Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Худжандский государственный университет
имени академика Б. Гафурова

УДК 517.5

На правах рукописи

Маликов Абдумумин Маликович

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПОЛИНОМАМИ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико - математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Тухлиев Камаридин

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 2 0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Актуальность и степень разработанносты темы исследования. В настоящее время в качестве математического аппарата часто используются классические ортогональные многочлены Чебышева - Эрмита, Чебышева - Лагерра и общие многочлены Чебышева - Якоби. Эти многочлены применяются в математической физике, в вычислительной математике, в квантовой механике и статистике. В последнее время появляются всё новые возможности применения классических ортогональных многочленов при решении различных технических задач вариационного содержания. В связи с этим классическим ортогональным многочленам уделяется больше внимания. Всё это делает весьма актуальным приложения ортогональных многочленов в современной вычислительной математике. Метод разложения функций по ортогональным многочленам в вычислительной математике называется спектральным методом численного решения задач уравнений математической физики. Этот метод является одним из наиболее часто используемых методов решения практических задач.

В данной диссертационной работе решается ряд экстремальных задач теории среднеквадратического приближения, связанных с разложением функций в ряды Фурье по ортогональным многочленам. Эта проблематика в последнее время весьма интенсивно разрабатывалась в работах В.А.Абилова, Ф.В.Абиловой и М.К.Керимова [1, 2], С.Б.Вакарчука [3], М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [15], М.Ш.Шабозова и М.С.Саидусайнова [16] и многих других.

Общая характеристики работы

Объект исследования и связь работы с научными программами(проектами), темами.

Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информатики и вычислительной математики Худжандского государственного университета им. академика Б.Гафурова на 2016-2020 гг. по теме: „Теория приближения функций”.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является получение новых результатов, связанных с вычислением точных верхних граней наилучших приближений суммами Фурье некоторых классов функций в весовом пространстве Гильберта. Для достижения этой цели необходимо было решить следующие задачи:

- найти точные верхние грани наилучшего среднеквадратического приближения функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}), \rho(x) = e^{-x^2}$ суммами Фурье - Эрмита заданных классов функций;
- найти точную верхнюю грань наилучшего одновременного приближения функций и её последовательные производные суммами Фурье - Эрмита на классе функций $W^{(r)}L_{2,\rho}$;
- вычислить точные значения n-поперечников классов функций $W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m; h)$ и $W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m; \varphi, h)$;
- найти точные верхние грани наилучшего одновременного приближения функций $f \in L_{2,\mu}$ суммами Фурье разложения функций по общим орто-

гональным многочленам на классах функций, задаваемых обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Основные методы исследования. В данной диссертационной работе используются методы решения экстремальных задач теории приближения функций, базирующихся на современных идеях функционального анализа вариационного содержания.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены точные верхние грани наилучшего среднеквадратического приближения функций на всей оси суммами Фурье - Эрмита заданных классов функций;
- найдена точная верхняя грань наилучшего одновременного приближения функций и её последовательные производные суммами Фурье - Эрмита на классе функций $W^{(r)}L_{2,\rho}$;
- вычислены точные значения n-поперечников классов функций $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; h)$ и $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; \varphi, h)$;
- найдены точные верхние грани наилучшего одновременного приближения функций $f \in L_{2,\mu}$ суммами Фурье разложения функций по общим ортогональным многочленам на классах функций, задаваемых обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о верхних гранях наилучшего приближения классов функций суммами Фурье - Эрмита в $L_{2,\rho}$;

- теорема об одновременном приближении функций и её последовательных производных класса $W^{(r)}L_{2,\mu}$ суммами Фурье - Эрмита;
- теоремы о точных значениях n-поперечников классов функций $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m;h)$ и $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m;\varphi,h)$;
- основные теоремы о точных верхних гранях наилучшего одновременного приближения функций $f\in L_{2,\mu}$ конечными суммами Фурье разложения функций по общим ортогональным многочленам, а также классов функций, задаваемых обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет как теоретический, так и практический характер. Результаты диссертационной работы можно применять в аналогичных задачах для функций комплексного переменного аналитической в круге, а также для функций многих переменных.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры „Математического анализа и теории функций" Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016-2020 гг.);

- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе,15-25 августа 2016 г.);

- семинарах кафедры информатики и вычислительной математики в Худжандского государственного университета им. академика Б.Гафурова (Худжанд, 2015-2020 гг.);

- международной научно-практической конференции „Тенденции и перспективы развития науки XXI века” (Екатеринбург, 18 октября 2015 г.);

- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы естественных наук” (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, 18 ноября 2017 г.);

- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества” (Худжанд, Худжандский государственный университет им. Б.Гафурова, 26-27 октября 2018 г.);

- республиканской научно-теоретической конференции „Современные проблемы алгебры и теории чисел” (Душанбе, Таджикский национальный университет, 14-15 декабря 2018 г.);

- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения” (Душанбе, Таджикский национальный университет, 10-11 июня 2019 г.);

Публикации. Основные результаты по диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых журналах из Перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 6 статьей в трудах международных конференций. Из совместной с К.Тухлиевым [18] статьи соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательства результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 27 наименований, занимает 76 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА I

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕМ НА ВСЕЙ ОСИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С ВЕСОМ ЧЕБЫШЕВА - ЭРМИТА

§1.1. Предварительные сведения, основные свойства и некоторые алгебраические свойства многочленов Чебышева - Эрмита

1.1.1. Вывод многочленов Чебышева - Эрмита

Приводим хорошо известные сведения о многочленах Чебышева - Эрмита, нужные нам в дальнейшем. Пусть на действительной оси $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ задана чётная весовая функция

$$\rho(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1.1}$$

Последовательно дифференцируя $\rho(x)$, находим

$$\rho^{'}(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$\rho^{''}(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2},$$

$$\rho^{'''}(x) = (12x - 8x^3)e^{-x^2}$$

$$\rho^{(IV)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, \ \ldots \tag{1.1.2}$$

Из (1.1.1) и (1.1.2) следует, что

$$e^{x^2}\rho(x) \equiv 1 = H_0(x),$$

$$e^{x^2}\rho^{'}(x) = -2x = H_1(x),$$

$$e^{x^2}\rho^{''}(x) = (4x^2 - 2) = H_2(x),$$

$$e^{x^2}\rho^{'''}(x) = (-8x^3 + 12x) = H_3(x),$$

$$e^{x^2}\rho^{(IV)}(x) = (16x^4 - 48x^2 + 12) = H_4(x), \tag{1.1.3}$$

где $H_n(x)$ - некоторый многочлен степени n. Из приведенных равенств в (1.1.3) по индукции вытекает, что производная порядка n от функции $\rho(x)$ есть произведение от этой функции на некоторые многочлены степени n, а потому для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем, что

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} \tag{1.1.4}$$

есть многочлен степени n. Этот многочлен называется *стандартизованным многочленом Чебышева - Эрмита*, а формула (1.1.4) - формулой Родрига. Из (1.1.3) и (1.1.4) вытекает, что старший член многочлена $H_n(x)$ равен $(-1)^n(-2)^n = 2^n$, то есть

$$H_n(x) = 2^n x^n + ..., \tag{1.1.5}$$

причем

$$H_n(-x) = H_n(x), \textit{ если } n \textit{ - чётно, и}$$

$$H_n(-x) = -H_n(x), \textit{ если } n \textit{ - нечётно,}$$

то есть многочлен Эрмита $H_n(x)$ при n - чётном есть чётная функция, а при n - нечётном есть нечётная функция. Первые несколько многочленов Чебышева - Эрмита, как следует из (1.1.3) и формулы Родрига (1.1.4), имеют вид:

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x,$$

$$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$$

1.1.2. Ортогональность многочленов $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$

Докажем, что многочлены $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на всей оси $\mathbb{R}$ ортогональны с весовой функцией (1.1.1). С этой целью вычислим рекуррентно интеграл

$$J_{mn} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx. \tag{1.1.6}$$

Применяя формулу (1.1.4) и интегрируя по частям, находим

$$J_{mn} = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)} H_m(x) dx = (-1)^{(n)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) (e^{-x^2})^{(n)} dx =$$

$$= (-1)^{(n)} \big[H_n(x) (e^{-x^2})^{(n)} \big] \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-1)^{(n)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m^{'}(x) (e^{-x^2})^{(n-1)} dx.$$

Внеинтегральные члены ввиду наличия в них экспоненциального множителя $exp(-x^2)$ равны нулю. Повторяя интегрированием по частям в последнем интеграле последовательно ещё $(n-1)$ раз, получим

$$J_{mn} = (-1)^{n+2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m^{''}(x) (e^{-x^2})^{(n-2)} dx = ... =$$

$$= (-1)^{2n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(n)}(x) e^{-x^2} dx. \tag{1.1.7}$$

Из интеграла, стоящий в правой части (1.1.7) ясно, что если $m < n$, то $H_m^{(n)}(x) \equiv 0$. Следовательно, в этом случае из (1.1.6) вытекает, что

$$J_{mn} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0, \text{ если } m < n \text{ или } m > n.$$

Если же $m = n$, то в силу (1.1.5) имеем

$$J_{nn} = n! 2^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = n! 2^n \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, ортонормированный многочлен Чебышева - Эрмита имеет вид

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} \cdot e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}. \tag{1.1.8}$$

Старший коэффициент этого многочлена в силу равенство (1.1.5) равен

$$\mu_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}} = \sqrt{\frac{2^n}{n!\sqrt{\pi}}}.$$

С другой стороны, в силу того же равенства (1.1.5) многочлен Чебышева - Эрмита с единичным старшим коэффициентов определяется формулой

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{1}{2^n}H_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)} = x^n + ...$$

1.1.3. Вывод дифференциального уравнения для многочленов Чебышева - Эрмита

В последующих параграфах наши результаты основаны на дифференциальном операторе Чебышева - Эрмита, которое приводим в этом подпункте. Дифференцируя весовую функцию $\rho(x) = exp(-x^2) := u$, по переменному x получаем: $u^{'} = -2xu$. Продифференцировав обе части данного равенства ещё $n+1$ раз, имеем:

$$u^{(n+2)} = -2xu^{(n+1)} - 2(n+1)u^{(n)}$$

или что то же

$$u^{(n+2)} + 2xu^{(n+1)} + 2(n+1)u^{(n)} = 0. \tag{1.1.9}$$

Но так как по формуле Родрига (1.1.4)

$$u^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} \cdot H_n(x),$$

то, пользуясь последним равенством, формулу (1.1.9) приводим к виду

$$\Big(e^{-x^2}H_n(x)\Big)^{''}+2x\Big(e^{-x^2}H_n(x)\Big)^{'}+2(n+1)e^{-x^2}H_n(x)=0.$$

Выполняя операции дифференцирования и опуская экспоненциальный множитель e^{-x^2}, после приведения подобных членов, получаем дифференциальное уравнение

$$H_n^{''}(x)-2xH_n^{'}(x)+2nH_n(x)=0. \tag{1.1.10}$$

Очевидно, стандартизованные многочлены Чебышева - Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$y^{''}-2xy^{'}+2ny=0. \tag{1.1.11}$$

Введём дифференциальный оператор второго порядка следующего вида

$$\mathcal{D}:=\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}. \tag{1.1.12}$$

Тогда уравнение (1.1.10) коротко записывается следующим образом

$$\mathcal{D}H_n(x)=-2nH_n(x). \tag{1.1.13}$$

Введя обозначение $\mathcal{D}^r:=\mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}), r\in\mathbb{N}$, из (1.1.13) рекуррентно находим:

$$\mathcal{D}^2H_n(x)=\mathcal{D}(\mathcal{D}H_n(x))=\mathcal{D}(-2nH_n(x))=$$

$$=(-2n)\mathcal{D}H_n(x)=(-2n)(-2n)H_n(x)=(-2n)^2H_n(x)$$

и в общем случае

$$\mathcal{D}^rH_n(x)=(-1)^r\cdot(2n)^rH_n(x). \tag{1.1.14}$$

На этом последнем равенстве базируются наши некоторые результаты в последующих параграфах. Для стандартизованных многочленов Чебышева - Эрмита имеют место формулы [13, с.174]

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, \tag{1.1.15}$$

где [n/2] - целая часть числа $n/2, n \in \mathbb{N}$. Из (1.1.15) для чётных ($n = 2m$) и нечётных ($n = 2m + 1$) вытекают равенства

$$H_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m)!}{k!(2m-2k)!}(2x)^{2m-2k}, \tag{1.1.16}$$

$$H_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k (2m+1)!}{k!(2m+1-2k)!}(2x)^{2m+1-2k}. \tag{1.1.17}$$

§1.2. Приближение функций в среднем суммами Чебышева - Эрмита

Пусть $L_{2,\rho} := L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \rho := \rho(x) = e^{-x^2}$ - пространство вещественных, интегрируемых на всей оси $\mathbb{R}$ с квадратом функций f таких, для которых

$$\|f\|_{2,\rho} := \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f^2(x)dx\Big)^{1/2} < \infty.$$

Очевидно, что пространство $L_{2,\rho}$ с введением скалярного произведения

$$(f, g) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)g(x)dx$$

и соответствующей нормой $\|f\|_{2,\rho} := (f, f)^{1/2}$ становится гильбертовым пространством. Пусть

$$\mathscr{P}_n = \{p_n(x) : p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}\}$$

подпространство алгебраических полиномов степени не более n.

