В работах Н. Раджабова [13] изучены одномерные интегральные уравнения типа Вольтерра с фиксированным сингулярным или сверхсингулярными ядром вида:

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{\mathcal{K}(x,t)}{|t|^\alpha}\varphi(t)\,dt = f(x),$$

где $\alpha \geq 1$. Согласно теории интегральных уравнений типа Вольтерра, если в интегральном уравнении второго рода ядро является непрерывной функцией или $\mathcal{K}(x,t) \in L_2$, такое уравнение имеет единственное решение. В монографиях Н. Раджабова [13] и Н. Раджабова., Л.Н. Раджабовой [14] изучены одномерные, двумерные и некоторые случаи многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными или сверхсингулярными точками, линиями или областями.

Доказано, что решения одномерных интегральных уравнений с фиксированными граничными или внутренними особыми точками могут иметь произвольные постоянные, соответственно решение двумерных интегральных уравнений с фиксированными граничными или внутренними особыми линиями содержат произвольные функции одной переменной. Поэтому двумерные интегральные уравнения могут иметь бесконечное число линейно – независимых решений или единственное решение.

Исследованию двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра для неограниченной области посвящена работа Л.Н. Раджабовой., Н.Раджабова [15].

Степень изученности научной проблемы. Изложенные выше результаты относятся в основном к интегральным уравнениям типа Вольтерра с граничными сингулярными или сверхсингулярными точками, линиями или областями, а также к двумерным интегральным уравнениям типа Вольтерра с особыми линиями. Отметим, что одним из важных разделов теории интегральных уравнений является раздел двумерных интегральных уравнения типа Вольтерра с особыми линиями на полосе. Получение многообразия решений и разрешимость граничных задач для таких уравнений связанны с некоторыми трудностями принципиального характера, когда особая точка или линия находятся на границе области. В связи с вышеуказанным рассматриваемые в настоящей диссертации вопросы являются актуальными.

Теоретическую и методологическую основу диссертации составляют результаты трудов отечественных и зарубежных ученых. В работе используются основные методы теории интегральных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. При этом основополагающие значения имеют Послания Президента Республики Таджикистан, Лидера нации, уважаемого Эмомали Рахмона в Маджлиси Оли по вопросам изучения естественных, точных и математических наук.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Цель исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в дальнейшем развитии теории двумерных и многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе.

Объект исследования. Основными объектами исследования являются:

- модельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми линиями на полосе;
- немодельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особыми линиями на полосе.

Предмет исследования. Модельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линиями, сильно-особой и слабо-особой линиями, также немодельные двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой, сильно-особой и слабо-особой линиями на полосе.

Задачи исследования:

- получение представлений многообразия решений для модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе;
- получение представлений многообразия решений для немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра, с особыми линиями на полосе;
- постановка и исследование граничных задач, в случае, когда общее решение модельного двумерного интегрального уравнения содержит произвольные функции.

Методы исследования. В работе используются общие методы теории дифференциальных и интегральных уравнений, метод получения интегральных представлений. В работе также используется метод решения интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированной сингулярной точкой, также широко используются методы, разработанные в работах Н. Раджабова и Л. Н. Раджабовой.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020гг. по теме «Некоторые классы особых интегральных уравнений типа Вольтерра для неограниченных областей».

Достоверность диссертационных результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, определяется обоснованными теоретическими выкладками и строгими доказательствами, опирающимися на методы интегральных уравнений.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- получено многообразие решений модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;

- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе.

Теоретическая и практическая ценность. Исследования, содержащиеся в диссертации, носят теоретический характер. Результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, также могут быть использованы в различных прикладных вопросах.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о получении представлений многообразия решений для модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны и не связаны между собой;
- теоремы о получении представлений многообразия решений для немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями на полосе в случае, когда функции, присутствующие в ядрах связаны и не связаны между собой;

- теоремы о разрешимости граничных задач в случае, когда общее решение модельных двумерных интегральных уравнений содержат произвольные функции.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и теории функции ТНУ под руководством д.ф.-м.н., академика АН РТ Раджабова Н.Р. (Душанбе, 2016-2020гг.);
- международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата «Современные проблемы математики и их приложения», (Душанбе, 25-26 сентября 2018г.);
- республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «Годом развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021гг.) и «400-летию Миробида Сайидо Насафи» (Душанбе, 20-27 апреля 2019г.);
- ежегодных Апрельских научно-теоретических конференциях профессорского- преподавательского состава Таджикского национального университета (2016-2019гг.);
- республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова «Математический анализ и его приложения», Душанбе, 10-11 июня 2019г;
- международной научной конференции, посвящённой 70-летию д.ф.-м.н., профессора Джангибекова Гулходжа «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Душанбе, 30-31 января 2020г.).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 13 работах [1-А — 13-А]. Из них 6 статей опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, две статьи в других изданиях, остальные в трудах международных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, списка литературы, состоящего из 65 наименований. Общий объём диссертации –95 страниц машинописного текста. Для удобства в диссертации использована сквозная нумерация теорем, следствий и формул, имеющих тройную нумерацию, в которой первый номер совпадают с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий на порядковый номер теорем, следствий или формул в данном параграфе.

ГЛАВА I
ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЬНОГО ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЫМИ И СЛАБО - ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ НА ПОЛОСЕ

§ 1.1. Исследование модельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и особенностью по второй переменной на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой

Через $\mathcal{D}$ обозначим область $\mathcal{D} = \{(x, y): 0 \leq a < x < \infty,\ 0 \leq b < y < b_0\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{y = b, 0 \leq a < x < \infty\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, 0 \leq b < y < b_0\}$. В области $\mathcal{D}$ рассмотрим двумерное интегральное уравнение:

$$u(x, y) + \lambda \int_x^\infty \frac{u(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt + \mu \int_b^y \frac{u(x, s)}{s-b} ds + \delta \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{u(t, s)}{s-b} ds =$$

$$= f(x, y), \qquad (1.1.1)$$

где λ, μ, $\delta -$ заданные постоянные числа, $0 < \alpha < 1$, $f(x, y) -$ заданная функция, $u(x, y)$ $-$искомая функция.

Решение интегрального уравнения (1.1.1) будем искать в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x \to \infty} u(x, y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o\left[x^{-\zeta_1}\right], \zeta_1 > 1 - \alpha,$$

$\lim\limits_{y \to b} u(x, y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x, y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0.$$

Пусть параметры уравнения (1.1.1) связаны между собой равенством $\delta = \lambda\mu$. Тогда уравнение (1.1.1) примет вид:

$$u(x, y) + \lambda \int_x^\infty \frac{u(t, y)}{(t-a)^\alpha} dt + \mu \int_b^y \frac{u(x, s)}{s-b} ds + \lambda\mu \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{u(t, s)}{s-b} ds =$$

$$= f(x, y), \qquad (1.1.2)$$

Интегральное уравнение (1.1.2) при помощи интегральных операторов представим в виде (как в [15]):

$$T_b^y T_x^\infty u = f(x,y), \qquad (1.1.3)$$

где

$$T_x^\infty u = u(x,y) + \lambda \int\limits_x^\infty \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt, \quad T_b^y\, \upsilon = \upsilon(x,y) + \mu \int\limits_b^y \frac{\upsilon(x,s)ds}{s-b}.$$

В интегральном уравнении (1.1.3) вводя обозначение:

$$T_x^\infty u = \upsilon(x,y), \qquad (1.1.4)$$

приходим к решению интегрального уравнения

$$T_b^y \upsilon = f(x,y). \qquad (1.1.5)$$

Следовательно, задача о нахождении решения интегрального уравнения (1.1.1) свелась к решению расщеплённой системы одномерных интегральных уравнений по переменной x вида (1.1.4) и по переменной y вида (1.1.5). Используя схему нахождения решения одномерных интегральных уравнений типа Вольтерра для конечной области [13], легко можно видеть, что, если решение интегрального уравнения (1.1.5) существует, тогда оно представимо в виде:

$$\upsilon(x,y) = (y-b)^{-\mu}\varphi_1(x) + f(x,y) - \mu \int\limits_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(x,s)}{s-b} ds\,, \qquad (1.1.6)$$

где $\varphi_1(x)$ – произвольная функция точек Γ_1.

Согласно [15], если решение интегрального уравнения (1.1.4) существует, тогда оно имеет вид:

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} \cdot \psi_1(y) + \upsilon(x,y) - \lambda \int\limits_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\upsilon(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt, \ (1.1.7)$$

где $\psi_1(y)$ – произвольная функция точек Γ_2,

$$\omega_a^\alpha(x) = \left[(\alpha-1)(x-a)^{(\alpha-1)}\right]^{-1}.$$

В равенстве (1.1.7) вместо функции $\vartheta(x,y)$, подставляя её значение из (1.1.6), после интегрируя по частям, получим:

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} \cdot \psi_1(y) + (y-b)^{-\mu}\left[\varphi_1(x) - \lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{\varphi_1(t)dt}{(t-a)^\alpha}\right] +$$

$$+f(x,y) - \lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} - \mu\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(x,s)}{s-b}ds +$$

$$+\lambda\mu\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(t,s)}{s-b}ds. \quad (1.1.8)$$

Заметим, что интегральное уравнение (1.1.1) при $\delta = \lambda\mu$ можно также представить в виде:

$$T_x^\infty T_b^y u = f(x,y). \quad (1.1.9)$$

Решение интегрального уравнения (1.1.9) имеет вид:

$$u(x,y) = (y-b)^{-\mu}\varphi_2(x) + e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\psi_2(y) - \mu e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{\psi_2(s)}{s-b}ds +$$

$$+f(x,y) - \lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} - \mu\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(x,s)}{s-b}ds +$$

$$+\lambda\mu\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(x,s)}{s-b}ds.$$

На основе полученных решений, общее решение неоднородного интегрального уравнения (1.1.1) представим в виде:

$$u(x,y) = (y-b)^{-\mu}\Phi(x) + e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\Psi(y) + \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)] \equiv$$

$$\equiv \Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[\Phi(x), \Psi(y), \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right], \quad (1.1.10)$$

где

$$\Phi(x) = \varphi_2(x) + \varphi_1(x) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \frac{\varphi_1(t)\, dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$\Psi(y) = \psi_1(y) + \psi_2(y) - \mu \int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{\psi_2(s)}{s-b} ds,$$

$$\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)] = f(x,y) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \frac{f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} -$$

$$-\mu \int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(x,s)}{s-b} ds + \lambda\mu \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{f(t,s)}{s-b} ds.$$

Подытоживая вышеприведённые рассуждения, приходим к следующим утверждениям:

Теорема 1.1.1. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $f(x,y) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_2}\right], \zeta_2 > 1-\alpha, x \to \infty, \qquad (1.1.11)$$

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_1}], \eta_1 > \mu, y \to b. \qquad (1.1.12)$$

Тогда неоднородное интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций $u(x,y) \epsilon\, \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 и Γ_2, *всегда разрешимо. Общее решение неоднородного интегрального уравнения содержит четыре произвольные функции одной переменной и выражается равенством (1.1.10), где* $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ - *произвольные непрерывные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2, *которые при* $x \to \infty$, $y \to b$ *обращаются в нуль и их поведения определяются из асимптотических формул*

$$\varphi_1(x) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_3}\right], \zeta_3 > 1-\alpha, x \to \infty, \qquad (1.1.13)$$

$$\varphi_2(x) = o\left[x^{-\zeta_4}\right], \zeta_4 > 1-\alpha, x \to \infty, \qquad (1.1.14)$$

$$\psi_1(y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b, \tag{1.1.15}$$

$$\psi_2(y) = o[(y-b)^{\eta_2}], \eta_2 > \mu - 1, y \to b. \tag{1.1.16}$$

Теорема 1.1.2. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $f(x,y)\epsilon C(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением* (1.1.12) *и*

$$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_5}\right], \zeta_5 > 1 - \alpha, x \to \infty. \tag{1.1.17}$$

Тогда интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций $u(x,y)\epsilon\, C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv \Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[\Phi(x), 0, \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right], \tag{1.1.18}$$

где $\varphi_j(x)$, $j = 1; 2$ *− произвольные непрерывные функции точек* Γ_1, *которые при* $x \to \infty$ *обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул (1.1.14) и*

$$\varphi_1(x) = o\left[x^{-\zeta_6}\right], \zeta_6 > 1 - \alpha, x \to \infty.$$

Теорема 1.1.3. *Пусть в уравнении (1)* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $f(x,y)\epsilon C(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *асимптотическим поведением (1.1.11) и*

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b. \tag{1.1.19}$$

Тогда интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций $u(x,y)\epsilon\, C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv \Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[0, \Psi(y), \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right], \tag{1.1.20}$$

где $\psi_j(y)$, $(j = 1; 2) -$ *произвольные функции точек* Γ_2, *которые при* $y \to b$ *обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул (1.1.15) и*

$$\psi_2(y) = o[(y-b)^{\eta_3}], \eta_3 > \mu, y \to b.$$

Теорема 1.1.4. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta = \lambda\mu$, $f(x,y) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (1.1.17), (1.1.19). Тогда интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций* $u(x,y) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv \Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[0,0,\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right].$$

Следствие 1.1.1. *При выполнении условий теоремы 1.1.1 любое решение уравнения (1.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_7}\right], \zeta_7 > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b.$$

Следствие 1.1.2. *При выполнении условий теоремы 1.1.2 любое решение уравнения (1.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_8}\right], \zeta_8 > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o\left[(y-b)^{|\mu|}\right], y \to b.$$

Следствие 1.1.3. *При выполнении условий теоремы 1.1.3 любое решение уравнения (1.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[e^{-\lambda\omega_{\alpha}^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_9}\right], \zeta_9 > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b.$$

Следствие 1.1.4. *При выполнении условий теоремы 1.1.4 любое решение уравнения (1.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль, его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{10}}\right], \zeta_{10} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b.$$

§ 1.2. Исследование модельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и особенностью по второй переменной в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой

Допустим, что в уравнении (1.1.1) $\delta \neq \lambda\mu$. В этом случае уравнение (1.1.1) представим следующим образом:

$$u(x,y)+\lambda\int_x^\infty \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt+\mu\int_b^y \frac{u(x,s)}{s-b}ds+\lambda\mu\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{u(t,s)}{s-b}ds=$$

$$=\mathcal{F}_1(x,y), \qquad (1.2.1)$$

где

$$\mathcal{F}_1(x,y)=f(x,y)-\delta_1\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{u(t,s)}{s-b}ds, \qquad (1.2.2)$$

$\delta_1=\delta-\lambda\mu.$

Пусть $\lambda<0$, $\mu<0$, $f(x,y)\epsilon\, \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$. По обе стороны данного равенства действуя при помощи интегрального оператора $\Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}$, получим:

$$u(x,y)=(y-b)^{-\mu}\left[\varphi_2(x)+\varphi_1(x)-\lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{(t-a)^\alpha}\right]+$$

$$+e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\left[\psi_1(y)+\psi_2(y)-\mu\int_b^y \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu \frac{\psi_2(s)}{s-b}ds\right]+$$

$$+f(x,y)+\delta_1\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{u(t,s)}{s-b}ds-\lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{f(t,y)\,dt}{(t-a)^\alpha}+$$

$$+\lambda\delta_1\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_t^\infty \frac{d\xi}{(\xi-a)^\alpha}\int_b^y \frac{u(\xi,s)}{s-b}ds-$$

$$-\mu\int_b^y\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{f(x,s)}{s-b}ds+\delta_1\mu\int_b^y\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{ds}{s-b}\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^s\frac{u(t,\eta)}{\eta-b}d\eta+$$

$$+\lambda\mu\int_x^{\infty}e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^y\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{f(t,s)ds}{s-b}-$$

$$-\delta_1\lambda\mu\int_x^{\infty}e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_t^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{\alpha}}\int_b^y\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{ds}{s-b}\int_b^s\frac{u(\xi,\eta)}{\eta-b}d\eta.$$

Слагаемые, содержащие неизвестную функцию $u(x,y)$ перенесем в левую часть:

$$u(x,y)+\delta_1\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^y\frac{u(t,s)}{s-b}ds-\lambda\delta_1\int_x^{t}e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(\xi)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{\alpha}}\times$$

$$\times\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^y\frac{u(t,s)}{s-b}ds-\delta_1\mu\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^y\frac{u(t,s)}{s-b}ds\int_s^y\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{d\eta}{\eta-b}+$$

$$+\lambda\mu\delta_1\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^y\frac{u(t,s)}{s-b}ds\int_x^{t}e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(\xi)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{\alpha}}\int_s^y\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{d\eta}{\eta-b}\equiv$$

$$\equiv\Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[\Phi(x),\Psi(y),\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right].$$

Полученное равенство представим в виде:

$$u(x,y)+\delta_1\int_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int_b^y\frac{1}{s-b}\left[1-\lambda\int_x^{t}e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(\xi)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{\alpha}}\right.-$$

$$\left.-\mu\int_s^y\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{d\eta}{\eta-b}+\int_x^{t}e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(\xi)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\frac{d\xi}{(\xi-a)^{\alpha}}\int_s^y\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{\mu}\frac{d\eta}{\eta-b}\right]u(t,s)ds\equiv$$

$$\equiv\Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[\Phi(x),\Psi(y),\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right].\qquad(1.2.3)$$

Заметим, что справедливо равенство:

$$1-\lambda\int\limits_x^t e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(\xi)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{d\xi}{(\xi-a)^\alpha}-\mu\int\limits_s^y\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^\mu\frac{d\eta}{\eta-b}+$$

$$+\int\limits_x^t e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(\xi)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{d\xi}{(\xi-a)^\alpha}\int\limits_s^y\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^\mu\frac{d\eta}{\eta-b}=e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu.$$

На основе полученного равенства уравнение (1.2.3) представим в виде:

$$u(x,y)+\delta_1\int\limits_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^\mu\frac{u(t,s)ds}{s-b}\equiv$$

$$\equiv\Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\Big[\Phi(x),\Psi(y),\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\Big]. \qquad (1.2.4)$$

Обе стороны уравнения (1.2.4) умножая на

$$e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^\mu,$$

и вводя в рассмотрение новую функцию:

$$\vartheta(x,y)=e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^\mu u(x,y), \qquad (1.2.5)$$

приходим к решению интегрального уравнения вида:

$$\vartheta(x,y)+\delta_1\int\limits_x^\infty\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y\frac{\vartheta(t,s)}{s-b}ds=\mathcal{R}(x,y), \qquad (1.2.6)$$

где $\delta_1=\delta-\lambda\mu$,

$$\mathcal{R}(x,y)=e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^\mu\cdot\Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\Big[\Phi(x),\Psi(y),\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\Big]\equiv$$

$$\equiv e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}\varphi_1(x)-\lambda\int\limits_x^\infty e^{\lambda\omega_a^\alpha(t)}\frac{\varphi_1(t)\,dt}{(t-a)^\alpha}+e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}\varphi_2(x)+(y-b)^\mu\psi_1(y)+$$

$$+(y-b)^{\mu}\psi_2(y)-\mu\int\limits_b^y \frac{\psi_2(s)ds}{(s-b)^{1-\mu}}+e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{\mu}f(x,y)-$$

$$-\lambda(y-b)^{\mu}\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(t)}\frac{f(t,y)dt}{(t-a)^{\alpha}}-\mu e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}\int\limits_b^y \frac{f(x,s)ds}{(s-b)^{1-\mu}}+$$

$$+\lambda\mu\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(t)}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int\limits_b^y \frac{f(t,s)ds}{(s-b)^{1-\mu}}\,. \qquad (1.2.7)$$

Решение интегрального уравнения (1.2.6) будем искать в классе непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}$ функций $v(x,y)$, представимых в виде:

$$v(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}v_n(x),\ \ \tau>0. \qquad (1.2.8)$$

Пусть функция $\mathcal{R}(x,y)$ в правой части уравнения (1.2.6) также разлагается в равномерно-сходящиеся ряд вида:

$$\mathcal{R}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\,\mathcal{R}_n(x). \qquad (1.2.9)$$

Например, если в правой части равенства (1.2.7) $\varphi_i(x)=0$, $(\,i=1,2)$, $\psi_j(y)=0$, $(\,j=1,2)$, функция $f(x,y)$ представима в виде обобщённого степенного ряда вида:

$$f(x,y)=e^{-\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\,f_n(x), \qquad (1.2.10)$$

тогда получим

$$\mathcal{R}_n(x)=\left(1-\frac{\mu}{n+\tau}\right)f_n(x)-\left(\lambda-\frac{\lambda\mu}{n+\tau}\right)\int\limits_x^{\infty}\frac{f_n(t)dt}{(t-a)^{\alpha}}\,. \qquad (1.2.11)$$

Подставляя значения функций $\mathcal{v}(x,y)$, $\mathcal{R}(x,y)$ из (1.2.8) и (1.2.9) в уравнение (1.2.6), после приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(y-b)^n$ $n = 0,1,2,...$ приходим к решению одномерного интегрального уравнения:

$$\mathcal{v}_n(x) + \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^{\infty} \frac{\mathcal{v}_n(t)dt}{(t-a)^\alpha} = \mathcal{R}_n(x), \qquad n = 0,1,2,.... \tag{1.2.12}$$

теория которых хорошо изучена в [13].

