Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Муродов Каримджон Насимович

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
академик АН РТ, профессор
Шабозов Мирганд Шабозович;
доктор физико-математических наук,
профессор Тухлиев Камаридин

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 9

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение
Общая характеристика работы

Актуальность темы. Из курса уравнений математической физики хорошо известно, что классические многочлены Лагерра, Эрмита-Чебышева, Якоби и специальные функции – цилиндрические, сферические и гипергеометрические, обычно возникают при решении различных дифференциальных уравнений методом разделения переменных, основанным на теоремах разложения по различным ортогональным системам функций.

В последнее время наблюдается весьма интенсивное применение специальных функций в задачах численного анализа и математической статистики. Это приводит к отысканию оптимальных оценок аппроксимации функций посредством частных сумм рядов Фурье по ортогональным разложениям указанных специальных функций. Иногда удаётся найти точное неравенство типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности m-го порядка, а иногда удаётся вычислить значение n-поперечников классов функций, определяемых дифференциальными операторами второго порядка различных видов. Всё это делает актуальными исследования в этом направлении.

Цели и задачи исследования. В работе решается ряд конкретных экстремальных задач, связанных с:

- вычислением верхних граней отклонений заданных классов функций от их сумм ряда Фурье-Бесселя в пространстве L_2 (глава I);
- отысканием точных неравенств Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и обобщенными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором второго порядка (глава I);
- вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя (глава II).

Методы исследования. При решении указанных задач в качестве аппарата приближения используются обобщённые полиномы по системе ортогональных функции Бесселя. При этом в качестве инструмента исследования используются современные методы теории приближения функций и функционального анализа, а также методы решения экстремальных задач оптимизационного содержания.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 ;
- найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1],x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$;
- найдено точное неравенство Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя второго порядка;
- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям математики и прикладной математики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- ежегодных конференциях кафедры информатики и вычислительный математики Худжанского государственного университета им. академика Б. Гафурова (г.Худжанд, 2015-2018 г.);
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2018 г.);
- международной научно-практической конференции „Тенденции и переспективы развития науки XXI века” (Екатренбург, 18 октябр 2015 г.);
- международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15 - 25 августа 2016 г.);
- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы естественных наук” (Душанбе, Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, 24 ноября 2017 г.);
- международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений”, посвящённой 70-летию академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений” (Душанбе., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, 21-22 июня 2018 г.);
- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировоззрения

общества" посвященная 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан (Худжанд,ХГУ им. Б.Гафурова, 26-27 октября 2018 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 5 статьи опубликованы в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 5 статьи в трудах международных и республиканских конференций. Из совместных с М.Ш.Шабозовым и К.Тухлиевым [24, 25, 27] работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 33 наименования, занимает 75 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Содержание диссертации

Пусть

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}$$

— функция Бесселя первого рода индекса ν, а $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — занумерованные в порядке возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots$$

последовательности положительных корней уравнения $J_\nu(x) = 0$. Хорошо известно, что функция $J_\nu(x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка [1]

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0.$$

Также известно [1, с.359], что функции $J_\nu(x)$ являются системой собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+\frac{\nu^2}{x}u=\lambda xu,\quad 0<x<1,\quad |u(0)|<+\infty,\ u(1)=0, \qquad (0.0.1)$$

отвечающих собственным значениям $\left\{\lambda_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f с весом x.

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и известные факты.

Всюду далее через $L_2 := L_2([0,1]; xdx)$ — обозначим пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\|=\left(\int\limits_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Наши дальнейшие исследования базируются на свойствах ортогональности системы $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx=0,\ k\neq m,\ \int\limits_0^1 xJ_\nu^2(\lambda_k x)dx=\frac{1}{2}J_\nu'^2(\lambda_k),$$

откуда вытекает, что система функций $\left\{\sqrt{2}J_\nu(\lambda_k x)\cdot|J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\right\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2. Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые обозначения, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве L_2, для которой

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx=\begin{cases}0, & \text{если}\quad k\neq m,\\ 1, & \text{если}\quad k=m.\end{cases}$$

В этом случае, для произвольной функции $f\in L_2$ рассмотрим разложение в ряд Фурье-Бесселя следующего вида:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(f)J_\nu(\lambda_k x),\quad \text{где}\ \ c_k(f)=\int\limits_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_k x)dx \qquad (0.0.2)$$

— коэффициенты Фурье-Бесселя. Из (0.0.2), учитывая свойство ортогональности и применяя равенство Парсеваля, будем иметь

$$\|f\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}.$$

Пусть

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x)$$

— частные суммы $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя (0.0.2).

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ — обозначим подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x).$$

Тогда для величины наилучшего приближения $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ справедливо равенство [2, с.917]:

$$E_{n-1}(f) = \left\{ \|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2}. \qquad (0.0.3)$$

Нам для дальнейшего понадобится специальный вид обобщенного модуля непрерывности, который вводим следующим образом. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка Бесселя

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \qquad (0.0.4)$$

при помощи которого дифференциальное уравнение (0.0.1) запишем в операторном виде

$$\mathcal{D}u = -u.$$

Введём функцию $T(x,y;t)$ как сумму ряда

$$T(x,y;t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \ 0 < t < 1.$$

В L_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \int\limits_0^1 t f(t) T(x,t;1-h)dt, \tag{0.0.5}$$

который называют оператором обобщенного сдвига. Для произвольной $f \in L_2$ рассматриваются конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E)f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1, 2, ..., m,$$

а символ E – единичный оператор в пространстве L_2. Величину

$$\Omega_m(f;t) = sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \le t\right\} \tag{0.0.6}$$

назовём обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Всюду далее обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (0.0.4), множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f', и таких, что $\mathcal{D}f \in L_2$.

Полагаем $\mathcal{D}^0 f \equiv f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r = 2, 3, ...$, обозначим множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$.

Имеет место следующая

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f) \le \frac{1}{\lambda_n^{2r}} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f). \tag{0.0.7}$$

Неравенство (0.0.7) *точное в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, для которой неравенство* (0.0.7) *обращается в равенство.*

Из леммы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}.$$

Используя некоторые свойства оператора (0.0.5) с учётом равенства Парсеваля находим

$$\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|^2 := \sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-h)^k)^{2m}c_k^2(f), \tag{0.0.8}$$

где $h\in(0,1)$. Из равенств (0.0.6) и (0.0.8) имеем:

$$\Omega_m(f,t) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}c_k^2(f)\right\}^{1/2},\ 0<t<1. \tag{0.0.9}$$

Для модуля непрерывности (0.0.9) в работе [2] в предположении, что $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le (1-(1-t)^n)^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t),\ 0<t<1. \tag{0.0.10}$$

Покажем, что для функции $f_0(x)=J_\nu(\lambda_n x)$ неравенство (0.0.10) обращается в равенство. Из (0.0.3) вытекает, что $E_{n-1}(f_0)=1$, и так как легко проверить, что

$$\mathcal{D}^r f_0(x) = \lambda_k^{2r}J_\nu(\lambda_k x),\quad \Omega_m(\mathcal{D}^r f,t) = [1-(1-t)^n]^m\lambda_n^{2r},$$

то имеем:

$$1 = E_{n-1}(f_0) = [1-(1-t)^n]^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t).$$

Отсюда сразу вытекает

Лемма 1.3.2. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t)} = \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m},\quad 0<t\le 1.$$

В условиях леммы 1.3.2 имеет место

Лемма 1.3.3. *Справедливо равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,\frac{1}{n})}=\left(1-e^{-1}\right)^{-m}.$$

Основным результатом третьего параграфа первой главы является следующая

Теорема 1.3.1. *Для любых* $r\in\mathbb{Z}_+,\ \ m,n\in\mathbb{N},\ \ h\in(0,1)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)h^m}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=\left(1+\frac{1}{h}\cdot\frac{(1-h)^{n+1}-1}{n+1}\right)^{-m}. \tag{0.0.11}$$

В частности, при $h=1/(n+1)$ *из* (0.0.11) *вытекает равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}. \tag{0.0.12}$$

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.1 *из равенства* (0.0.12) *имеем:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=e^m.$$

Результаты, изложенные в четвёртом параграфе, являются основными результатами первого главы и, базируясь именно на этих результатах, мы во второй главе диссертации вычислим точные значения различных n-поперечников классов функций, естественно возникающих из нижеизложенных теорем.

Имеет место следующее общее утверждение

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\leq 2,\ 0<h<1,\ \varphi$ *– неотрицательная измеримая суммируемая на интервале* $(0,h)$ *неэквива-*

лентная нулю функция. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Из теоремы 1.4.1 вытекают следующие следствия

Следствие 1.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ h\in(0,1),\varphi\geq 0$ *- суммируемая на (0,h] функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{m}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right)^{m}}.$$

Следствие 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.4.1 *и пусть* $\varphi(t)=n(1-t)^{n-1},\ \ n\in\mathbb{N}$. *Тогда при любом* $h\in(0,1]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = $$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{0.0.13}$$

В частности, из (0.0.13) *при* $h=1/n,\ n\in\mathbb{N}$ *получаем*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n} \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{0.0.14}$$

В свою очередь из (0.0.14) *при* $p=1/m, m\in\mathbb{N}$ *следует равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^rf,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

В пятом параграфе первой главы найдены точные оценки величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$-функционала Петре.

Теория приближения функций основана на одной из фундаментальных идей математики - замене сложных математических выражений более простыми и удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой и стимулирует развитие математики в целом и теории приближения функций, в частности. В последнее время для реализации указанной идеи в теории приближения часто используют теорию $\mathcal{K}$-функционалов Петре. В экстремальных задачах теории приближения в смысле слабой эквивалентности были установлены связи между $\mathcal{K}$-функционалами и различными обобщенными модулями непрерывности, например в работах [3]- [5].