Равенством

$$E_n(f)_{2,\rho} := \inf\{\|f - p_n\|_{2,\rho} : p_n(x) \in \mathscr{P}_n\} \tag{1.2.1}$$

определим величину наилучшего полиномиального среднеквадратичного приближения функций $f \in L_{2,\rho}$ элементами подпространства многочленов $\mathscr{P}_n$. Хорошо известно, [11], что любая функция $f \in L_{2,\rho}$ разлагается в ряд Фурье по полиномам Эрмита [13, с.194]:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) H_k(x), \tag{1.2.2}$$

где

$$c_k(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx \tag{1.2.3}$$

- коэффициенты Фурье - Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}$, а равенство (1.2.2) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}$.

Если через

$$S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(f) H_k(x)$$

обозначить частную сумму n-го порядка ряда Фурье - Чебышева (1.2.2) функции $f \in L_{2,\rho}$, то из общего результата о наилучшем среднеквадратичном полиномиальном приближеннии функций по ортогональным полиномам (см., например, [13, с.26]) сразу следует, что

$$E_n(f)_{2,\rho} := \inf\{\|f - p_n\|_{2,\rho} : p_n(x) \in \mathscr{P}_n\} =$$

$$= \|f - S_n(f)\|_{2,\rho} = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{1.2.4}$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}$ рассмотрим оператор усреднения

$$T_h(x)(f, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-h^2} + hy) e^{-y^2} dy, |h| \le 1, \tag{1.2.5}$$

который обладает следующими простейшими свойствами (см., например, монография [7, с.557]):

1. $T_h(\alpha f, x + \beta\varphi, x) = \alpha T_h(f, x) + \beta T_h(\varphi, x), \alpha, \beta \in \mathbb{R};$

2. $T_0(f, x) = f(x);$

3. $\|T_h(f)\|_{2,\rho} \le \|f\|_{2,\rho};$

4. $\|T_h(f) - f\|_{2,\rho} \to 0 \ \ (h \to 0+);$

5. $T_h H_n(x) = (1-h^2)^{n/2} H_n(x)$.

Оператор (1.2.5) называют *оператором обобщенного сдвига.*

Поступая как и в классическим случае, определим теперь разности первого и высших порядков следующими равенствами

$$\Delta_h(f;x) = T_h f(x) - f(x) = (T_h - \mathbb{I}) f(x), \tag{1.2.6}$$

$$\begin{gathered}\Delta_h^m(f;x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1}(f;\cdot),x) = (T_h - \mathbb{I})^m f(x) = \\ = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} T_h^k f(x),\end{gathered} \tag{1.2.7}$$

где $T_h^0 f(x) = f(x)$, $T_h^k f(x) = T_h(T^{k-1} f(x))$ $(k = \overline{1,m}\ \ ; m \in \mathbb{N})$ и $\mathbb{I}$ - единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}$.

Величину

$$\Omega_m(f,t)_{2,\rho} := \sup \{ \|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{2,\rho} : 0 < h \le t \} \tag{1.2.8}$$

назовём *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_{2,\rho}$. Чтобы получить явный вид модуля непрерывности (1.2.8), нам понадобится следующая

Лемма 1.1.1. [1]. *Пусть функция $f \in L_{2,\rho}$ имеет разложение в ряд Фурье* (1.2.2) *с коэффициентами* (1.2.3). *Тогда оператор обобщенного сдвига* (1.2.5) *имеет разложение*

$$T_h f(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(1-h^2\right)^{k/2} c_k(f) H_k(x), \tag{1.2.9}$$

причём ряд, стоящий справа в (1.2.9), *сходится в $L_{2,\rho}$.*

Учитывая равенства (1.2.6) , (1.2.7), с учетом (1.2.9) и (1.2.2) запишем

$$\Delta_h(f,x) = T_h(f,x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \left(\left(1-h^2\right)^{k/2} - 1\right) H_k(x). \tag{1.2.10}$$

Применяя последовательно равенства (1.2.10) и (1.2.7), получим

$$\Delta_h^2(f,x) = \Delta_h\big(\Delta_h(f;\cdot),x\big) = \Delta_h\left\{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\Big(\big(1-h^2\big)^{k/2}-1\Big)H_k(x)\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\Big(\big(1-h^2\big)^{k/2}-1\Big)^2 H_k(x),$$

и таким образом по индукции для любого $m \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k c_k(f)\Big(1-\big(1-h^2\big)^{k/2}\Big)^m \cdot H_k(x). \qquad (1.2.11)$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (1.2.11), в силу свойств ортогональности многочленов $\{H_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ получаем

$$\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-\big(1-h^2\big)^{k/2}\Big)^{2m} c_k^2(f). \qquad (1.2.12)$$

Пользуясь равенством (1.2.12), для величины (1.2.8) находим явный вид (см.напр. [1], [3]):

$$\Omega_m^2(f,t) := \sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-\big(1-t^2\big)^{k/2}\Big)^{2m} c_k^2(f). \qquad (1.2.13)$$

Равенством (1.2.13) будем пользоваться при выводе основных результатов данного параграфа.

Через $L_{2,\rho}^{(r)} := L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ $\ (r \in \mathbb{N}_+, L_{2,\rho}^{(0)} \equiv L_{2,\rho})$ обозначим множество функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны на любом конечном интервале, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$.

Условимся далее отношение $0/0$ считать равным 0 и при вычислении верхних граней по всем функциям $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ предполагать, что $f \notin \mathscr{P}_r$. Отметим, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$ в [11] доказано следующее разложение её r-й производной $f^{(r)}$ в ряд Фурье - Эрмита:

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)\sqrt{2^r\alpha_{k,r}}H_{k-r}(x), \tag{1.2.14}$$

причем ряд, стоящий в правой части (1.2.14), сходится в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$. Исходя из разложения функции f в ряд (1.2.2) и разложения производной $f^{(r)}$ в ряд (1.2.14), применением равенства Парсеваля получаем следующие равенства

$$\|f\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f), \tag{1.2.15}$$

$$\|f^{(r)}\|_{2,\rho}^2 = \sum_{k=r}^{\infty} c_k^2(f)\cdot 2^r\alpha_{k,r}, \tag{1.2.16}$$

где в ряд правой части (1.2.16), ради простоты, введены обозначения

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)...(k-r-1),\ k \geq r,\ k,r \in \mathbb{N}. \tag{1.2.17}$$

Более того, простые вычисления показывают, что для произвольных натуральных $n \geq r$ значение величины наилучшего приближения функции $f^{(r)} \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ элементами подпространства $\mathscr{P}_{n-r}$ равно

$$E_{n-r}(f^{(r)})_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2(f)2^r\alpha_{k,r}\right\}^{1/2}. \tag{1.2.18}$$

Учитывая соотношение (1.2.4), (1.2.14) и (1.2.18), С.Б.Вакарчук [3, с.669] доказал неравенство

$$E_n(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r\cdot\alpha_{n+1,r}}}\cdot E_{n-r}(f^{(r)})_{2,\rho} \tag{1.2.19}$$

В дальнейшем нашем изложении неравенство (1.2.19) мы используем в удобном для нас виде

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r\cdot\alpha_{n,r}}}\cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}\ . \tag{1.2.20}$$

Для функции $f_0(x) := H_n(x) \in L_{2,\rho}(\mathbb{R})$, где $n \geq r$, неравенство (1.2.20) обращается в равенство. В самом деле, в силу (1.2.4) $E_{n-1}(f_0) = 1$ и на основании (1.2.14) имеем:

$$f_0^{(r)}(x) = \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} H_{n-r}(x), \tag{1.2.21}$$

откуда $E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho} = \sqrt{2^r \alpha_{n,r}}$.

Лемма 1.2.1. *Для произвольной функции* $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}}. \tag{1.2.22}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.2.20) получим оценку сверху величины, стоящей в левой части (1.2.22)

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \tag{1.2.23}$$

и, учитывая, что для функции $f_0(x) = H_n(x) \in L_{2,\rho}^{(r)}$ справедливы равенства

$$E_{n-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho} = 1,\ E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho} = \sqrt{2^r \alpha_{n,r}}\ , \tag{1.2.24}$$

получаем оценки снизу

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}} \geq \frac{E_{n-1}(f_0)_{2,\rho}}{E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho}} = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}}. \tag{1.2.25}$$

Требуемое равенство (1.2.22) вытекает из (1.2.23) и (1.2.25). Лемма 1.2.1 доказана.

Пусть $W^{(r)}L_{2,\rho} := W^{(r)}L_{2,\rho}(\mathbb{R})$ - класс функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых $\|f^{(r)}\|_{2,\rho} \leq 1$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *Для любого $n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$E_{n-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}) = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}}.$$

Доказательство. Так так $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}$, то очевидно, что

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \le \|f^{(r)}\|_{2,\rho} \le 1,$$

а потому из неравенства (1.2.20) имеем:

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \le \frac{1}{\sqrt{2^n \alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \le \frac{1}{\sqrt{2^n \alpha_{n,r}}}\ . \tag{1.2.26}$$

С другой стороны, для функции

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n \alpha_{n,r}}} H_n(x),$$

рассмотренной нами в предыдущих теоремах, имеем:

$$E_{n-1}(f_1)_{2,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2^n \alpha_{n,r}}}\ ,$$

$$E_{n-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}) \ge E_{n-1}(f_1)_{2,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2^n \alpha_{n,r}}}. \tag{1.2.27}$$

Из неравенств (1.2.26) и (1.2.27) вытекает утверждение теоремы 1.2.1.

Имеет место также следующая более общая

Теорема 1.2.2. *Пусть $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $n > r \ge s$. Тогда для $s \in [0, r]$ справедливо точное неравенство*

$$E^2_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \le 2^{-(r-s)} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E^2_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}. \tag{1.2.28}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любых $k, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяющих ограничение $k \geq n > r \geq s$, справедливо равенство

$$\max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} = \max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s} \cdot \alpha_{k-s,r-s}} =$$

$$= \max_{k \geq n} \frac{1}{\alpha_{k-s,r-s}} = \frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.2.29}$$

Учитывая равенство (1.2.29) и формулу (1.2.18), будем иметь

$$E^2_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} 2^s \alpha_{k,s} c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^s \alpha_{k,s}}{2^r \alpha_{k,r}} \cdot 2^s \alpha_{k,r} c_k^2(f) \leq$$

$$\leq 2^{-(r-s)} \max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,r}} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) =$$

$$= 2^{-(r-s)} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \ ,$$

и неравенство (1.2.28) доказано. Для функции $f_0(x) = H_n(x) \in L^{(r)}_{2,\rho}$, рассмотренной нами при доказательство леммы 1.2.1, в полученном неравенстве знак неравенства обращается в равенство. Действительно, дифференцируя s - раз функцию f_0, в силу (1.2.14) получаем

$$f_0^{(s)}(x) = \sqrt{2^s \alpha_{k,s}} \cdot H_{k-s}(x),$$

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{2^s \alpha_{n,s}} \ . \tag{1.2.30}$$

Пользуясь равенствами (1.2.24) и (1.2.30), запишем

$$E^2_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} = 2^s \alpha_{n,s} = 2^{-(r-s)} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot (2^r \cdot \alpha_{n,r}) =$$

$$= 2^{-(r-s)} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E^2_{n-r-1}(f_0^{(r)})_{2,\rho} \ .$$

Этим точность неравенства (1.2.28) установлена, чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+, r \geq s$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W^{(r)} L_{2,\rho}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{(E_{n-1}(f)_{2,\rho})^{1-s/r}} = \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \ . \tag{1.2.31}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию f из класса $W^{(r)}L_{2,\rho}$, которая не является элементом подпространства $\mathscr{P}_{n-1}$. Очевидно, что производные $f^{(s)}(0 \leq s \leq r; f^{(0)} = f)$ также принадлежат множеству $W^{(r)}L_{2,\rho}$. Тогда в силу соотношений (1.2.4) и (1.2.18) запишем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \ , \tag{1.2.32}$$

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} 2^s \alpha_{k,s} c_k^2(f) \ , \tag{1.2.33}$$

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) \ . \tag{1.2.34}$$

Используя формулы (1.2.32) – (1.2.34), неравенство Гельдера для производной $f^{(s)}(0 \leq s \leq r)$ получаем неравенство типа Колмогорова