В случае, когда $\delta_1 < 0$, функция $\mathcal{R}_n(x) \epsilon\ C(\overline{\Gamma_1})$ и в точке $x = \infty$ обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$\mathcal{R}_n(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{11}}\right], \zeta_{11} > 1-\alpha, n = 0,1,2,..., x \to \infty, \tag{1.2.13}$$

решение интегрального уравнения (1.2.12) выражается формулой:

$$\mathcal{v}_n(x) = e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} C_n^1 + \mathcal{R}_n(x) - \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\mathcal{R}_n(t)}{(t-a)^\alpha} dt.$$

Подставляя полученное значение $\mathcal{v}_n(x)$ в (1.2.8), находим решение интегрального уравнения (1.2.6) в виде:

$$\mathcal{v}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (y-b)^{n+\tau} \left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \cdot C_n^1 + \mathcal{R}_n(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\mathcal{R}_n(t)}{(t-a)^\alpha} dt\right], \tag{1.2.14}$$

где $C_n^1 (n = 0,1,2,....) -$ произвольные постоянные.

Следовательно, о разрешимости интегрального уравнения (1.2.6) справедлива теорема:

Теорема 1.2.1. *Пусть в интегральном уравнении* (1.2.6) $\delta_1 < 0$, *функция* $\mathcal{R}(x,y)$ *в области* $\mathcal{D}$ *представима в виде равномерно-сходящего обобщённого ряда вида (1.2.9), причем функции* $\mathcal{R}_n(x)$ *в окрестности* $x = \infty$ *удовлетворяют условиям (1.2.13). Тогда однородное интегральное уравнение (1.2.6) имеет бесконечное число линейно - независимых решений вида:*

$$\mathcal{v}_n(x,y) = e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{n+\tau}, n = 0,1,2 \dots .$$

Неоднородное интегральное уравнение (1.2.6) в классе непрерывных функций, представимых в виде (1.2.8), всегда разрешимо и его решение выражается равенством (1.2.14), где C_n^1 *– произвольные постоянные, удовлетворяющие условию:*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}^1}{C_n^1}\right| = C^1 \text{ и } C^1|b-b_0| < 1.$$

Исследование уравнения (1.1.1) в случае $\boldsymbol{\lambda < 0, \mu < 0, \delta \neq \lambda\mu}$.

Пусть в равенстве (1.2.7) $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1,2$, $\psi_j(x) = 0$, $j = 1,2$, функция $f(x,y)$ при $\lambda < 0$, $\mu < 0$ представима в виде равномерно – сходящегося ряда вида:

$$f(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau} f_n(x). \qquad (1.2.15)$$

Тогда легко можно проверить, что

$$\mathcal{R}_n(x) = \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)\left[f_n(x) - \lambda\int_x^{\infty}\frac{f_n(t)dt}{(t-a)^{\alpha}}\right]. \qquad (1.2.16)$$

В этом случае функция $\mathcal{R}(x,y)$ будет иметь вид:

$$\mathcal{R}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\mathcal{R}_n(x). \qquad (1.2.17)$$

Пусть в равенстве (1.2.15) при $\delta_1 < 0$ функции $f_n(x)$ в точке $x = \infty$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$f_n(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{12}}\right], \zeta_{12} > 1 - \alpha, x \to \infty, n = 0,1,2,\dots. \quad (1.2.18)$$

В этом случае функции $\mathcal{R}_n(x)$ в точке $x = \infty$ будут обращаться в нуль с асимптотическим поведением (1.2.13). Из равенства (1.2.5) находим решение интегрального уравнения (1.1.1) функцию $u(x, y)$ в виде:

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^{-\mu}\vartheta(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^{|\mu|}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau} \times\right.$$

$$\times\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \cdot C_n^1 + \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)\left(f_n(x) - \frac{\delta_1 + \lambda(n+\tau)}{n+\tau} \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\right)\right]\right\}. \quad (1.2.19)$$

Следовательно, справедлива теорема:

Теорема 1.2.2. *Пусть в интегральном уравнении (1.1.1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu \neq 0$, $\delta_1 < 0$, *функция* $f(x, y)$ *представима в виде равномерно-сходящего обобщённого ряда вида (1.2.15), где* $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращается в нуль с асимптотическим поведением (1.2.18). Тогда любое решение интегрального уравнения (1.1.1) из класса* $u(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимого в виде обобщённого степенного ряда*

$$u(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\vartheta_n(x), \quad (1.2.20)$$

выражается равенством (1.2.19), где C_n^1 $(n = 0,1,2\dots) -$ *произвольные постоянные, для которых существует предел:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|C_{n+1}^1|}{|C_n^1|} = C^1 \text{ и } |b - b_0| \cdot C^1 < 1.$$

Пусть в уравнении (1.2.6) $\delta_1 > 0$. В этом случае, если решения одномерных интегральных уравнений (1.2.12) существуют, тогда они представимы в виде:

$$\mathcal{v}_n(x) = \mathcal{R}_n(x) - \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{\mathcal{R}_n(t)}{(t-a)^\alpha}dt, n = 0,1,2,\dots, \quad (1.2.21)$$

где $\mathcal{R}_n(x) \in C(\overline{\Gamma}_1)$ и в точке $x = \infty$ обращаются в нуль с асимптотическими поведениями

$$\mathcal{R}_n(x) = o\left[x^{-\zeta_{13}}\right], \zeta_{13} > 1-\alpha, n = 0,1,2,\dots, x \to \infty. \quad (1.2.22)$$

В равенстве (1.2.21) вместо $\mathcal{R}_n(x)$ подставляя их выражения через $f_n(x)$ будем иметь:

$$\mathcal{v}_n(x) = \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)\left[f_n(x) - \frac{\delta_1+\lambda(n+\tau)}{n+\tau}\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right].$$

Если функции $f_n(x)$ удовлетворяют условиям $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma}_1)$ и при $x \to \infty$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$f_n(x) = o\left[x^{-\zeta_{14}}\right], \zeta_{14} > 1-\alpha, n = 0,1,2,\dots x \to \infty, \quad (1.2.23)$$

тогда функции $\mathcal{R}_n(x)$ из равенства (1.2.16) будут удовлетворять условиям (1.2.22). При выполнении вышеуказанных условий решение интегрального уравнения (1.1.1) в классе непрерывных функций $u(x,y)$, представимых в виде (1.2.20), выражается равенством:

$$u(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^\infty (y-b)^{n+\tau}\left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)[f_n(x) -$$

$$-\left(\lambda+\frac{\delta_1}{n+\tau}\right)\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\Bigg]. \quad (1.2.24)$$

Теорема 1.2.3. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu \neq 0$, $\delta_1 > 0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде равномерно-сходящего обобщённого ряда вида (1.2.15), где* $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращается в нуль с асимптотическими поведением (1.2.23). Тогда любое решение интегрального уравнения (1.1.1) из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимого в виде (1.2.20), единственно и выражается равенством (1.2.24).*

Исследование уравнения (1.1.1) в случае $\boldsymbol{\lambda > 0}$, $\boldsymbol{\mu > 0}$, $\boldsymbol{\delta \neq \lambda\mu}$.

В случае $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta \neq \lambda\mu$ задача о нахождении решения интегрального уравнения (1.1.1) сводится к решению интегрального уравнения (1.2.6). Решение интегрального уравнения (1.2.6) будем искать в классе непрерывных функций $\vartheta(x,y)$ обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическими поведениями

$$\vartheta(x,y) = o\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_{15}}\right], \zeta_{15} > 1 - \alpha, x \to \infty, \tag{1.2.25}$$

$$\vartheta(x,y) = o[(y-b)^{\gamma}], \gamma > \mu,\ y \to b. \tag{1.2.26}$$

При этом правая часть уравнения (1.2.6) также должна обращаться в нуль на Γ_1 и Γ_2 с асимптотическим поведением:

$$\mathcal{R}(x,y) = o\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_{16}}\right], \zeta_{16} > 1 - \alpha, \text{ при } x \to \infty, \tag{1.2.27}$$

$$\mathcal{R}(x,y) = o[(y-b)^{\gamma}], \gamma > \mu, \gamma > 0, \text{ при } y \to b. \tag{1.2.28}$$

Следовательно, задача сводится к решению следующего интегрального уравнения вида:

$$\vartheta(x,y) + \delta_1 \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \int_b^y \frac{\vartheta(t,s)}{s-b} ds = \mathcal{R}_1(x,y), \tag{1.2.29}$$

где

$$\mathcal{R}_1(x,y) = e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}(y-b)^{\mu} \cdot \Omega_{\alpha,1}^{\infty,b}\left[\Phi(x), \Psi(y), \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right]. \tag{1.2.30}$$

Решение интегрального уравнения (1.2.29) будем искать в виде:

$$\vartheta(x,y) = e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\, g_n(x), \qquad (1.2.31)$$

где $g_n(x) -$ неизвестные функции, $\tau = const > 0$.

Если $\varphi_i(x) = 0$, $i = 1,2$, $\psi_j(x) = 0$, $j = 1,2$, функция $f(x,y)$ разлагается в равномерно-сходящиеся ряд

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\, f_n(x), \qquad (1.2.32)$$

где $f_n(x) -$ известные функции, тогда функция $\mathcal{R}_1(x,y)$ будет иметь вид:

$$\mathcal{R}_1(x,y) = e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}(y-b)^\mu \sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\mathcal{R}_n^1(x), \qquad (1.2.33)$$

где

$$\mathcal{R}_n^1(x) = \left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)\left[f_n(x) - \lambda\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\,\frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\right]. \qquad (1.2.34)$$

В интегральном уравнении (1.2.29) вместо функций $\vartheta(x,y)$ и $\mathcal{R}_1(x,y)$ подставляя их значения из (1.2.31), (1.2.33), далее приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(y-b)^n, n = 0,1,2,\ldots$, для нахождения функций $g_n(x)$ получим следующие одномерные интегральные уравнения:

$$g_n(x) + \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^\infty \frac{g_n(t)dt}{(t-a)^\alpha} = \mathcal{R}_n^1(x), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \qquad (1.2.35)$$

Решение уравнения (1.2.35) ищется в классе непрерывных функций, обращающиеся в нуль при $x \to \infty$ с асимптотическим поведением:

$$g_n(x) = o\left[x^{-\zeta_{17}}\right], \zeta_{17} > 1-\alpha, x \to \infty, n = 0,1,2,\ldots . \qquad (1.2.36)$$

Согласно [13], решение уравнения (1.2.35) при $\delta_1 < 0$ выражается равенством:

$$g_n(x) = e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}C_n^2 + \mathcal{R}_n^1(x) -$$

$$-\frac{\delta_1}{n+\tau}\int\limits_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{\mathcal{R}_n^1(t)}{(t-a)^\alpha}dt,\ \ n=0,1,2,\dots \qquad (1.2.37)$$

Поставляя значения $\mathcal{R}_n^1(x)$ из (1.2.34) в (1.2.37) получим решение вида:

$$g_n(x)=e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}\cdot C_n^2+\left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)\Bigg[f_n(x)-\lambda\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\times$$

$$\times\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\ \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}-\delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\times$$

$$\times\int\limits_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\ \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\Bigg]. \qquad (1.2.38)$$

Поставляя полученное значение $g_n(x)$ из (1.2.38), в (1.2.31), находим решение интегрального уравнения (1.2.31) в виде:

$$\vartheta(x,y)=e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau+\mu}\Bigg[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}\cdot C_n^2+\left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)\Big[f_n(x)-$$

$$-\lambda\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\ \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}-$$

$$-\delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\ \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\Big]\Bigg]. \qquad (1.2.39)$$

Используя равенства (1.2.39) и (1.2.5), получим значение функции $u(x,y)$:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\Bigg[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}\cdot C_n^2+\left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)\Big[f_n(x)-$$

$$-\lambda\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\ \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}-$$

$$-\delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\ \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\Bigg]\Bigg]. \qquad (1.2.40)$$

Решение вида (1.2.40) получено при предположении, что при $\delta_1<0$ $f_n(x)\in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ и обращается в нуль в точке $x=\infty$ с асимптотическим поведением:

$$f_n(x)=o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{18}}\right], \zeta_{18}>1-\alpha, x\to\infty, n=0,1,2,\dots. \quad (1.2.41)$$

Итак, доказана:

Теорема 1.2.4. *Допустим, что в интегральном уравнении (1.1.1) параметры удовлетворяют условиям:* $\lambda>0$, $\mu>0$, $\delta_1=\delta-\lambda\mu\neq 0$, $\delta_1<0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде равномерно- сходящего обобщённого ряда вида (1.2.32), где* $f_n(x)\in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и обращаются в нуль в точке* $x=\infty$ *с асимптотическим поведением (1.2.41). Тогда любое решение интегрального уравнения (1.1.1) в классе функций* $u(x,y)\in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде обобщённого степенного ряда:*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\ \vartheta_n(x), \qquad (1.2.42)$$

выражается равенством (1.2.40), где C_n^2 $(n=0,1,2\dots)-$ *произвольные постоянные, для которых существует предел:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n+1}^2|}{|C_n^2|}=C^2, C^2\cdot|b-b_0|<1.$$

Теперь допустим, что в уравнении (1.1.1): $\lambda>0$, $\mu>0$, $\delta_1>0$. Тогда из теоремы 1.2.4 следует, что если решение интегрального уравнения существует при $\lambda>0$, $\mu>0$, $\delta_1>0$, то оно представимо в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)[f_n(x)-\lambda\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\times$$

$$\times \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha} - \delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda(n+\tau)}\right)\times$$

$$\times \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \frac{f_n(t)dt}{(t-a)^\alpha}\Bigg], \qquad (1.2.43)$$

где $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ и обращаются в нуль в точке $x = \infty$ с асимптотическим поведением:

$$f_n(x) = o\left[x^{-\zeta_{19}}\right], \zeta_{19} > 1-\alpha, x \to \infty, n = 0,1,2,\dots . \qquad (1.2.44)$$

Таким, образом доказана:

Теорема 1.2.5. *Допустим, что в интегральном уравнении (1.1.1) параметры удовлетворяют условиям:* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu \neq 0$, $\delta_1 > 0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде равномерно- сходящего обобщённого ряда вида (1.2.32), где* $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и обращаются в нуль в точке* $x = \infty$ *с асимптотическим поведением (1.2.44). Тогда интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{D})$, *представимых в виде (1.2.42), имеет единственное решение которое выражается равенством (1.2.43).*

Исследование случай $\lambda > 0, \mu < 0, \delta \neq \lambda\mu$.

Повторяя вышеприведенную схему нахождения решения интегрального уравнения (1.1.1) в случае $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq \lambda\mu$ получим следующие утверждение:

Теорема 1.2.6. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu \neq 0$, $\delta_1 < 0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде:*

$$f(x,y) = (y-\ b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}f_n(x), \qquad (1.2.45)$$

где $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *при* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{20}}\right], \zeta_{20} > 1-\alpha, x \to \infty, n = 0,1,2,\dots . \qquad (1.2.46)$$

Тогда любое решение интегрального уравнения (1.1.1) в классе функций $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде:*

$$u(x,y) = (y-\ b)^{|\mu|}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\,\vartheta_n(x), \qquad (1.2.47)$$

выражается равенством:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau+|\mu|}\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}\cdot C_n^3 + \left(1-\frac{\mu}{n+\tau}\right)e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}f_n(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{(n+\tau-\mu)(\lambda(n+\tau)+\delta_1)}{(n+\tau)^2}e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}\int_x^\infty e^{\left\{\lambda+\frac{\delta_1}{n+\tau}\right\}\omega_a^\alpha(t)}\frac{f_n(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right].$$

где C_n^3 *– произвольные постоянные числа, обладающие свойствами*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}^3}{C_n^3}\right| = C^3, \quad C^3\cdot|b-b_0| < 1.$$

Теорема 1.2.7. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta_1 > 0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде (1.2.45), где* $f_n(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n(x) = o\left[x^{-\zeta_{21}}\right], \zeta_{21} > \alpha, x \to \infty,\ n = 0,1,2,\dots .$$

Тогда интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.2.47), имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau+|\mu|}\left[\left(1-\frac{\mu}{n+\tau}\right)e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}f_n(x) - \right.$$

$$-\frac{(n+\tau-\mu)(\lambda(n+\tau)+\delta_1)}{(n+\tau)^2} e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \int_x^\infty e^{\left\{\lambda+\frac{\delta_1}{n+\tau}\right\}\omega_a^\alpha(t)} \frac{f_n(t)}{(t-a)^\alpha} dt\Bigg].$$

Исследование случай $\boldsymbol{\lambda < 0}$, $\boldsymbol{\mu > 0}$, $\boldsymbol{\delta \neq \lambda\mu}$.