Рассмотрим $\mathcal{K}$-функционал следующего вида

$$\mathcal{K}(f,t^m):=\mathcal{K}(f,t^m;L_2;L_2^{(m)}(\mathcal{D}))=$$
$$=\inf\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^mg\|:g\in L_2^{(m)}\mathcal{D}\},\qquad(0.0.15)$$

где $m\in\mathbb{N},0<t<1$. Отметим, что $\mathcal{K}$-функционал $\mathcal{K}(f,t^m)$ не убывает,

$$\mathcal{K}(f,(nt)^m)\leq n^m\mathcal{K}(f,t^m)$$

и эквивалентен модулю непрерывности $\Omega_m(f,t)$.

Эквивалентность модуля непрерывности (0.0.9) и $\mathcal{K}$-функционала (0.0.15) устанавливает следующее утверждение

Теорема 1.5.1. *Существуют положительные константы $c_1=c_1(m)$ и $c_2=c_2(m)$, для которых справедливы неравенства*

$$c_1\Omega_m(f,t)\leq\mathcal{K}(f,t^m)\leq c_2\Omega_m(f,t)$$

для произвольной функции $f \in L_2, 0 < t < 1$.

Основным результатом пятого параграфа является

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{L_2}}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{L_2}} = 1.$$

В шестом параграфе перовой главы приводятся некоторые обобщения предыдущих результатов и находятся точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$, $\nu > -\frac{1}{2}$.

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и обозначения.

Пусть $L_{2,\nu} := L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$ – пространство суммируемых с квадратом функций f, интегрируемых с весом $x^{2\nu+1}$, $\nu > -1/2$ на отрезке $[0,1]$ и конечной нормой

$$\|f\|_{2,\nu} := \|f\|_{L_{2,\nu}} = \left(\int_0^1 x^{2\nu+1} f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

В монографии [1, с.355] доказано, что система функций

$$j_\nu(\lambda_n x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \mathcal{J}_\nu(\lambda_n x) \cdot (\lambda_n x)^{-\nu},\ n = 1, 2, ..., \tag{0.0.16}$$

где $\mathcal{J}_\nu(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – занумерованные в порядке возрастания положительные нули уравнения $\mathcal{J}_\nu(u) = 0$, является полной ортогональной системой в пространстве $L_{2,\nu}$. При этом произвольная функция $f \in L_{2,\nu}$ разлагается в ряд Фурье-Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \tag{0.0.17}$$

где коэффициенты $b_k(f)$ определены формулой

$$b_k^2(f) = \frac{1}{\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2} \int_0^1 x^{2\nu+1} f(x) j_\nu(\lambda_k x) dx, \tag{0.0.18}$$

а равенство (0.0.17) понимается в смысле сходимости в норме $L_{2,\nu}$.

Символом

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\nu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\nu}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ – обобщённых полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k j_\nu(\lambda_k x).$$

В силу свойств ортогональности системы функций (0.0.16), получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\nu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f),$$

где

$$S_{n-1}(f,x) := \sum_{k=1}^{n-1} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

– частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя (0.0.17), а

$$a_k^2(f) = \|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 b_k^2(f),\ k \in \mathbb{N}. \qquad (0.0.19)$$

В пространстве $L_{2,\nu}$ введём следующий оператор усреднения

$$T_{h,\nu}(f,x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos t}\right)\sin^{2\nu} t dt,$$

обладающий свойствами:

а) для произвольных функций $f, g \in L_{2,\nu}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $T_{h,\nu}(\alpha f + \beta g, x) = \alpha T_{h,\nu}(f,x) + \beta T_{h,\nu}(g,x)$;

б) $T_{h,\nu}(j_\nu(\lambda x)) = j_\nu(\lambda h) j_\nu(\lambda x)$;

в) $T_{0,\nu}(f,x) \equiv f(x)$;

г) $\|T_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} \le \|f\|_{2,\nu}$ и $\|T_{h,\nu}(f,\cdot) - f(\cdot)\|_{2,\nu} \to 0$, при $h \to 0$;

д) функция $u(x,h) := T_{h,\nu}(f;x),\ x, h \in [0,1]$ является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2\nu+1}{h}\cdot\frac{\partial u}{\partial h}, u(x,o) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial h}\Big|_{h=0} = 0,$$

где $f(x)$ – произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения часто используют различные разновидности классического модуля непрерывности, связанного со спецификой рассматриваемых задач и позволяющего получить окончательные результаты [2, 6–8]. Здесь мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [9], и докажем ряд новых результатов. Известно [10], что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ с рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

имеет место формула

$$T_{h,\nu}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} j_\nu(\lambda_k h) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \tag{0.0.20}$$

причём сходимость ряда, стоящего в правой части равенства (0.0.20), понимается в смысле пространства $L_{2,\nu}$.

Пусть E_ν – единичный оператор в пространстве $L_{2,\nu}$. Полагаем

$$T^1_{h,\nu}(f;x) = T_{h,\nu}(f;x),\ T^m_{h,\nu}(f;x) := T_{h,\nu}(T^{m-1}_{h,\nu}(f;\cdot),x),\ m \in \mathbb{N}.$$

Используя эти соотношения, для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ запишем конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta^1_{h,\nu}(f,x) := F_{h,\nu}(f,x) - f(x) = (F_{h,\nu} - E_\nu) f(x),$$

$$\Delta^m_{h,\nu}(f,x) := \Delta_{h,\nu}(\Delta^{m-1}_{h,\nu}(f,\cdot),x) = (F_{h,\nu} - E_\nu)^m f(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F^k_{h,\nu}(f,x),\ k = 2,3,... \tag{0.0.21}$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ и $t \in (0,1)$, исходя из введённых разностей (0.0.21), определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка в пространстве $L_{2,\nu}$:

$$\Omega_m(f,t)_{2,\nu} := \sup\left\{ \|\Delta^m_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} : 0 < h \le t \right\}.$$

Введём обозначения:

$$\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \cdot \frac{d}{dx},\ \nu > -1/2$$

– дифференциальный оператор второго порядка Бесселя порядка ν.

В монографии [11, с.321] доказано, что функции $j_\nu(\lambda_n x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mathcal{D}y = \lambda_n^2 y,\ \text{и}\ j_\nu(0) = 1,\ j_\nu^{'}(0) = 0.$$

Умножая обе части указанного уравнения на весовую функцию $x^{2\nu+1}$ ($\nu > -1/2$), получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2\nu+1}\frac{d}{dx}j_\nu(\lambda_n x)\right) + \lambda_n^2 x^{2\nu+1} j_\nu(\lambda_n x) = 0.$$

Пользуясь полученным уравнением, для коэффициентов (0.0.18) легко доказать следующую формулу (см. [9, с.5])

$$b_k(f) = (-1)^r \lambda_n^{-2r} b_k(\mathcal{D}^r f), \tag{0.0.22}$$

где $\mathcal{D}^0 f = f,\ \mathcal{D}^r(f) := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f), r \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})(r \in \mathbb{Z}_+;\quad L_{2,\nu}^{(0)}(\mathcal{D}) \equiv L_{2,\nu},\quad \nu > -1/2)$ – класс функций $f \in L_{2,\nu}$, имеющих на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и производную r-го порядка $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\nu}$.

Пользуясь формулами (0.0.17), (0.0.20) и соотношениями (0.0.21), запишем разность первого порядка функции f в следующем виде

$$\Delta_{h,\nu}^1(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_\nu(\lambda_k h) - 1) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{0.0.23}$$

Последовательно применяя формулу (0.0.23) из (0.0.21), для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем рекуррентную формулу

$$\Delta_{h,\nu}^m(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_\nu(\lambda_k h) - 1)^m b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{0.0.24}$$

Используя равенство Парсеваля, в силу ортогональности системы функций $\{j_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$, из (0.0.24) получаем формулу

$$\|\Delta_{h,\nu}^m(f,\cdot)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f). \tag{0.0.25}$$

Учитывая равенства (0.0.21) и (0.0.25), запишем:

$$\Omega_m^2(f,t)_{2,\nu} := \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f)\right\}. \tag{0.0.26}$$

Заметим, что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$ из (0.0.22) и (0.0.19) следует равенство

$$a_k^2(\mathcal{D}^r f) = b_k^2(\mathcal{D}^r f)\cdot\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r} b_k^2(f)\cdot\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r} a_k^2 f,$$

в силу которого из равенства (0.0.26) получаем [6]:

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\nu} = \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k t))^{2m} a_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\} =$$

$$= \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k t))^{2m} \lambda_k^{4r} a_k^2(f)\right\}. \tag{0.0.27}$$

Используя обобщённый модуль непрерывности (0.0.27), В.А.Абиловым и Ф.В.Абиловой получены прямые и обратные теоремы теории приближения в виде неточных неравенств. Следует отметить, что при получении точных прямых теорем посредством модуля непрерывности (0.0.27) нельзя рассчитывать на их точность на классах функций, а поэтому точные теоремы в дальнейшем получаем при помощи $\mathcal{K}$-функционала Петре.

В настоящее время теория приближения функций имеет дело главным образом с приближением классов функций при помощи заданных подпространств фиксированной размерности, связанных с получением точных результатов, реализующих n-поперечники на указанных классах функций. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на $\mathscr{K}$-функционале Петре [12]. Отметим, что особенно большую роль играют $\mathscr{K}$-функционалы в экстремальных задачах теории приближения функций. При этом изучение связи между модулями гладкости и $\mathscr{K}$-функционалами является одной из основных задач теории приближения функций. Для различных обобщённых модулей гладкости такие задачи изучались, например, в работах [13]- [15].

