

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Мухсиновой Сабоат Маруфбоевны «Интегральные представления и граничные задачи для некоторых эллиптических уравнений с особенностями в младших коэффициентах на плоскости», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

1. Актуальность темы. В работах А.Пуанкаре, Л.Берса, И.Н.Векуа, Л.Г.Михайлова, З.Д.Усманова, Н.Раджабова и других математиков приведены примеры из теории упругости, гидродинамики, теории бесконечно малых изгибов поверхностей положительной кривизны с точками уплощения и теории квантовой механики, которые можно свести к дифференциальным уравнениям с оператором Коши-Римана с особенностями в младших коэффициентах, рассматриваемых на конечной или бесконечной области.

Ранее полученные результаты в основном относятся к уравнениям с особой точкой или с особой линией, когда уравнение с оператором Коши-Римана рассматривается в конечной области. Следует отметить, что нахождение интегральных представлений и разрешимость краевых задач связано с некоторыми трудностями принципиального характера, когда особой линией является вся вещественная ось. Ввиду этого данная диссертационная работа посвящена актуальной теме.

2. Оценка содержания диссертации и её завершенность. Диссертационная работа выполнена в классическом стиле и состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и списка литературы, состоящего из 63 наименований и изложена на 96 страницах машинописного текста.

Первая глава состоит из четырех параграфов.

В параграфе 1.1 приводятся постановка задачи и краткий исторический обзор, также освещен основной подход исследования.

В параграфе 1.2 рассмотрено уравнение

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = f(z)$$

с коэффициентом $A(z) = \frac{a(z)}{z-\bar{z}}$, $a(z) \in C(\overline{S^+})$, где $S^+ = \{z: \text{Im}z > 0\}$ – верхняя полуплоскость, $L = \{z: \text{Im}z = 0\}$ – граница области. Найдены интегральные представления и формулы обратимости.

В параграфе 1.3 поставлены и решены краевые задачи типов Дирихле и Гильберта.

В параграфе 1.4 в области $\overline{S_\varepsilon^+} = \overline{S^+} \cap \{z: \bigcap_{j=1}^n |z - z_j| > \varepsilon\}$ рассмотрено уравнение

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U(z) = F(z), \quad A(z) = \sum_{j=1}^n \frac{(z - z_j)a_j(z)}{|z - z_j|^2}, \quad \text{Im}z_j > 0,$$

с некоторыми $a_j(z) \in C(\overline{S^+})$ на полуплоскости с внутренними особыми точками в $z_j, j = \overline{1, n}$, расположенными в конечной части области. Найдено интегральное представление для обобщенной системы Коши-Римана.

Вторая глава состоит из шести параграфов.

В параграфе 2.1 рассматривается уравнение второго порядка с особой линией

$$L^2U \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{p(z)a(z)}{|z - \bar{z}|} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{p^2(z)b(z)}{|z - \bar{z}|^2} U = f(z),$$

где $a(z), b(z) \in C^1(S^+)$, а множитель $p(z)$ – ограниченная функция. Найдены интегральные представления и формулы обратимости, когда корни характеристического уравнения $\lambda^2(z) + a(z)\lambda(z) + b(z) = 0$ различные и $\lambda_1(z) = p^{-1}(z)|z - \bar{z}|\varphi(z)$, $\lambda_2(z) = -a(z) - p^{-1}(z)|z - \bar{z}|\varphi(z)$, в которых $\varphi(z)$ – некоторая аналитическая функция переменной z .

В параграфе 2.2 поставлена и решена краевая задача типа Дирихле.

В параграфе 2.3 рассмотрено однородное операторное уравнение $L^2U = 0$. Найдено интегральное представление решения из класса $D^{2,p}(S^+) \cap C(\overline{S^+})$.

В параграфе 2.4 рассматривается однородное уравнение Бицадзе с одной внутренней особой точкой в младших коэффициентах на верхней полуплоскости.

В параграфе 2.5 рассматривается случай, когда младшие коэффициенты имеют внутренние особые точки в верхней полуплоскости.

В параграфе 2.6 рассматривается уравнение Бицадзе с внутренними особыми точками в младших коэффициентах в конечной области.

Третья глава состоит из четырех параграфов.

В параграфе 3.1 рассмотрено уравнение третьего порядка с особой линией

$$L_3 U = \frac{\partial^3 U}{\partial \bar{z}^3} + \frac{a(z)}{z - \bar{z}} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} + \frac{b(z)}{(z - \bar{z})^2} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{c(z)}{(z - \bar{z})^3} U = \frac{f(z)}{(z - \bar{z})^3}.$$

Когда корни характеристического уравнения

$$\lambda^3(z) + a(z)\lambda^2(z) + b(z)\lambda(z) + c(z) = 0$$

различны, получено интегральное представление решения для данного уравнения с особой линией $L = \{z: \text{Im}z = 0\}$.

В параграфе 3.2 рассмотрены краевые задачи типов Дирихле и Римана - Гильберта для уравнения третьего порядка с особой линией.

В параграфе 3.3 в области $S_\varepsilon^+ = S^+ \cap \{z: |z| > \varepsilon\}$ рассмотрено уравнение произвольного порядка

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^k (\partial_{\bar{z}} - A_j(z)) U = F(z), \\ A_j(z) = \frac{(z - \bar{z})a_j(z)}{|z - \bar{z}|^2}, \quad \text{Im}z \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \leq n, \end{cases}$$

коэффициенты которых имеют особенность на линии L , где $a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{S^+})$, $j = \overline{1, m}$, $U(z)$ – искомая функция, $F(z) \in L_{p,2}(S^+)$, $p > 2$.

Доказано, что любое решение данного уравнения однозначно представимо в соответствующем рекуррентном виде.