Теперь допустим, что в уравнении (1.1.1) $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta \neq \lambda\mu$. В этом случае справедливы следующие утверждения:

Теорема.1.2.8. *Пусть в интегральном уравнении (1.1.1)* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu \neq 0$, $\delta_1 < 0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде равномерно-сходящего обобщённого ряда вида*

$$f(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^\infty (y-b)^{n+\tau} f_n(x), \tag{1.2.48}$$

где $f_n(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями:*

$$f_n(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{22}}\right], \zeta_{22} > 1-\alpha, x \to \infty, n = 0,1,2,\dots. \tag{1.2.49}$$

Тогда любое решение интегрального уравнения (1.1.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{D})$, *представимого в виде ряда:*

$$u(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^\infty (y-b)^{n+\tau} v_n(x), \tag{1.2.50}$$

выражается равенством:

$$u(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^\infty (y-b)^{n+\tau} \Bigg[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \cdot C_n^4 + \frac{n+\tau}{n+\tau+\mu} f_n(x) -$$

$$-\frac{1}{n+\tau+\mu}\big(\delta_1 + \lambda(n+\tau)\big) \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n(t)}{(t-a)^\alpha} dt\Bigg],$$

где C_n^4 *– произвольные постоянные числа, обладающие свойствами*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}^4}{C_n^4}\right| = C^4, \quad C^4\cdot|b-b_0|<1.$$

Из теоремы 1.2.8 следует.

Теорема 1.2.9. *Пусть в уравнении (1.1.1)* $\lambda>0$, $\mu<0$, $\delta_1>0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде (1.2.48), где* $f_n(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x=\infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n(x)=o\left[x^{-\zeta_{23}}\right], \zeta_{23}>\alpha, x\to\infty,\ n=0,1,2,\dots.$$

Тогда интегральное уравнение (1.1.1) в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.2.50), имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y)=e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x)}\sum_{n=0}^{\infty}(y-b)^{n+\tau}\left[\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}f_n(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n+\tau+\mu}\big(\delta_1+\lambda(n+\tau)\big)\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right].$$

§ 1.3. Граничные задачи для модельного двумерного интегрального уравнения с особой и слабо-особой линиями на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой

Полученные явные представления многообразия решений для модельного двумерного интегрального уравнения с особой и слабо-особой линиями (1.4.1) через произвольные функции дают возможность ставить и исследовать граничные задачи, где условия задаются на особых многообразиях.

Задача $Q_{1.3.1}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1.1.1) при* $\lambda<0$, $\mu<0$, $\delta=\lambda\mu$, $0<\alpha<1$, *из класса* $u(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничным условиям:*

$$[(y-b)^\mu u(x,y)]_{y=b}=N_1(x), x\in\Gamma_1, \qquad (1.3.1)$$

$$\left[e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{K}_1(y),\ y \in \Gamma_2, \qquad (1.3.2)$$

где $N_1(x)$, $\mathcal{K}_1(y)$ − соответственно заданные функции точек Γ_1 и Γ_2.

Решение задачи $\boldsymbol{Q_{1.3.1}}$. Согласно теореме 1.1.1, § 1.1, при $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$ общее решение интегрального уравнения (1.1.1) представимо в виде (1.1.10).

Исходя из интегрального представления (1.1.10) и условий (1.3.1), (1.3.2) получим:

1) $$[(y-b)^\mu u(x,y)]_{y=b} = \Phi(x) + \left\{(y-b)^\mu\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\Psi(y) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right]\right\}_{y=b} = N_1(x),$$

2) $$\left[e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \Psi(y) + \left\{e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}[(y-b)^{-\mu}\Phi(x) + \right.$$

$$\left.+\mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right\}_{x=\infty} = \mathcal{K}_1(y).$$

Очевидно, что при выполнении условий теоремы 1.1.1 имеем:

$$\left\{(y-b)^\mu\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\Psi(y) + \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right]\right\}_{y=b} = 0,$$

$$\left\{e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}[(y-b)^{-\mu}\Phi(x) + \mathcal{R}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right\}_{x=\infty} = 0.$$

Следовательно, справедливы равенства:

$$\Phi(x) = N_1(x), \qquad (1.3.3)$$

$$\Psi(y) = \mathcal{K}_1(y). \qquad (1.3.4)$$

Теорема 1.3.1. *Пусть в интегральном уравнении (1.1.1) параметры λ, μ, δ, функция $f(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1.1. Тогда задача $Q_{1.3.1}$ имеет единственное решение, представимое в виде (1.1.10), где функции $\Phi(x)$ и $\Psi(y)$ определяются из равенств (1.3.3) и (1.3.4).*

Задача $\boldsymbol{Q_{1.3.2}}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1.1.1) при* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничному условию:*

$$[(y-b)^{\mu}u(x,y)]_{y=b} = \mathcal{D}_1(x),\ x \in \Gamma_1,$$

где $\mathcal{D}_1(x) -$ *заданная функция точек* Γ_1.

Решение задачи $\boldsymbol{Q_{1.3.2}}$. Используя способ решения задачи $Q_{1.3.1}$, для решения данной задачи используем интегральное представление (1.1.18). Следовательно получим:

$$[(y-b)^{\mu}u(x,y)]_{y=b} = \Phi(x) = \mathcal{D}_1(x).$$

Откуда:

$$\Phi(x) = \mathcal{D}_1(x). \tag{1.3.6}$$

Теорема 1.3.2. *Пусть в интегральном уравнении (1.1.1) параметры* λ, μ, δ, *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1.2. Тогда задача* $Q_{1.3.2}$ *имеет единственное решение, представимое в виде (1.1.18), где функция* $\Phi(x)$ *определяется равенством (1.3.6).*

Задача $\boldsymbol{Q_{1.3.3}}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1.1.1) при* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничному условию:*

$$\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = M_1(y),\ y \in \Gamma_2,$$

где $M_1(y) -$ *заданная функция точек* Γ_2.

Решение задачи $\boldsymbol{Q_{1.3.3}}$. Для решения данной задачи используя интегральное представление (1.1.20), находим:

$$\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \Psi(y) = M_1(y).$$

Следовательно, справедливо равенство:

$$\Psi(y) = M_1(y). \tag{1.3.7}$$

Теорема 1.3.3. *Пусть в интегральном уравнении (1.1.1) параметры* λ, μ, δ, *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.1.3. Тогда задача* $Q_{1.3.3}$

имеет единственное решение, представимое в виде (1.1.20), где функция $\Psi(y)$ определяется равенством (1.3.7).

§ 1.4. Исследование модельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и сильной особенностью по второй переменной на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой

На полосе $\mathcal{D} = \{(x, y): 0 \leq a < x < \infty,\ 0 \leq b < y < b_0\}$ рассмотрим интегральное уравнение вида:

$$u(x,y) + \lambda \int\limits_x^\infty \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt + \mu \int\limits_b^y \frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta} ds + \delta \int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int\limits_b^y \frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta} ds =$$

$$= f(x,y), \qquad (1.4.1)$$

где $0 < \alpha < 1, \beta > 1$.

Решение интегрального уравнения (1.4.1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{24}}\right], \zeta_{24} > 1 - \alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_4}], \eta_4 > \beta - 1.$$

Используя схему нахождения решения интегрального уравнения (1.1.1) из § 1.1, легко можно видеть, что при $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$ решение интегрального уравнения (1.4.1) выражается равенством:

$$u(x,y) = e^{\mu\omega_b^\beta(y)} \mathcal{H}(x) + e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} \mathcal{Q}(y) + \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] \equiv$$

$$\equiv \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[\mathcal{H}(x), \mathcal{Q}(y), \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \qquad (1.4.2)$$

где

$$\mathcal{H}(x) = \hbar_2(x) + \hbar_1(x) - \lambda \int\limits_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\hbar_1(t)dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$Q(y) = q_1(y) + q_2(y) - \mu \int_b^y e^{-\mu\left\{\omega_b^\beta(s) - \omega_b^\beta(y)\right\}} \cdot \frac{q_2(s)ds}{(s-b)^\beta},$$

$$\mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = f(x,y) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt -$$

$$-\mu \int_b^y e^{\mu\left\{\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right\}} \cdot \frac{f(x,s)}{(s-b)^\beta} ds + \lambda\mu \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y e^{\mu\left\{\omega_b^\beta(y) - \omega_b^\beta(s)\right\}} \cdot \frac{f(t,s)}{(s-b)^\beta} ds.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 1.4.1. *Пусть в уравнении (1.4.1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $f(x,y) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{25}}\right], \zeta_{25} > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{1.4.3}$$

$$f(x,y) = o\left[e^{\mu\omega_b^\beta(y)} (y-b)^{\eta_5}\right], \eta_5 > \beta - 1, y \to b. \tag{1.4.4}$$

Тогда неоднородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо. Общее решение неоднородного интегрального уравнения содержит четыре произвольные функции одной переменной и выражается равенством (1.4.2), где* $h_1(x)$, $h_2(x)$, $q_1(y)$, $q_2(y)$ *— произвольные непрерывные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2, *которые при* $x \to \infty$, $y \to b$ *обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул:*

$$h_1(x) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{26}}\right], \zeta_{26} > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{1.4.5}$$

$$h_2(x) = o\left[x^{-\zeta_{27}}\right], \zeta_{27} > 1-\alpha, x \to \infty, \tag{1.4.6}$$

$$q_1(y) = o[(y-b)^{\eta_6}], \eta_6 > \beta - 1, \ y \to b, \tag{1.4.7}$$

$$q_2(y) = o\left[e^{\mu\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\eta_7}\right], \eta_7 > \beta - 1, y \to b. \quad (1.4.8)$$

Теорема 1.4.2. *Пусть в уравнении (1.4.1)* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $f(x,y) \epsilon C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (1.4.4) и*

$$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{28}}\right], \zeta_{28} > 1 - \alpha, x \to \infty. \quad (1.4.9)$$

Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[\mathcal{H}(x), 0, \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \quad (1.4.10)$$

где $h_j(x)$, $j = 1; 2 -$ *произвольные непрерывные функции точек* Γ_1, *которые при* $x \to \infty$ *обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул (1.4.6) и*

$$h_1(x) = o\left[x^{-\zeta_{29}}\right], \zeta_{29} > 1 - \alpha, x \to \infty.$$

Теорема 1.4.3. *Пусть в уравнении (1.4.1)* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $f(x,y) \epsilon C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (1.4.3) и*

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_8}],\ \eta_8 > \beta - 1, y \to b. \quad (1.4.11)$$

Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[0, \mathcal{Q}(y), \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \quad (1.4.12)$$

где $q_j(y)$, $(j = 1; 2) -$*произвольные функции точек* Γ_2, *которые при* $y \to b$ *обращаются в нуль и их поведение определяется из асимптотических формул (1.4.7) и*

$$q_2(y) = o\left[e^{-\mu\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\eta_9}\right], \eta_9 > \beta - 1, y \to b.$$

Теорема 1.4.4. *Пусть в уравнении (1.4.1)* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (1.4.9), (1.4.11). Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[0,0,\mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]. \qquad (1.4.13)$$

Следствие 1.4.1. *При выполнении условий теоремы (1.4.1) любое решение уравнения (1.4.1) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{30}}\right], \zeta_{30} > 1 - \alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = \mathrm{o}[(y-b)^{\eta_{10}}], \eta_{10} > \beta - 1, y \to b.$$

Следствие 1.4.2. *При выполнении условий теоремы 1.4.2 любое решение уравнения (1.4.1) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{31}}\right], \zeta_{31} > 1 - \alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o\left[e^{\mu\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\eta_{11}}\right], \eta_{11} > \beta - 1, y \to b.$$

Следствие 1.4.3. *При выполнении условий теоремы 1.4.3 любое решение уравнения (1.4.1) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[e^{-\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_{32}}\right], \zeta_{32} > 1 - \alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{12}}], \eta_{12} > \beta - 1, y \to b.$$

Следствие 1.4.4. *При выполнении условий теоремы 1.4.4 любое решение уравнения (1.4.1) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль и его поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из асимптотических формул*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{33}}\right], \zeta_{33} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{13}}], \eta_{13} > \beta - 1, y \to b\,.$$

§ 1.5. Исследование модельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и сильной - особенностью по второй переменной на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой

В случае, когда в уравнении (1.4.1) $\delta \neq \lambda\mu$, данное уравнение представим в виде:

$$u(x,y) + \lambda\int\limits_x^\infty \frac{u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt + \mu\int\limits_b^y \frac{u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds + \lambda\mu\int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y \frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds =$$

$$= \mathcal{S}_1(x,y), \tag{1.5.1}$$

где

$$\mathcal{S}_1(x,y) = f(x,y) - \delta_1\int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y \frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds, \tag{1.5.2}$$

$\delta_1 = \delta - \lambda\mu$.

Как § 1.2 главы 1, для решения интегрального уравнения (1.5.1), считая функцию $\mathcal{S}_1(x,y)$ известной, выписывая решение уравнения (1.5.1), далее вместо функции $\mathcal{S}_1(x,y)$ подставляя ее значение из (1.5.2), после некоторых преобразований перенося неизвестную функцию $u(x,y)$ в левую часть, приходим к решению интегрального уравнения вида:

$$u(x,y) + \delta_1\int\limits_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int\limits_b^y e^{\mu\left\{\omega_b^\beta(y)-\omega_b^\beta(s)\right\}}\cdot\frac{u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds =$$

$$= \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[\mathcal{H}(x), \mathcal{Q}(y), \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]. \tag{1.5.3}$$

В уравнении (1.5.3) введем обозначение

$$\vartheta_1(x,y) = e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)-\mu\omega_b^\beta(y)}u(x,y), \tag{1.5.4}$$

тогда получим интегральное уравнение вида:

$$\vartheta_1(x,y) + \delta_1 \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{\vartheta_1(t,s)}{(s-b)^\beta} ds = \mathcal{H}_1(x,y), \tag{1.5.5}$$

где $\delta_1 = \delta - \lambda\mu$,

$$\mathcal{H}_1(x,y) = e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)-\mu\omega_b^\beta(y)} \Omega_{\alpha,\beta}^{\infty,b}\left[\mathcal{H}(x), \mathcal{Q}(y), \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right] \equiv$$

$$\equiv e^{-\mu\omega_b^\beta(y)} \cdot q_1(y) + e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)} \cdot h_2(x) + e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)} h_1(x) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\omega_a^\alpha(t)} \cdot \frac{h_1(t)dt}{(t-a)^\alpha}$$

$$+e^{-\mu\omega_b^\beta(y)} q_2(y) - \mu \int_b^y e^{-\mu\omega_b^\beta(s)} \cdot \frac{q_2(s)ds}{(s-b)^\beta} + e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)-\mu\omega_b^\beta(y)} f(x,y) -$$

$$-\lambda e^{-\mu\omega_b^\beta(y)} \int_x^\infty e^{\lambda\omega_a^\alpha(t)} \cdot \frac{f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} - \mu e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)} \int_b^y e^{-\mu\omega_b^\beta(s)} \cdot \frac{f(x,s)ds}{(s-b)^\beta} +$$

$$+\lambda\mu \int_x^\infty e^{\lambda\omega_a^\alpha(t)} \cdot \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y e^{-\mu\omega_b^\beta(s)} \cdot \frac{f(t,s)ds}{(s-b)^\beta}\,. \tag{1.5.6}$$

Решение интегрального уравнения (1.4.1) представимое в виде функционального ряда по степеням функции $e^{-\omega_b^\beta(y)}$.

Решение интегрального уравнения (1.5.5) будем искать в виде функционального ряда:

$$\vartheta_1(x,y) = \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \vartheta_n^1(x),\ \tau > 0, \tag{1.5.7}$$

где $\vartheta_n^1(x)$ −неизвестные функции.

Предположим, что функция $\mathcal{H}_1(x,y)$ в правой части равенства (1.5.5) также разлагается в равномерно-сходящиеся ряд вида:

$$\mathcal{H}_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}\,\mathcal{H}_n^1(x), \tag{1.5.8}$$

где $\mathcal{H}_n^1(x)$ − неизвестные функции.

Подставляя значения функций $\upsilon_1(x,y)$, $\mathcal{H}_1(x,y)$ из (1.5.7) (1.5.8) в уравнение (1.5.5), после приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{-n\omega_b^{\beta}(y)}$, $n=0,1,2,\ldots$, приходим к решению одномерного интегрального уравнения вида:

$$\upsilon_n^1(x)+\frac{\delta_1}{n+\tau}\int\limits_x^{\infty}\frac{\upsilon_n^1(t)dt}{(t-a)^{\alpha}}=\mathcal{H}_n^1(x),\qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{1.5.9}$$

Согласно [13], если функции $\mathcal{H}_n^1(x)$ удовлетворяют условиям $\mathcal{H}_n^1(x)\epsilon\, C(\overline{\Gamma_1})$ и в точке $x=\infty$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением:

$$\mathcal{H}_n^1(x)=o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_{34}}\right],\ \zeta_{34}>1-\alpha,\ n=0,1,2,\ldots,\ x\to\infty, \tag{1.5.10}$$

то решение интегрального уравнения (1.5.9) при $\delta_1<0$ выражается равенством:

$$\upsilon_n^1(x)=e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}\cdot C_n^1+\mathcal{H}_n^1(x)-$$

$$-\frac{\delta_1}{n+\tau}\int\limits_x^{\infty}e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{\mathcal{H}_n^1(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt\,,\ \delta_1<0,\qquad n=0,1,2,\ldots, \tag{1.5.11}$$

где C_n^1 − произвольные постоянные.