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_{2,\rho} = \sum_{k=n}^{\infty} 2^s \alpha_{k,s} c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^s \alpha_{k,s}}{(2^r \alpha_{k,r})^{s/r}} \cdot (2^r \alpha_{k,s} c_k^2(f))^{\frac{s}{r}} \cdot (c_k^2(f))^{1-\frac{s}{r}} \leq$$

$$\leq \max_{k \geq n} \frac{2^s \alpha_{k,s}}{(2^r \alpha_{k,r})^{s/r}} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f)\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(c_k^2(f)\right)^{1-\frac{s}{r}} \leq$$

$$\leq \max_{k \geq n} \frac{\alpha_{k,s}}{(\alpha_{k,r})^{s/r}} \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f)\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1-\frac{s}{r}} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \cdot \left(E^2_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho}\right)^{\frac{s}{r}} \cdot \left(E^2_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}.$$

Если $f \in W^{(r)}L_{2,\rho}$ то отсюда будем иметь

$$E^2_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}} \cdot \left(E^2_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}},$$

откуда следует оценку сверху

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\rho}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E^2_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{\frac{s}{r}}} \ . \tag{1.2.35}$$

С целью получения оценки снизу той же величины для рассмотренной нами выше функции $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^n\alpha_{n,r}}}H_n(x)$, для которой

$$E_{n-1}(f_1)_{2,\rho} = \frac{1}{\sqrt{2^n\alpha_{n,r}}},$$

$$E_{n-s-1}(f_1^{(s)})_{2,\rho} = \sqrt{\frac{2^s\alpha_{n,r}}{2^n\alpha_{n,r}}},$$

имеем:

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_2} \frac{E^2_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}} \geq \frac{E^2_{n-s-1}(f_1^{(s)})_{2,\rho}}{\left(E_{n-1}(f_1)_{2,\rho}\right)^{1-\frac{s}{r}}} =$$

$$= \frac{2^s\alpha_{n,s}}{2^r\alpha_{n,r}} \cdot (2^r\alpha_{n,r})^{1-\frac{s}{r}} = \frac{2^s\alpha_{n,s}}{2^s\,(\alpha_{n,r})^{s/r}} = \frac{\alpha_{n,s}}{(\alpha_{n,r})^{s/r}}. \tag{1.2.36}$$

Сравнивая оценку сверху (1.2.35) с оценкой снизу (1.2.36), получаем требуемое равенство (1.2.31), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.3.

Для $s \in [0, r]$ положим

$$E^{(s)}_{n-s-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}) := \sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_{2,\rho} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}\right\}. \tag{1.2.37}$$

Отметим, что при $s = 0$ в теореме 1.2.1 мы доказали, что

$$E_{n-1}(W^{(r)}L_{2,\rho}) = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in W^{(r)}L_{2,\rho}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}} \ .$$

Теорема 1.2.4. *Для величины (1.2.37) справедливо равенство*

$$\left(E^{(s)}_{n-s-1}(W^{(r)}L_2)_{2,\rho}\right)^2 = 2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} = \frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{1}{\alpha_{n-s,r-s}} =$$

$$= \frac{1}{2^{r-s}}\cdot\frac{1}{(n-s)(n-s-1)...(n-r+1)}\ . \tag{1.2.38}$$

В частности, при $s=0$, из (1.2.38) получаем

$$E_{n-1}(W^{(r)}L_2)_{2,\rho} = E_{n-1}(W^{(r)}L_2) = \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}.$$

Доказательство. Из неравенства (1.2.28) для произвольной функции $f \in W^{(r)}L_2$ получаем

$$E^2_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} \le 2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot E^2_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \le$$

$$\le 2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\|f^{(r)}\|_{2,\rho} \le 2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\ ,$$

откуда сразу следует оценка сверху для величины (1.2.37)

$$\left(E^{(s)}_{n-s-1}(W^{(r)}L_2)_{2,\rho}\right)^2 =$$

$$= \sup\left\{E^2_{n-s-1}(f_0^{(s)})_{2,\rho} : f \in W^{(r)}L_2\right\} \le 2^{-(r-s)}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{1.2.39}$$

Для получения оценки снизу величины (1.2.37) введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}\cdot H_n(x)$$

и покажем, что $f_1 \in W^{(r)}L_2$. Действительно, в силу (1.2.14) для $1 \le s \le r-1$ имеем

$$f_1^{(s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}\cdot\sqrt{2^s\alpha_{n,s}}\cdot H_{k-s}(x),$$

а для $s = r$

$$f_1^{(r)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \cdot \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot H_{k-r}(x) = H_{k-r}(x).$$

Тогда из (1.2.23) следует, что $\|f_1^{(r)}\|_{2,\rho} = 1$, то есть $f_1 \in W^{(r)}L_2$ и, кроме того, в силу (1.2.29) получаем

$$E^2_{n-s-1}(f_1^{(s)})_{2,\rho} = \|f_1^{(s)}\|^2_{2,\rho} = 2^{-(r-s)} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\ . \tag{1.2.40}$$

Учитывая равенство (1.2.40), получаем оценку снизу

$$\left(E^{(s)}_{n-s-1}(W^{(r)}L_2)_{2,\rho}\right)^2 \geq E^2_{n-s-1}(f_1^{(s)})_{2,\rho} = 2^{-(r-s)} \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\ . \tag{1.2.41}$$

Сопоставив оценку сверху (1.2.39) с оценкой снизу (1.2.41), получаем требуемое равенство (1.2.38), откуда и следует утверждение теоремы 1.2.4.

§1.3. Основные результаты

Прежде чем сформулировать основной результат параграфа напомним, что под весовой функцией на данном промежутке $[a,b]$ будем понимать любою неотрицательную суммируемую не эквивалентную нулю функцию

Теорема 1.3.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{Z}_+ (n \geq r) \ \ 0 < h \leq 1$, $0 < p \leq \infty, \varphi(t)-$ *весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.3.1)$$

Полагая, в частности, в (1.3.1) $\varphi(t)=t, \ p=1/m, \ m \in \mathbb{N}, \ \ r=0$, $h=\sqrt{2/(n+2)}$ *при* $n \to \infty$, *получаем предельное равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n+2)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n+2)}} t\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}dt\right)^m} = e^m.$$

Доказательство. При $0 < p \leq 2$ теорема 1.3.1 была ранее доказана С.Б.Вакарчуком [3, с.671], поэтому приводим доказательство теоремы для случай $2 \leq p \leq \infty$. Отметим, что в соотношении (1.3.1) для параметра p, удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m\|_{2,\rho}$ определён соотношениями

$$\|\Omega_m\|_p := \left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

если $0 < p < \infty$, и

$$\|\Omega_m \varphi^{1/p}\|_\infty := \lim_{p\to\infty} \|\Omega_m \varphi^{1/p}\|_p =$$

$$= max\left\{\Omega_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho} : t \in [0,h], 0 < h \le 1\right\},$$

если $p = \infty$.

При этом указанный функционал лишь при $1 \le p \le \infty$ является нормой. Переходим к доказательству теоремы 1.3.1 при значении $2 \le p \le \infty$. Из определения обобщенного модуля непрерывности получаем [3, с.669]:

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t)_{2,\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) \left[1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}\right]^{2m} \ge$$

$$\ge \sum_{k=n}^{\infty} 2^r \alpha_{k,r} c_k^2(f) \left[1 - (1-t^2)^{(k-r)/2}\right]^{2m} \ge$$

$$\ge 2^r \alpha_{n,r} \left[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{2m} E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}.$$

Таким образом, для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \ge 2^r \alpha_{n,r} \left[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{2m} E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\ . \tag{1.3.2}$$

Возведя обе части неравенства (1.3.2) в степень $p/2 (2 \le p \le \infty)$, затем умножив на весовую $\varphi(t)$ и интегрируя по промежутку $[0,h]$, находим

$$\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \cdot \varphi(t) dt \ge (2^r \alpha_{n,r})^{p/2} \cdot E_{n-1}^p(f)_{2,\rho} \cdot \int_0^h \left[1 - \left(1-t^2\right)^{(n-r)/2}\right]^{2m} \varphi(t) dt\ .$$

Отсюда находим

$$\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho} \cdot \varphi(t) dt\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge \sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho} \cdot \left(\int_0^h \left[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{pm} \varphi(t) dt\right)^{1/p}.$$

Из последнего неравенства следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.3.1):

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\le$$

$$\le\frac{1}{\left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{pm}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\ . \qquad (1.3.3)$$

Для получения оценки снизу той же величины, рассмотрим в классе $L_{2,\rho}^{(r)}$ функцию $f_0=H_n(x)$, которая была использована нами при доказательстве теоремы 1.2.2.

Поскольку $E_{n-1}(f_0)_{2,\rho}=1$,

$$\Omega_m(f_0^{(r)},t)_{2,p}=\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^m,$$

$$\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_0^{(r)},t)_{2,\rho}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}=\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{pm}\varphi(t)dt\right)^{1/p},$$

то мы имеем:

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}}\ge$$

$$\ge\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f_0)_{2,\rho}}{\left(2\int\limits_0^h\Omega_m^p(f_0^{(r)},t)_{2,\rho}\cdot\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot\left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{pm}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{pm} \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.4}$$

Требуемое равенство (1.3.1) получаем из сравнения оценки сверху (1.3.3) с оценкой снизу (1.3.4). Теорема 1.3.1 доказана.

Теорема 1.3.2 *Пусть выполнены все условия теоремы 1.3.1. Тогда при любом* $h \in (0,1]$, $\varphi(t) := (n-r)(1-t^2)^{(n-r)/2-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p}, \ 0 < p \leq \infty, n > r. \tag{1.3.5}$$

В частности, полагая в (1.3.5) $h = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$, $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, *получаем*

$$\sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}} \sup_{f \in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}} \cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}} \Omega_m^p(f^{(r)},t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n>r}} \left\{\frac{mp+1}{\left[1-\left(1-\frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{1.3.6}$$

В свою очередь, из (1.3.6) *при* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ *следует равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\rho}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left((n-r)\int\limits_0^{\sqrt{2/(n-r)}}\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}\cdot t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}dt\right)^m}=$$

$$=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}. \tag{1.3.7}$$

Доказательство. В самом деле, положив в (1.3.1) $\varphi(t) = (n-r)t(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}-1}$ и заметив, что

$$\varphi(t)dt = (n-r)t(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}-1}dt = d\left[1-(1-t^2)^{\frac{n-r}{2}}\right],$$

для стоящего в правой части равенства (1.3.1) интеграла получаем

$$\left(\int\limits_0^h\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp}d\left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]\right)^{-1/p}=$$

$$=\left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p},\ 0<p\le\infty, n>r, n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, n>r,$$

откуда и следует равенство (1.3.5). Равенства (1.3.6) и (1.3.7) получаются непосредственным вычислением.

Имеет место также следующее утверждение

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, n\ge r, 0<h\le 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}}\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}dt\right)^m}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t^2)^{(n-r)/2}dt\right)^m}. \tag{1.3.8}$$

В частности, при $h=1$ имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\rho}^{(r)}} \frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\int\limits_0^1 \Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}dt\right)^m} = \left(1-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{n-r}{n-r+1}\cdot\frac{\Gamma((n-r)/2)}{\Gamma((n-r+1)/2)}\right)^{-m},$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. В работе [3] для произвольной функции $f\in L_{2,\rho}$ и любой $t\in(0,1]$ доказано неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\le \left(E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\right)^{1-1/2m}\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}+\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)(1-t^2)^{k/2}. \qquad (1.3.9)$$

Интегрируя полученное неравенство в пределах от $t=0$ до $t=h$, получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\le \left(E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\right)^{1-1/2m}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}dt+\sum_{k=n}^{\infty}c_k^2(f)\int\limits_0^h(1-t^2)^{k/2}dt.$$

Поделив обе части последнего соотношения на число $h\in(0,1]$ и учитывая, что

$$\max_{k\ge n}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t^2)^{k/2}dt\right)=\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t^2)^{n/2}dt,$$

приходим к следующему неравенству

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\rho}\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t^2)^{n/2}dt\right)\le E_{n-1}^{2-1/m}(f)_{2,\rho}\cdot\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}dt,$$

откуда сразу получаем

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho}\le\left(\frac{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\rho}dt}{1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t^2)^{n/2}dt}\right)^m. \qquad (1.3.10)$$

Если $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, то для $f^{(r)} \in L_{2,\rho}$ из (1.3.10) сразу вытекает, что

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho} \leq \left(\frac{\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}dt}{1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t^2)^{(n-r)/2}dt} \right)^m \tag{1.3.11}$$

и, учитывая, что для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{2,\rho},$$

окончательно имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left(\frac{\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}dt}{1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t^2)^{(n-r)/2}dt} \right)^m.$$

Отсюда запишем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}\\ f\notin \mathcal{P}_r}} \frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}dt\right)^m} \leq \left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t^2)^{(n-r)/2}dt\right)^{-m}. \tag{1.3.12}$$

С целью получения оценки снизу, равной правой части (1.3.12), рассмотрим функцию $f_0(x) := H_n(x) (n \geq r)$, очевидно принадлежащую классу $L_{2,\rho}^{(r)}$ и для которой

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\rho} = 1, \quad f_0^{(r)}(x) = \sqrt{2^r\alpha_{n,r}}H_{n-r}(x),$$

$$\Omega_m(f_0^{(r)},t)_{2,\rho} = \sqrt{2^r\alpha_{n,r}}(1-(1-t^2)^{(n-r)/2})^m,$$

получаем оценку снизу

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\rho}^{(r)}\\ f\notin\mathcal{P}_r}}\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f)_{2,\rho}}{\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f^{(r)},t)_{2,\rho}dt\right)^m}\geq\frac{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot E_{n-1}(f_0)_{2,\rho}}{\left(\dfrac{1}{h}\displaystyle\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f_0^{(r)},t)_{2,\rho}dt\right)^m}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t^2)^{(n-r)/2}dt\right)^{-m}. \tag{1.3.13}$$

Равенство (1.3.8) получаем из сопоставления оценки сверху (1.3.13) и оценки снизу (1.3.12). Теорема 1.3.3 доказана.