Пусть $L_{2,\nu}^{(m)}-$ пространство Соболева, построенное по оператору $\mathcal{D}$, то есть

$$L_{2,\nu}^{(m)} := \{f \in L_{2,\nu} : \mathcal{D}^j f \in L_{2,\nu}, \quad j = 1, 2, ..., m\}.$$

Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам $L_{2,\nu}$ и $L_{2,\nu}^{(m)}$,

$$\mathscr{K}_m \left(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}\right) :=$$

$$= \inf \left\{\|f - g\|_{2,\nu} + t^m \|\mathcal{D}^m g\|_{2,\nu} : g \in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})\right\}, \tag{0.0.28}$$

где $m \in \mathbb{N}, \ f \in L_{2,\nu}, \ 0 < t < 1$. Далее, ради краткости, будем использовать обозначение

$$\mathscr{K}_m(f, t)_{2,\nu} := \mathscr{K}_m \left(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}\right).$$

Эквивалентность модуля непрерывности (0.0.26) и $\mathscr{K}$-функционала (0.0.28) установлена в работе [16].

Имеет место следующая основная

Теорема 1.6.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu}} = 1.$$

Во второй главе диссертации рассматривается экстремальная задача отыскания точных значений n-поперечников классов функций, естественно вытекающих из теорем, доказанных в первой главе.

Нам для изложения результатов второй главы потребуются ряд определений и обозначений. Пусть S – единичный шар в пространстве L_2; $\Lambda_n \subset L_2 - n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n;

$\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$– линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon\mathcal{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_2\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\Big\} : \mathscr{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_2\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным* поперечниками подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2. Указанные n-поперечники монотонны по n и между ними в любом гильбертовом пространстве X_2 (в нашем случае $X_2 := L_2 = L_2((0,1), xdx)$ и $X_2 := L_{2,\nu} = L_2((0,1), x^{2\nu+1}dx)$) выполняются соотношения (см., например, монографии [17], [18]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2).$$

Введём классы функций, естественно вытекающие из результатов теорем 1.3.1 и 1.4.1, доказанных в предыдущих пунктах.

Сначала приведём определение класса, вытекающее из теоремы 1.3.1, а именно через $\mathrm{W}_{1/m}^{(r)}L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h)$ класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ при всех $r \in \mathbb{Z}_+, \ \ m \in \mathbb{N}, \ \ 0 < t < 1$, удовлетворяет условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt \le 1.$$

Пусть $h \in (0,1), \ 0 < p \le 2, \ m \in \mathbb{N}, \ r \in \mathbb{Z}_+, \ \varphi \ge 0$ – суммируемая на интервале $(0,h)$ неэквивалентная нулю функция. Через $\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)$

обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt \le 1.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 2.1.1. *При всех* $r \in \mathbb{Z}_+,\ m, n \in \mathbb{N},\ 0 < h < 1$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h), L_2) = \lambda_n^r \left(1 - \frac{1}{(n+1)h} + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *– любой из перечисленных выше* n*-поперечников.*

Заметим, что из утверждения теоремы 2.1.1, при $h = 1/(n+1)$ имеем:

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h), L_2) = \lambda_n^{-2r}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)} \sim \frac{e^m}{\lambda_n^{2r}}.$$

Приведём основной результат первого параграфа второй главы.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \ge 0$ *- суммируемая на интервале* $(0, h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} =$$
$$= \lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$*-любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), d^n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} := \sup\{E_n(f)_2 : f \in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m; h, \varphi)_{L_2}\}.$$

Из теоремы 2.1.2 вытекает ряд утверждений.

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы* 2.1.2 *при* $\varphi_\star(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi_\star)) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi_\star) =$$
$$= \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}} \right\}^{1/p}.$$

В качестве второго следствия теоремы 2.1.2 будем рассматривать экстремальную задачу вычисления точной верхней грани модулей коэффициентов Фурье-Бесселя $c_n(f)$. Такая задача для периодических классов функций рассмотрена, например, в работе [19], а для коэффициентов Фурье разложения функций по ортогональным с заданным весом полиномов в работе [5].

Для рассматриваемых здесь классов функций эта задача также представляет определённый интерес.

Следствие 2.1.2. *Пусть* $0 < p \leq 2$. *Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} =$$
$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}.$$

Во втором параграфе второй главы введён класс функций, вытекающий из результата теоремы 1.6.1, и для этого класса вычислены точные значения перечисленных в параграфе 2.1 n-поперечников.

Неубывающую на положительной полуоси $[0, \infty)$ функцию Φ называют k-можарантой, если функция $\Phi(t)/t^k, k \in \mathbb{N}$ не возрастает на $(0, \infty), \Phi(0) = 0$ и при $t \to 0, \Phi(t) \to 0$ (см., например, [20]). Множество всех k-мажорант обозначим символом $\mathscr{F}^k$. Через $W_{2,k}^{(r)}(\mathscr{K}_m; \Phi), r \in \mathbb{Z}_+, m, k \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m) \leq \Phi(t^m)$, где $0 < t \leq 1$ – любое число, а мажоранта Φ – произвольная функция, принадлежащая $\mathscr{F}^k$. В случае $k = 1$ вместо символа $W_{2,1}^{(r)}(\mathscr{K}_m; \Phi)$ будем писать $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m; \Phi)$.

Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. *Для любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место следующие равенства*

$$\rho_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right)_{2,\nu} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}),$$

где $\rho_n(\cdot)$ *– любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot),$ *а*

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\nu} := inf\left\{E_{n-1}(f)_{2,\nu} : \ f \in L_{2,\nu}\right\}$$

для $\mathfrak{M} \subset L_{2,\nu}$.

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1 *справедливы равенства*

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right\} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

ГЛАВА I

§1.1. Общие сведения о функциях Бесселя

Во многих задачах математической физики, решение которых связано с применением цилиндрических и сферических координат, процесс разделения переменных приводит к дифференциальному уравнению

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+(x^2-\nu^2)u=0, \tag{1.1.1}$$

которое называется уравнением Бесселя, а его решения — цилиндрическими или бесселевыми функциями. Легко заметить, что дифференциальное уравнение (1.1.1) можно коротко написать в виде

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)+(x^2-\nu^2)u=0. \tag{1.1.2}$$

Вообще говоря, x и ν могут быть любыми числами, но в нашей работе мы будем предполагать, что ν есть произвольное действительное число. Можно указать много различных прикладных задач [21, с.9], таких как малые свободные колебания тонкой однородной круговой мембраны, задача об интегрирования уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, волнового уравнения, уравнения теплопроводности цилиндрических, сферических и конических координат, решение которых приводит в результате разделения переменных к уравнению Бесселя. К этому уравнению приводятся также некоторые дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Поэтому весьма важным является нахождение общего решения уравнений (1.1.1) и (1.1.2). Всякое решения уравнения (1.1.1), не равного нулю, называется цилиндрической функцией.

В курсе "Уравнения математической физики"(см. [1, с.352]) доказывается, что функция

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{1.1.3}$$

удовлетворяет уравнению (1.1.1). Цилиндрическая функция $J_\nu(x)$ называется функцией Бесселя порядка ν. В частности, если $\nu \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, то

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Далее заметим, что если $\nu > 0, \neq$ целому числу, то функции $J_\nu(x)$ и $J_\nu(x) := J_{-\nu}(x)$ линейно независимы. Это следует из равенства (1.1.3) в силу равенства

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}[1 + O(x^2)], \quad x \to 0, \quad \nu \neq -1, -2, \cdots.$$

Но, если ν — целое число, $\nu = n \in \mathbb{N}$, то просто проверяется, что имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

из которого сразу следует, что $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы.

Для нас при использовании функции Бесселя в экстремальных задачах теории аппроксимации весьма важным является свойство ортогональности системы функций $\{J_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, а именно известно, что (см. напр, [1, с.354]), если λ_1 и λ_2 — вещественные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(\lambda) + \beta\lambda J'_\nu(\lambda) = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0, \qquad (1.1.4)$$

то при $\nu > -1$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(\lambda_1 x) J_\nu(\lambda_2 x) dx = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad (1.1.5)$$

$$\int\limits_0^1 x J_\nu^2(\lambda_1 x) dx = \frac{1}{2}\left[J'{}_\nu(\lambda_1)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda_1^2}\right) J_\nu^2(\lambda_1). \qquad (1.1.6)$$

Отметим также, что корни уравнения (1.1.4) при $\nu > -1$ — вещественные, простые, кроме, возможно, 0; они симметрично расположены относительно точки 0 и не имеют конечных предельных точек [1, с.357]. Также известно [1, с.359] асимптотическое выражение для функции Бесселя $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right), \quad x \to +\infty.$$

Отсюда вытекает приближенная формула для корней $J_\nu(x)$:

$$\lambda_k^\nu \approx \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Разделив (1.1.3) на x^ν, находим

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Продифференцировав это равенство по x, получаем соотношение

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{1}{2^\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} =$$

$$= -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

которое можно переписать в следующем виде [21]:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}}{x^{\nu+1}}. \tag{1.1.7}$$

Аналогическим образом, непосредственным вычислением, получается формула

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x). \tag{1.1.8}$$

Выполняя дифференцирование в левой части формул (1.1.7) и (1.1.8), после некоторых упрощений находим

$$\frac{d}{dx}J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu J_\nu(x)}{x}, \tag{1.1.9}$$

$$\frac{d}{dx}J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu J_\nu(x)}{x}, \tag{1.1.10}$$

откуда получаем рекуррентные формулы

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2\nu\frac{J_\nu(x)}{x}, \tag{1.1.11}$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2\frac{d}{dx}J_\nu(x). \tag{1.1.12}$$

§1.2. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье-Бесселя

Пусть $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса ν, а $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — занумерованные в порядке возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots$$

— последовательности положительных корней уравнения $J_\nu(x) = 0$.