В случае, когда $\delta_1>0$, функции $\mathcal{H}_n^1(x)\epsilon\, C(\overline{\Gamma_1})$ и в точке $x=\infty$ обращаются в нуль с асимптотическими поведениями:

$$\mathcal{H}_n^1(x) = o\left[\, x^{-\zeta_{35}}\right], \zeta_{35} > 1 - \alpha, n = 0,1,2, \dots, x \to \infty, \qquad (1.5.12)$$

тогда единственное решение интегрального уравнения (1.5.9) выражается равенством:

$$\upsilon_n^1(x) = \mathcal{H}_n^1(x) - \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\frac{\mathcal{H}_n^1(t)}{(t-a)^\alpha}dt,\ n = 0,1,2, \dots, \qquad (1.5.13)$$

Подставляя значение функций $\upsilon_n^1(x)$ при $\delta_1 < 0$ в равенство (1.5.7), находим решение интегрального уравнения (1.5.4) в виде:

$$\upsilon_1(x,y) = \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \cdot C_n^1 + \mathcal{H}_n^1(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1}{n+\tau}\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\mathcal{H}_n^1(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right]. \qquad (1.5.14)$$

Теорема 1.5.1. *Пусть в интегральном уравнении (1.5.5)* $\delta_1 < 0$, *функция* $\mathcal{H}_1(x,y)$ *представима в виде равномерно сходящегося ряда вида (1.5.8), где функции* $\mathcal{H}_n^1(x)$ *в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями (1.5.10). Тогда однородное интегральное уравнение (1.5.5) в классе функций* $\upsilon_1(x,y) \in C(\overline{D})$, *представимых в виде (1.5.7), имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:*

$$\upsilon_n^1(x,y) = e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y) - \frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \quad n = 0,1,2, \dots .$$

Неоднородное интегральное уравнение (1.5.5) в классе функций $\upsilon_1(x,y) \in C(\overline{D})$, *представимых в виде (1.5.7), всегда разрешимо и его решение выражается равенством (1.5.14), где* $C_n^1 -$ *произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|C_{n+1}^1|}{|C_n^1|} = C^1 \text{ и } C^1 \cdot e^{-\omega_b^\beta(b_0)} < 1.$$

Используя результаты теоремы 1.5.1 и из вышеприведенных рассуждений, при $\delta_1 > 0$ получим:

Теорема 1.5.2. *Пусть в интегральном уравнении (1.5.4),* $\delta_1 > 0$, *функция* $\mathcal{H}_1(x,y)$ *в области* $\mathcal{D}$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.8), где функции* $\mathcal{H}_n^1(x) \epsilon \, \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями:*

$$\mathcal{H}_n^1(x) = o\left[\, x^{-\zeta_{36}}\right], \zeta_{36} > 1 - \alpha, n = 0,1,2, \dots, x \to \infty.$$

Тогда интегральное уравнение (1.5.5) в классе функций $\mathscr{v}_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.7), имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$\mathscr{v}_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left[\mathcal{H}_n^1(x) - \frac{\delta_1}{n+\tau} \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{\mathcal{H}_n^1(t)}{(t-a)^\alpha} dt\right].$$

1.5.1. Исследование интегрального уравнения (1.4.1) при $\boldsymbol{\lambda < 0, \mu < 0, \delta \neq \lambda\mu}$

Определим условия на функцию $f(x,y)$, при которых функция $\mathcal{H}_1(x,y)$ представима в виде (1.5.8). Пусть в равенстве (1.5.6) $\mathscr{h}_i(x) = 0$, $(\, i = 1, 2)$, $\mathscr{q}_j(y) = 0$, $(\, j = 1, 2)$, функция $f(x,y)$ представима в виде равномерно-сходящегося функционального ряда вида:

$$f(x,y) = e^{|\lambda|\omega_a^\alpha(x) + \mu\omega_b^\beta(y)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \, f_n^1(x). \qquad (1.5.15)$$

Поставляя значение функции $f(x,y)$ из (1.5.15) в равенство (1.5.8), получим:

$$\mathcal{H}_1(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right) \left[f_n^1(x) - \lambda \int_x^\infty \frac{f_n^1(t)dt}{(t-a)^\alpha}\right]. \quad (1.5.16)$$

Сравнивая ряды (1.5.8) и (1.5.16), получим:

$$\mathcal{H}_n^1(x) = \left(1 - \frac{\mu}{n+\tau}\right) f_n^1(x) - \left(\lambda - \frac{\lambda\mu}{n+\tau}\right) \int_x^\infty \frac{f_n^1(t)dt}{(t-a)^\alpha}, n = 0,1,2,\dots. \quad (1.5.17)$$

Поставляя значение функции $\mathcal{H}_n^1(x)$ из (1.5.17) при $\delta_1 < 0$ в равенство (1.5.14), получим:

$$v_1(x,y) = \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \cdot C_n^1 + \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\lambda}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[f_n^1(x) - \frac{\delta_1 + \lambda\,(n+\tau)}{n+\tau} \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^1(t)}{(t-a)^\alpha} dt \right] \right].$$

Из равенства (1.5.4) определим значение функции $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^\infty e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^\beta(y) + |\lambda|\omega_a^\alpha(x)} \left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} \cdot C_n^1 + \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\lambda}\right) f_n^1(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_1 + \lambda\,(n+\tau)}{n+\tau} \left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\lambda}\right) \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^1(t)}{(t-a)^\alpha} dt \right], \quad (1.5.18)$$

где функции $f_n^1(x) \epsilon\ C(\overline{\Gamma_1})$ и в точке $x = \infty$ обращаются в нуль с асимптотическими поведениями

$$f_n^1(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{37}} \right], \zeta_{37} > 1 - \alpha, n = 0,1,2,\dots, x \to \infty. \ (1.5.19)$$

Теорема 1.5.3. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq \lambda\mu$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu < 0$, *функция* $f(x,y)$ *в области* $\overline{\mathcal{D}}$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.15), где функции* $f_n^1(x) \epsilon\ C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями (1.5.19). Тогда однородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде*

$$u(x,y) = e^{\,|\lambda|\omega_a^{\alpha}(x)+\mu\omega_b^{\beta}(y)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}\mathcal{v}_n^1(x), \qquad (1.5.20)$$

имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида:

$$u_n^1(x,y) = e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^{\beta}(y)+\left(\frac{|\delta_1|}{n+\tau}+|\lambda|\right)\omega_a^{\alpha}(x)} \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Неоднородное интегральное уравнение в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.20), всегда разрешимо и решение представимо в виде (1.5.18), где* C_n^1 *−произвольные постоянные, удовлетворяющие условию (1.5.14).*

На основе результатов теоремы 1.5.3 можно заключить что, если решение уравнения (1.4.1) при $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq \lambda\mu$, $\delta_1 > 0$ существует, тогда оно представимо в виде:

$$u(x,y) = e^{\,|\lambda|\omega_a^{\alpha}(x)+\mu\omega_b^{\beta}(y)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)}\left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\lambda}\right)[f_n^1(x) -$$

$$-\frac{\delta_1+\lambda\,(n+\tau)}{n+\tau}\int_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{f_n^1(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt\Bigg]. \qquad (1.5.21)$$

Итак, справедливо утверждение:

Теорема 1.5.4. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1)* $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq \lambda\mu$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu > 0$, *функция* $f(x,y)$ *в области* $\overline{\mathcal{D}}$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.15), где функции* $f_n^1(x) \epsilon\, C(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n^1(x) = o\left[x^{-\zeta_{38}}\right], \zeta_{38} > 1-\alpha, n = 0,1,2,\dots, x \to \infty.$$

Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.20), имеет единственное решение, которое выражается равенством (1.5.21).*

1.5.2. Исследование интегрального уравнения (1.4.1) при $\boldsymbol{\lambda > 0, \mu < 0, \delta \neq \lambda\mu}$

Пусть в равенстве (1.5.6) при $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta \neq \lambda\mu$, $\hbar_i(x) = 0$, $(i = 1, 2)$, $q_j(y) = 0$, $(j = 1, 2)$, функция $f(x, y)$ представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида:

$$f(x, y) = e^{\mu\omega_b^\beta(y)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} f_n^2(x). \qquad (1.5.24)$$

Данной функции $f(x, y)$ будет соответствовать функция:

$$\mathcal{H}_1(x, y) = e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \mathcal{H}_n^1(x). \qquad (1.5.25)$$

Сравнивая равенства (1.5.6), (1.5.24) и (1.5.25) получим:

$$\mathcal{H}_n^1(x) = \left(\frac{n + \tau - \mu}{n + \tau}\right)\left[f_n^2(x) - \lambda \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \frac{f_n^2(t)dt}{(t - a)^\alpha}\right]. \qquad (1.5.26)$$

Подставляя значения $\mathcal{H}_n^1(x)$ из (1.5.26) в равенство (1.5.12), находим:

$$\begin{aligned} v_n^1(x) = {} & e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} C_n^2 + \left(\frac{n + \tau - \mu}{n + \tau}\right)[f_n^2(x) - \left(\lambda - \frac{\delta_1\lambda}{\delta_1 - \lambda\,(n + \tau)}\right) \times \\ & \times \int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^2(t)}{(t - a)^\alpha} dt - \delta_1 \left(\frac{1}{n + \tau} + \frac{\lambda}{\delta_1 - \lambda\,(n + \tau)}\right) \times \\ & \times \int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^2(t)}{(t - a)^\alpha} dt\Bigg], \quad n = 0,1,2,3, \dots, \delta_1 < 0. \end{aligned} \qquad (1.5.29)$$

Используя равенство (1.5.7), решение уравнения (1.5.5) представим в виде:

$$v_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} C_n^2 + \left(\frac{n + \tau - \mu}{n + \tau}\right)[f_n^2(x) - \right.$$

$$-\left(\lambda-\frac{\delta_1\lambda}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{f_n^2(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt-$$

$$-\delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{f_n^2(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt\Bigg]\Bigg].\quad (1.5.30)$$

Если решение интегрального уравнения (1.4.1) при $\delta_1<0$ существует, тогда на основе равенств (1.5.4) и (1.5.30) оно представимо в виде:

$$u(x,y)=e^{-\lambda\omega_a^{\alpha}(x)+\mu\omega_b^{\beta}(y)}\vartheta_1(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^{\beta}(y)}\Bigg[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}C_n^2\ +$$

$$+\left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)[f_n^2(x)-\left(\lambda-\frac{\delta_1\lambda}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\lambda\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{f_n^2(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt-$$

$$-\delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\int\limits_x^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^{\alpha}(t)-\omega_a^{\alpha}(x)\}}\cdot\frac{f_n^2(t)}{(t-a)^{\alpha}}dt\Bigg]\Bigg].\qquad (1.5.31)$$

Подытожывая вышипреведенные рассуждания, приходим к следующему утверждению:

Теорема 1.5.5. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1)* $\lambda>0,\ \mu<0,$ $\delta\neq\lambda\mu,\ \delta_1=\delta-\lambda\mu<0,$ *функция* $f(x,y)\epsilon\ \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.24), причём* $f_n^2(x)\ \epsilon\ \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x=\infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n^2(x)=o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^{\alpha}(x)}x^{-\zeta_{39}}\right],\zeta_{39}>1-\alpha,n=0,1,2,\dots,x\to\infty.$$

Тогда однородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}}),$ *представимых в виде*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^{\beta}(y)}\vartheta_n^2(x),\qquad (1.5.32)$$

имеет бесконечное число линейно-независимых решений видов

$$u_n(x,y) = e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^\beta(y)+\left(\frac{|\delta_1|}{n+\tau}+\lambda\right)\omega_a^\alpha(x)} \quad n = 0,1,2,\dots\ .$$

Неоднородное интегральное уравнение в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.32) всегда разрешимо и его решение представимо в виде (1.5.31), где* C_n^2 *—произвольные постоянные, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|C_{n+1}^2|}{|C_n^2|} = C^2 \text{ и } C^2\cdot e^{-\omega_b^\beta(b_0)} < 1.$$

Теорема 1.5.6. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1)* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu > 0$, *функция* $f(x,y)\epsilon\, \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.24), где функции* $f_n^2(x)\epsilon\, \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n^2(x) = o\left[\, x^{-\zeta_{40}}\right], \zeta_{40} > 1-\alpha, n = 0,1,2,\dots, x\to\infty.$$

Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.32), имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau-\mu)\omega_b^\beta(y)}\left(\frac{n+\tau-\mu}{n+\tau}\right)[f_n^2(x) - \lambda\left(1-\frac{\delta_1}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\times$$

$$\times\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n^2(t)}{(t-a)^\alpha}dt - \delta_1\left(\frac{1}{n+\tau}+\frac{\lambda}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\times$$

$$\times\left.\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n^2(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right].$$

1.5.3. Исследование интегрального уравнения (1.4.1) при $\boldsymbol{\lambda < 0, \mu > 0, \delta \neq \lambda\mu}$

В случае, когда в интегральном уравнении (1.4.1) $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta \neq \lambda\mu$ решение интегрального уравнения (1.4.1) будем искать в виде

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \mathcal{v}_n^3(x). \tag{1.5.33}$$

Пусть в равенстве (1.5.6) $\hbar_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, $q_j(x) = 0$, $j = 1, 2$, функция $f(x,y) \epsilon C(\overline{\mathcal{D}})$ и представима в виде:

$$f(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\, f_n^3(x). \tag{1.5.34}$$

Данной функции $f(x,y)$ будет соответствовать функция $\mathcal{H}_1(x,y)$ вида:

$$\mathcal{H}_1(x,y) = e^{-\mu\omega_b^\beta(y)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \cdot \mathcal{H}_n^1(x).$$

Из (1.5.8) и последнего равенства получим:

$$\mathcal{H}_n^1(x) = \left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)\left[f_n^3(x) - \lambda\int_x^\infty \frac{f_n^3(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right], n = 0,1,2,\dots\ . \tag{1.5.35}$$

Известно, что решение уравнения (1.5.9) функция $\mathcal{v}_n^1(x)$ выражается через $\mathcal{H}_n^1(x)$ при $\delta_1 = \delta - \lambda\mu < 0$ равенством (1.5.11). Значение функции $\mathcal{v}_1(x,y)$ находим из равенства (1.5.7), далее решение уравнения (1.4.1) при $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 \neq 0$ определим из равенства:

$$u(x,y) = e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)} \left\{e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} C_n^3 + \left(\frac{n+\lambda}{n+\tau+\mu}\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left[f_n^3(x) - \frac{\delta_1 + \lambda\,(n+\tau)}{n+\tau+\mu}\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^3(t)}{(t-a)^\alpha}dt\ \right]\right\}. \tag{1.5.36}$$

Для сходимости интегралов в правой части (1.5.36), от функции $f_n^3(x)$ потребуем выполнения условия $f_n^3(\infty)= 0$ с асимптотическим поведением:

$$f_n^3(x) = o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{41}}\right], \zeta_{41} > \alpha - 1, n = 0,1,2, \dots, x \to \infty. \qquad (1.5.37)$$

Справедливы утверждения:

Теорема 1.5.7. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1)* $\lambda < 0,$ $\mu > 0,$ $\delta_1 = \delta - \lambda\mu < 0,$ *функция* $f(x, y)$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.34), причём* $f_n^3(x) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями (1.5.37). Тогда однородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций* $u(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.33), имеет бесконечное число линейно-независимых решений видов*

$$u_n(x, y) = e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y) + \left(\frac{|\delta_1|}{n+\tau} + |\lambda|\right)\omega_a^\alpha(x)} \quad n = 0,1,2, \dots .$$

Неоднородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.33), всегда разрешимо и его решение дается формулой (1.5.36), где* C_n^3 $(n = 0,1,2,3 \dots) -$ *произвольные постоянные удовлетворяющие условиям:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|C_{n+1}^3|}{|C_n^3|} = C^3 \text{ и } C^3 \cdot e^{-\omega_b^\beta(b_0)} < 1.$$

Теорема 1.5.8. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1),* $\lambda < 0,$ $\mu > 0,$ $\delta_1 = \delta - \lambda\mu > 0,$ *функция* $f(x, y)$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.34), причём* $f_n^3(x) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n^3(x) = o\left[x^{-\zeta_{42}}\right], \zeta_{42} > \alpha - 1, n = 0,1,2, \dots, x \to \infty.$$

Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.33), имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y)=e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\left(\frac{n+\lambda}{n+\tau+\mu}\right)[f_n^3(x)-\frac{\delta_1+\lambda\,(n+\tau)}{n+\tau+\mu}\times$$

$$\left.\times\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n^3(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right].$$

1.5.4. Изучение интегрального уравнения (1.4.1) при $\lambda>0$, $\mu>0$, $\delta\neq\lambda\mu$

Пусть в интегральном уравнении (1.4.1) при $\lambda>0$, $\mu>0$, $\delta\neq\lambda\mu$, функция $f(x,y)$ представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида:

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\,f_n^4(x).\qquad(1.5.38)$$

Повторяя вышеприведенную схему нахождения решения уравнения (1.4.1), увидим, что, если решение уравнения (1.4.1) представимое в виде ряда

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\,v_n^4(x),\qquad(1.5.39)$$

в этом случае существует, тогда оно при $\delta_1<0$ представимо в виде:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+\tau)\omega_b^\beta(y)}\Big[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}\cdot C_n^4\;+\left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right)[f_n^4(x)-$$

$$\left(\lambda-\frac{\delta_1}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\int_x^\infty e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n^4(t)}{(t-a)^\alpha}dt-$$

$$\left.\left.-\frac{\delta_1}{n+\tau+\mu}\left(1+\frac{n+\tau}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\int_x^\infty e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}}\cdot\frac{f_n^4(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right]\right].\qquad(1.5.40)$$

Для сходимости интеграла в правой части (1.5.40) потребуем выполнение условий $f_n^4(x)\epsilon\ C(\overline{\Gamma}_1)$, $f_n^4(\infty)=0$ с асимптотическим поведением:

$$f_n^4(x)=o\left[e^{-\frac{\delta_1}{n+\tau}\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{43}}\right],\ \zeta_{43}>\alpha-1,\ n=0,1,2,\dots.\qquad(1.5.41)$$

Теорема 1.5.9. *Пусть в уравнении (1.4.1)* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 < 0$, *функция* $f(x,y) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.38),* $f_n^4(x) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями (1.5.41). Тогда однородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде ряда (1.5.39), имеет бесконечное число линейно-независимых решений вида*

$$u_n(x,y) = e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)+\left(\frac{|\delta_1|}{n+\tau}+|\lambda|\right)\omega_a^{\alpha}(x)} \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Неоднородное интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.39), всегда разрешимо и его решение выражается равенством (1.5.40), где* C_n^4 $(n = 0,1,2,3 \dots) -$ *произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:*

$$\ell im_{x\to\infty} \frac{|C_{n+1}^4|}{|C_n^4|} = C^4 \text{ и } C^4 \cdot e^{-\omega_b^{\beta}(b_0)} < 1.$$

При $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu > 0$ справедливо утверждение:

Теорема 1.5.10. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1),* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta_1 = \delta - \lambda\mu > 0$, *функция* $f(x,y)$ *представима в виде равномерно-сходящегося ряда вида (1.5.38), причём* $f_n^4(x) \epsilon \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$ *и в точке* $x = \infty$ *обращаются в нуль с асимптотическими поведениями*

$$f_n^4(x) = o\left[x^{-\zeta_{44}}\right], \zeta_{44} > \alpha - 1, n = 0,1,2, \dots, x \to \infty.$$

Тогда интегральное уравнение (1.4.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *представимых в виде (1.5.39), имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\tau)\omega_b^{\beta}(y)} \left(\frac{n+\tau}{n+\tau+\mu}\right) [f_n^4(x) - \left(\lambda - \frac{\delta_1}{\delta_1 - \lambda\,(n+\tau)}\right) \times$$

$$\times \int_{x}^{\infty} e^{\lambda\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^4(t)}{(t-a)^\alpha} dt - \frac{\delta_1}{n+\tau+\mu}\left(1+\frac{n+\tau}{\delta_1-\lambda\,(n+\tau)}\right)\times$$

$$\left.\times \int_{x}^{\infty} e^{\frac{\delta_1}{n+\tau}\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}} \cdot \frac{f_n^4(t)}{(t-a)^\alpha} dt\right].$$

§ 1.6. Граничные задачи для модельного двумерного интегрального уравнения с сильно-особой и слабо-особой линиями на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой

На основе полученных многообразий решений модельного двумерного интегрального уравнения с сильно-особой и слабо-особой линиями на полосе ставятся и исследуются граничные задачи с условиями на особых многообразиях.