§1.4. Точные значения n-поперечников классов функций

Пусть S – единичный шар в пространстве $L_{2,\rho}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\rho}-$ n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\rho}$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\rho} \to \Lambda_n$ – непрерывный линейный оператор ; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\rho} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{N}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\rho}$. Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mu\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\rho}\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\inf\{\|f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|_{2,\rho} : \varphi \in \Lambda_n\} : f \in \mathfrak{N}\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f - \mathscr{L}f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}L_{2,\rho} \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \inf\{\inf\{\sup\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N}\} : \mathscr{L}^{\perp}L_{2,\rho} \subset \Lambda_n\} : \Lambda_n \subset L_{2,\rho}\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным* n-поперечниками подмножества $\mathfrak{N}$ в пространстве $L_{2,\rho}$. Известно [14, 17], что в гильбертовом пространстве между $n-$поперечниками имеют место соотношения

$$b_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) \le d^n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) \le d_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \delta_n(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}) = \Pi(\mathfrak{N}, L_{2,\rho}). \qquad (1.4.1)$$

Пусть $h \in (0,1)$, $0 < p \le \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через $W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m, h)$ – класс функций $f \in L^{(r)}_{2,\rho}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ при $n > r$ удовлетворяют условию

$$\left((n-r) \int\limits_0^h \Omega^p_m(f^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1} dt \right)^{1/p} \le 1.$$

Аналогичным образом, для $0 < h \leq 1,\ 0 < p \leq \infty,\ m \in \mathbb{N}\ \ r \in \mathbb{Z}_+$, φ - весовая функция на $(0, h]$, через $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, \varphi, h)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_{2,\rho}\varphi(t)dt \leq 1.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty, 0 < h \leq 1$. *Тогда*

$$\lambda_n\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h); L_{2,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h); L_{2,\rho}\right)_{2,\rho} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}\left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p}, \qquad (1.4.2)$$

где

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_{2,\rho} := \sup\left\{E_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in \mathfrak{N}\right\},$$

а $\lambda_n(\cdot)$ *– любой из вышеперечисленных* n*-поперечников. В частности, из* (1.4.2) *при* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}, h = \sqrt{2/(n-r)}, n > r, r \in \mathbb{Z}_+$, *получаем*

$$\lambda_n\left(W_{2,\rho}^{r,1/m}\left(\Omega_m, \sqrt{\frac{2}{n-r}}\right); L_{2,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_{2,\rho}^{r,1/m}\left(\Omega_m, \sqrt{\frac{2}{n-r}}\right)\right)_{2,\rho} =$$

$$= \frac{2^{m-r/2}}{\sqrt{\alpha_{n,r}}}\left[1-\left(1-\frac{2}{n-r}\right)^{(n-r)/2}\right]^{-2m} \sim \frac{2^{m-r/2}}{\sqrt{\alpha_{n,r}}}\left(1-e^{-1}\right)^{-2m}.$$

Доказательство. Используя экстремальное равенство (1.4.2), определение класса $W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h)$ и соотношения между n-поперечниками (1.4.1), получаем оценки сверху

$$\lambda_n\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h); L_{2,\rho}\right) = E_{n-1}\left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h)\right)_{2,\rho} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}\left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{1.4.3}$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap L_{2,\rho}$ рассмотрим шар:

$$S_{n+1}^* := \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{2,\rho} \leq \frac{1}{\sqrt{2^r\alpha_{n,r}}}\left(\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right)^{1/p}\right\}$$

и покажем, что имеет место включение $S_{n+1}^* \subset W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h)$. Используя формулу (1.2.13) и вытекающее из (1.2.2) равенства (1.4.3)

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)\sqrt{2^r\alpha_{k,r}}H_{k-r}(x)$$

для произвольного полинома $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k(x) \subset S_{n+1}^*$, имеем

$$\Omega_m\left(p_n^{(r)}, t\right)_{2,\rho} = \left\{\sum_{k=r}^{n} c_k^2 2^r\alpha_{k,r}\left(1-(1-t^2)^{(k-r)/2}\right)^{2m}\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\cdot\left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{m}\|p_n\|_{2,\rho}. \tag{1.4.4}$$

Возведя обе части неравенства (1.4.4) в степень p, умножая на функцию $(n-r)t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}$, интегрируя полученное таким образом неравенство по переменной от $t=0$ до $t=h$ и учитывая, что $p_n \in S_{n+1}^*$, получаем

$$\left((n-r)\int_0^h \Omega_m^p(p_n^{(r)}, t)_{2,\rho} t(1-t^2)^{(n-r)/2-1}dt\right)^{1/p} \leq \sqrt{2^r\alpha_{n,r}}\|p_n\|_{2,\rho}.$$

$$\left(\int_0^h \left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)^{mp} d\left(1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right)\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{1/p}\cdot\left\{\frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}}\right\}^{-1/p} = 1.$$

Следовательно, шар $S^*_{n+1} \subset W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m, h)$. Таким образом, согласно определению бернштейновского n-поперечника и неравенства (1.4.1), имеем

$$\lambda_n \left(W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m, h), L_{2,\rho}\right) \geq b_n \left(W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m, h), L_{2,\rho}\right) \geq b_n(S^*_{n+1}, L_{2,\rho}) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \tag{1.4.5}$$

Требуемые равенства (1.4.2) получаем из сопоставления оценки сверху (1.4.3) и снизу (1.4.5). Теорема 1.4.1 доказана.

В задачах теории приближения часто возникает сопутствующая экстремальная задача вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье, соответствующих различным разложениям функций, для изучения скорости сходимости или структурных свойств классов функций. В [5,6] этот вопрос изучается для заданных дифференцируемых периодических функций, а в [3] для некоторых классов функций из $L_{2,\rho}(\mathbb{R})$. В работе В.А.Абилова [2] изучается поведение коэффициентов ряда Фурье-Эрмита непрерывных функций. Для введённых в данной работе классов функций данный вопрос также представляет определенный интерес.

Теорема 1.4.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \leq \infty, 0 < h < 1$ и $n \geq r$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| : f \in W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m, h)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \tag{1.4.6}$$

Доказательство. Следуя [3], с учётом ортонормированности системы полиномов Эрмита на всей оси $\mathbb{R}$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$, для произвольной функции $f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h)$, запишем

$$|c_n(f)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(t) H_n(t) dt \right| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} [f(t) - S_{n-1}(f,t)] H_n(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{-x^2/2} |f(t) - S_{n-1}(f,t)| \right) \left(e^{-x^2/2} |H_n(t)| \right) dt, \tag{1.4.7}$$

где $S_{n-1}(f)$ частная сумма n-го порядка ряда Фурье-Эрмита функций f. Применяя неравенства Коши-Буняковского к правой части неравенства (1.4.7), будем иметь

$$|c_n(f)| \leq \|f(t) - S_{n-1}(f)\|_{2,\rho} \cdot \|H_n\|_{2,\rho} = E_{n-1}(f)_{2,\rho}. \tag{1.4.8}$$

Учитывая второе равенство в (1.4.2), из неравенства (1.4.8) получаем

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h) \right\} \leq E_{n-1}(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h))_{2,\rho} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1 - (1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \tag{1.4.9}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части (1.4.9), введём в рассмотрение функцию

$$g(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1 - (1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p},$$

очевидно являющуюся элементом шара S_{n+1}^*, введённого в ходе доказательства теоремы 1.4.1, а потому в силу включения $S_{n+1}^* \subset W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega, h)$ функция $g \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega, h)$. Следовательно,

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m, h) \right\} \geq |c_n(g)| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \left\{ \frac{mp+1}{\left[1-(1-h^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \tag{1.4.10}$$

Из неравенства (1.4.9) и (1.4.10) получаем равенство (1.4.6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.2. Из теоремы 1.4.2 вытекает

Следствие 1.4.1. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.4.2. Тогда при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}, h = \sqrt{2/(n-r)}$, $n > r$ *справедливо равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup \left\{ \sqrt{\alpha_{n,r}} |c_n(f)| : f \in W_{2,\rho}^{r,1/m}(\Omega_m, \sqrt{2/(n-r)}) \right\} =$$
$$= 2^{m-r/2} \left(1 - e^{-1}\right)^{-2m}.$$

Теорема 1.4.3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq r$, $0 < p \leq \infty$. *Тогда имеют место равенства*

$$\gamma_n \left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; \varphi, h), L_{2,\rho}\right) = E_{n-1} \left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; \varphi, h)\right)_{2,\rho} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \cdot \left(\int_0^h \left[1-(1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \tag{1.4.11}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *- любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_{n-1} \left(W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; \varphi, h)\right)_{2,\rho} = \sup \left\{ E_{n-1}(f)_{2,\rho} : f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; \varphi, h) \right\}.$$

Доказательство. Теорема 1.4.3. повторяет схему доказательства теоремы 1.4.1, а потому мы его опускаем. Из теоремы 1.4.3 вытекает

Следствие 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.4.3. Тогда имеет место равенство*

$$\sup \left\{ |c_n(f)| : f \in W_{2,\rho}^{r,p}(\Omega_m; \varphi, h) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^r \alpha_{n,r}}} \cdot \left\{ \int\limits_0^h \left[1 - (1-t^2)^{(n-r)/2}\right]^{mp} \varphi(t)dt \right\}^{-1/p}. \qquad (1.4.12)$$

Замечание. Отметим, что теорема 1.4.2 и её следствие 1.4.2 для значений $0 < p \leq 2$ ранее были доказаны С.Б.Вакарчуком [3].

ГЛАВА II.

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ С ВЕСОМ

§2.1. Предварительные факты и определения. Приближения в среднем многочленами с весом

Пусть на некотором конечном интервале (a, b) задана функция $\mu(x)$. Функция $\mu(x)$ называется весовой функцией на этом интервале, если на этом интервале она неотрицательна, интегрируема и её интеграл положителен, то есть если $\mu(x) \geq 0$ и выполняется условие

$$0 < \int\limits_a^b \mu(x)dx < \infty.$$

Если же интервал (a, b) бесконечен, то, кроме того, должны абсолютно сходиться интегралы

$$\mu_n := \int\limits_a^b x^n \mu(x)dx, n = 1, 2, ...,$$

которые называются степенными моментами функции $\mu(x)$.

Всюду далее через $L_{2,\mu}(a, b) := L_2(a, b; \mu(x))$ обозначим пространство функций $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, для которых функция $\mu^{1/2}(x)f(x)$ интегрируема с квадратом на интервале (a, b). Очевидно, что пространства $L_{2,\mu}(a, b)$ - линейно и если для любых двух функций $f(x), g(x) \in L_{2,\mu}(a, b)$ ввести скалярное произведение по формуле

$$(f, g)_\mu := \int\limits_a^b \mu(x)f(x)g(x)dx$$

и определить норму равенством

$$\|f\|_{L_{2,\mu}} := \|f\|_{2,\mu} := (f,f)_\mu^{1/2},$$

то оно превращается в гильбертово пространство.