Известно [1, с.359], что функции $J_\nu(x)$ являются системой собственных функций краевой задачи

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, \ u(1) = 0,$$

отвечающих собственным значениям $\left\{\lambda_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f с весом x.

Приводим нужные нам для дальнейшего определения и известные факты.

Всюду далее $L_2 := L_2([0,1]; xdx)$ — обозначим пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^1 x f^2(x) dx\right)^{1/2}.$$

Наши дальнейшие исследования базируются на свойствах ортогональности системы $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ (см., напр., [1, с.359]):

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_m x) dx = 0, \ k \neq m, \ \int\limits_0^1 x J_\nu^2(\lambda_k x) dx = \frac{1}{2} J_\nu'^2(\lambda_k),$$

откуда вытекает, что система функций $\left\{\sqrt{2} J_\nu(\lambda_k x) \cdot |J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\right\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2. Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые обозначения, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему функций в пространстве L_2, для которой

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq m, \\ 1, & \text{если} \quad k = m. \end{cases}$$

В этом случае, для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим разложение в ряд Фурье–Бесселя следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x), \tag{1.2.1}$$

где

$$c_k(f) = \int_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_k x)dx$$

— коэффициенты Фурье-Бесселя. Из (1.2.1), применяя равенство Парсеваля, будем иметь

$$\|f\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{1.2.2}$$

Пусть

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x)$$

— частные суммы $(n-1)$-го порядка ряда Фурье–Бесселя (1.2.1).

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ — обозначим подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x).$$

Тогда для величины наилучшего приближения $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ справедливо равенство [2, с.917]:

$$E_{n-1}(f) = \left\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\} =$$

$$= \|f - S_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{1.2.3}$$

§1.3. Обобщений модуль непрерывности и его свойства

Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка Бесселя

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}. \tag{1.3.1}$$

Используя (1.3.1), дифференциальное уравнение (1.1.1) запишем в операторном виде

$$\mathcal{D}u = -u. \tag{1.3.2}$$

Введём функцию $T(x, y; t)$ как сумму ряда

$$T(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \ 0 < t < 1, \tag{1.3.3}$$

где в последнем соотношении равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2([0,1] \times [0,1]; xydxdy)$. В L_2 рассмотрим оператор

$$F_h f(x) = \int\limits_0^1 t f(t) T(x, t; 1-h) dt, \tag{1.3.4}$$

который называют оператором обобщенного сдвига. В работе [2] отмечен ряд свойств оператора (1.3.4) и для произвольной $f \in L_2$ рассматриваются конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta_h f(x) = F_h f(x) - f(x) = (F_h - E) f(x),$$

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(x)) = (F_h - E)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x),$$

где

$$F_h^0 f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1, 2, ..., m,$$

а символ E – единичный оператор в пространстве L_2. Величину

$$\Omega_m(f; t) = sup\left\{\|\Delta_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \leq t\right\} \tag{1.3.5}$$

назовём обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Всюду далее обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (1.3.1), множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f', и таких, что $\mathcal{D}f \in L_2$.

Полагаем $\mathcal{D}^0 f \equiv f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$, $\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f)$, $r \in \mathbb{N}$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r = 2, 3, ...$, обозначим множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$.

Если $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r \in \mathbb{N}$, то для её коэффициентов Фурье $c_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ справедлива формула [2]

$$c_k(f) = (-1)^r \lambda_k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f), \quad k, r \in \mathbb{N}. \tag{1.3.6}$$

Нам далее понадобится следующая простая

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^{2r}} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f). \tag{1.3.7}$$

Неравенство (1.3.7) *точное, в том смысле, что существует функция* $f_0 \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, *для которой неравенство* (1.3.7) *обращается в равенство.*

Доказательство. Применяя к равенству

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x)$$

оператор $\mathcal{D}^r$, в силу линейности этого оператора, с учётом равенства $\mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = (-1)^r \lambda_k^{2r} J_\nu(\lambda_k x)$, ν, $k \in \mathbb{N}$ [2] получаем

$$\mathcal{D}^r f(x) = \mathcal{D}^r \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) =$$

$$= (-1)^r \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \lambda_k^{2r} J_\nu(\lambda_k x).$$

Отсюда, применением равенства Парсеваля, находим

$$\|\mathcal{D}^r f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{4r} c_k^2(f), \tag{1.3.8}$$

$$E_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{4r} c_k^2(f). \tag{1.3.9}$$

Теперь, пользуясь монотонным возрастанием последовательности собственных чисел, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ из соотношения (1.2.3), учитывая (1.3.9), получаем

$$E_{n-1}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{4r}} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_n^{4r}} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) = \frac{1}{\lambda_n^{4r}} E_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f),$$

откуда для произвольной $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ следует неравенство

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\lambda_n^{2r}} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f). \tag{1.3.10}$$

Докажем теперь точность неравенства (1.3.10). Рассмотрим функцию $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$. Для этой функции $\mathcal{D}^r f_0(x) = (-1)^r \lambda_n^{2r} J_\nu(\lambda_n x)$ [2, с.921] и, как следует из равенств (1.2.3) и (1.3.9),

$$E_{n-1}^2(f_0) = 1, \quad E_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0) = \lambda_n^{4r}. \tag{1.3.11}$$

Из двух равенств (1.3.11) следует точность неравенства (1.3.10), поскольку

$$E_{n-1}^2(f_0) = 1 = \frac{1}{\lambda_n^{4r}} \cdot \lambda_n^{4r} = \frac{1}{\lambda_n^{4r}} E_{n-1}^2(\mathcal{D}^r f_0),$$

чем и завершаем доказательство леммы 1.3.1.

Из доказанной леммы 1.3.1. получаем

Следствие 1.3.1. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}. \tag{1.3.12}$$

Доказательство. В самом деле, с одной стороны, из неравенства (1.3.10) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ имеем:

$$\frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} \leq \frac{1}{\lambda_n^{2r}}. \tag{1.3.13}$$

С другой стороны, для рассмотренной в конце леммы 1.3.1 функции $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x)$, учитывая соотношения (1.3.11), имеем:

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{E_{n-1}(f)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)} \geq \frac{E_{n-1}(f_0)}{E_{n-1}(\mathcal{D}^r f_0)} = \frac{1}{\lambda_n^{2r}}. \tag{1.3.14}$$

Требуемое равенство (1.3.12) следует из сопоставления оценки сверху (1.3.13) с оценкой снизу (1.3.14).

Легко доказать, что для произвольной $f \in L_2(\mathcal{D})$, имеющей на $(0,1)$ разложение в ряд Фурье-Бесселя (1.2.1), по системе ортонормированных функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ с весом x, оператор усреднения представляется следующим образом

$$F_h f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) J_\nu(\lambda_k x), \tag{1.3.15}$$

где равенство (1.3.15) понимается в смысле сходимости в норме пространства L_2.

В самом деле, пользуясь формулами (1.3.3) и (1.3.4), получаем

$$F_h f(x) = \int_0^1 t f(t) T(x, t; 1-h) dt =$$

$$= \int_0^1 t f(t) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k t)(1-h)^k \right\} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 t f(t) J_\nu(\lambda_k t) dt \right\} J_\nu(\lambda_k x)(1-h)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-h)^k c_k(f) J_\nu(\lambda_k x),$$

откуда и следует равенство (1.3.15). Используя определения разностей первого и второго порядка, с учётом (1.2.1) и (1.3.15) будем иметь

$$\Delta_h^1(f,x) := F_h f(x) - f(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(1-h)^k c_k(f) J_\nu(\lambda_k x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-h)^k - 1\right] c_k(f) J_\nu(\lambda_k x),$$

$$\Delta_h^2(f,x) := \Delta_h^1\left[\Delta_h^1(f,x)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-h)^k - 1\right] c_k(\Delta_h^1 f) J_\nu(\lambda_k x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-h)^k - 1\right]^2 c_k(f) J_\nu(\lambda_k x),$$

и по индукции находим:

$$\Delta_h^m(f,x) := \Delta_h^1\left[\Delta_h^{m-1} f(\cdot,x), x\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[(1-h)^k - 1\right] c_k(\Delta_h^{m-1} f) J_\nu(\lambda_k x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} ((1-h)^k - 1)^m c_k(f) J_\nu(\lambda_k x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^m \left[1 - (1-h)^k\right]^m c_k(f) J_\nu(\lambda_k x).$$

Отсюда по равенству Парсеваля (1.2.2) сразу запишем

$$\|\Delta_h^m(f,\cdot)\|^2 := \sum_{k=1}^{\infty} (1-(1-h)^k)^{2m} c_k^2(f), \tag{1.3.16}$$

где $h \in (0,1)$. Из равенств (1.3.5) и (1.3.16) имеем:

$$\Omega_m(f,t) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} c_k^2(f)\right\}^{1/2}, \ 0 < t < 1. \tag{1.3.17}$$

В равенство (1.3.17) пользуясь вышеприведенным равенством

$$\mathcal{D}^r f(x) = (-1)^r \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\lambda_k^{2r} J_\nu(\lambda_k x)$$

получаем

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r, f, t) = \left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}\lambda_k^{4r}c_k^2(f)\right\}^{1/2}, \ 0 < t < 1. \qquad (1.3.18)$$

Для модуля непрерывности (1.3.18) в работе [2] в предположении, что $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, доказано точное неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \le (1-(1-t)^n)^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t), \ 0 < t < 1. \qquad (1.3.19)$$

Покажем, что для функции $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x)$ неравенство (1.3.19) обращается в равенство. Из (1.2.3) вытекает, что $E_{n-1}(f_0) = 1$ и, так как легко проверить

$$\mathcal{D}^r f_0(x) = \lambda_k^{2r} J_\nu(\lambda_k x), \quad \Omega_m(\mathcal{D}^r f, t) = [1-(1-t)^n]^m \lambda_n^{2r}, \qquad (1.3.20)$$

то имеем:

$$1 = E_{n-1}(f_0) = [1-(1-t)^n]^{-m}\lambda_n^{-2r}\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t).$$

Отсюда сразу вытекает

Лемма 1.3.2. *Справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)} = \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m}, \quad 0 < t \le 1. \qquad (1.3.21)$$

Доказательство. В самом деле, из (1.3.19) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f, t)} \le \frac{1}{[1-(1-t)^n]^m}. \qquad (1.3.22)$$

С другой стороны, для рассмотренной нами в конце леммы 1.3.1 функции $f_0(x) = J_\nu(\lambda_k x)$, учитывая равенства (1.3.11) и (1.3.20), имеем:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,t)}\geq\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f_0)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0,t)}=$$

$$=\frac{\lambda_n^{2r}1}{\lambda_n^{2r}[1-(1-t)^n]^m}=\frac{1}{[1-(1-t)^n]^m}. \tag{1.3.23}$$

Требуемое равенство (1.3.21) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.3.22) и снизу (1.3.23), чем и завершаем доказательство леммы 1.3.2.