Задача $\mathcal{M}_{1.6.1}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1.4.1) при* $\lambda < 0,\ \mu < 0,\ \delta = \lambda\mu,\ 0 < \alpha < 1,\ \beta > 1,$ *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничным условиям:*

$$\left[e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b} = N_2(x),\ x \in \Gamma_1, \tag{1.6.1}$$

$$\left[e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{K}_2(y),\ y \in \Gamma_2, \tag{1.6.2}$$

где $N_2(x), \mathcal{K}_2(y)$ *— соответственно заданные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2.

Решение задачи $\mathcal{M}_{1.6.1}$. Согласно теореме 1.4.1, § 1.4, при $\lambda < 0, \mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$ общее решение интегрального уравнения (1.4.1) представимо в виде (1.4.2).

Исходя из интегрального представления (1.4.2) и условий (1.6.1), (1.6.2) данной задачи получим:

1) $\left[e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b} = \mathcal{H}(x) + \Big\{e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\big[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\mathcal{Q}(y) +$

$+\mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\big]\Big\}_{y=b} = N_2(x),$

2) $\left[e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{Q}(y) + \left\{e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}\left[e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\mathcal{H}(x) +\right.\right.$

$\left.\left.+\mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]\right\}_{x=\infty} = \mathcal{K}_2(y).$

Очевидно, что при выполнении условий теоремы 1.4.1 и $y \to b$, $x \to \infty$ имеем:

$$\left\{e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\left[e^{-\lambda\omega_a^\alpha(x)}\mathcal{Q}(y) +\mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]\right\}_{y=b} = 0,$$

$$\left\{e^{\lambda\omega_a^\alpha(x)}\left[e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\mathcal{H}(x) + \mathcal{R}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]\right\}_{x=\infty} = 0.$$

Следовательно, справедливы равенства:

$$\mathcal{H}(x) = N_2(x), \tag{1.6.3}$$

$$\mathcal{Q}(y) = \mathcal{K}_2(y). \tag{1.6.4}$$

Теорема 1.6.1. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1) параметры* λ, μ, δ, *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.4.1. Тогда задача* $M_{1.6.1}$, *имеет единственное решение, представимое в виде (1.4.2), где функции* $\mathcal{H}(x)$ *и* $\mathcal{Q}(y)$ *определяются из равенств (1.6.3) и (1.6.4).*

Задача $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{1.6.2}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1.4.1) при* $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничному условию:*

$$\left[e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b} = \mathcal{R}(x), x \in \Gamma_1,$$

где $\mathcal{R}(x)$ *– заданная функция точек* Γ_1.

Решение задачи $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{1.6.2}$. Для решения данной задачи используя представление многообразия решений (1.4.10) и условие задачи $\mathcal{M}_{1.6.2}$, получим:

$$\left[e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}u(x,y)\right]_{y=b} = \mathcal{H}(x) = \mathcal{R}(x).$$

Следовательно:

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{R}(x). \tag{1.6.5}$$

Теорема 1.6.2. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1) параметры* λ, μ, δ, *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.4.2. Тогда задача* $M_{1.6.2}$, *имеет единственное решение, представимое в виде (1.4.10), где функция* $\mathcal{H}(x)$ *определяется равенством (1.6.5).*

Задача $\boldsymbol{\mathcal{M}_{1.6.3}}$. *Требуется найти решение интегрального уравнения (1.4.1) при* $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $\delta = \lambda\mu$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, *из класса* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, Γ_2 *по граничному условию:*

$$\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{S}(y),\, y \in \Gamma_2,$$

где $\mathcal{S}(y) -$ *заданная функция точек* Γ_2.

Решение задачи $\boldsymbol{\mathcal{M}_{1.6.3}}$**.** Для решения данной задачи используя интегральное представление (1.4.12) и условие задачи $\mathcal{M}_{1.6.3}$, получим*:*

$$\left[e^{\lambda\omega_a^{\alpha}(x)}u(x,y)\right]_{x=\infty} = \mathcal{Q}(y) = \mathcal{S}(y).$$

Следовательно, справедливо равенство:

$$\mathcal{Q}(y) = \mathcal{S}(y). \tag{1.6.6}$$

Теорема 1.6.3. *Пусть в интегральном уравнении (1.4.1) параметры* λ, μ, δ, *функция* $f(x,y)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1.4.3. Тогда задача* $M_{1.6.3}$, *имеет единственное решение, представимое в виде (1.4.12), где функция* $\mathcal{Q}(y)$ *определяется равенством (1.6.6).*

ГЛАВА 2
ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕМОДЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ И СЛАБО–ОСОБЫМИ ЛИНИЯМИ НА ПОЛОСЕ

§ 2.1. Исследование немодельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и особенностью по второй переменной на полосе в случае $\mathbf{C(x,y) = A(x)B(y)}$.

В области $\mathcal{D}$ рассмотрим двумерное интегральное уравнение вида:

$$u(x,y) + \int_x^\infty \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt + \int_b^y \frac{B(s)u(x,s)}{s-b}ds +$$

$$+\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C(t,s)u(t,s)}{s-b}ds = f(x,y), \tag{2.1.1}$$

где $A(x)$, $B(y)$, $C(x,y)$, $f(x,y) -$ заданные функции соответственно на Γ_1, Γ_2 и $\overline{\mathcal{D}}$, $u(x,y)$ $-$искомая функция, $0 < \alpha < 1$.

Интегральное уравнение (2.1.1) будем исследовать при предположении, что $A(a) \neq 0$, $B(b) \neq 0$, $C(a,b) \neq 0$.

Как и для уравнения (1.1.1), решение интегрального уравнения (2.1.1) будем искать в классе функций

$u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{45}}\right], \zeta_{45} > 1-\alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0.$$

Изучим уравнение (2.1.1), в случае, когда функции присутствующие в ядрах уравнения связаны условием: $C(x,y) = A(x)B(y)$.

Предположим, что решение уравнения (1) существует и принадлежит классу $C(\overline{\mathcal{D}})$. Тогда в уравнении (2.1.1) при $x \to \infty$ и $y \to b$ переходя к пределу, получим следующее одномерные интегральные уравнения на Γ_1 и Γ_2:

$$\begin{cases} u(x,y) + \int\limits_x^\infty \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt = v(x,y) & (2.1.2) \\ v(x,y) + \int\limits_b^y \frac{B(s)v(x,s)}{s-b} ds = f(x,y) & (2.1.3) \end{cases}$$

Используя схему нахождения решения из [13], легко можно видеть, что если решение интегрального уравнения (2.1.3) при $B(b) < 0$ существует, тогда оно представимо в виде:

$$v(x,y) = (y-b)^{-B(b)} e^{-W_B^1(y)} \varphi_1(x) + f(x,y) -$$

$$- \int\limits_b^y e^{[W_B^1(s) - W_B^1(y)]} \left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)} \frac{B(s)f(x,s)ds}{s-b}, \qquad (2.1.4)$$

где $\varphi_1(x)$ —произвольная функция точек Γ_1,

$$W_B^1(y) = \int\limits_b^y \frac{B(s) - B(b)}{s-b} ds .$$

Аналогичным образом, если решение интегрального уравнения (2.1.2) при $A(\infty) < 0$ существует, тогда оно имеет вид:

$$u(x,y) = e^{[-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x)]} \psi_1(y) + v(x,y) -$$

$$\int\limits_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\} + W_a^\alpha(t) - W_a^\alpha(x)]} \frac{A(t)v(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt, \qquad (2.1.5)$$

где $\psi_1(y)$ —произвольная функция точек Γ_2,

$$\omega_a^\alpha(x) = \frac{1}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}}, \qquad W_a^\alpha(x) = \int\limits_x^\infty \frac{A(t) - A(\infty)}{(t-a)^\alpha} ds .$$

В равенстве (2.1.5) вместо функции $v(x,y)$ подставляя её значение из (2.1.4), получим:

$$u(x,y)=e^{-W_B^1(y)}(y-b)^{-B(b)}\Phi_1(x)+e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)-W_a^\alpha(x)}\psi_1(y)+$$

$$+\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\equiv U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x),\psi_1(y),\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right], \qquad (2.1.6)$$

где

$$\Phi_1(x)=\varphi_1(x)-\int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)\varphi_1(t)}{(t-a)^\alpha}dt,$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]=f(x,y)-\int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt-$$

$$-\int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(x,s)ds}{s-b}+$$

$$+\int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\times$$

$$\times\int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(t,s)ds}{s-b}.$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает:

Теорема 2.1.1. *Пусть в интегральном уравнении (2.1.1)* $0<\alpha<1$, $A(\infty)<0$, $B(b)<0$, $C(x,y)=A(x)B(y)$, $A(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в окрестности точки* $x=\infty$ *удовлетворяет условию*

$$A(x)-A(\infty)=o\left[x^{-\zeta_{46}}\right],\ \zeta_{46}>1-\alpha,\ x\to\infty, \qquad (2.1.7)$$

$B(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точки* $y=b$ *удовлетворяет условию*

$$B(y)-B(b)=o[\,(y-b)^\varepsilon\,],\ \varepsilon>0,\ y\to b. \qquad (2.1.8)$$

Далее, пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{47}}\right], \zeta_{47} > 1-\alpha, x \to \infty. \quad (2.1.9)$$

$\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_{14}}\,], \eta_{14} > |B(b)|, y \to b. \quad (2.1.10)$$

Тогда интегральное уравнение (2.1.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит две произвольные функции и выражается равенством (2.1.6), где* $\varphi_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $\psi_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2}) -$ *произвольные функции точек* Γ_1, Γ_2, *причём* $\varphi_1(\infty) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\varphi_1(x) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\; x^{-\zeta_{48}}\right], \zeta_{48} > 1-\alpha, x \to \infty,$$

$\psi_1(b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\psi_1(y) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0, y \to b. \quad (2.1.11)$$

Следствие 2.1.1. *При выполнении условий теоремы 2.1.1 любое решение интегрального уравнения (2.1.1) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств*

$$u(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)} x^{-\zeta_{49}}\right], \zeta_{49} > 1-\alpha, \text{при } x \to \infty, \quad (2.1.12)$$

$$u(x,y) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0, \text{при } y \to b. \quad (2.1.13)$$

Подобные утверждения получены и в случаях $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$; $A(\infty) > 0$, $B(b) < 0$; $A(\infty) < 0$, $B(b) > 0$.

Теорема 2.1.2. *Пусть в интегральном уравнении (2.1.1)* $0 < \alpha < 1$, $A(\infty) > 0$, $B(b) < 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$, *удовлетворяют условиям (2.1.7),* (2.1.8), *функция* $f(x,y) \epsilon\, C(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.1.10) и*

$$f(x,y) = o\left[\, x^{-\zeta_{50}}\right], \zeta_{50} > 1-\alpha, x \to \infty. \qquad (2.1.14)$$

Тогда интегральное уравнение (2.1.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), 0, \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right].$$

где $\varphi_1(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1}) -$ *произвольная функция точек* Γ_1, *причём* $\varphi_1(\infty) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\varphi_1(x) = o\left[\, x^{-\zeta_{51}}\right], \zeta_{51} > 1-\alpha, x \to \infty.$$

Следствие 2.1.2. *При выполнении условий теоремы 2.1.2 любое решение интегрального уравнения (2.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств*

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{52}}\right], \zeta_{52} > 1-\alpha, \text{при } x \to \infty, \qquad (2.1.15)$$

$$u(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_{15}}\,],\ \eta_{15} > |B(b)|, \text{при } y \to b.$$

Теорема 2.2.3. *Пусть в интегральном уравнении (2.1.1)* $0 < \alpha < 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, $A(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.1.7), (2.1.8), функция* $f(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.1.9) и*

$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0, y \to b. \qquad (2.1.16)$$

Тогда интегральное уравнение (2.1.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv U_{A,1}^{\infty,B}\left[0, \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right],$$

где $\psi_1(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2}) -$ *произвольная функция точек* Γ_2, *причём* $\psi_1(b) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.1.11).*

Следствие 2.1.3. *При выполнении условий теоремы 2.1.3 любое решение интегрального уравнения (2.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty,\ y \to b$ *определяется из равенств (2.1.12) и (2.1.13).*

Теорема 2.1.4. *Пусть в интегральном уравнении (2.1.1)* $0 < \alpha < 1$, $A(\infty) > 0,\ B(b) > 0,\ C(x,y) = A(x)\,B(y),\ A(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1}),\ B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точки* $x = \infty,\ y = b$ *удовлетворяют условиям (2.1.7), (2.1.8),* $f(x,y) \epsilon\, \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.1.14) и (2.1.16).*

Тогда интегральное уравнение (2.1.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv U_{A,1}^{\infty,B}\left[0,0,\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right].$$

Следствие 2.1.4. *При выполнении условий теоремы 2.1.4 любое решение интегрального уравнения (2.1.1) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty,\ y \to b$ *определяется из равенств (2.1.13) и (2.1.15).*

§ 2.2. Исследование немодельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и особенностью по второй переменной на полосе в случае $\mathbf{C(x,y) \neq A(x)B(y)}$

Допустим, что в уравнении (2.1.1) $C(x,y) \neq A(x)B(y)$. В этом случае, уравнение (2.1.1) представим виде:

$$u(x,y) + \int_x^\infty \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt + \int_b^y \frac{B(s)u(x,s)}{s-b}ds +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{A(t)B(s)u(t,s)}{s-b}ds = \mathcal{F}_2(x,y), \qquad (2.2.1)$$

где

$$\mathcal{F}_2(x,y) = f(x,y) - \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(t,s)u(t,s)}{s-b}ds,$$

$$C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y).$$

По обе стороны (2.2.1) действуя при помощи интегрального оператора $U_{A,1}^{\infty,B}$, получим:

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x)}\,\psi_1(y) + e^{-W_B^1(y)}(y-b)^{-B(b)}[\varphi_1(x) -$$

$$\left. - \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)\varphi_1(t)}{(t-a)^\alpha}dt\right] + f(x,y) -$$

$$- \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(t,s)u(t,s)}{s-b}ds - \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha}$$

$$- \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\int_t^\infty \frac{d\xi}{(\xi-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(\xi,s)u(\xi,s)ds}{s-b} -$$

$$- \int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(x,s)ds}{s-b} + \int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)} \times$$

$$\times \frac{B(s)ds}{s-b}\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^s \frac{C_1(t,\eta)u(t,\eta)}{\eta-b}d\eta + \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]} \times$$

$$\times \frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)f(t,s)ds}{s-b} -$$

$$- \int_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y e^{[W_B^1(s)-W_B^1(y)]}\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(s)ds}{s-b}$$

$$\times \int_t^\infty \frac{d\xi}{(\xi-a)^\alpha}\int_b^s \frac{C_1(\xi,\eta)u(\xi,\eta)}{\eta-b}d\eta.$$

В последнем равенстве слагаемые, содержащие неизвестную функцию $u(x,y)$ перенося в левую часть, получим:

$$u(x,y)+\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(t,s)}{s-b}\Bigg\{1-\int_x^t e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(\xi)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(\xi)-W_a^\alpha(x)]}\times$$

$$\frac{A(\xi)d\xi}{(\xi-a)^\alpha}-\int_s^y e^{[W_B^1(\eta)-W_B^1(y)]}\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(\eta)ds}{\eta-b}+$$

$$\int_x^t e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(\xi)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(\xi)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(\xi)d\xi}{(\xi-a)^\alpha}\int_s^y e^{[W_B^1(\eta)-W_B^1(y)]}\times$$

$$\times\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(\eta)ds}{\eta-b}\Bigg\}u(t,s)ds=\mathrm{M}_1[\varphi_1(x),\psi_1(y),f(x,y)]. \qquad (2.2.2)$$

Легко можно заметить, что

$$1-\int_x^t e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(\xi)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(\xi)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(\xi)d\xi}{(\xi-a)^\alpha}-\int_s^y e^{[W_B^1(\eta)-W_B^1(y)]}\times$$

$$\times\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(\eta)ds}{\eta-b}+\int_x^t e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(\xi)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(\xi)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(\xi)d\xi}{(\xi-a)^\alpha}\times$$

$$\times\int_s^y e^{[W_B^1(\eta)-W_B^1(y)]}\times\left(\frac{\eta-b}{y-b}\right)^{B(b)}\frac{B(\eta)ds}{\eta-b}=$$

$$=e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]+W_B^1(s)-W_B^1(y)}\times\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)}.$$

Следовательно, уравнение (2.2.2) можно представить в виде:

$$u(x,y)+\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y e^{A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)+W_B^1(s)-W_B^1(y)}\times$$

$$\left(\frac{s-b}{y-b}\right)^{B(b)} \frac{C_1(t,s)u(t,s)}{s-b} ds = U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right]. \qquad (2.2.3)$$

Обе стороны уравнения (2.2.3) умножая на

$$e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)},$$

далее, вводя обозначение

$$C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y),$$

$$\nu_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)}u(x,y), \qquad (2.2.4)$$

$$G_1(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} \times$$

$$\times U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x), \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right] = e^{W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)}\psi_1(y) +$$

$$+e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)}\varphi_1(x) - \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)} \frac{A(t)\varphi_1(t)dt}{(t-a)^\alpha} +$$

$$+e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)}f(x,y) - e^{W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} \times$$

$$\times \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)} \frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt - e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)} \times$$

$$\times \int_b^y e^{W_B^1(s)}(s-b)^{B(b)-1}B(s)f(x,s)ds + \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)} \frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y e^{W_B^1(s)}(s-b)^{B(b)-1}B(s)f(t,s)ds = L_1[\varphi_1(x), \psi_1(y), f(x,y)], \qquad (2.2.5)$$

приходим к решению следующего интегрального уравнения:

$$\nu_1(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\nu_1(t,s)ds}{s-b} = G_1(x,y). \qquad (2.2.6)$$

Если функция $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$C_1(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{53}}\right], \zeta_{53} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \qquad (2.2.7)$$

$$C_1(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b, \qquad (2.2.8)$$

тогда ядро интегрального уравнения (2.2.6) будет иметь слабую особенность.