Хорошо известно, [1, 4, 8, с.33 - 37], что при аппроксимации функций ортогональными алгебраическими полиномами нужно рассматривать только те весовые функций на интервале (a,b), которые удовлетворяют дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d}{dx}(\sigma(x)\mu(x)) = \nu(x)\cdot\mu(x), \qquad (2.1.1)$$

где $\sigma(x)$ и $\nu(x)$ - соответственно многочлены не выше второй и первой степени и при любом $l\in\mathbb{Z}_+$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x\to a+0}\sigma(x)\mu(x)x^l = \lim_{x\to b-0}\sigma(x)\mu(x)x^l = 0. \qquad (2.1.2)$$

Также известно [1,4,8, с.33], что только в трёх случаях решение $\mu(x)$ сформулированной задачи в зависимости от многочленов $\sigma(x)$ и $\nu(x)$, с точностью до линейного преобразования независимой переменной является весовой функцией на соответствующем интервале (a,b) для определения с точностью до постоянного множителя классических ортогональных на (a,b) полиномов, а именно, полиномов Чебышева - Якоби, Чебышева - Лагерра и Чебышева - Эрмита. Следуя работам Абилова В.А., Абиловой Ф.В., Керимова М.К. [1] и Вакарчука С.Б., Швачко А.В. [4], через $\mathcal{D}_\mu$ обозначим дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{D}_\mu := \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} - \nu(x)\frac{d}{dx}, \qquad (2.1.3)$$

и пусть

$$\lambda_n(\mu) := -n\nu'(x) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(x). \tag{2.1.4}$$

Указанные выше ортогональные многочлены Чебышева - Якоби, Чебышева - Лагерра и Чебышева - Эрмита удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$-\mathcal{D}_\mu y = \lambda_n(\mu)y. \tag{2.1.5}$$

Явные выражения для этих многочленов даются формулой Родрига

$$y_n(x) = \frac{\mathscr{B}_n}{\mu(x)}\left(\sigma^n(x)\cdot\mu(x)\right)^{(n)}, \tag{2.1.6}$$

где $\mathscr{B}_n$ - нормированная постоянная, а функция μ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1.1). Из дифференциального уравнения (2.1.5) следует, что числа $\lambda_n(\mu), n \in \mathbb{Z}_+$, являются собственными значениями оператора $(-\mathcal{D}_\mu)$, а соответствующие им собственные функции - ортогональными на (a,b) многочленами, соответствующими весовой функции $\mu(x)$.

В зависимости от вида весовой функции $\mu(x)$ получаем следующие системы ортогональных на (a,b) полиномов [8]:

I. Если $\mu(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, где $\alpha,\beta > -1, \quad \sigma(x) := 1-x^2$,
$\nu(x) := -(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha, \quad (a,b) \equiv (-1,1)$,

то, согласно формуле (2.1.6), соответствующие полиномы $y_n(x)$ при
$\mathscr{B}_n := \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}$ являются полиномами Якоби

$$\mathcal{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right].$$

При этом

$$\lambda_n(\mu) = n(n+\alpha+\beta+1).$$

II. Если $\mu(x) := x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$, $\sigma(x) = x$, $\nu(x) = -x + \alpha + 1$, $(a, b) \equiv (0, +\infty)$, то в силу формулы (6) соответствующие полиномы y_n при $\mathscr{B}_n := \frac{1}{n!}$ будут полиномами Лагерра

$$L_n^{(\alpha)}(x) := \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+\alpha} e^{-x} \right).$$

В данном случае $\lambda_n(\mu) = n$.

III. В случае $\mu(x) := e^{-x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$, $\sigma(x) = 1$, $\nu(x) := 2x$, $(a, b) \equiv (-\infty, +\infty)$ соответствующие полиномы y_n при $\mathscr{B}_n = (-1)^n$ являются полиномами Эрмита

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

При этом, как легко видеть, $\lambda_n(\mu) = 2n$.

Далее через $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ будем обозначать произвольную систему ортонормированных многочленов с весовой функцией $\mu(x)$ в пространстве $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(a, b)$.

Пусть задана последовательность многочленов

$$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), ..., Q_n(x), ..., \tag{2.1.7}$$

в которой каждый многочлен $Q_n(x)$ имеет степень n. Если для любых двух многочленов из этой системы выполняется условие

$$\int\limits_a^b \mu(x) Q_n(x) Q_m(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

то многочлены (2.1.7) называются ортогональными с весовой функцией $\mu(x)$ на интервале (a, b). При этим интервал (a, b) называется интервалом ортогональности, а в случае, когда оба числа a и b конечны, обычно говорят о сегменте ортогональности $[a, b]$.

Система ортогональных многочленов (2.1.7) называется ортонормированной, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и его норма с весом $\mu(x)$ равна единице, то есть

$$\|Q_n\|_{2,\mu} = \left[\int_a^b \mu(x) Q_n^2(x) dx\right]^{1/2} = 1.$$

Таким образом, условие ортонормированности системы многочленов (2.1.7) имеет вид

$$\int_a^b \mu(x) Q_n(x) Q_m(x) dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m \ . \end{cases} \tag{2.1.8}$$

Весовая функция $\mu(x)$ в большинстве случаев считается непрерывной на интервале (a, b) всюду, кроме быть может, конечного числа точек, в окрестности которых она ограничена либо график ее имеет вертикальные асимптоты. В нуль функция $\mu(x)$ может обращаться в конечном числе точек тождественно на некоторых сегментах, расположенных внутри интервала ортогональности. При этом нулем весовой функции $\mu(x)$ мы будем считать такую точку, в которой эта функция непрерывна и равна нулю. Регулярными точками весовой функции называются такие точки интервала (a, b), в которых функция $\mu(x)$ непрерывна и положительна, а особыми - все остальные точки и, в частности, нули функции $\mu(x)$. Разумеется, концы интервала ортогональности всегда считаются особыми точками.

Рассмотрим разложение в ряд Фурье по многочленам $P_k(x)$ функции

$f \in L_{2,\mu}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) P_k(x), \tag{2.1.9}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике $L_{2,\mu}$, а

$$c_k(f) := \int\limits_a^b \mu(x) f(x) P_k(x) dx$$

- коэффициенты Фурье функции f.

Обозначим через $\mathscr{P}_n$ - подпространство алгебраических полиномов степени n, вида

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_n \neq 0.$$

Равенством

$$E_n(f)_{L_{2,\mu}} := \inf\{\|f - g_{n-1}\|_{L_{2,\mu}} : g_{n-1}(x) \in \mathscr{P}_{n-1}\} \tag{2.1.10}$$

определим величину наилучшего приближения функций $f \in L_{2,\mu}$ элементами $g_{n-1}(x)$ из подпространства $\mathscr{P}_{n-1}$.

Через $S_{n-1}(f), n \in \mathbb{N}$ обозначим частную сумму ряда Фурье (2.1.9), то есть

$$S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) P_k(x). \tag{2.1.11}$$

Хорошо известно, что для классических ортонормированных многочленов Чебышева - Эрмита, Чебышева - Лагерра, Чебышева - Якоби частичные суммы n-го порядка их разложения в ряд Фурье в некотором смысле являются элементами наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике пространства $L_2(a, b : \mu(x))$, где соответственно $\mu(x) = e^{-x^2}, \;\; \mu(x) = x^\alpha e^{-x}, \;\; \alpha > -1$, $\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta, \;\; \alpha, \beta \geq -1$.

Пусть теперь $\mu(x)$ - произвольная весовая функция. Докажем, что имеет место следующая

Лемма 2.1.1. *Пусть* $\mu(x)$ *- весовая функция на* (a,b), *функция* $f(x)$ *разложена в ряд вида* (2.1.11), *где* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *- ортонормированная система полиномов на* (a,b). *Тогда среди произвольных полиномов* $g_n(x) \in \mathscr{P}_n$ *наилучшее приближение* $E_{n-1}(f)$ *величину* (2.1.11) *доставляет частичная сумма* (2.1.11). *При этом имеет место равенство*

$$E_n^2(f)_{2,\mu} := \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f). \tag{2.1.12}$$

Доказательство. Можно считать, что это лемма известна, но для полноты изложения мы приводим прямое доказательство этого утверждения для любой весовой функции $\mu(x)$. Итак, пусть $f \in L_{2,\mu}(a,b)$. Тогда, учитывая, что любой полином $g_{n-1}(x)$ можно раскладывать по ортонормированным многочленам $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ (см., например, [13, с.13]):

$$q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k p_k(x),$$

будем иметь

$$\|f - q_{n-1}\|_{2,\mu}^2 = \int_a^b \mu(x)|f(x) - p_{n-1}(x)|^2 dx =$$

$$= \int_a^b \mu(x)\big[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k p_k(x)\big]\big[f(x) - \sum_{l=0}^{n-1} b_l p_l(x)\big]dx =$$

$$= \int_a^b \mu(x) f^2(x)dx - \sum_{l=0}^{n-1} b_l \int_a^b \mu(x)f(x)p_l(x)dx -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} b_k \int_a^b \mu(x)f(x)p_k(x)dx + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} b_k b_l \int_a^b \mu(x)p_k(x)p_l(x)dx =$$

$$= \|f\|^2_{L_{2,\mu}} - \sum_{l=0}^{n-1} c_l(f)b_l - \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)b_k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k^2 =$$

$$= \|f\|^2_{L_{2,\mu}} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(f) + \sum_{k=0}^{n-1}(c_k(f)-b_k)^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(c_k(f)-b_k)^2 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)$$

, где $c_k(f)$ - коэффициенты Фурье функции $f \in L_{2,\mu}$. Таким образом мы доказали, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}$ имеет место равенство

$$\|f - P_{n-1}\|^2_{2,\mu} = \sum_{k=0}^{n-1}(c_k(f)-b_k)^2 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f). \tag{2.1.13}$$

Из равенства (2.1.13) сразу вытекает соотношение (2.1.12), поскольку правая часть (2.1.13) принимает минимальное значение в случае $b_k \equiv c_k(f)$ и тогда полином $q_{n-1}(x)$ наилучшее среднеквадратичное приближение в $L_{2,\mu}$ имеет вид

$$q_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k p_k(x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)p_k(x) \equiv S_{n-1}(f,x),$$

откуда и следует утверждение леммы 2.1.1. Таким образом,

$$E^2_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}} = \|f - S_{n-1}(f)\|^2 = \|f\|^2_{L_{2,\mu}} - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f).$$

Этой формулой будем широко пользоваться в дальнейших параграфах при выводе основных результатов.

§2.2. Основные теоремы

В последнее время очень часто при решении экстремальных задач теории приближения как действительных, так и комплексных функций алгебраическими полиномами используют различные обобщённые (модификации) модули гладкости. В большинстве случаев такие модификации модулей гладкости естественным образом возникают при постановке сами задач и позволяют получить окончательные результаты, раскрывающие содержательную сущность исследуемых задач. Так, например, в ряде работ М.К.Потапова и его учеников [9, 10] при приближении непериодических функций алгебраическими полиномами предложены различные модификации классического определения модуля непрерывности, где вместо обычного оператора сдвига $T_h\varphi(t) := \varphi(t+h)$ предложены различные усредняющие операторы. Здесь мы продолжим эти исследования. Пусть

$$T_\mu(x, y; h) := \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)P_k(y)h^k, \tag{2.2.1}$$

где $h \in (0,1)$, $x, y \in (a,b)$ и равенство в (2.2.1) понимается в смысле сходимости в среднем в пространстве $L_{2,\mu,\mu}[(a,b)\times(a,b)]$, которое состоит из интегрируемых в квадрате функций $f : (a,b)\times(a,b) \to \mathbb{R}$ с весом $\mu(x)\mu(y)$ и с соответствующей нормой

$$\|f\|_{L_{2,\mu,\mu}} := \left(\int\limits_a^b\int\limits_a^b \mu(x)\mu(y)f^2(x,y)dxdy\right)^{1/2} < \infty.$$

В некоторых случаях для функции $T_\mu(x, y; h)$ можно указать явное выражение. Например, для ортонормированной системы полиномов Чебышева -

Эрмита $\{H_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$,

$$H_k(x) := \frac{1}{\sqrt{k!2^k\sqrt{\pi}}}(-1)^k e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x^2}\right)$$

функция $T_\mu(x,y;h)$ имеет следующий вид [12, с.111]

$$T_\mu(x,y;h) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x)H_k(y)h^k = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}}exp\left(\frac{2xyh-(x^2+y^2)h^2}{1-h^2}\right),$$

здесь $\mu(x) = exp(-x^2)$.

В частности, при $x \equiv y$, отсюда следует известное равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k^2(x)h^k = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-h^2)}}, \quad 0 < h < 1.$$

Для ортонормированной системы полиномов Чебышева - Лагерра $\left\{L_k^{(\alpha)}(x)\right\}_{k=0}^{+\infty}$, имеющих вид

$$L_k^{(\alpha)}(x) = (-1)^k\sqrt{\frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)}}\cdot\frac{1}{k!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{k+\alpha}e^{-x}\right),$$

$\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция Эйлера, используя результаты [12, с.111], будем иметь

$$T_\mu(x,y;h) := \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(\alpha)}(x)L_k^{(\alpha)}(y)h^k =$$

$$= \frac{exp(-(x+y)h/(1-h))}{1-h}(xyh)^{-\alpha/2}\mathcal{J}_\alpha\left(\frac{2\sqrt{xyh}}{1-h}\right).$$

Здесь $\mathcal{J}_\alpha(t)$ - функции Бесселя I рода порядка α, а $\mu(x) = x^\alpha e^{-x}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(L_k^{(\alpha)}(x)\right)^2 h^k = \frac{1}{1-h}\cdot e^{-\frac{2xh}{1-h}}\cdot x^{-\alpha}\cdot h^{-\alpha/2}\cdot\mathcal{J}_\alpha\left(\frac{2x\sqrt{h}}{1-h}\right), \quad 0 < h < 1.$$

Аналогичные соотношения можно вывести для ортонормированных полиномов Чебышева - Якоби.