Имеет место следующая

Лемма 1.3.3. *Справедливо равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,\frac{1}{n})}=\left(1-e^{-1}\right)^{-m}. \tag{1.3.24}$$

Доказательство. В условиях леммы 1.3.2, полагая $t=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,\frac{1}{n})}=\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}. \tag{1.3.25}$$

Переходя в обеих частях полученного равенства к верхней грани по всем $n\in\mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\Omega_m(\mathcal{D}^r f,1/n)}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}=$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-1})^m}.$$

Лемма 1.3.3 доказана.

Докажем более общее утверждение

Теорема 1.3.1. *Для любых* $r\in\mathbb{Z}_+$, $m,n\in\mathbb{N}$, $h\in(0,1)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)h^m}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}=\left(1+\frac{1}{h}\cdot\frac{(1-h)^{n+1}-1}{n+1}\right)^{-m}. \tag{1.3.26}$$

В частности, при $h=1/(n+1)$ *из* (1.3.26) *вытекает равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}. \quad (1.3.27)$$

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ при любом $h \in (0,1)$, используя равенство

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f),$$

получаем

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}(1-t)^k c_k^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty}(1-(1-t)^k)c_k^2(f) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^{2-1/m}\cdot|c_k(f)|^{1/m}(1-(1-t)^k). \quad (1.3.28)$$

Применяя к сумме в правой части (2.1.4) неравенство Гельдера, полагая $p = 2m/(2m-1)$, $q = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $1/p + 1/q = 1$ и учитывая формулу величины наилучшего приближения, имеем:

$$E_{n-1}^2(f) - \sum_{k=n}^{\infty}(1-t)^k c_k^2(f) \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{(2m-1)/(2m)} \cdot \left\{\sum_{k=n}^{\infty}(1-(1-t)^k)^{2m}c_k^2(f)\right\}^{1/(2m)} \le$$

$$\le \left\{E_{n-1}^2(f)\right\}^{1-1/(2m)}\cdot\Omega_m^{1/m}(f,t),$$

или что то же

$$E_{n-1}^2(f) \le \left\{E_{n-1}^2(f)\right\}^{1-1/(2m)}\cdot\Omega_m^{1/m}(f,t) + \sum_{k=n}^{\infty}(1-t)^k c_k^2(f). \quad (1.3.29)$$

Интегрируя обе части неравенства (1.3.29) по переменному t в интервале $(0,h)$ и поделив полученный результат на h, приходим к неравенству

$$E_{n-1}^2(f) \le \left\{E_{n-1}^2(f)\right\}^{1-1/(2m)}\cdot\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f,t)dt\right) +$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t)^k dt\right)c_k^2(f),$$

откуда сразу вытекает, что

$$\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t)^n dt\right)E_{n-1}^2(f)\leq$$

$$\leq\left\{E_{n-1}^2(f)\right\}^{1-1/(2m)}\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f,t)dt. \tag{1.3.30}$$

Из (1.3.30) получаем

$$E_{n-1}(f)\leq\left(\frac{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(f,t)dt}{1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t)^n dt}\right)^m.$$

Заменяя в полученном неравенстве f на $\mathcal{D}^r f$, запишем

$$E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)\leq\left(\frac{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt}{1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t)^n dt}\right)^m.$$

Отсюда для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ имеем

$$E_{n-1}(f)\leq\frac{1}{\lambda_n^{2r}}E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)\leq\frac{1}{\lambda_n^{2r}}\left(\frac{\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt}{1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t)^n dt}\right)^m. \tag{1.3.31}$$

Из (1.3.31) следует, что

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)dt\right)^m}\leq\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-t)^n dt\right)^{-m}. \tag{1.3.32}$$

Для получения оценки снизу заметим, что для функции $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ простой подсчёт показывает, что

$$E_{n-1}(f_0) \equiv 1, \;\; \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0, t) = \lambda_n^{2r}(1-(1-t)^n)^m.$$

Пользуясь этими равенствами, будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} \geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f_0, t)dt\right)^m} =$$

$$= \frac{\lambda_n^{2r}\cdot 1}{\lambda_n^{2r}\left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t)^n dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t)^n dt\right)^{-m}. \qquad (1.3.33)$$

Из неравенств (1.3.32) и (1.3.33) получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t)^n dt\right)^{-m}. \qquad (1.3.34)$$

Вычислив интеграл в правой части равенства (1.3.34), получаем равенство (1.3.26). Теорема 1.3.1 доказана.

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.1 *из равенство* (1.3.27) *имеем:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = e^m. \qquad (1.3.35)$$

Доказательство. В самом деле, из (1.3.34) получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t)^n dt\right)^{-m} =$$

$$\left(1+\frac{1}{h}\cdot\frac{(1+h)^{n+1}-1}{n+1}\right)^{-m}. \qquad (1.3.36)$$

В полученном равенстве (1.3.36), полагая $h = 1/(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, приходим к равенству (1.3.27):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}.$$

Переходя в обеих частях этого неравенства к верхней грани по всем числам $n \in \mathbb{N}$, получаем:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{E_{n-1}(f)}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)} = e^m.$$

§1.4. Основная экстремальная задача

Результаты, изложенные в данном параграфе, являются основным и базируясь именно на этих результатах, во второй главе диссертации мы вычислим точные значения различных n-поперечников классов функций, естественно возникающих из нижеизложенных теорем.

Имеет место следующее общее утверждение, доказательство которого основано на схеме рассуждений работы [22].

Теорема 1.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<p\le 2,\ 0<h<1,\ \varphi$ *– неотрицательная измеримая суммируемая на интервале* $(0,h)$ *неэквивалентная нулю функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.4.1}$$

Доказательство. Воспользуемся одним вариантом неравенства Минковского из монографии [17, с.104]

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\tilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|\tilde{f}_k(t)|^p dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}, \tag{1.4.2}$$

верное при всех $0<p\le 2$ и $h\in\mathbb{R}_+$.

Полагая $\tilde{f}_k:=f_k\varphi^{1/p}$, из формулы (1.4.2) получаем

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}\varphi(t)dt\right)^{1/p}\ge\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^p\varphi(t)dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \tag{1.4.3}$$

Для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$ в силу формулы (1.3.6) запишем разложение функции $\mathcal{D}^r f$ в ряд Фурье по системе $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$, ортонормированной на $(0,1)$ с весом x,

$$\mathcal{D}^r f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\mathcal{D}^r f) J_\nu(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^r \lambda_k^{2r} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x). \tag{1.4.4}$$

Из равенств (1.3.18) и (1.4.4) имеем

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f), 0 < t < 1. \tag{1.4.5}$$

Используя неравенство (1.4.3), равенства (1.4.5) и (1.2.3) и, имея в виду, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел является монотонно возрастающей, с учётом очевидного соотношения

$$\inf_{k \geq n} \int_0^h (1-(1-t)^k)^{mp} \varphi(t) dt = \int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt$$

получаем:

$$\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t) \varphi(t) dt \right\}^{1/p} = \left\{ \int_0^h (\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f, t))^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{ \int_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \right)^{p/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p} \geq$$

$$\geq \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{4r} c_k^2(f) \left(\int_0^h (1-(1-t)^k)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{2/p} \right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \lambda_n^{2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f) \right\}^{1/2} =$$

$$= \lambda_n^{2r} \left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{1/p} E_{n-1}(f). \tag{1.4.6}$$

Из (1.4.6) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части (1.4.1):

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (1.4.7)$$

Для получения оценки снизу той же величины полагаем $f_0(x) := J_\nu(\lambda_n x) \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$. В силу равенства (1.2.3) имеем $E_{n-1}(f_0) = 1$, а из равенства (1.4.5) следует, что

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f_0,t) = (1-(1-t)^n)^m\lambda_n^{2r}, 0<t<1,$$

а потому

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f_0,t)\varphi(t)dt = \lambda_n^{2rp}\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \ge \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f_0)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m(\mathcal{D}^r f_0,t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (1.4.8)$$

Требуемое равенство (1.4.1) получаем из сопоставления оценки сверху (1.4.7) и оценки снизу (1.4.8), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Из теоремы 1.4.1 вытекают следующие следствия

Следствие 1.4.1. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ h\in(0,1), \varphi\ge 0$ *- суммируемая на (0,h] функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)\varphi(t)dt\right)^m} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)\varphi(t)dt\right)^m}. \qquad (1.4.9)$$

Следствие 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.4.1. *Тогда при любом* $h \in (0, 1]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1} dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \left\{ \frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}} \right\}^{1/p}. \tag{1.4.10}$$

Доказательство. В самом деле, полагая в обеих частях равенства (1.4.1) $\varphi(t) = n(1-t)^{n-1}, n \in \mathbb{N}, 0 < t < 1$, будем иметь

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t) dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(n \int\limits_0^h [1-(1-t)^n]^{mp}(1-t)^{n-1} dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h [1-(1-t)^n]^{mp} \quad d[1-(1-t)^n]\right)^{1/p}} =$$

$$= \left(\frac{[1-(1-t)^n]^{mp+1}}{mp+1} \quad \Big|_0^h\right)^{-1/p} =$$

$$= \left(\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right)^{1/p}$$

и равенство (1.4.10) доказано.