Рассмотрим поведение функции $G_1(x,y)$ при $x \to \infty$, $y \to b$. Из равенства (2.2.5) следует, что если $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и соответственно в окрестности точек $x = \infty$, $y = b$ удовлетворяют условиям:

$$A(x) - A(\infty) = o\left[x^{-\zeta_{54}}\right], \zeta_{54} > 1-\alpha, x \to \infty, \qquad (2.2.9)$$

$$B(y) - B(b) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0, y \to b. \qquad (2.2.10)$$

$\varphi_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $\psi_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, тогда $G_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$. Следовательно, при выполнении всех вышеуказанных условий, в уравнении (2.2.6) функция $G_1(x,y)$ будет непрерывной в $\mathcal{D}$ и данное интегральное уравнение в классе $C(\overline{\mathcal{D}})$ всегда разрешимо и имеет единственное решение, которое можно найти по методу последовательных приближений [8].

Нам необходимо найти такое решение уравнения (2.2.1) - функция $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, которое будет обращаться в нуль на Γ_1 и Γ_2.

Из равенства (2.2.5) следует, что такое решение интегрального уравнения (2.2.1) существует, если решение уравнения (2.2.5) – функцию $\vartheta_1(x,y)$ искать в классе непрерывных функций $\vartheta_1(x,y)$, обращающихся на Γ_1 и Γ_2 в нуль соответственно порядка больше чем $e^{A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)}\,(x-a)^{(1-\alpha)}$ и $(y-b)^{B(b)}$. Легко можно увидеть, что если в уравнение (2.2.6) функция $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y)$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведениями

$$C_1(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{55}}\right], \zeta_{55} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \qquad (2.2.11)$$

$$C_1(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b, \qquad (2.2.12)$$

также функция $G_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$G_1(x,y) = o\left[e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\, x^{-\zeta_{56}}\right], \zeta_{56} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \qquad (2.2.13)$$

$$G_1(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{16}}], \eta_{16} > B(b) \text{ при } y \to b. \qquad (2.2.14)$$

Тогда любое решение уравнения (2.2.6) из класса $C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 будет обращаться в нуль с асимптотическими поведениями

$$\nu_1(x,y) = o\left[e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}\, x^{-\zeta_{57}}\right], \zeta_{57} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \qquad (2.2.15)$$

$$\nu_1(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_{17}}\,], \eta_{17} > B(b) \text{ при } y \to b. \qquad (2.2.16)$$

Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 2.2.1. *Пусть в интегральном уравнении (2.2.1)* $0 < \alpha < 1$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.2.9), (2.2.10),* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in C(\overline{D})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11). (2.2.12). Функция* $G_1(x,y) \in C(\overline{D})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.13), (2.2.14). Тогда задача о нахождении решения интегрального уравнения (2.2.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{D})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *эквивалентна задаче о нахождении решения двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра со слабой особенностью (2.2.6) в классе функций* $\nu_1(x,y) \in C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *с асимптотическими поведениями (2.2.15), (2.2.16).*

Выясним условия на функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y), f(x,y)$, при которых функция $G_1(x,y)$ будет обладать вышеуказанными свойствами. Из равенства (2.2.5) следует, что необходимо выполнение следующих условий:

1) $\varphi_1(x) = 0$, $\psi_1(y) = 0$.

2) $f(x,y) \in C(\overline{D})$ на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведениями

$$f(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{58}}\right], \zeta_{58} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \qquad (2.2.17)$$

$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\varepsilon}\,], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b. \qquad (2.2.18)$$

Согласно [8], решая интегральное уравнение (2.2.5), находим:

$$\nu_1(x,y) = G_1(x,y) - \int_x^\infty dt \int_b^y \Gamma_{1,1}(x,y,t,s) G_1(t,s) ds.$$

Поставляя полученное значение функции $\nu_1(x,y)$ в равенство (2.2.4), находим решение уравнения (2.2.1) - функцию $u(x,y)$:

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x) - W_B^1(y)} (y-b)^{-B(b)} \Big[L_1[0,0,f(x,y)] -$$

$$\left. - \int_x^\infty dt \int_b^y \Gamma_{1,1}(x,y,t,s) L_1[0,0,f(t,s)] ds \right] \equiv \mathcal{K}_1^1[0,0,f(x,y)]. \qquad (2.2.19)$$

Теорема 2.2.2. *Пусть в интегральном уравнении (2.2.1)* $0 < \alpha < 1$, *функции* $A(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *соответственно удовлетворяют условиям (2.2.9), (2.2.10),* $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, *функция* $C_1(x,y)$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11), (2.2.12). Функция* $f(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.17), (2.2.18). Тогда интегральное уравнение (2.2.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *имеет единственное решение, которое выражается равенством (2.2.19), где* $\Gamma_{1,1}(x,y,t,s)$ *– резольвента двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью (2.2.5).*

Следствие 2.2.1. *При выполнении условий теоремы 2.2.2 решение интегрального уравнения (2.2.1) вида (2.2.19) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x \to \infty$, $y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств*

$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{59}}\right]$, $\zeta_{59} > 1 - \alpha$ *при* $x \to \infty$,

$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}]$, $\varepsilon > 0$ *при* $y \to b$.

1. Исследование немодельного интегрального уравнения (2.1.1) при $A(\infty)<0, B(b)<0, C(x,y)\neq A(x)B(y)$

Теперь пусть $A(\infty)<0$, $B(b)<0$. В этом случае, как и выше обозначая $C_1(x,y)=C(x,y)-A(x)B(y)$, также вводя в рассмотрение новую функцию:

$$\nu_2(x,y)=e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}u(x,y), \qquad (2.2.20)$$

$$G_2(x,y)=e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}\times$$

$$\times U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x),\psi_1(y),\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right]=e^{W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}\psi_1(y)+$$

$$+e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)}\varphi_1(x)-\int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)}\frac{A(t)\varphi_1(t)}{(t-a)^\alpha}dt+$$

$$+e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}f(x,y)-e^{W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}\times$$

$$\times\int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)}\frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt-e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)}\times$$

$$\times\int_b^y e^{W_B^1(s)}(s-b)^{-|B(b)|-1}B(s)f(x,s)ds+\int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha}\times$$

$$\times\int_b^y e^{W_B^1(s)}(s-b)^{-|B(b)|-1}B(s)f(t,s)ds\equiv L_2[\varphi_1(x),\psi_1(y),f(x,y)]. \quad (2.2.21)$$

приходим к решению интегрального уравнения:

$$\nu_2(x,y)+\int_x^\infty\frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y\frac{C_1(t,s)\nu_2(t,s)ds}{s-b}=G_2(x,y). \qquad (2.2.22)$$

Пусть функция $C_1(x,y)$ удовлетворяет условиям (2.2.7), (2.2.8), тогда ядро интегрального уравнения (2.2.22) будет иметь слабую особенность по обоим переменным. Известно, что решение интегрального уравнения (2.2.1) – функцию $u(x,y)$ необходимо искать в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{D})$, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2. Из равенства (2.2.21) следует, что такое решение существует, если решение интегрального уравнения (2.2.22) – функцию $v_2(x,y)$ будем искать в классе $C(\overline{D})$. Тогда $u(x,y) \in C(\overline{D})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведениями:

$$u(x,y) = o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{60}}\right], \zeta_{60} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty \tag{2.2.23}$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b. \tag{2.2.24}$$

Для того чтобы правая часть уравнения (2.2.22) – функция $G_2(x,y)$ удовлетворяла условию $G_2(x,y) \in C(\overline{D})$, необходимо выполнение следующих условий в (2.2.21):

1) функция $\varphi_1(x) \in C(\Gamma_1)$ и на Γ_1 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$\varphi_1(x) = o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{61}}\right], \zeta_{61} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \tag{2.2.25}$$

2) функция $\psi_1(y) \in C(\Gamma_2)$ и на Γ_2 обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$\psi_1(y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b, \tag{2.2.26}$$

3) $f(x,y) \in C(\overline{D})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическими поведениями:

$$f(x,y) = o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{62}}\right], \zeta_{62} > 1-\alpha \textit{ при } x \to \infty, \tag{2.2.27}$$

$$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{18}}], \eta_{18} > |B(b)| \textit{ при } y \to b. \tag{2.2.28}$$

При выполнении вышеуказанных условий, решая интегральное уравнение (2.2.22), как двумерное интегральное уравнение Вольтера со слабой особенностью [8], имеем:

$$\nu_2(x,y) = G_2(x,y) - \int_x^{\infty} dt \int_b^y \Gamma_{1,2}(x,y,t,s) G_2(t,s)\, ds,$$

где $\Gamma_{1,2}(x,y,t,s)$ – резольвента двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью (2.2.22).

Полученное значение функции $\nu_2(x,y)$ поставляя в равенство (2.2.20) получим решение интегрального уравнения (2.2.1) при $A(\infty)<0$, $B(b)<0$.

$$u(x,y)=e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)-W_a^{\alpha}(x)-W_B^{1}(y)}(y-b)^{|B(b)|}\Bigg[L_2[\varphi_1(x),\psi_1(y),f(x,y)]-$$

$$-\int_x^{\infty}dt\int_b^{y}\Gamma_{1,2}(x,y,t,s)L_2[\varphi_1(t),\psi_1(s),f(t,s)]\,ds\Bigg]\equiv$$

$$\equiv\mathcal{K}_2^1[\varphi_1(x),\psi_1(y),f(x,y)]. \qquad (2.2.29)$$

Итак, доказана:

Теорема 2.2.3. *Пусть в интегральном уравнении (2.2.1)* $0<\alpha<1$, *функции* $A(x)$, $B(y)$ *удовлетворяют условиям* $A(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$, $A(\infty)<0$, $B(b)<0$, *и соответственно в окрестности точек* $x=\infty$, $y=b$ *условиям (2.2.9), (2.2.10), также* $C(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, $C_1(x,y)=C(x,y)-A(x)B(y)\neq 0$, $C_1(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11), (2.2.12). Далее, пусть функция* $f(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.27), (2.2.28). Тогда любое решение интегрального уравнения (2.2.1) в классе функций* $u(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *выражается равенством (2.2.18), где.* $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)-$ *произвольные непрерывные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2, *обращающееся в нуль при* $x\to\infty$ *и* $y\to b$ *с асимптотическими поведениями (2.2.25),(2.2.26).*

Следствие 2.2.2. *При выполнении условий теоремы 2.2.3 решение интегрального уравнения (2.1.1) вида (2.2.29) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x\to\infty$, $y\to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств (2.2.23), (2.2.24).*

2. Исследование немодельного интегрального уравнения (2.1.1) при $A(\infty)>0, B(b)<0, C(x,y)\neq A(x)B(y)$

В этом случае в уравнении (2.2.3) введем следующие обозначения:

$$\nu_3(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}u(x,y), \qquad (2.2.30)$$

$$G_3(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|} \times$$

$$\times U_{A,1}^{\infty,B}\left[\Phi_1(x),\psi_1(y),\mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right] = e^{\,W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|}\psi_1(y) +$$

$$+e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)}\,\varphi_1(x) - \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)}\,\frac{A(t)\varphi_1(t)dt}{(t-a)^\alpha} +$$

$$+e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+W_B^1(y)}\,(y-b)^{-|B(b)|}f(x,y) - e^{\,W_B^1(y)}(y-b)^{-|B(b)|} \times$$

$$\times \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)}\,\frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt - e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)} \times$$

$$\times \int_b^y e^{W_B^1(s)}\,\frac{B(s)f(x,s)}{(s-b)^{|B(b)|-1}}ds + \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)}\,\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y e^{W_B^1(s)}\,\frac{B(s)f(x,s)}{(s-b)^{|B(b)|-1}}ds \equiv L_3[\varphi_1(x),\psi_1(y),f(x,y)]. \qquad (2.2.31)$$

Тогда приходим к решению интегрального уравнения:

$$\nu_3(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(t,s)\nu_3(t,s)ds}{s-b} = G_3(x,y). \qquad (2.2.32)$$

Уравнение (2.2.32) будет двумерным интегральным уравнением со слабой особенностью, если $C_1(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ и в окрестности точки $x = \infty$ $и$ $y \to b$ обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11), (2.2.12), также $G_3(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$.

Как было отмечено выше, решение уравнения (2.2.1) – функция $u(x,y)$ ищется в классе непрерывных функций в $\overline{\mathcal{D}}$, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2.

На основе равенства (2.2.30) можно заключить, что для выполнения вышеуказанных условий решение уравнения (2.2.32)

– функция $\nu_3(x,y)$ должна удовлетворять условиям:

$\nu_3(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и при $x \to \infty$ обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$\nu_3(x,y) = o\left[e^{A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{63}}\right], \zeta_{63} > 1-\alpha$, при $x \to \infty$, (2.2.33)

– правая часть уравнения (2.2.32) – функция $G_3(x,y)$ должна удовлетворять условиям:

1. $\psi_1(y) = 0$,
2. $\varphi_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ и обращается в нуль при $x \to \infty$ с асимптотическим поведением:

   $\varphi_1(x) = o\left[x^{-\zeta_{64}}\right], \zeta_{64} > 1-\alpha,$ (2.2.34)

3. $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическими поведениями

   $f(x,y) = o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{65}}\right], \zeta_{65} > 1-\alpha$ *при* $x \to \infty$, (2.2.35)

   $f(x,y) = o\left[(y-b)^{\eta_{19}}\right], \eta_{19} > |B(b)|$ *при* $y \to b$. (2.2.36)

При выполнении вышеуказанных условий согласно [8], решение интегрального уравнения (2.2.32) представимо в виде:

$$\nu_3(x,y) = G_3(x,y) - \int_x^{\infty} dt \int_b^{y} \Gamma_{1,3}(x,y,t,s) G_3(t,s)\, ds,$$

где $\Gamma_{1,3}(x,y,t,s)$ – резольвента интегрального уравнения со слабой особенностью (2.2.32).

Следовательно, на основе равенства (2.2.30), решение интегрального уравнения (2.1.1) выражается равенством:

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x) - W_B^{1}(y)} (y-b)^{|B(b)|} \Big\{ L_3[\varphi_1(x), 0, f(x,y)] -$$

$$- \int_x^{\infty} dt \int_b^{y} \Gamma_{1,3}(x,y,t,s) L_3[\varphi_1(t), 0, f(t,s)]\, ds \Big\} \equiv \mathcal{K}_3^1[\varphi_1(x), 0, f(x,y)]. \quad (2.2.37)$$

Итак, доказана:

Теорема 2.2.4. *Пусть в интегральном уравнении (2.1.1)* $0 < \alpha < 1$, $A(x) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in \mathrm{C}(\overline{\Gamma_2})$, $C(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, $A(\infty) > 0$, $B(b) < 0$, *функции* $A(x)$, $B(y)$ *соответственно в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условию (2.2.9), (2.2.10).* $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2, *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11), (2.2.12), функция* $f(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *и при* $x \to \infty$, $y \to b$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.35), (2.2.36). Тогда любое решение интегрального уравнения (2.2.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *представимо равенством (2.2.37),* $\varphi_1(x) -$ *произвольная непрерывная функция точек* Γ_1, *удовлетворяющая условию (2.2.34).*

Следствие 2.2.3. *При выполнении условий теоремы 2.2.4 решение интегрального уравнения (2.2.1) вида (2.2.34) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x \to \infty$, $y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств*

$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{66}}\right]$, $\zeta_{66} > 1 - \alpha$, *при* $x \to \infty$,
$u(x,y) = o\left[(y-b)^{|B(b)|}\right]$, *при* $y \to b$.

3. Нахождение решения немодельного интегрального уравнения (2.1.1) при $\boldsymbol{A(\infty) < 0, B(b) > 0, C(x,y) \neq A(x)B(y)}$

В этом случае в уравнении (2.2.3) вводя обозначение:

$$\nu_4(x,y) = e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)}u(x,y), \qquad (2.2.38)$$

$$G_4(x,y) = e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} \times$$

$$\times\, U_{A,1}^{\infty,B}\left[0, \psi_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,1}[f(x,y)]\right] = e^{\,W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)}\psi_1(y) +$$

$$+e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x)}\,\varphi_1(x) - \int\limits_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t) + W_a^\alpha(t)}\,\frac{A(t)\varphi_1(t)dt}{(t-a)^\alpha} +$$

$$+e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + W_B^1(y)}\,(y-b)^{B(b)}f(x,y) - e^{\,W_B^1(y)}(y-b)^{B(b)} \times$$

$$\times \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)} \frac{A(t)f(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt - e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)} \times$$

$$\times \int_b^y e^{W_B^1(s)}(s-b)^{B(b)-1} B(s)f(x,s)ds + \int_x^\infty e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(t)+W_a^\alpha(t)} \frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y e^{W_B^1(s)}(s-b)^{B(b)-1} B(s)f(t,s)ds \equiv L_4[\varphi_1(x),\psi_1(y),f(x,y)], \quad (2.2.39)$$

приходим к решению интегрального уравнения:

$$\nu_4(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\nu_4(t,s)ds}{s-b} = G_4(x,y). \qquad (2.2.40)$$

Уравнение (2.2.40) будет двумерным интегральным уравнением типа Вольтерра со слабой особенностью, если $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и при $x \to \infty$ и $y \to b$ обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11), (2.2.12), также $G_4(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$. Но решение уравнения (2.2.1) функцию $u(x,y)$ ищем в классе непрерывных функций, обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2. На основе равенства (2.2.38), для выполнения вышеуказанных условий необходимо, чтобы решение двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра со слабой особенностью (2.2.40) – функция $\nu_4(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и при $y \to b$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$\nu_4(x,y) = o[(y-b)^\varepsilon], \varepsilon > 0.$$

Соответственно, для выполнения вышеуказанных условий в равенстве (2.2.39), от слагаемых функции $G_4(x,y)$ потребуем выполнение следующих условий: $\varphi_1(x) = 0$, $\psi_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ и при $y \to b$ обращается в нуль с асимптотическим поведением:

$$\psi_1(y) = o[(y-b)^{\gamma_6}], \quad \gamma_6 > |B(b)| - 1 \text{ при } y \to b; \qquad (2.2.41)$$

$f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ и на Γ_1 и Γ_2 обращается в нуль с асимптотическими поведениями

$$f(x,y) = o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{67}}\right], \zeta_{67} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty, \tag{2.2.42}$$
$$f(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{20}}], \eta_{20} > |B(b)| \text{ при } y \to b. \tag{2.2.43}$$

Тогда согласно [8], решение двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра со слабой особенностью (2.2.40) имеет вид:

$$\nu_4(x,y) = G_4(x,y) - \int_x^{\infty} dt \int_b^{y} \Gamma_{1,4}(x,y,t,s) G_4(t,s)\, ds,$$

где $\Gamma_{1,4}(x,y,t,s) -$ резольвента интегрального уравнения типа Вольтерра со слабой особенностью (2.2.40).