Следуя работам [1, 4] и используя формулу (2.2.1), для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(a, b)$ запишем оператор усреднения следующего вида

$$\mathcal{F}_{h,\mu}(f, x) = \int\limits_a^b \mu(t) f(t) T_\mu(x, t, 1-h) dt, \quad 0 < h \leq 1 \qquad (2.2.2)$$

и перечислим его основные свойства. Очевидно, что для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любых двух функций $f_1, f_2 \in L_{2,\mu}$ выполняется равенство

1) $\mathcal{F}_{h,\mu}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{F}_{h,\mu}(f_1) + \beta \mathcal{F}_{h,\mu}(f_2)$,

то есть оператор (2.2.2) является линейным и однородным

Кроме того:

2) $\mathcal{F}_{h,\mu}(P_n, x) = (1-h)^n P_n(x), \quad P_n \in \mathscr{P}_n$,

3) $\|\mathcal{F}_{h,\mu}(f)\|_{2,\mu} \leq \|f\|_{2,\mu}, \quad \|\mathcal{F}_{0,\mu}(f)\|_{2,\mu} = \|f\|_{2,\mu}$,

4) $\|\mathcal{F}_{h,\mu}(f) - f\|_{2,\mu} \to 0, h \to 0+0$.

Докажем свойство 2). Пользуясь равенствами (2.2.1), (2.2.2) и ортонормированностью систему $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, имеем:

$$\mathcal{F}_{h,\mu}(P_n, x) = \int\limits_a^b \mu(t) P_n(t) T_\mu(x, t, 1-h) dt =$$

$$= \int\limits_a^b \mu(t) P_n(t) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) P_k(t) (1-h)^k \right\} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) \cdot \left\{ \int\limits_a^b \mu(t) P_k(t) P_n(t) dt \right\} (1-h)^k =$$

$$= P_n(x) \cdot \left\{ \int\limits_a^b \mu(t) P_n^2(t) dt \right\} (1-h)^n = (1-h)^n P_n(x).$$

Приводим доказательство свойства (3). Согласно известной теореме Банаха о норме оператора, запишем неравенство

$$\|\mathcal{F}_{h,\mu}(f)\|_{2,\mu} \le \|\mathcal{F}_{h,\mu}\|_{2,\mu} \cdot \|f\|_{2,\mu},$$

и остаётся доказать, что $\|\mathcal{F}_{h,\mu}\|_{2,\mu} \le 1$. Но это неравенство автоматически вытекает из (2.2.2), поскольку

$$\|\mathcal{F}_{h,\mu}\|_{2,\mu} := \sup_{a\le x\le b} |\mathcal{F}(1,x)| = 1.$$

Следствие 4) вытекает из следствия 3), так как

$$\|\mathcal{F}_{h,\mu}(f) - f\|_{2,\mu} \le \Big| \|\mathcal{F}_{h,\mu}(f)\| - \|f\| \Big| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Используя оператор усреднения (2.2.2) и разложение функции $f \in L_{2,\mu}$ в ряд Фурье (2.1.9), запишем аналоги конечных разностей первого и высших порядков для функции $f \in L_{2,\mu}$. Учитывая формулу (2.2.1), перепишем оператор усреднения (2.2.2) в следующем виде

$$\mathcal{F}_{h,\mu}(f,x) = \int_a^b \mu(t) f(t) T_\mu(x,t,1-h) dt =$$

$$= \int_a^b \mu(t) f(t) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) P_k(t) (1-h)^k \right\} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \int_a^b \mu(t) f(t) P_k(t) dt \right\} P_k(x) (1-h)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) P_k(x),$$

а потому имеем

$$\Delta^1_{h,\mu}(f,x) := \mathcal{F}_{h,\mu}(f,x) - f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) P_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) P_k(x) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-(1-h)^k\Big)c_k(f)P_k(x),$$

$$\Delta^2_{h,\mu}(f,x)=\Delta^1_{h,\mu}\big(\Delta^1_{h,\mu}(f,x)\big)=$$

$$=\Delta^1_{h,\mu}\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-(1-h)^k\Big)c_k(f)P_k(x),x\right)=$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-(1-h)^k\Big)c_k(f)\Delta^1_{h,\mu}P_k(x)=$$

$$=(-1)^2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-(1-h)^k\Big)^2c_k(f)P_k(x).$$

Далее методом математической индукции находим

$$\Delta^m_{h,\mu}(f,x):=\Delta^1_{h,\mu}\left(\Delta^{k-1}_{h,\mu}(f,\cdot\,),x\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^m\Big(1-(1-h)^k\Big)^m c_k(f)P_k(x). \tag{2.2.3}$$

Из (2.2.3) применением равенства Парсеваля в силу ортонормированности системы полиномов $\Big\{P_k(x)\Big\}_{k=0}^{\infty}$ будем иметь

$$\|\Delta^m_{h,\mu}(f)\|^2_{2,\mu}=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-(1-h)^k\Big)^{2m}c_k^2(f). \tag{2.2.4}$$

С помощью формулы (2.2.4) определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка равенством

$$\Omega_{m,\mu}(f,t)_2:=\sup\Big\{\|\Delta^m_{h,\mu}(f)\|_{2,\mu}:0<h\le 1\Big\}=$$

$$=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\Big(1-(1-t)^k\Big)^{2m}c_k^2(f)\right\}^{1/2},0<t<1. \tag{2.2.5}$$

Пусть $\mathcal{D}^0_\mu f:=f$ и $\mathcal{D}^r_\mu f:=\mathcal{D}^1_\mu(\mathcal{D}^{r-1}_\mu f), r\in\mathbb{N}$. Через $L^{(r)}_2(\mathcal{D})_\mu, r=2,3,...,$ обозначим множество функций $f\in L_{2,\mu}$, которые имеют абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$ -го порядка и для которых $\mathcal{D}^r_\mu f\in L_{2,\mu}$. Для характеристики гладкости (2.2.5) в работе С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [4] установлено следующее неравенство типа Джексона - Стечкина

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \left(1-(1-t)^n\right)^{-m} \cdot \lambda_n^{-r}(\mu)\Omega_m\left(\mathcal{D}_\mu^r(f), t\right)_2, \tag{2.2.6}$$

где $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)}(\mathcal{D}_\mu) := L_2(\mathcal{D}_\mu)$, $f \in (0,1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, которое является точным в том смысле, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)$, для которой имеет место знак равенства в (2.2.6), то есть имеет место экстремальное равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu) \cdot E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}_\mu^r(f), t)_2} = \frac{1}{\left(1-(1-t)^n\right)^m}, \quad 0 < t < 1. \tag{2.2.7}$$

Всюду далее в экстремальных равенствах при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ предполагается, что $f \neq const$.

Если в полученном равенстве полагать $t = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ и вычислить супремум по всем $n \in \mathbb{N}$, то приходим к равенству

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu) \cdot E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_m(\mathcal{D}_\mu^r(f), 1/n)_2} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^m} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^m,$$

$e \approx 2,71828$ - число Эйлера.

Приводим обобщение экстремального равенства (2.2.7).

Теорема 2.2.1. *При любом $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ имеет место экстремальное равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\lambda_n^{r-s}(\mu) \cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}_\mu^r(f), t)_{L_{2,\mu}}} = \frac{1}{\left(1-(1-t)^n\right)^m}. \tag{2.2.8}$$

Доказательство. В [4] доказано, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}, r \in \mathbb{N}$, то для её коэффициентов Фурье $c_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$, справедлива формула

$$c_k(f) = (-1)^r \cdot \lambda_k^{-r}(\mu) c_k(\mathcal{D}_\mu^r f). \tag{2.2.9}$$

Равенство (2.2.9) представляет возможность для любой функции

$f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)$ записать разложение функции $\mathcal{D}_\mu^s(f)$ $(s = 0, 1, .., r)$ в ряд Фурье по системе полиномов $\{P_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$, ортонормированной на интервале (a, b) с весом $\mu(x)$:

$$\mathcal{D}_\mu^s f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mathcal{D}_\mu^s(f)) P_x(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^s \lambda_k^s(\mu) c_k(f) P_k(x), \tag{2.2.10}$$

где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\mu}(a, b)$. Из равенств 2.2.10 после простых вычислений получаем

$$E_{n-1}^2(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}} = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s}(\mu) c_k^2(f). \tag{2.2.11}$$

Из формул

$$\Omega_{m,\mu}(f, t)_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} c_k^2(f) \right\}, \quad 0 < t < 1$$

и равенств (2.2.10) при $s = r$ получаем

$$\Omega_{m,\mu}^2(\mathcal{D}_\mu^r(f), t)_{2,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} \lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f), \quad 0 < t < 1. \tag{2.2.12}$$

Используя соотношения (2.2.12), формулу (2.2.11) и учитывая, что последовательность $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=0}^{\infty}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ при любом $s \in [0, r]$ получим

$$\Omega_{m,\mu}^2(\mathcal{D}_\mu^r(f), t)_{L_{2,\mu}} \geq \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - (1-t)^k\right)^{2m} \lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left(1-(1-t)^k\right)^{2m} \cdot \lambda_k^{2(r-s)}(\mu) \cdot \lambda_k^{2s}(\mu) c_k^2(f) \geq$$

$$\geq \left(1-(1-t)^n\right)^{2m} \lambda_n^{2(r-s)} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s}(\mu) c_k^2(f) =$$

$$= \left(1-(1-t)^n\right)^{2m} \lambda_n^{2(r-s)} \cdot E_{n-1}^2(\mathcal{D}_\mu^s f)_{L_{2,\mu}},$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\lambda_n^{r-s}(\mu) \cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s f)_{L_{2,\mu}}}{\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}_\mu^r(f), t)_{L_{2,\mu}}} \leq \frac{1}{\left(1-(1-t)^n\right)^m}. \tag{2.2.13}$$

Для получения оценки сверху вновь будем рассматривать функцию $f_0(x) = P_n(x) \in L_{2,\mu}^{(r)}$, введенную нами при доказательстве теоремы 2.2.1 и для которой в силу равенств (2.2.11) и (2.2.12) будем иметь

$$E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^s(\mu) \cdot c_n(f_0) = \lambda_n^s(\mu),$$

$$\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}_\mu^r(f_0), t)_{L_{2,\mu}} = \left(1-(1-t)^n\right)^m \cdot \lambda_n^r(\mu).$$

Пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\lambda_n^{r-s}(\mu) \cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}_\mu^r(f), t)_{L_{2,\mu}}} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_n^{r-s}(\mu) \cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f_0))_{L_{2,\mu}}}{\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}_\mu^r(f_0))_{L_{2,\mu}}} =$$

$$= \frac{\lambda_n^{r-s}(\mu) \cdot \lambda_n^s(\mu)}{\lambda_n^s(\mu) \left(1-(1-t)^n\right)^m} = \frac{1}{\left(1-(1-t)^n\right)^m}. \tag{2.2.14}$$

Требуемое равенство (2.2.8) получаем из сопоставления оценки сверху (2.2.13) и оценки снизу (2.2.14), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1. Равенство (2.2.11), полученное для всех $s = 0, 1, 2, ..., r$, обеспечивает возможность доказать следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+, \quad r \geq s$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\mu}} \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}. \tag{2.2.15}$$

Доказательство. Из равенства (2.2.11) при $s = r$ получаем

$$E^2_{n-1}(\mathcal{D}^r_\mu(f))_{2,\mu} = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f). \tag{2.2.16}$$

Пользуясь равенством (2.2.11) с учётом (2.2.16) и того факта, что последовательность $\{\lambda_k(\mu)\}_{k=0}^{+\infty}$ является монотонно возрастающей, получаем

$$E^2_{n-1}(\mathcal{D}^s_\mu(f))_{L_{2,\mu}} = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s}(\mu) c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-2(r-s)}(\mu) \cdot \lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n^{2(r-s)}} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f) = \frac{1}{\lambda_n^{2(r-s)}(\mu)} \cdot E_{n-1}(\mathcal{D}^r_\mu(f))_{L_{2,\mu}}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.2.15)

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\mu}} \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}} \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}. \tag{2.2.17}$$

Введём в рассмотрение функцию $f_0(x) = P_n(x) \in L_{2,\mu}$, для которой в силу равенств (2.2.11) и (2.2.16) получаем

$$E_{n-1}(\mathcal{D}^s_\mu(f_0))_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^s(\mu), \quad E_{n-1}(\mathcal{D}^r_\mu(f_0))_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^r(\mu).$$

Пользуясь последними равенствами, получаем оценку снизу

$$\sup_{f \in L^{(r)}_{2,\mu}} \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}} \geq \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f_0)\right)_{L_{2,\mu}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}}} =$$

$$= \frac{\lambda_n^s(\mu)}{\lambda_n^r(\mu)} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}. \qquad (2.2.18)$$

Теперь соотношение (2.2.15) сразу вытекает из неравенств (2.2.17) и (2.2.18). Теорема 2.2.2. доказана. Из теоремы 2.2.2 вытекает следующее