В частности, из (1.4.10) при $h = 1/n, \ n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^p(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \qquad (1.4.11)$$

В свою очередь, из (1.4.11) при $p=1/m, m\in\mathbb{N}$ следует равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

§1.5. Оценка величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$-функционала Петре

Теория приближения функций основана на одной из фундаментальных идей математики - замене сложных математических выражений более простыми и удобными. Эта идея является определяющей в вопросах связи математики с практикой и стимулирует развитие математики в целом и теории приближения функций, в частности. В последнее время для реализации указанной идеи в теории приближения часто используют теорию $\mathcal{K}$-функционалов Петре. В экстремальных задачах теории приближения в смысле слабой эквивалентности были установлены связи между $\mathcal{K}$-функционалами и различными обобщенными модулями непрерывности, например в работах [3]- [5].

Рассмотрим $\mathcal{K}$-функционал следующего вида

$$\mathcal{K}(f,t^m):=\mathcal{K}(f,t^m;L_2;L_2^{(m)}(\mathcal{D}))=$$

$$=\inf\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^m g\|:g\in L_2^{(m)}\mathcal{D}\}, \tag{1.5.1}$$

где $m\in\mathbb{N}, 0<t<1$. Отметим, что $\mathcal{K}$-функционал $\mathcal{K}(f,t^m)$ не убывает,

$$\mathcal{K}(f,(nt)^m)\le n^m\mathcal{K}(f,t^m) \tag{1.5.2}$$

и эквивалентен модулю непрерывности $\Omega_m(f,t)$.

Эквивалентность модуля непрерывности (1.3.17) и $\mathcal{K}$-функционала (1.5.1) устанавливает следующее утверждение

Теорема 1.5.1. *Существуют положительные константы $c_1=c_1(m)$ и $c_2=c_2(m)$, для которых справедливы неравенства*

$$c_1\Omega_m(f,t)\le\mathcal{K}(f,t^m)\le c_2\Omega_m(f,t)$$

для произвольной функции $f\in L_2, 0<t<1$.

Доказательство. В силу свойства 5) модуля непрерывности $\Omega_m(f,t)$ и неравенства (1.5.2) достаточно доказать теорему для последовательности

$t_n = 1/n$. С абсолютными постоянными справедливы следующие оценки:

$$\lambda_k \asymp k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.5.3}$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \lesssim \frac{k}{n}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \tag{1.5.4}$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \asymp \frac{k}{n}, \quad 1 \le k \le n. \tag{1.5.5}$$

Из (1.5.4)и (1.5.5) в силу (1.5.3) запишем

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \lesssim \frac{k}{n} \lesssim \frac{\lambda_k}{\lambda_n}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \tag{1.5.6}$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \asymp \frac{k}{n} \asymp \frac{\lambda_k}{\lambda_n}, \quad 1 \le k \le n, \quad k, n \in \mathbb{N}. \tag{1.5.7}$$

Так как для произвольной $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$

$$\|\mathcal{D}^m f\| = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2m} c_k^2(g),$$

то, используя соотношения (1.5.3) и (1.5.6), с учётом (1.3.17) имеем

$$\Omega_m^2\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)^k\right]^{2m} c_k^2(g) \lesssim$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}\right)^{2m} c_k^2(g) = \lambda_n^{-2m} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2m} c_k^2(g) = \lambda_n^{-2m} \|\mathcal{D}^m f\|,$$

Поэтому

$$\Omega_m\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right) \le \Omega_m\left(f - g, \frac{1}{\lambda_n}\right) + \Omega_m\left(g, \frac{1}{\lambda_n}\right) \lesssim$$

$$\lesssim \|f - g\| + \lambda_n^{-m} \|\mathcal{D}^m g\|.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_m\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right) \lesssim \mathcal{K}\left(f, \frac{1}{\lambda_n^m}\right). \tag{1.5.8}$$

Из (1.5.2), (1.5.3) и (1.5.7) вытекает, что для частичной суммы $S_{n-1}(f, x)$ ряда Фурье-Бесселя

$$\|\mathcal{D}^m S_{n-1}(f)\| \lesssim \lambda_n^m \Omega_m\left(S_{n-1}(f), \frac{1}{\lambda_n}\right) \lesssim \lambda_n^m \Omega_m\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right),$$

откуда получаем

$$\mathcal{K}\left(f, \frac{1}{\lambda_n^m}\right) \le \|f - S_{n-1}(f)\| + \lambda_n^{-m}\|\mathcal{D}^m S_{n-1}(f)\| \lesssim \Omega_m\left(f, \frac{1}{\lambda_n}\right). \qquad (1.5.9)$$

Из (1.5.8) и (1.5.9) в силу непрерывности $\Omega_m(f,t)$ следует утверждение теоремы 1.5.1.

Из теоремы 1.5.1 вытекает, в частности, что

$$\lim_{t\to 0+0} \mathcal{K}(f, t^m) = 0.$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.5.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} = 1. \qquad (1.5.10)$$

Доказательство. Воспользуясь формулами (1.2.3) и (1.4.5) и заметив, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=n}^{\infty}$ — монотонно возрастающая для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, имеем

$$E_{n-1}(f) = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-4r} c_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \lambda_n^{-2r}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\}^{1/2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f) \le \lambda_n^{-2r}\|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\|, \qquad (1.5.11)$$

где

$$S_{n-1}(g,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(g) J_\nu(\lambda_k x)$$

— частичная сумма (n-1)-го порядка ряда Фурье-Бесселя функции $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$ по ортогональной с весом x системы специальных функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$. В силу равенства (1.2.3) для произвольной функции $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$ имеем:

$$\|g - S_{n-1}(g)\| = E_{n-1}(g) \le \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g). \qquad (1.5.12)$$

Учитывая (1.5.12) и применяя неравенство треугольника к правой части неравенства (1.5.11), получаем

$$E_{n-1}(f) \le \lambda_n^{-2r}\|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\| \le=$$

$$\le \lambda_n^{-2r}\left\{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \|g - S_{n-1}(g)\|\right\} \le$$

$$\le \lambda_n^{-2r}\{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g)\} \le$$

$$\le \lambda_n^{-2r}\{\|\mathcal{D}^r f - g\| + \lambda_n^{-2m}\|\mathcal{D}^m g\|\}. \tag{1.5.13}$$

Переходя в обеих частях неравенства (1.5.13) к нижней грани по всем функциям $g \in L_2^{(m)}(\mathcal{D})$, с учетом определения $\mathcal{K}$-функционала будем иметь

$$E_{n-1}(f) \le \lambda_n^{-2r}\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m}),$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \neq const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \le 1. \tag{1.5.14}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (1.5.14), для произвольного обобщенного полинома вида

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x),\ c_k(q_n) \in \mathbb{R},\ k = \overline{1, n},$$

учитывая равенство $\mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = (-\lambda_k^2)^r J_\nu(\lambda_k x)$ (см., напр., [2]), имеем

$$\mathcal{D}^r q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(q_n)\mathcal{D}^r J_\nu(\lambda_k x) = \sum_{k=1}^{n}(-\lambda_k^2)^r c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x), \tag{1.5.15}$$

откуда с учётом равенства Парсеваля сразу вытекает соотношение

$$\|\mathcal{D}^r q_n\| = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{4r} c_k^2(q_n)\right\}^{1/2}. \tag{1.5.16}$$

В силу того, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$ является монотонно возрастающей, из (1.5.16) получаем

$$\|\mathcal{D}^r q_n\| \leq \lambda_n^{2r} \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} \|q_n\|. \tag{1.5.17}$$

Полагая теперь в равенстве (2.1.3) $f = q_n$ и $q \equiv 0$, для $\mathcal{K}$-функционала получаем неравенства

$$\mathcal{K}(q_n, t^m) \leq \begin{cases} \|q_n\|, \\ \\ t^m \|\mathcal{D}^r q_n\|. \end{cases} \tag{1.5.18}$$

Полагаем, как и раньше $f_0(x) = J_\nu(\lambda_n x)$, и поскольку $f_0 \in L_2^r(\mathcal{D})$, то в силу равенства (1.5.15) запишем

$$\mathcal{D}^{r+m} f_0(x) = (-\lambda_k^2)^{r+m} J_\nu(\lambda_n x). \tag{1.5.19}$$

Из равенства (1.5.19) и второго неравенства в соотношении (1.5.18) получаем

$$\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m}) \leq \lambda_n^{-2m} \|\mathcal{D}^{r+m} f_0\| = \lambda_n^{-2m} \lambda_n^{2(r+m)} = \lambda_n^{2r}. \tag{1.5.20}$$

Используя неравенство (1.5.20) и тот факт, что $E_{n-1}(f_0) = 1$, имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m})} \geq 1. \tag{1.5.21}$$

Сравнивая оценки сверху (1.5.14) и оценки снизу (1.5.21), получаем требуемое равенство (1.5.10). Теорема 1.5.2 доказана.