Следовательно согласно равенству (2.2.38), решение интегрального уравнения (2.2.1) выражается равенством:

$$u(x,y) = e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x) - W_B^1(y)} (y-b)^{-B(b)} \left\{ L_4[0,\psi_1(y), f(x,y)] - \right.$$
$$\left. - \int_x^{\infty} dt \int_b^{y} \Gamma_{1,4}(x,y,t,s) L_4[0,\psi_1(s), f(t,s)]\, ds \right\} \equiv \mathcal{K}_4^1[0,\psi_1(y), f(x,y)]. \tag{2.2.45}$$

Итак, доказана:

Теорема 2.2.5. *Пусть в интегральном уравнении (2.2.1)* $0 < \alpha < 1$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$, $C(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $A(\infty) < 0$, $B(b) > 0$, *функции* $A(x)$, $B(y)$ *соответственно в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.2.9), (2.2.10).* $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.11), (2.2.12), функция* $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и при* $x \to \infty$, $y \to b$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями(2.2.42), (2.2.43). Тогда любое решение интегрального уравнения (2.2.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *выражается равенством (2.2.45), где* $\psi_1(y) -$ *произвольная непрерывная функция точек* Γ_2, *при* $y \to b$ *удовлетворяющая условию (2.2.41).*

Следствие 2.2.4. *При выполнении условий теоремы 2.2.5 решение интегрального уравнения (2.2.1) вида (2.2.45) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x \to \infty$, $y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств*

$$u(x,y) = o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{68}}\right], \zeta_{68} > 1-\alpha \text{ при } x \to \infty,$$
$$u(x,y) = o[(y-b)^{\varepsilon}], \varepsilon > 0 \text{ при } y \to b.$$

§ 2.3. Исследование немодельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и сильной - особенностью по второй переменной на полосе в случае $\mathbf{C(x,y) = A(x)B(y)}$

В области $\mathcal{D}$ рассмотрим уравнение со слабой особенностью по первой переменной и сильной - особенностью о второй переменной вида:

$$u(x,y) + \int\limits_x^\infty \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt + \int\limits_b^y \frac{B(s)u(x,s)}{(s-b)^\beta} ds + \int\limits_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int\limits_b^y \frac{C(t,s)u(t,s)}{(s-b)^\beta} ds =$$

$$= f(x,y), \qquad (2.3.1)$$

где $0 < \alpha < 1, \beta > 1$.

Интегральное уравнение (2.3.1) будем изучать в случае $A(a) \neq 0$, $B(b) \neq 0$, $C(a,b) \neq 0$.

Решение интегрального уравнения (2.3.1) будем искать в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o\left[x^{-\zeta_{69}}\right], \zeta_{69} > 1-\alpha,$$

$\lim\limits_{y\to b} u(x,y) = 0$ с асимптотическим поведением:

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{21}}], \eta_{21} > \beta - 1.$$

Пусть в уравнении (2.3.1) $C(x,y) = A(x)B(y)$. Повторяя схему нахождения решения интегрального уравнения (2.1.1) из §2.1, легко можно придти к выводу что, если при $B(b) < 0$, $A(\infty) < 0$ общее решение неоднородного интегрального уравнения (2.3.1) существует, тогда оно имеет вид:

$$u(x,y) = e^{\left[B(b)\omega_b^\beta(y) - W_B^1(y)\right]} \mathcal{H}_1(x) + e^{\left[-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x)\right]} \mathcal{q}_1(y) +$$

$$+\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] \equiv U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), \mathcal{q}_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \qquad (2.3.2)$$

где

$$\mathcal{H}_1(x) = \hbar_1(x) - \int\limits_x^\infty e^{\left[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t) - \omega_a^\alpha(x)\} + W_a^\alpha(t) - W_a^\alpha(x)\right]} \frac{A(t)\hbar_1(t)dt}{(t-a)^\alpha},$$

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)] = f(x,y) - \int\limits_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)f(t,y)dt}{(t-a)^\alpha} -$$

$$-\int\limits_b^y e^{\left[-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right\}+W_B^1(s)-W_B^1(y)\right]}\frac{B(s)f(x,s)}{(s-b)^\beta}ds +$$

$$+\int\limits_x^\infty e^{[A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)]}\frac{A(t)dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int\limits_b^y e^{\left[-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s)-\omega_b^\beta(y)\right\}+W_B^1(s)-W_B^1(y)\right]}\frac{B(s)f(t,s)}{(s-b)^\beta}ds.$$

Из вышеприведенных рассуждений вытекает:

Теорема 2.3.1. *Допустим что, в интегральном уравнении (2.3.1) выполнены условия:* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) < 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, *функция* $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *и в окрестности точки* $x = \infty$ *удовлетворяет условию*

$$A(x) - A(\infty) = o\left[x^{-\zeta_{70}}\right], \zeta_{70} > 1-\alpha, x \to \infty, \qquad (2.3.3)$$

$B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точки* $y = b$ *удовлетворяет условию*

$$B(y) - B(b) = o[\,(y-b)^{\eta_{22}}\,], \eta_{22} > \beta - 1, y \to b. \qquad (2.3.4)$$

Далее, пусть функция $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{71}}\right], \zeta_{71} > 1-\alpha, x \to \infty, \qquad (2.3.5)$$

$\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[e^{B(b)\omega_b^\beta(y)}(y-b)^{\eta_{23}}\right], \eta_{23} > \beta - 1, y \to b. \qquad (2.3.6)$$

Тогда интегральное уравнение (2.3.1) разрешимо в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *общее решение содержит две произвольные функции одной переменной и представимо в виде (2.3.2), где* $\hbar_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $q_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *— произвольные функции точек* Γ_1, Γ_2 *причём* $\hbar_1(\infty) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\hbar_1(x) = o\left[e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)}\, x^{-\zeta_{72}}\right], \zeta_{72} > 1 - \alpha, x \to \infty,$$

$q_1(b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$q_1(y) = o[(y-b)^{\eta_{24}}], \eta_{24} > \beta - 1, y \to b. \qquad (2.3.7)$$

Следствие 2.3.1. *При выполнении условий теоремы 2.3.1 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.3.2) из класса* $C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x \to \infty, y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств*

$$u(x,y) = o\left[\, e^{-A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)} x^{-\zeta_{73}}\right], \zeta_{73} > 1 - \alpha, \text{при } x \to \infty, \qquad (2.3.8)$$

$$u(x,y) = o[(y-b)^{\eta_{25}}], \eta_{25} > \beta - 1 \text{ при } y \to b. \qquad (2.3.9)$$

Подобные утверждения получены и в случаях $A(\infty) > 0,\ B(b) > 0$; $A(\infty) > 0, B(b) < 0$; $A(\infty) < 0, B(b) > 0$.

Теорема 2.3.2. *Допустим что, в интегральном уравнении (2.3.1) выполнены условия:* $0 < \alpha < 1,\ \beta > 1,\ A(\infty) > 0,\ B(b) < 0,\ C(x,y) = A(x)B(y)$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.3.3), (2.3.4), функция* $f(x,y) \in C(\overline{D})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.3.6) и*

$$f(x,y) = o\left[\, x^{-\zeta_{74}}\right], \zeta_{74} > 1 - \alpha \text{ при } x \to \infty. \qquad (2.3.10)$$

Тогда интегральное уравнение (2.3.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{D})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1, *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию одной переменной и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), 0, \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \qquad (2.3.11)$$

где $\hbar_1(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$ *–произвольная функция точек* Γ_1, *причём* $\hbar_1(\infty) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$\hbar_1(x) = o\left[\, x^{-\zeta_{75}}\right], \zeta_{75} > 1 - \alpha \text{ при } x \to \infty.$$

Следствие 2.3.2. *При выполнении условий теоремы 2.3.2 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.3.11) из класса* $C(\overline{D})$ *обращается в нуль при*

$x \to \infty$, $y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств (2.3.9) и*

$$u(x,y) = o\left[\, x^{-\zeta_{76}}\right], \zeta_{76} > 1 - \alpha, \text{при } x \to \infty. \qquad (2.3.12)$$

Теорема 2.3.3. *Допустим что, в интегральном уравнении (2.3.1) выполнены условия:* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $A(\infty) < 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) = A(x)B(y)$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.3.3), (2.3.4), функция* $f(x,y) \epsilon\, C(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.3.5) и*

$$f(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_{26}}\,], \eta_{26} > \beta - 1, y \to b. \qquad (2.3.13)$$

Тогда интегральное уравнение (2.3.1) в классе функций $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *всегда разрешимо, общее решение содержит одну произвольную функцию и выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[0, q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right], \qquad (2.3.14)$$

где $q_1(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *–произвольная функция точек* Γ_2. *Причём* $q_1(b) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.3.7).*

Следствие 2.3.3. *При выполнении условий теоремы 2.3.3 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.3.14) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x \to \infty$, $y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенства (2.3.8) и*

$$u(x,y) = o[\,(y-b)^{\eta_{27}}\,], \eta_{27} > \beta - 1, y \to b. \qquad (2.3.15)$$

Теорема 2.3.4. *Допустим что, в интегральном уравнении (2.3.1) выполнены условия:* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $A(\infty) > 0$, $B(b) > 0$, $C(x,y) = A(x)\,B(y)$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точки* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.3.3), (2.3.4), функция* $f(x,y) \epsilon\, C(\overline{\mathcal{D}})$ *и* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to b}} f(x,y) = 0$ *с асимптотическим поведением (2.3.10) и (2.3.13).*

Тогда интегральное уравнение (2.3.1) в классе функций $u(x,y) \in \mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y) \equiv U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[0,0,\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]. \qquad (2.3.16)$$

Следствие 2.3.4. *При выполнении условий теоремы 2.3.4 решение интегрального уравнения (1) вида (2.3.16) из класса* $\mathrm{C}(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x \to \infty$, $y \to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств (2.3.8) и (2.3.15).*

§ 2.4. Исследование немодельного двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью по первой переменной и сильной - особенностью по второй переменной на полосе в случае $\mathbf{C(x,y) \neq A(x)B(y)}$

Допустим, что в уравнении (2.3.1) $C(x,y) \neq A(x)B(y)$. В этом случае, уравнение (2.3.1) представим виде:

$$u(x,y) + \int_x^\infty \frac{A(t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha}dt + \int_b^y \frac{B(s)u(x,s)}{(s-b)^\beta}ds + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \times$$

$$\times \int_b^y \frac{A(t)B(s)u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds = \mathcal{P}_1(x,y), \qquad (2.4.1)$$

где

$$\mathcal{P}_1(x,y) = f(x,y) - \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(t,s)u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds,$$

$$C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y).$$

По обе стороны (2.4.1) действуя при помощи интегрального оператора $U_{A,\beta}^{\infty,B}$, после слагаемое, которое содержит неизвестную функцию $u(x,y)$ переноса в левую часть, приходим к решению интегрального уравнения:

$$u(x,y)+\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y e^{A(\infty)\{\omega_a^\alpha(t)-\omega_a^\alpha(x)\}+W_a^\alpha(t)-W_a^\alpha(x)}\times$$

$$\times\, e^{-B(b)\left\{\omega_b^\beta(s)-\omega_a^\alpha(y)\right\}+W_B^1(s)-W_B^1(y)}\frac{C_1(t,s)u(t,s)}{(s-b)^\beta}ds=$$

$$=U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x),q_1(y),\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right] \qquad (2.4.2)$$

Повторяя схему нахождения решения интегрального уравнения (2.2.1) из § 2.2, для уравнения (2.4.1) получим следующие утверждения:

Теорема 2.4.1. *Пусть в интегральном уравнении (2.3.1)* $0<\alpha<1,\ \beta>1$, $A(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x=\infty$, $y=b$ *удовлетворяют условиям (2.3.3) и (2.3.4), также* $A(\infty)>0$, $B(b)>0$, $C_1(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, $C_1(x,y)=C(x,y)-A(x)B(y)\neq 0$, *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.7) и*

$$C_1(x,y)=o[(y-b)^{\eta_{28}}],\eta_{28}>\beta-1 \text{ при } y\to b \qquad (2.4.3)$$

Функция $f(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.17) и*

$$f(x,y)=o[(y-b)^{\eta_{29}}],\eta_{29}>\beta-1 \text{ при } y\to b. \qquad (2.4.4)$$

Тогда интегральное уравнение (2.3.1) в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *имеет единственное решение, которое выражается равенством:*

$$u(x,y)=e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x)-W_a^\alpha(x)+B(b)\omega_b^\beta(y)-W_B^1(y)}[\mathcal{H}_1[0,0,f(x,y)]-$$

$$\left.-\int_x^\infty dt\int_b^y \Gamma_{1,1}(x,y,t,s)\mathcal{H}_1[0,0,f(t,s)]ds\right]\equiv \mathcal{Q}_1^1[f(x,y)], \qquad (2.4.5)$$

где $\Gamma_{1,1}(x,y,t,s)$ *— резольвента двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью*

$$\vartheta_1(x,y)+\int\limits_x^{\infty}\frac{dt}{(t-a)^{\alpha}}\int\limits_b^{y}\frac{C_1(t,s)\vartheta_1(t,s)ds}{(s-b)^{\beta}}=\mathcal{H}_1(x,y),$$

$\vartheta_1(x,y)=e^{A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)+W_a^{\alpha}(x)-B(b)\omega_b^{\beta}(y)+W_B^{1}(y)}u(x,y),$

$\mathcal{H}_1(x,y)=e^{A(\infty)\omega_a^{\alpha}(x)+W_a^{\alpha}(x)-B(b)\omega_b^{\beta}(y)+W_B^{1}(y)}\times$

$\times\, U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x),q_1(y),\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]=\mathcal{H}_1[\hbar_1(x),q_1(y),f(x,y)].$

Следствие 2.4.1. *При выполнении условий теоремы 2.4.2 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.4.5) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль при* $x\to\infty$, $y\to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств*

$u(x,y)=o\left[x^{-\zeta_{77}}\right],\zeta_{77}>1-\alpha,$ *при* $x\to\infty,$ (2.4.6)

$u(x,y)=o[(y-b)^{\eta_{30}}],\eta_{30}>\beta-1$ *при* $y\to b.$ (2.4.7)

Теорема 2.4.2. *Пусть в интегральном уравнении (1)* $0<\alpha<1,\ \beta>1,$ *функции* $A(x)\in C(\overline{\Gamma_1}),\ B(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$ *и в окрестности точек* $x=\infty,\ y=b$ *соответственно удовлетворяют условиям (2.3.3), (2.3.4),* $A(\infty)<0,\ B(b)<0,$ $C(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}}),\ f(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.27) и*

$f(x,y)=o\left[e^{B(b)\omega_b^{\beta}(y)}(y-b)^{\eta_{31}}\right],\eta_{31}>\beta-1,$ *при* $y\to b.$ (2.4.8)

Функция $C_1(x,y)=C(x,y)-A(x)B(y)\neq 0,\ C_1(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.7), (2.4.3). Тогда любое решение интегрального уравнения (2.3.1) из класса* $u(x,y)\in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *представимо в виде:*

$u(x,y)=e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x)-W_a^{\alpha}(x)-|B(b)|\omega_b^{\beta}(y)-W_B^{1}(y)}[\mathcal{H}_2[\hbar_1(x),q_1(y),f(x,y)]-$

$$-\int_x^\infty dt\int_b^y \Gamma_{1,2}(x,y,t,s)\mathcal{H}_2[\hbar_1(t),q_1(s),f(t,s)]ds\Bigg]\equiv$$

$$\equiv \mathcal{Q}_2^1[\hbar_1(x),q_1(y),f(x,y)], \qquad (2.4.9)$$

где $\Gamma_{1,2}(x,y,t,s)$ *– резольвента двумерного интегрального уравнения со слабой особенностью*

$$v_2(x,y)+\int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha}\int_b^y \frac{C_1(t,s)v_2(t,s)ds}{(s-b)^\beta}=\mathcal{H}_2(x,y),$$

$$\mathcal{H}_2(x,y)=e^{-|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)+W_a^\alpha(x)+|B(b)|\omega_b^\beta(y)+W_B^1(y)}\times$$

$$\times U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x),q_1(y),\mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right]=\mathcal{H}_2[\hbar_1(x),q_1(y),f(x,y)],$$

$\hbar_1(x)$, $q_1(y)$ *– произвольные непрерывные функции точек* Γ_1 *и* Γ_2*, обращающееся в нуль при* $x\to\infty$ *и* $y\to b$ *с асимптотическим поведением:*

$$\hbar_1(x)=o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{78}}\right],\ \zeta_{78}>\ 1-\alpha \text{ при } x\to\infty, \qquad (2.4.10)$$

$$q_1(y)=o[(y-b)^{\eta_{32}}],\ \eta_{32}>\beta-1 \text{ при } y\to b. \qquad (2.4.11)$$

Следствие 2.4.2. *При выполнении условий теоремы 2.4.3 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.4.9) из класса* $C(\overline{D})$ *обращается в нуль при* $x\to\infty$, $y\to b$ *и его асимптотическое поведение определяется из равенств*

$$u(x,y)=o\left[e^{|A(\infty)|\omega_a^\alpha(x)}x^{-\zeta_{79}}\right],\ \zeta_{79}>1-\alpha, \text{ при } x\to\infty, \qquad (2.4.12)$$

$$u(x,y)=o[(y-b)^{\eta_{33}}],\ \eta_{33}>\beta-1, \text{ при } y\to b. \qquad (2.4.13)$$