Следствие 2.2.1. *Пусть $\mu_0(x) = e^{-x^2}$, $(a,b) = (-\infty,+\infty)$ и система ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ являются ортогональными полиномами Чебышева - Эрмита $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, где*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Так как при этом $\lambda_n(\mu_0) = 2n$, то из (2.2.18) следует равенство

$$\sup_{f\in L_{2,\mu_0}^{(r)}} \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}_{\mu_0}^s(f)\right)_{L_{2,\mu_0}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}_{\mu_0}^r(f)\right)_{L_{2,\mu_0}}} = \frac{1}{(2n)^{r-s}}, \quad r\geq s, \quad r,s\in\mathbb{Z}_+.$$

Следствие 2.2.2. *Пусть $\mu_1(x) = x^\alpha e^{-x}$, $\alpha > -1$, $(a,b) := (0,+\infty)$ и $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$- система ортогональных многочленов Чебышева - Лагерра*

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right),$$

и так как в этом случае $\lambda_n(\mu_1) = n$, то из (2.2.18) имеем:

$$\sup_{f\in L_{2,\mu_1}^{(r)}} \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}_{\mu}^s(f)\right)_{L_{2,\mu_1}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}_{\mu}^r(f)\right)_{L_{2,\mu_1}}} = \frac{1}{n^{r-s}}, \quad r\geq s, \quad r,s\in\mathbb{Z}_+.$$

Следствие 2.2.3. *Пусть $\mu_2(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, где $\alpha,\beta > -1$, $(a,b) = (-1,1)$ и $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - система ортогональных многочленов Чебышева - Якоби*

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right).$$

В этом случае $\lambda_n(\mu_2) := n(n+\alpha+\beta+1)$ *и из* (2.2.18) *получаем*

$$\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu_2}} \frac{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_{\mu_2}(f)\right)_{L_{2,\mu_2}}}{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_{\mu_2}(f)\right)_{L_{2,\mu_2}}} = \frac{1}{[n(n+\alpha+\beta+1)]^{r-s}}, \quad r\geq s, \quad r,s\in\mathbb{Z}.$$

Пусть теперь $W^{(r)}L_{2,\mu}$ - множество функций $f \in L^{(r)}_{2,\mu}$, у которых $\|\mathcal{D}^r_\mu(f)\|_{L_{2,\mu}} \leq 1$. Имеет место следующая

Теорема 2.2.3. *При любом* $n \in \mathbb{N}, \quad r,s \in \mathbb{Z}_+, \quad r \geq s$ *справедливо равенство*

$$\sup\left\{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}} : f\in W^{(r)}L_{2,\mu}\right\} = \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)} \tag{2.2.19}$$

Существует функция $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}$, *которая реализует знак равенства в соотношении* (2.2.19).

Доказательство. Прежде всего заметим, что если функция $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}$, то

$$E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}} \leq \|\mathcal{D}^r_\mu(f)\|_{L_{2,\mu}} \leq 1,$$

а потому из (2.2.15) для любого $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}$ получаем

$$E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}} \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}\cdot E_{n-1}\left(\mathcal{D}^r_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}} \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)},$$

откуда для величины, стоящей в левой части (2.2.19), имеем

$$\sup\left\{E_{n-1}\left(\mathcal{D}^s_\mu(f)\right)_{L_{2,\mu}} : f\in W^{(r)}L_{2,\mu}\right\} \leq \frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}. \tag{2.2.20}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, воспользуемся функцией $g_0(x) = \frac{1}{\lambda_n^r(\mu)}P_n(x)$, для которой

$$\mathcal{D}^s_\mu(g_0(x)) = \frac{1}{\lambda_n^r(\mu)}\cdot(-1)^s\lambda_n^s(\mu)P_n(x) = \frac{(-1)^s}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}P_n(x),$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{D}_\mu^s(g_0)\right)_{L_{2,\mu}}=\frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)} \tag{2.2.21}$$

$$\mathcal{D}_\mu^r(g_0(x))=(-1)^r\lambda_n^r(\mu)\cdot\frac{1}{\lambda_n^r(\mu)}P_n(x)=(-1)^rP_n(x),$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{D}_\mu^r(g_0)\right)_{L_{2,\mu}}=1,\quad \|\mathcal{D}_\mu^r(g_0)\|_{L_{2,\mu}}=1.$$

Последнее равенство означает, что $g_0(x)\in W^{(r)}L_{2,\mu}$. Пользуясь равенством (2.2.21), получаем оценку снизу указанной характеристики

$$\sup\left\{E_{n-1}\left(\mathcal{D}_\mu^s(f)\right)_{L_{2,\mu}}:f\in W^{(r)}L_{2,\mu}\right\}\geq$$

$$\geq E_{n-1}\left(\mathcal{D}_\mu^r(g_0)\right)_{L_{2,\mu}}=\frac{1}{\lambda_n^{r-s}(\mu)}. \tag{2.2.22}$$

Равенство (2.2.19) является следствием оценок сверху (2.2.20) и снизу (2.2.22). Теорема 2.2.3 доказана.

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ \ r\in\mathbb{Z}_+,\ \ 0<p\leq+\infty,\ \ \eta\in(0,1)$, $q(t)$ *- весовая на* $(0,\eta)$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)}\frac{\lambda_n^{(r)}(\mu)E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^\eta\Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_2\cdot q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\int\limits_0^\eta(1-(1-t)^n)^{mp}q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.2.23}$$

Доказательство. Отметим, что теорема 2.2.4 для значений $0<p\leq2$ доказана С.Б.Вакарчуком и А.В.Швачко [4]. Поэтому здесь приводим доказательство теоремы для случая $2\leq p\leq\infty$. Следует также отметить, что

для параметра p, удовлетворяющего неравенству $0 < p \leq \infty$, норма $\|\Omega_{m,\mu}\|_p$ выражения, стоящего в левой части знаменателя соотношения (2.2.23), определена равенством

$$\|\Omega_{m,\mu}\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\eta \Omega^p_{m,\mu}(\mathcal{D}^r_\mu(f),t)_2 \cdot q(t)dt\right)^{1/p} & , \textit{ если } \ 0 < p < \infty, \\ \underset{0<t\leq h}{esssup}\, \Omega_m(f^{(\alpha)},t)_2 & , \textit{ если } p = \infty. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом функционал $\|\Omega_{m,\mu}\|_p$ только при $1 \leq p \leq \infty$ является нормой. Переходя к доказательству равенства (2.2.23) заметим, что неравенство (2.2.7) можно записать в следующем нужном нам в дальнейшем виде

$$\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}^r_\mu(f),t)_2 \geq \lambda^r_n(\mu)\left(1-(1-t)^n\right)^m E_{n-1}(f)_{2,\mu}. \tag{2.2.24}$$

Возведя обе части неравенства (2.2.24) в степень $2(2 \leq p \leq +\infty)$, затем умножая полученное неравенство на весовую функцию $q(t)$ и интегрируя обе стороны по переменному t в пределах от 0 до η, получаем

$$\int\limits_0^\eta \Omega^p_{m,\mu}(\mathcal{D}^r_\mu(f),t)_2 \cdot q(t)dt \geq$$

$$\geq \lambda^{rp}_n(\mu)\int\limits_0^\eta \left(1-(1-t)^n\right)^{mp} q(t)dt \cdot E^p_{n-1}(f)_{2,\mu},$$

или что то же

$$\frac{\lambda^r_n(\mu)E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^\eta \Omega^p_{m,\mu}(\mathcal{D}^r_\mu(f),t)_2 \cdot q(t)dt\right)^{1/p}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\left(\int\limits_0^\eta \left(1-(1-t)^n\right)^{mp} q(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Так как полученное неравенство имеет место для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)$, то, переходя к грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)$, будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu)\cdot E_n(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_2\cdot q(t)dt\right)^{1/p}} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(\int\limits_0^\eta (1-(1-t)^n)^{mp}\, q(t)dt\right)^{1/p}}, \quad (0<\eta<1, \quad 0<p\le\infty). \qquad (2.2.25)$$

Таким образом, оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.2.23), получена. Для получении аналогичной оценки снизу той же экстремальной характеристики полагаем $f_0(x) := P_n(x)$. Ясно, что $f_0 \in L_2^r(\mathcal{D}_\mu)$. В силу равенства (2.1.10) имеем $E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1$, и из (2.2.5) сразу получаем

$$\Omega_{m,\mu}(\mathcal{D}_\mu^r(f_0),t)_2 = (1-(1-t)^n)^m\, \lambda_n^r(\mu), 0<t\le 1,$$

а потому запишем:

$$\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f_0),t)_2\cdot q(t)dt = \lambda_n^r(\mu)\int\limits_0^\eta (1-(1-t)^n)^{mp}\, q(t)dt.$$

Отсюда сразу следует оценка снизу указанной экстремальной характеристики

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu)\cdot E_n(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_2\cdot q(t)dt\right)^{1/p}} \ge$$

$$\ge \frac{\lambda_n^r(\mu)\cdot E_n(f_0)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f_0),t)_2\cdot q(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^{\eta} (1-(1-t)^n)^{mp}\, q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{2.2.26}$$

Сравнивая полученные оценку сверху (2.2.17) и оценку снизу (2.2.18), получаем требуемое равенство (2.2.15), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.4. Из доказанной теоремы 2.2.4 вытекает ряд следствий в виде следующих утверждений

Следствие 2.2.4. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.4. Положим*

$$q(t) := q_0(t) = n(1-t)^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $\eta \in (0, 1]$ *и любого* $0 < p \leq +\infty$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu)\cdot E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(n\int\limits_0^{\eta} \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_2\cdot(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-\eta)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{2.2.27}$$

Из равенства (2.2.27), в частности, при $\eta = 1/n, \quad n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu)\cdot E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_2\cdot(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} =$$

$$= (mp+1)^{1/p}\cdot(1-e^{-1})^{-(m+\frac{1}{p})}. \tag{2.2.28}$$

В свою очередь из (2.2.28) при $p = 1/m, \quad m \in \mathbb{N}$ следует, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D}_\mu)} \frac{\lambda_n^r(\mu)\cdot E_{n}(f)_{2,\mu}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_{m,\mu}^{1/m}(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_2\cdot(1-t)^{n-1}dt\right)^{m}} = 2^m(1-e^{-1})^{-2m}$$

и при $r=0$ из последнего равенства следует, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\mu}}\frac{E_n(f)_{2,\mu}}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_{m,\mu}^{1/m}(f,t)_2\cdot(1-t)^{n-1}dt\right)^m}=2^m(1-e^{-1})^{-2m}. \qquad (2.2.29)$$

Последний результат полезно сравнить с результатом С.Б.Вакарчук и А.В.Швачко [4] аналогичного типа следующего вида

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_{2,\mu}\\ f\neq const}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_{m,\mu}^{1/m}(f,t)_2dt\right)^m}=e^m. \qquad (2.2.30)$$

Так как $(1-e^{-1})^{-2m}\sim 1+\frac{2m}{e}$, то для больших значений $n\in\mathbb{N}$ результат (2.2.30) без весовой функции несколько лучше, чем (2.2.29).

В качестве второго следствия из теоремы 2.2.4 приводим следующее утверждение, являющееся одновременно её обобщением.

Теорема 2.2.5. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\quad r,s\in\mathbb{Z}_+,\quad r\geq s,\quad \eta\in(0,1)\quad q(t)$ *- весовая на* $(0,\eta)$ *функция,* $0<p\leq\infty$. *Тогда справедливо следующее экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{\lambda_n^{r-s}(\mu)\cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^{\eta}\Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_{L_{2,\mu}}\cdot q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\int\limits_0^{\eta}[1-(1-t)^n]^{mp}\,q(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (2.2.31)$$

Доказательство. Положим $\mathcal{D}_\mu^s(f)=g$. Тогда $\mathcal{D}_\mu^r(f)=\mathcal{D}_\mu^{r-s}(\mathcal{D}_\mu^s(f))=\mathcal{D}_\mu^{r-s}(g)$. Теперь ясно, что если $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, то функция $g\in L_{2,\mu}^{(r-s)}$, и мы из левой части равенства (2.2.31) с учетом утверждения теоремы 2.2.4 получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{\lambda_n^{r-s}(\mu)\cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_{L_{2,\mu}}\cdot q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\sup_{g\in L_{2,\mu}^{(r-s)}}\frac{\lambda_n^{r-s}(\mu)\cdot E_{n-1}(g)_{L_{2,\mu}}}{\left(\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^{r-s}(g),t)_{L_{2,\mu}}\cdot q(t)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{1}{\left(\int\limits_0^\eta \left[1-(1-t)^n\right]^{mp}q(t)dt\right)^{1/p}},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.4.