§1.6. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \quad \nu > -\frac{1}{2}$

Пусть $L_{2,\nu} := L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right)$ – пространство суммируемых с квадратом функций f, интегрируемых с весом $x^{2\nu+1}, \ \ \nu > -1/2$ на отрезке $[0,1]$ и конечной нормой

$$\|f\|_{2,\nu} := \|f\|_{L_{2,\nu}} = \left(\int\limits_0^1 x^{2\nu+1} f^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

В [1, с.355] доказано, что система функций

$$j_\nu(\lambda_n x) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) \mathcal{J}_\nu(\lambda_n x) \cdot (\lambda_n x)^{-\nu}, \ n = 1, 2, ..., \qquad (1.6.1)$$

где $\mathcal{J}_\nu(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν, а $\lambda_1, \lambda_2, ...$ – занумерованные в порядке возрастания положительные нули уравнения $\mathcal{J}_\nu(u) = 0$, является полной ортогональной системой в пространстве $L_{2,\nu}$. При этом произвольная функция $f \in L_{2,\nu}$ разлагается в ряд Фурье-Бесселя

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \qquad (1.6.2)$$

где

$$b_k^2(f) = \frac{1}{\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2} \int\limits_0^1 x^{2\nu+1} f(x) j_\nu(\lambda_k x) dx, \qquad (1.6.3)$$

а равенство (1.6.2) понимается в смысле сходимости в норме $L_{2,\nu}$.

Символом

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\nu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

определим наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\nu}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ – обобщённых полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k j_\nu(\lambda_k x).$$

В силу свойств ортогональности системы функций (1.6.1), пользуясь разложением (1.6.2) и применяя равенство Парсеваля, получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\nu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f), \tag{1.6.4}$$

где

$$S_{n-1}(f,x) := \sum_{k=1}^{n-1} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

– частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя (1.6.2), а

$$a_k^2(f) = \|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 b_k^2(f),\ \ k \in \mathbb{N}. \tag{1.6.5}$$

В пространстве $L_{2,\nu}$ введём следующий оператор усреднения

$$T_{h,\nu}(f,x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos t}\right) \sin^{2\nu} t dt,$$

обладающий свойствами [23]:

а) для произвольных функций $f, g \in L_{2,\nu}$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ верно равенство $T_{h,\nu}(\alpha f + \beta g, x) = \alpha T_{h,\nu}(f,x) + \beta T_{h,\nu}(g,x)$;

б) $T_{h,\nu}(j_\nu(\lambda x)) = j_\nu(\lambda h) j_\nu(\lambda x)$;

в) $T_{0,\nu}(f,x) \equiv f(x)$;

г) $\|T_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} \le \|f\|_{2,\nu}$ и $\|T_{h,\nu}(f,\cdot) - f(\cdot)\|_{2,\nu} \to 0$, при $h \to 0$;

д) функция $u(x,h) := T_{h,\nu}(f;x),\ x,h \in [0,1]$ является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\nu+1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial h^2} + \frac{2\nu+1}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial h}, u(x,o) = f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial h}\right|_{h=0} = 0,$$

где $f(x)$ – произвольная дважды непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[0,1]$.

В последнее время при решении экстремальных задач теории приближения часто используют различные разновидности классического модуля непрерывности, связанного со спецификой рассматриваемых задач и позволяющего получить окончательные результаты [2, 6–8]. Здесь мы воспользуемся подходом, предложенным в работе [9], и докажем ряд новых результатов. Известно [10], что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ с рядом Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(f) j_\nu(\lambda_k x)$$

имеет место формула

$$T_{h,\nu}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} j_\nu(\lambda_k h) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x), \tag{1.6.6}$$

причём сходимость ряда, стоящего в правой части равенства (1.6.6), понимается в смысле пространства $L_{2,\nu}$.

Пусть E_ν – единичный оператор в пространстве $L_{2,\nu}$. Полагаем

$$T^1_{h,\nu}(f;x) = T_{h,\nu}(f;x),\ T^m_{h,\nu}(f;x) := T_{h,\nu}(T^{m-1}_{h,\nu}(f;\cdot), x),\ m \in \mathbb{N}.$$

Используя эти соотношения для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ запишем конечные разности первого и высших порядков:

$$\Delta^1_{h,\nu}(f,x) := F_{h,\nu}(f,x) - f(x) = (F_{h,\nu} - E_\nu) f(x),$$

$$\Delta^m_{h,\nu}(f,x) := \Delta_{h,\nu}(\Delta^{m-1}_{h,\nu}(f,\cdot), x) = (F_{h,\nu} - E_\nu)^m f(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F^k_{h,\nu}(f,x),\ k = 2, 3, ... \tag{1.6.7}$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ и $t \in (0,1)$, исходя из введённых разностей (1.6.7), определим обобщённый модуль непрерывности m-го порядка в пространстве $L_{2,\nu}$:

$$\Omega_m(f,t)_{2,\nu} := \sup\left\{\|\Delta^m_{h,\nu}(f,\cdot)\|_{2,\nu} : 0 < h \le t\right\}.$$

Введём обозначения:

$$\mathcal{D} := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \cdot \frac{d}{dx},\ \nu > -1/2$$

– дифференциальный оператор второго порядка.

В монографии [11, с.321] доказано, что функции $j_\nu(\lambda_n x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mathcal{D}y = \lambda_n^2 y, \text{ и } j_\nu(0) = 1, \; j_\nu^{'}(0) = 0.$$

Умножая обе части указанного уравнения на весовую функцию $x^{2\nu+1}$ $(\nu > -1/2)$, получаем

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2\nu+1}\frac{d}{dx}j_\nu(\lambda_n x)\right) + \lambda_n^2 x^{2\nu+1} j_\nu(\lambda_n x) = 0.$$

Пользуясь полученным уравнением, для коэффициентов (1.6.3) легко доказать следующую формулу (см. [9, с.5])

$$b_k(f) = (-1)^r \lambda_n^{-2r} b_k(\mathcal{D}^r f), \tag{1.6.8}$$

где $\mathcal{D}^0 f = f, \; \mathcal{D}^r(f) := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f), r \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})(r \in \mathbb{Z}_+; \quad L_{2,\nu}^{(0)}(\mathcal{D}) \equiv L_{2,\nu}, \quad \nu > -1/2)$ – класс функций $f \in L_{2,\nu}$, имеющих на отрезке $[0,1]$ абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и производную r-го порядка $\mathcal{D}^r f$, принадлежащую пространству $L_{2,\nu}$.

Пользуясь формулами (1.6.2), (1.6.6) и соотношениями (1.6.7), запишем разность первого порядка функции f в следующем виде

$$\Delta_{h,\nu}^1(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_\nu(\lambda_k h) - 1) b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{1.6.9}$$

Последовательно применяя формулу (1.6.9) из (1.6.7), для любого $m \in \mathbb{N}$ получаем рекуррентную формулу

$$\Delta_{h,\nu}^m(f,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(j_\nu(\lambda_k h) - 1)^m b_k(f) j_\nu(\lambda_k x). \tag{1.6.10}$$

Используя равенство Парсеваля, в силу ортогональности системы функций $\{j_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$, из (1.6.10) получаем формулу

$$\|\Delta_{h,\nu}^m(f,\cdot)\|_{2,\nu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(1 - j_\nu(\lambda_k h))^{2m} a_k^2(f). \tag{1.6.11}$$

Учитывая равенства (1.6.7) и (1.6.11), запишем:

$$\Omega_m^2(f,t)_{2,\nu} := \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-j_\nu(\lambda_k h))^{2m}a_k^2(f)\right\}. \qquad (1.6.12)$$

Заметим, что для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$ из (1.6.8) и (1.6.5), следует равенство

$$a_k^2(\mathcal{D}^r f) = b_k^2(\mathcal{D}^r f)\cdot\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 =$$

$$= \lambda_k^{4r} b_k^2(f)\cdot\|j_\nu(\lambda_k x)\|_{2,\nu}^2 = \lambda_k^{4r}a_k^2 f,$$

в силу которого из равенства (1.6.12) получаем [6]:

$$\Omega_m^2(\mathcal{D}^r f,t)_{2,\nu} = \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-j_\nu(\lambda_k t))^{2m}a_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\} =$$

$$= \sup_{h\le t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(1-j_\nu(\lambda_k t))^{2m}\lambda_k^{4r}a_k^2(f)\right\}. \qquad (1.6.13)$$

Следует отметить, что при получении точных прямых теорем посредством модуля непрерывности (1.6.13) нельзя рассчитывать на их точность на классах функций, а поэтому указанные теоремы в дальнейшем получаем при помощи $\mathcal{K}$-функционалов Петре.

В настоящее время теория приближения функций имеет дело главным образом с приближением классов функций при помощи заданных подпространств фиксированной размерности, связанных с получением точных результатов, реализующих n-поперечники на указанных классах функций. Наиболее эффективная реализация этой идеи основана на $\mathscr{K}$-функционале Петре [12]. Отметим, что особенно большую роль играют $\mathscr{K}$-функционалы в экстремальных задачах теории приближения функций. При этом изучение связи между модулями гладкости и $\mathscr{K}$-функционалами является одной из основных задач теории приближения функций. Для различных обобщённых модулей гладкости такие задачи изучались, например, в [13]- [15].