Теорема 2.4.3. *Пусть в интегральном уравнении (1)* $0<\alpha<1,\beta>1$, $A(x)\in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y)\in C(\overline{\Gamma_2})$, $C(x,y)\in C(\overline{D})$, $A(\infty)>0$, $B(b)<0$, *функции* $A(x)$, $B(y)$ *соответственно в окрестности точек* $x=\infty$, $y=b$ *удовлетворяют условиям (2.3.3), (2.3.4). Функция* $C_1(x,y)=C(x,y)-A(x)B(y)\neq 0$, $C_1(x,y)\in C(\overline{D})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.7), (2.4.3), функция* $f(x,y)\in C(\overline{D})$ *и при* $x\to\infty$, $y\to b$ *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.17) и (2.4.8). Тогда любое решение интегрально-*

го уравнения (2.3.1) в классе $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *представимо в виде:*

$$u(x,y) = e^{-A(\infty)\omega_a^\alpha(x) - W_a^\alpha(x) - |B(b)|\omega_b^\beta(y) - W_B^1(y)}\{\mathcal{H}_3[\hbar_1(x), 0, f(x,y)] -$$

$$\left. - \int_x^\infty dt \int_b^y \Gamma_{1,3}(x,y,t,s)\mathcal{H}_3[\hbar_1(t), 0, f(t,s)]\, ds \right\} \equiv Q_3^1[\hbar_1(x), 0, f(x,y)]. \quad (2.4.14)$$

где $\Gamma_{1,3}(x,y,t,s)$ – *резольвента интегрального уравнения*

$$\vartheta_3(x,y) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_b^y \frac{C_1(t,s)\vartheta_3(t,s)ds}{(s-b)^\beta} = \mathcal{H}_3(x,y),$$

$$\vartheta_3(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + |B(b)|\omega_b^\beta(y) + W_B^1(y)} u(x,y),$$

$$\mathcal{H}_3(x,y) = e^{A(\infty)\omega_a^\alpha(x) + W_a^\alpha(x) + |B(b)|\omega_b^\beta(y) + W_B^1(y)} \times$$

$$\times U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right] = \mathcal{H}_3[\hbar_1(x), q_1(y), f(x,y)],$$

$\hbar_1(x)$ – *произвольная непрерывная функция точек* Γ_2, *удовлетворяющая условию*

$$\hbar_1(x) = o\left[x^{-\zeta_{80}}\right], \zeta_{80} > 1 - \alpha, \text{ при } x \to \infty.$$

Следствие 2.4.3. *При выполнении условий теоремы 2.4.4 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.4.14) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств (2.4.6) и (2.4.13).*

Теорема 2.4.4. *Пусть в интегральном уравнении (2.3.1)* $0 < \alpha < 1, \beta > 1$, $A(x) \in C(\overline{\Gamma_1})$, $B(y) \in C(\overline{\Gamma_2})$, $C(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, $A(\infty) < 0$, $B(b) > 0$, $A(x)$, $B(y)$ *соответственно в окрестности точек* $x = \infty$, $y = b$ *удовлетворяют условиям (2.3.3), (2.3.4).* $C_1(x,y) = C(x,y) - A(x)B(y) \neq 0$, $C_1(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.7), (2.4.3), функция* $f(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$ *и при* $x \to \infty$, $y \to b$ *на* Γ_1 *и* Γ_2 *обращается в нуль с асимптотическими поведениями (2.2.7) и (2.2.4). Тогда любое решение интегрального* *уравнения (2.3.1) в классе функций* $u(x,y) \in C(\overline{\mathcal{D}})$, *обращающееся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2 *представимо в виде:*

$$u(x,y) = e^{|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x) - W_a^{\alpha}(x) + B(b)\omega_b^{\beta}(y) - W_B^{1}(y)} \{\mathcal{H}_4[0, q_1(y), f(x,y)] -$$

$$\left. - \int\limits_x^{\infty} dt \int\limits_b^{y} \Gamma_{1,4}(x,y,t,s)\mathcal{H}_4[0, q_1(s), f(t,s)]\, ds \right\} \equiv Q_4^1[0, q_1(y), f(x,y)], \quad (2.4.15)$$

где $\Gamma_{1,4}(x,y,t,s)$ – *резольвента интегрального уравнения*

$$v_4(x,y) + \int\limits_x^{\infty} \frac{dt}{(t-a)^{\alpha}} \int\limits_b^{y} \frac{C_1(t,s)v_4(t,s)ds}{s-b} = \mathcal{H}_4(x,y),$$

$$v_4(x,y) = e^{-|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x) + W_a^{\alpha}(x) - B(b)\omega_b^{\beta}(y) + W_B^{1}(y)} u(x,y),$$

$$\mathcal{H}_4(x,y) = e^{-|A(\infty)|\omega_a^{\alpha}(x) + W_a^{\alpha}(x) - B(b)\omega_b^{\beta}(y) + W_B^{1}(y)} \times$$

$$\times U_{A,\beta}^{\infty,B}\left[\mathcal{H}_1(x), q_1(y), \mathcal{M}_{\alpha,\beta}[f(x,y)]\right] = \mathcal{H}_4[h_1(x), q_1(y), f(x,y)],$$

$q_1(y)$ – *произвольная непрерывная функция точек* Γ_2, *при* $y \to b$ *удовлетворяющая условию*

$q_1(y) = o[(y-b)^{\eta_{34}}], \eta_{34} > \beta - 1$ *при* $y \to b$.

Следствие 2.4.4. *При выполнении условий теоремы 2.4.4 решение интегрального уравнения (2.3.1) вида (2.4.8) из класса* $C(\overline{\mathcal{D}})$ *обращается в нуль и его асимптотическое поведение при* $x \to \infty$, $y \to b$ *определяется из равенств (2.4.12) и (2.4.7).*

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- получено многообразие решений модельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе;
- ставятся и исследуются граничные задачи для двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения связаны между собой;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе;
- получено многообразие решений немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы могут быть использованы для дальнейшего развития теории многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми линиями, также могут быть использованы в различных прикладных вопросах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Список использованных источников

[1] Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1// В.сб. «Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами», Изд-во «Дониш», Душанбе, 1969, с. 19-40.

[2] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции// М.: Физматгиз, 1959, 672 с

[3] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Изд-во «Наука», М.: 1977, с. 640.

[4] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений// М.:Наука, 1987, 415 с

[5] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах // Матем. Заметки, 1989, т.46, №46, С.91-93.

[6] Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1// Душанбе, Дониш, 1966, 49 с

[7] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения// Наука М. 1968

[8] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения// –М.: Физматгиз, 1962, с. 254.

[9] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений// «Высшая школа», М., 1963, с. 546.

[10] Мюнтц Г. Интегральные уравнения// ГТТИ. 1934.

[11] Петровский Н.Г. Лекции по теории интегральных уравнений// УРСС, Москва, 2003, с. 120.

[12] Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений// Мир, 1979 г

[13] Раджабов Н. Интегральные уравнении типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверх- сингулярными ядрами и их приложения// Душанбе,2007, 221с.

[14] Раджабов Н. Раджабова Л.Н. Введение в теорию многомерных интегральных уравнений типа Вольтерра с фиксированными сингулярными и

сверх- сингулярными ядрами и их приложении// Germany; LAPLAMBET Academic Publishing 2011, 502p.

[15] Раджабова Л.Н., Раджабов Н. К теории одного класса двумерного слабо-сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра на первом квадранте// Доклады Академии Наук Республики Таджикистан − 2014. −Т. 57. №6. − С. 443-451.

[16] Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами// Душанбе, 1992, с. 24.

[17] Раджабов Н. Общие интегральные уравнения типов Вольтерра с левой и правой неподвижной сингулярной точкой в ядре. // Известия Академии наук Республики Таджикистан; Отд. физ.-мат., хим. и геологических наук, №1, 2001, с.3-19.

[18] Раджабов Н. Интегральные уравнения вольтерровского типа с внутренней неподвижной сингулярной и сверхсингулярной точкой в ядре. // Сб. трудов Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 26-31 мая 2002, с. 279-282.

[19] Раджабов Н. Об одном интегральном уравнении вольтерровского типа // ДАН России, 2002, М. 383, №3, с. 314.

[20] Раджабова Л.Н. Некоторые случаи для одного класса линейных уравнении третьего порядка с сингулярной точкой // ДАН Республики Таджикистан. Душанбе, 1999, т.17. №4. с. 41-49.

[21] Раджабова Л.Н. Об одном случае для одного класса линейных уравнений третьего порядка с сингулярной точкой// Тезисы докладов научно-теоретической конференции профессорско–преподавательского состава и студентов, посвященной 1100–летию государства Саманидов. Душанбе, 1999, с.33.

[22] Раджабова Л.Н. Интегральное представление для одного класса линейных уравнений с сверхсингулярной точкой // Труды Международного сим-

позиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗ МФ -2000). Орел, 2000, 28 мая - 2 июня, с. 370-373.

[23] Раджабова Л.Н. К теории дифференциального уравнения третьего порядка со сверхсингулярной точкой // Тезиси докладов научной конференции «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа». Самарканд, 2000, с.72.

[24] Раджабова Л.Н. Интегральные представления для одного случая дифференциального уравнения третьего порядка с сверхсингулярной точкой // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». Душанбе, 2002, с.73-74.

[25] Раджабова Л.Н. Об одном случае дифференциального уравнения третьего порядка с сингулярной точкой // Материалы международной научной конференции, посвященной 10-ой годовщине Независимости Республики Таджикистан и 80 –летию профессора М. А. Субхонкулова «Методы теории функций и их приложения». Душанбе, 2000, с. 35-36.

[26] Раджабова Л.Н. К теории одного класса двумерного интегрального уравнения, когда ядро имеет граничные особые точки // Материалы международной научно –практической конференции «16-я сессия Шурои Оли Республики Таджикистан (12 созыва) и её историческая значимость в развитии науки и образования». Душанбе, 27-28 сентября 2002, с. 186-187.

[27] Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Об одном классе двумерных линейных интегральных уравнений Вольтерровского типа с фиксированными граничными сингулярными ядрами // Материалы международной школы-конференции «Обратные задачи, теория и приложения». Ханты–Мансийск. Россия, август, 11-19, 2002, с. 67-69.

[28] Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса двумерного линейного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя граничными сингулярными линиями //Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». Самара, 2002, с. 286-288.

[29] Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Исследование одного класса двумерного интегрального уравнения с фиксированными сингулярными ядрами, связанное с гиперболическим уравнением // ДАН России, 2003, т.391, №1, с.20-22.

[30] Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса двумерного немодельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с двумя сингулярными линиями // Материалы международной научной конференции «Актульные проблемы математики и её приложения», Худжанд, 2003, с.107-110.

[31] Раджабов Н., Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса немодельного двумерного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной сверхсингулярной и одной сингулярной граничной линией // Труды Международной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 25-28 октября 2003, с. 131-134.

[32] Раджабова Л.Н. Явное решение одного класса немодельного интегрального уравнения Вольтерровского типа с одной сингулярной и одной слабо–сингулярной линией // Труды международной конференции «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Ташкент, 16-19 ноября 2004, том 4. с. 78-80.

[33] Раджабова Л. Н. «Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с одной сингулярной и одной сверхсингулярной линиями» // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005) Харьков –Херсон, 2005, с. 303 -306.

[34] Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с сингулярными линиями// Труды Международной научно – теоретической конференции по качественным исследованиям дифференциальных уравнений и их приложении, посвященной 10 –летию РТСУ. Душанбе, 12-14 мая 2005, с. 96-98.

[35] Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с одной сингулярной и одной сверхсингулярной линиями. // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения и смежные вопросы анализа». Душанбе, 8 ноября 2005, с. 153-156.

[36] Раджабова Л.Н. Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра со сверхсингулярными линиями // Вестник национального университета (научный журнал). Душанбе, 2005, №2, с. 116-123.

[37] Раджабова Л.Н. Об одном классе гиперболического уравнения с сингулярными линиями // Вестник национального университета (научный журнал). Душанбе, 2006, № 5, с. 44-51.

[38] Раджабова Л.Н. К теории одного класса гиперболического уравнения с сингулярными линиями // ДАН Республики Таджикистан. 2006, т.49, № 8, с. 710-717.

[39] Раджабова Л.Н. Об одном классе модельного гиперболического уравнение с двумя граничными особенными линиями // Материалы научной конференции «Математика и информационные технологии», посвященной 15–летию независимости Республики Таджикистан. Душанбе, 27 октября 2006, с. 66 -68.

[40] Раджабова Л.Н. Об одном общим двухмерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностью и сильной особенностью на границе области // Тезисы международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения». Новосибирск, 2007, с. 458-459.

[41] Раджабова Л.Н. Об одном общем двухмерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностями на границе области // Вестник ТГНУ. Серия естественных наук. Душанбе, 2007, №3, (35), с. 30-38.

[42] Раджабова Л.Н. К теории одного класса общего двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностями на границе области // Материалы международной научной конференции «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», по-

священной 70-летию акад. АН РТ З.Д. Усманова. Душанбе, 24-25 августа 2007, с. 92-94.

[43] Раджабова Л.Н. О некоторых случаях одного двумерного интегрального уравнения типа Вольтерра с сильными особенностями на границе области // Материалы международной научной конференции «Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики», посвященной 70-летию акад. АН РТ З.Д. Усманова. Душанбе, 24-25 августа 2007, с. 94-97.

[44] Раджабова Л.Н. К теории одного класса двумерного сопряженного интегрального уравнение вольтеровского типа с граничным фиксированными сингулярными ядрами. // Труды международной научной конференции «Дифференциальные уравнение и смежные проблемы» Стерлитамак, 24-28 июня 2008, том I, с.164-168.

[45] Rajabov N. Volterra type integral equation with boundary and interior fixed singularity and super- singularity kernels and their application// Germany; LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 282p.

[46] Rajabov N. On explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super –singular kernels // Proceeding of the international Craz workshop «Functional –Analytic and complex methods, their Interactions and applications to Partial Differential Equations., Graz, Austria, 12-16 February 2002, World Scientific, New Jersey –London –Singapore –Hong –Kong, 2001, pp. 313-329.

[47] Rajabov N. About class complex two dimensional linear system integral equation with boundary fixed singular or super –singular kernels in half –plane // ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equation and Related Topics. September 17-21 2002, Yerevan, Armenia, p.51-52.

[48] Rajabova L. About class, two-dimensional linear Volterra type integral Equation with boundary fixed singular Kernels// ISAAC Conference on Complex Analysis, Differential Equation and Related Topics (17-21 September 2002, Yerevan, Armenia), p.52-53 (Rajabov N.).

[49] Rajabov N., Rajabova L. On explicit Solution to a class of two Dimensional Volterra Type Linear Equation with Fixed Boundary Singular Kernels// Abstracts of Short Communications and Post Sessions, I CM-2002, 20-28. Beijing, 2002, Higher Education Press, p.229.

[50] Rajabova L. An explicit to a class of a two dimensional Volterra type Integral Equation with week singular kernels // Conference materials IX –International Scientific Kravchuk Conference. Keiv, 16-19 May 2002, p.171. (Rajabov N.)

[51] Rajabova L., Ronto M., Rajabov N. On some two dimensional Volterra type linear integral equation with super –singularity // Mathematical Notes. Miscolc, 2003, v4, №1, p.65-76.

[52] Rajabova L. Theory of a class of two – dimensional Volterra type integral equation with two super – singular lines // 6-th International ISAAC Congress, Middle East Technical University. Ankara, Turkey. Abstracts. 13-18 August 2007, pp. 35-36.

2. Список публикаций соискателя учёной степени

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ:

[1–А] Раджабова Л.Н. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2017. – №1/3. – С.3-5.

[2–А] Раджабова Л.Н. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // ДАН РТ. – 2018. – Т. 61. – №4. – С. 331-337.

[3–А] Хушвахтов М.Б**.** О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст]/ М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №1. – С.44-49.

[4–А] Раджабова Л.Н. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе[Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // ДАН РТ. – 2019. – Т. 62. – №9-10. – С. 533-540.

[5–А] Раджабова Л.Н. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н. Раджабова., М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №2. – С.20 - 24.

[6–А] Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особой и слабо особой линией на полосе[Текст]/ М.Б. Хушвахтов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2019. – №3. – С.19 - 23.

Статьи, опубликованные в других журналах, изданиях и сборниках:

[7–А] Rajabova L.N. To the theory of non-model two-dimensional integral equations of Volterra type with a strongly singular and weakly singular line on a strip[Текст]/ L.N. Rajabova, M.B. Khushvakhtov.// Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian national University. Mathematics. Computer science. Mechanics series. – 2019 – №4 (129) – С.67-72.

[8–А] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/М.Б. Хушвахтов// Международный научный журнал «Молодой ученый». –2019 – №49 (287) – часть 1 – С.1 - 3.

Материалы конференций, тезисы докладов:

[9–А] Раджабова Л.Н. К теории особых двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ Л.Н.Раджабова, М.Б.Хушвахтов// Материалы международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата «Современные проблемы математики и их приложения» (Таджикистан, г.Душанбе, 25-26 сентября 2018г.). – С.205-210.

[10–А] Хушвахтов М.Б. Граничные задачи для двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с сильно-особой и слабо-особой линией на полосе [Текст]/ М.Б.Хушвахтов// Материалы республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова «Математический анализ и его приложения» (г. Душанбе, 10-11 июня 2019г.). – С.263-267.

[11–А] Раджабова Л.Н. К теории двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе[Текст]/Л.Н.Раджабова, М.Б.Хушвахтов //Сборник трудов IV Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и образования в современном вузе» (Башкортостан, г. Стерлитамак, 23-25 мая 2019г.). 2019.– С.186-189.

[12–А] Хушвахтов М.Б. О некоторых случаях двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой [Текст]/ М.Б. Хушвахтов// Материалы республиканской научно-теоретический конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященной «Годом развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021гг.) и «400-летию Миробида Сайидо Насафи» (г. Душанбе, 20-27 апреля 2019г.). – Т. 1. – С.36-37.

[13–А] Хушвахтов М.Б. К теории немодельных двумерных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностями на полосе в случае, когда функции, присутствующие в ядрах не связаны между собой [Текст]/ М.Б. Хушвахтов// Материалы международной научной конференции, посвящённой 70-летию д.ф.-м.н., профессора Джангибекова Гулходжа «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами» (Таджикистан, г. Душанбе, 30-31 января 2020г). – С.305-309.