. – №3(136). – С.7-23.

[32] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // ДАН России. – 2013. – Т.450. – №5. – С.518-521.

[33] Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сибирский мат. журнал. – 2019. – Т.60. – №6. – С.1414-1423.

[34] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения $n-$поперечников // Матем. заметки. – 2018. – Т.103. – №4. – С.617-631.

[35] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Значения n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – №3. – С.40-57.

[36] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. УрО РАН. – 2019. – Т.25. – №2. – С.258-272.

[37] Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. матем. журнал. – 2018. – Т.20. – №1. – С.86-97.

[38] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближение некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // ДАН России. – 2007. – Т.412. – №4. – С.466-469.

[39] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Матем. заметки. – 2000. – Т.68. – №5. – С.796-800.

[40] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. – 2002. – Т.382. – №6. – С.747-749.

[41] Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций // Киев. – Наукова думка. – 1992.

Работы автора по теме диссертации

В изданиях из перечня ВАК:

[42-A] Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О поперечниках некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТГУ. Естественные науки. – 2015. – Вып.4. – С.91-106.

[43-A] Хуромонов Х.М. Поперечники некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Труды международной летней математической школы-конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – 2016. – С.266-269.

[44-A] Хуромонов Х.М. Некоторые вопросы приближения функций рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2017. – №1(166). – С.7-18.

[45-A] Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Математика. – 2020. – №2. – С.74-92.

В других изданиях:

[46-A] Хуромонов Х.М. О значениях верхних граней модулей коэффициентов Тейлора для некоторых классов функций в пространстве Харди // Материалы Республиканской научно-теоретической конференции профессорского-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной 25-летию государственной Независимости Республики Таджикистан. (Душанбе, 2016 г.). – С.29-30.

[47-А] Хуромонов Х.М. Некоторые вопросы приближения функций рядами Фурье в пространстве Бергмана // „*Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функции*" – Материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика АН РТ Михайлова Леонида Григорьевича. (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) – С.165-168.

[48-А] Шабозов М.Ш., Хуромонов Х.М. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного рядами Фурье // „*Математический анализ и его приложения*" – Материалы республиканской научной конференции, посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.277-282.

[49-А] Хуромонов Х.М. Приближение в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье по ортогональной системе // „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*" – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Гулходжа. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.300-304.