В параграфе 3.4 рассмотрено уравнение высокого порядка с оператором Коши-Римана с внутренней особой точкой вида:

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^n (\partial_{\bar{z}} - A_j(z))U = F(z); \\ A_j(z) = \frac{(z - z_1)a_j(z)}{|z - z_1|^2}, \quad \text{Im}z_1 > 0, \end{cases}$$

коэффициенты которого имеют особенность в точке $z_1 \in S^+$, где $a_j(z) \in C^{j-1}(\overline{S^+})$, $j = \overline{1, n}$, $U(z)$ – искомая, $F(z) \in L_{p,2}(S^+)$, $p > 2$. Доказано, что решение $U \in C^{n-1}(\overline{S^+} \setminus z_1)$ данного уравнения, для которого $\partial_{\bar{z}}^n U \in L_{p,2}(S^+)$, однозначно представимо в рекуррентном виде.

3. Новизна и достоверность полученных результатов. Все приведенные в диссертации теоремы, выводы, научные положения, рекомендации, а также полученные формулы обоснованы строгими математическими доказательствами с применением методов теории функционального анализа и теории обобщенных аналитических функций.

Полученные результаты являются достоверными, новыми и заключаются в следующем:

1) для обобщенной системы Коши-Римана первого порядка с особой линией на полуплоскости найдены интегральное представление решения и соответствующая формула обратимости в полуплоскости. Все исследования проведены в случае, когда особая линия является границей области. Кроме того, для обобщенной системы Коши-Римана с особой точкой с положительной мнимой частью (а также особыми точками с положительными мнимыми частями), на полуплоскости найдены интегральное представление решения и соответствующая формула обратимости. В полученном интегральном представлении четко выделена особая часть решений, которая позволяет изучить асимптотику поведения решений при приближении к особой линии или к особой точке. Изучено влияние особой линии на разрешимость краевых задач типа Дирихле и Римана–Гильберта;

2) для уравнения второго порядка с особой линией, главная часть которого является оператор Бицадзе, найдены решения, зависящие от двух произвольных аналитических функций, а также их формулы обратимости на полуплоскости. Структура интегральных представлений зависит от корней характеристического уравнения. Также исследованы линейные эллиптические системы второго порядка с особой точкой и множеством особых точек на полуплоскости и в конечной области. Исследована краевая задача типа Дирихле;

3) найдены интегральные представления, а также их формула обратимости линейного уравнения третьего порядка с особой линией, при различных значениях корней характеристического уравнения. Найдены интегральные представления, а также их формула обратимости для операторного уравнения высокого порядка с младшими особыми коэффициентами. Поставлен и исследован ряд краевых задач.

4. Теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В диссертации исследования проведены с теоретической точки зрения. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории эллиптических уравнений, коэффициенты младших членов которых имеют особые точки или линии. Они могут быть применены также в прикладных задачах, где различные процессы описываются уравнениями в частных производных с особенностями (например, в теории осесимметрического стационарного гравитационного поля, теории упругости, гидродинамике и т.д).

5. Достоинство и недостатки в содержании и оформлении диссертации, влияние отмеченных недостатков на качество исследования. Полученные интегральные представления решений и формулы обратимости для уравнения с оператором Коши-Римана первого, второго и высших порядков с особенностями в младших коэффициентах на полуплоскости и разрешимость некоторых краевых задач являются достоинствами настоящей диссертации.

Диссертация выполнена добросовестно и аккуратно, хотя можно встретить отдельные технические и орфографические ошибки, которые легко исправимы и не влияют на качество диссертационной работы. Например,

- 1) в диссертации на странице 28 (строка 21) следовало бы написать **теории** вместо **теорисии**;
- 2) в диссертации на странице 41 (строка 7) следовало бы добавить слово «где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения»;
- 3) в автореферате на странице 15 (строка 27) пропущено слово «однородного» и правильно было бы писать «... решение $U(z)$ однородного уравнения ...».

6. Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации. Основное содержание диссертации опубликовано в 11 работах, в том числе 3 в изданиях, соответствующих списку ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК при Минобрнауки России для публикации результатов кандидатских диссертаций. Результаты диссертации неоднократно докладывались на международных конференциях и семинарах.

Полученные автором результаты могут быть использованы в Таджикском национальном университете, в Таджикском техническом университете имени М. Осими, в филиале МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе, а также в других научно-образовательных учреждениях и научных коллективах, занимающихся исследованиями дифференциальных уравнений с частными производными и их приложениями.

7. Соответствие автореферата основному содержанию диссертации. Автореферат диссертации достаточно полно отражает её содержание.

8. Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным «Положением о присуждении учёных степеней». Диссертационная работа С.М.Мухсиновой представляет собой законченное научное исследование. Работа содержит новые научные результаты по теории сингулярных уравнений с оператором Коши-Римана, с особой линией и с внутренними особыми точками на полушлоскости, которые являются несомненным самостоятельным дополнением автора в теорию этих уравнений.

Работа «Интегральные представления и граничные задачи для некоторых эллиптических уравнений с особенностями в младших коэффициентах на плоскости» полностью соответствует всем требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан о присуждении ученых степеней, а её автор Мухсинова Сабоат Маруфбоевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:

кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, доцент, заместитель исполнительного директора Филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе

М.Ф. Абдукаримов

Юридический адрес: 734003, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар, 35/1, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе

Адрес официальной страницы в сети интернет: <https://msu.tj/>

Электронная почта: info@msu.tj

Тел.: (+992 37) 227-11-25

Подпись Абдукаримова М.Ф. заверяю

Начальник ОК и СР:



Х.Т.Назарова

« 20 » августа 2020г.