Отметим, что из утверждения теоремы 2.2.2 при $q(t)=\frac{d}{dt}[1-(1-t)^n]=n(1-t)^{n-1}, 0\le t\le\eta$ следует равенство

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{\lambda_n^{r-s}(\mu)\cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(n\int\limits_0^\eta \Omega_{m,\mu}^p(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_{L_{2,\mu}}\cdot (1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{(mp+1)^{\frac{1}{p}}}{\left[1-(1-\eta)^n\right]^{m+\frac{1}{p}}}.$$

Отсюда, в частности, при $\eta=1/n$ и $p=1/m$ будем иметь

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{\lambda_n^{r-s}(\mu)\cdot E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_{m,\mu}^{1/m}(\mathcal{D}_\mu^r(f),t)_{L_{2,\mu}}\cdot (1-t)^{n-1}dt\right)^{m}}=\frac{2^m}{\left[1-(1-\frac{1}{n})^n\right]^{2m}}$$

$$=\frac{2^m}{\left[1-(1-\frac{1}{n})^n\right]^{2m}}\sim\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

§2.3. Неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}_\mu^s, \quad s = 0, 1, 2, ..., r$ в пространстве $L_{2,\mu}$

В предыдущем параграфе мы отметили, что для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}$ все промежуточные производные $\mathcal{D}_\mu^s(f), \quad s = 1, 2, ..., r-1, \quad r \in \mathbb{N}$, наряду с самой функцией f и её r-ной производной $\mathcal{D}_\mu^r(f)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(a, b)$. Это обстоятельство позволяет доказать неравенство типа Колмогорова для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$. Имеет место следующая

Теорема 2.3.1. *Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ при любых чисел $r, s \in \mathbb{Z}_+, \quad r \geq s$ имеет место неравенство типа Колмогорова*

$$\|\mathcal{D}_\mu^s(f)\|_{L_{2,\mu}} \leq \|f\|_{L_{2,\mu}}^{1-s/r} \cdot \|\mathcal{D}_\mu^r(f)\|_{L_{2,\mu}}^{s/r}, \tag{2.3.1}$$

где

$$\mathcal{D}_\mu := \sigma(x)\frac{d^2}{dx^2} + \tau(x)\frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D}_\mu^0(f) = f, \quad \mathcal{D}_\mu^1(f) = \mathcal{D}_\mu(f),$$

$$\mathcal{D}_\mu^r(f) := \mathcal{D}_\mu^1\left(\mathcal{D}_\mu^{r-1}(f)\right), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Неравенство 2.3.1 *точное в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. Воспользуемся равенством (2.2.11) из предыдущего параграфа, верным для всех $s = 0, 1, 2, ..., r$, и произвольной функцией $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$:

$$\|\mathcal{D}_\mu^s(f)\|_{L_{2,\mu}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s}(\mu) c_k^2(f).$$

Применяя к правой части этого равенства неравенство Гельдера для рядов будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k||b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q\right)^{1/q}$$

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad 1\le p\le\infty, \quad 1\le q\le\infty\right),$$

полагая $p = r/(r-s), \quad q = r/s, \quad r \ge s$, будем иметь

$$\left\|\mathcal{D}_{\mu}^{s}(f)\right\|_{L_{2,\mu}}^{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2s}(\mu)c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k^2(f)\right)^{1-s/r} \cdot \left(\lambda_k^{2r}(\mu)c_k^2(f)\right)^{s/r} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2(f)\right)^{1-s/r} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{2r}(\mu)c_k^2(f)\right)^{s/r} =$$

$$= \|f\|_{L_{2,\mu}}^{2(1-s/r)} \cdot \left\|\mathcal{D}_{\mu}^{r}(f)\right\|_{L_{2,\mu}}^{s/r},$$

откуда и следует неравенство (2.3.1). Докажем теперь точность неравенства (2.3.1). С этой целью снова введём в рассмотрение экстремальную функцию $f_0(x) = p_n(x)$, где $p_n(x) \in \mathscr{P}_n$ - произвольный ортонормальный многочлен. Так как для этой функции

$$\mathcal{D}_{\mu}^{s}(f_0) = \mathcal{D}_{\mu}^{s}(p_n(x)) = \left(-\lambda_n(\mu)\right)^s p_n(x), \quad s=0,1,...,r-1; \quad r\in\mathbb{N}$$

$$\mathcal{D}_{\mu}^{r}(f_0) = \mathcal{D}_{\mu}^{r}(p_n(x)) = \left(-\lambda_n(\mu)\right)^r p_n(x)$$

$$\|\mathcal{D}_{\mu}^{s}(f_0)\|_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^s(\mu), \quad \|\mathcal{D}_{\mu}^{r}(f_0)\|_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^r(\mu), \quad \|f_0\|_{L_{2,\mu}} = 1,$$

то мы имеем:

$$\|\mathcal{D}_{\mu}^{s}(f_0)\|_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^s(\mu) = 1\cdot(\lambda_n^r(\mu))^{s/r} = (1)^{1-s/r}\cdot(\lambda_n^r(\mu))^{s/r} =$$

$$= \|f_0\|_{L_{2,\mu}}^{1-s/r} \cdot \left\|\mathcal{D}_\mu^r(f_0)\right\|_{L_{2,\mu}}^{s/r},$$

откуда и следует точность неравенства (2.3.1). Теорема 2.3.1 доказана. Из теоремы 2.3.1 в качестве следствие получаем

Теорема 2.3.2. *Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, при любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+,\ \ r \geq s$ имеет место неравенство типа Колмогорова*

$$E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}} \leq \left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r} \cdot \left(E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^r(f))\right)^{s/r} \tag{2.3.2}$$

Неравенство (2.3.2) *точное в том смысле, что для функции $f_0(x) = p_n(x) \in L_{2,\mu}^{(r)}$, рассмотренной нами при доказательстве теоремы 2.3.1 обращается в равенство.*

Доказательство. В самом деле, имеем

$$E_{n-1}^2(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}} = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2s}(\mu) c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left(c_k^2(f)\right)^{1-s/r} \cdot \left(\lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f)\right)^{s/r} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1-s/r} \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{2r}(\mu) c_k^2(f)\right)^{s/r} =$$

$$= \left(E_{n-1}^2(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r} \cdot \left(E_{n-1}^2(\mathcal{D}_\mu^r(f))_{L_{2,\mu}}\right)^{s/r},$$

откуда сразу вытекает утверждение теоремы 2.3.2.

В свою очередь в качестве следствия получаем весьма важное утверждение. Для её формулировки вводим в рассмотрение следующий класс $W^{(r)}L_{2,\mu}$ функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которых $\|\mathcal{D}_\mu^r(f)\|_{L_{2,\mu}} \leq 1$.

Теорема 2.3.3. *При любых $n \in \mathbb{N},\ \ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ \ r \geq s$ имеет место* *экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\mu}} \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r}} = 1. \tag{2.3.3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой функции $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^r(f))_{L_{2,\mu}} \le \|\mathcal{D}_\mu^r(f)\|_{L_{2,\mu}} \le 1,$$

пользуясь которой из неравенства (2.3.2) имеем:

$$E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}} \le \left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r} \cdot \left(E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^r(f))_{L_{2,\mu}}\right)^{s/r} \le$$

$$\le \left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r},$$

откуда

$$\frac{E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r}} \le 1,$$

и так как последнее неравенство имеет место для любой функции $f \in W^{(r)}L_{2,\mu}$, то получаем

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_{2,\mu}} \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r}} \le 1. \tag{2.3.4}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$g_0(x) = \frac{1}{\lambda_n^r(\mu)} P_n(x) \in L_{2,\mu}^{(r)},$$

для которой имеем:

$$E_{n-1}(g_0)_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^{-r}(\mu),$$

$$\mathcal{D}_\mu^s(g_0) = (-1)^s \lambda_n^{-r+s}(\mu) P_n(x), \quad \mathcal{D}_\mu^r(g_0) = (-1)^r P_n(x),$$

$$E_{n-1}\left(\mathcal{D}_\mu^s(g_0)\right)_{L_{2,\mu}} = \lambda_n^{-r+s}(\mu), \quad E_{n-1}\left(\mathcal{D}_\mu^r(g_0)\right) = 1.$$

Последнее равенство означает, что функция $g_0(x) \in W^{(r)}L_{2,\mu}$. Пользуясь полученными равенствами запишем оценку снизу

$$\sup_{f \in W^{(r)}L_{2,\mu}} \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(f))_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(f)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r}} \geq$$

$$\geq \frac{E_{n-1}(\mathcal{D}_\mu^s(g_0))_{L_{2,\mu}}}{\left(E_{n-1}(g_0)_{L_{2,\mu}}\right)^{1-s/r}} = \frac{\lambda_n^{-r+s}(\mu)}{\left(\lambda_n^{-r}(\mu)\right)^{1-s/r}} = 1. \qquad (2.3.5)$$

Требуемое равенство (2.3.2) получаем из сопоставления неравенств (2.3.4) и (2.3.5), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.3.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные верхние грани наилучшего среднеквадратического приближения функций на всей оси суммами Фурье - Эрмита заданных классов функций;
- найдена точная верхняя грань наилучшего одновременного приближения функций и её последовательные производные суммами Фурье - Эрмита на классе функций $W^{(r)}L_{2,\rho}$;
- вычислены точные значения n-поперечников классов функций $W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m; h)$ и $W^{r,p}_{2,\rho}(\Omega_m; \varphi, h)$;
- найдены точные верхние грани наилучшего одновременного приближения функций $f \in L_{2,\mu}$ суммами Фурье разложения функций по общим ортогональным многочленам на классах функций, задаваемых обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно применять в аналогичных задачах для функций комплексного переменного аналитической в круге, а также для функций многих переменных.

Список литературы

1. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональным многочленам в пространстве $L_2\left((a,b),p(x)\right)$ // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2009, т.49, №6, С.966 - 980,

2. Абилов В.А. О коэффициентов ряда Фурье-Эрмита непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. 1969, №12, С.3-8.

3. Вакарчук С.Б. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2014, т.95, в.5, С.666-684.

4. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. матем. журнал. 2013, т.65, №12, С.1604 - 1621.

5. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012, т.38, №2, С.154-165.

6. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр.матем.вiсник. 2014, т.11. №3, С.417-441.

7. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. - М.: Наука, 1965.

8. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. - М.: Наука, 1978. -320 с.

9. Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем., мех. 1998, №3, С.38-48.

10. Потапов М.К. О применении несимметричных операторов обобщённого сдвига в теории приближений // Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Материалы V Казанской международной летней школы-конференции (Казань, 27 инюня - 4 июля 2001 г.). Тр. матем. центра им. Н.И.Лобачесвского. 2001, т.78, С.185-189.

11. Рафальсон С.З. О приближении функций в среднем суммами Фурье - Эрмита // Изв. вузов. Математика. 1968, №7, С.78 - 84.

12. Сеге Г. Ортогональные многочлены. - М.: Физматгиз, 1962. 500 с.

13. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.:Наука, 1979. 416 с.

14. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976. 304 с.

15. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015, т.21, №4, С.292-308.

16. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019, т.25, №2, С.258-272.

17. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985, 287p.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и Российской Федерации:

18. Тухлиев К., Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита в L_2 // ДАН РТ. 2016, т.59, №7-8, С.282-289.

19. Маликов А.М. Среднеквадратические полиноминальные приближения функций на всей оси и значения поперечников // ДАН РТ. 2016, т.59, №11-12, С.457-462.

20. Маликов А.М. О наилучшем приближении в среднем алгебраическими полиномами с весом // Ученые записки ХГУ им.Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2018, №4(47), С.3-8.

21. Маликов А.М. Приближение функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 - 25 августа 2016 г., С.161-165.

В других изданиях:

22. Тухлиев К., Маликов А.М. О приближении функций в среднем на всей оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита // В материалах международной научно-практической конференции "Тенденции и перспективы развития науки XXI век". Екатеринбург. 18 октября 2015 г., С.18-20.

23. Тухлиев К., Маликов А.М. Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева - Эрмита // Материалы республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы естественных наук", Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова. Душанбе. 18 ноября 2017 г., С.23-25.

24. Маликов А.М. Среднеквадратическое приближение функций алгебраическими полиномами с весом и значение поперечников некоторых классов функций // Материалы республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения общества" посвященной 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. ХГУ им. Б.Гафурова Худжанд. 26-27 октября 2018 г.

25. Маликов А.М. Среднеквадратическое приближение функций алгебраическими полиномами с весом и значение поперечников некоторых функциональных классов // Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы и теории чисел», посвященной 90-летию профессора Бабаева Г.Б., ТНУ. Душанбе. 14-15 декабря 2018г., С.60-62.

26. Маликов А.М. Приближение функций в средном на вещественной оси суммами Фурье - Эрмита // Материалы XIV международной научно - технической конференции, ВоГУ. Вологда. 10 декабря 2019 г., С.265-269.

27. Маликов А.М. Наилучшее приближение в средном алгебраическими полиномами с весом // Материалы республиканской научной конференции «Математической анализ и его приложения», посвященной 80-летию профессора Имомназарова Б., ТНУ. Душанбе. 10-11 декабря 2019 г., С.146-151.