Пусть $L_{2,\nu}^{(m)}$– пространство Соболева, построенное по оператору $\mathcal{D}$, то есть

$$L_{2,\nu}^{(m)} := \{f \in L_{2,\nu} : \mathcal{D}^j f \in L_{2,\nu}, \quad j = 1, 2, ..., m\}.$$

Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам $L_{2,\nu}$ и $L_{2,\nu}^{(m)}$,

$$\mathscr{K}_m \left(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}\right) :=$$

$$= \inf \left\{\|f - g\|_{2,\nu} + t^m \|\mathcal{D}^m g\|_{2,\nu} : g \in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})\right\}, \qquad (1.6.14)$$

где $m \in \mathbb{N},\ f \in L_{2,\nu},\ 0 < t < 1$. Далее, ради краткости, будем использовать обозначение

$$\mathscr{K}_m(f, t)_{2,\nu} := \mathscr{K}_m \left(f, t; L_{2,\nu}; L_{2,\nu}^{(m)}\right).$$

Эквивалентность модуля непрерывности (1.6.12) и $\mathscr{K}$-функционала (1.6.14) устанавливает следующая

Теорема [16]. *Существуют положительные константы $c_1 = c_1(m, \alpha)$ и $c_2 = c_2(m, \alpha)$, для которых справедливо неравенство*

$$c_1 \Omega_m(f, t)_{2,\alpha} \le \mathscr{K}_m(f, t^m)_{2,\alpha} \le c_2 \Omega_m(f, t)_{2,\alpha},$$

для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}, t > 0$.

Имеет место следующая

Теорема 1.6.1. *Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D}) \\ f \ne const}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu}} = 1. \qquad (1.6.15)$$

Доказательство. Воспользуясь формулами (1.6.4) и (1.6.12), в силу монотонного возрастания последовательности $\{\lambda_n^{4r}\}$ для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}^{(r)}$ имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^{-4r} a_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\}^{1/2} \le$$

$$\leq \lambda_n^{-2r}\left\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(\mathcal{D}^r f)\right\}^{1/2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r} E_{n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2r}\|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu}, \tag{1.6.16}$$

где

$$S_{n-1}(g,x) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k(g) j_\nu(\lambda_k x)$$

– частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя функции $g \in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})$ по ортогональной с весом $x^{2\nu+1}$, $\nu > -1/2$ системы специальных функций (1.6.1). В силу равенства (1.6.4) и соображений, связанных с получением первого неравенства в (1.6.16), для произвольной функции $g \in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})$ имеем:

$$\|g - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu} = E_{n-1}(g)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g)_{2,\nu}. \tag{1.6.17}$$

Учитывая (1.6.17) и применяя неравенство треугольника к правой части (1.6.16), получаем

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2r}\|\mathcal{D}^r f - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r}\left\{\|\mathcal{D}^r f - g\|_{2,\nu} + \|g - S_{n-1}(g)\|_{2,\nu}\right\} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r}\left\{\|\mathcal{D}^r f - g\|_{2,\nu} + \lambda_n^{-2m} E_{n-1}(\mathcal{D}^m g)\right\} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{-2r}\left\{\|\mathcal{D}^r f - g\|_{2,\nu} + \lambda_n^{-2m}\|\mathcal{D}^m g\|_{2,\nu}\right\}. \tag{1.6.18}$$

Переходя в (1.6.18) к нижней грани по всем функциям $g \in L_{2,\nu}^{(m)}$, с учётом определения $\mathscr{K}$-функционала будем иметь

$$E_{n-1}(f)_{2,\nu} \leq \lambda_n^{-2r}\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m}),$$

и так как полученное неравенство справедливо для любого $f \in L_{2,\nu}^{(m)}(\mathcal{D})$, то отсюда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \le 1. \tag{1.6.19}$$

Для установления оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (1.6.19), для произвольного обобщенного полинома вида

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q_n) j_\nu(\lambda_k x),\ b_k(q_n) \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}$$

имеем

$$\mathcal{D}^r q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q_n)\mathcal{D}^r j_\nu(\lambda_k x) = (-1)^r \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k(q_n)\lambda_k^{2r} j_\nu(\lambda_k x),$$

и, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\|\mathcal{D}^r q_n\|_{2,\nu} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{4r} a_k^2\right\}^{1/2}. \tag{1.6.20}$$

Учитывая, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ является монотонно возрастающей, из (1.6.20) получаем

$$\|\mathcal{D}^r q_n\|_{2,\nu} \le \lambda_n^{2r}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r}\|q_n\|_{2,\nu}. \tag{1.6.21}$$

Полагая теперь в равенстве (1.6.14) сначала $g = 0$, а затем $g = q_n$, для $\mathscr{K}$-функционала $\mathscr{K}_m(q_n, t^m)_{2,\nu}$ получаем оценку сверху

$$\mathscr{K}_m(q_n, t^m)_{2,\nu} \le \begin{cases} \|q_n\|_{2,\nu}, \\ t^m\|\mathcal{D}^m q_n\|_{2,\nu}. \end{cases} \tag{1.6.22}$$

Пусть $f_0(x) := j_\nu(\lambda_n x)\|j_\nu(\lambda_n x)\|^{-1}$. Очевидно, что $f_0 \in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, причём

$$\mathcal{D}^{r+m} f_0(x) := (-1)^{r+m}\lambda_n^{r+m} j_\nu(\lambda_n x)\|j_\nu(\lambda_n x)\|^{-1}. \tag{1.6.23}$$

Учитывая равенство (1.6.23) и второе неравенство (1.6.22), получаем

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f_0, \lambda_n^{-2m})_{2,\nu} \le \lambda_n^{-2m}\|\mathcal{D}^{r+m} f_0\|_{2,\nu} = \lambda_n^{-2m} \cdot \lambda_n^{2r+2m} = \lambda_n^{2r}.$$

Используя полученное неравенство и заметив, что $E_{n-1}(f_0) = 1$, имеем

$$\sup_{\substack{f\in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})\\ f\notin\mathcal{P}_r}} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \geq \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f_0)_{2,\nu}}{\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} \geq 1. \qquad (1.6.24)$$

Из сравнения оценки сверху (1.6.19) и оценки снизу (1.6.24) вытекает требуемое равенство (1.6.15). Теорема 1.6.1 доказана.

ГЛАВА II

§2.1. Значения n-поперечников некоторых классов функций

Нам для изложения последующих результатов потребуются ряд определений и обозначений. Пусть S – единичный шар в пространстве L_2; $\Lambda_n \subset L_2 - n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_2$ – подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$– линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : L_{2,\mu} \to \Lambda_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ – выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon\mathcal{S} \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}L_2 \subset \Lambda_2\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_2) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L}^{\perp}f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L}^{\perp}L_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным* поперечниками подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_2. Указанные n-поперечники монотонны по n и между ними в любом гильбертовом пространстве X_2 (в нашем случае $X_2 := L_2 = L_2((0,1), xdx)$ и $X_2 := L_{2,\nu} = L_2((0,1), x^{2\nu+1}dx)$) выполняются соотношения (см., например, монографии [17], [18]):

$$b_n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d^n(\mathfrak{M}; L_2) \leqslant d_n(\mathfrak{M}; L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}; L_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}; L_2). \qquad (2.1.1)$$

Введём классы функций, естественно вытекающие из результатов теорем 1.3.1 и 1.4.1, доказанных в предыдущих параграфах.

Сначала приведём определение класса, вытекающий из теоремы 1.3.1, а именно через $\mathrm{W}^{(r)}_{1/m}L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ при всех $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < t < 1$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt \leq 1.$$

Пусть $h \in (0,1)$, $0 < p \leq 2$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\varphi \geq 0$ – суммируемая на интервале $(0,h)$ неэквивалентная нулю функция. Через $\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$ обозначим класс, состоящий из функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt \leq 1.$$

Теорема 2.1.1. *При всех $r \in \mathbb{Z}_+$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < h < 1$ справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)} L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h), L_2) = \lambda_n^r \left(1 - \frac{1}{(n+1)h} + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – любой из перечисленных выше n-поперечников.

Доказательство. Из неравенства (1.3.31) для произвольной функции $f \in \mathrm{W}^{(r)} L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h)$ получаем

$$E_{n-1}(\mathrm{W}^{(r)} L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h)) \leq \lambda_n^{-2r} \left(1 - \frac{1}{h}\int\limits_0^h (1-t)^n dt\right)^{-m} =$$

$$= \lambda_n^{-r} \left(1 - \frac{1}{(n+1)h} + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m},$$

откуда для любого n-поперечника из соотношения (2.1.1) запишем оценку сверху

$$\gamma_{n-1}(\mathrm{W}^{(r)} L_2(\Omega_m; \mathcal{D}, h)) \leq \lambda_n^{-2r} \left(1 - \frac{1}{(n+1)h} + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m}. \qquad (2.1.2)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n-поперечника, равного правой части (2.1.2) в множестве $\mathcal{P}_n \cap L_2$, вводим в рассмотрение шар

$$S_{n+1}^* := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \lambda_n^{-r} \left(1 - \frac{1}{(n+1)h} + \frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m} \right\}$$

и докажем, что $S^*_{n+1}\subset \mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h)$. С этой целью для произвольного полинома

$$q_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(q_n)J_\nu(\lambda_k x)\subset S^*_{n+1}$$

в силу монотонного возрастания $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ имеем:

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r q_n,t)dt\le\lambda_n^{2r}\|q_n\|_2\frac{1}{h}\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)dt=$$

$$=\lambda_n^{2r}\left(1-\frac{1}{(n+1)h}+\frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)\|q_n\|_2\le 1,$$

а значит $S^*_{n+1}\subset \mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h)$. Следовательно, согласно определению бернштейновского n-поперечника, имеем

$$b_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h),L_2)\ge b_n(S^*_{n+1},L_2)\ge$$

$$\ge\lambda_n^{-2r}\left(1-\frac{1}{(n+1)h}+\frac{(1-h)^{n+1}}{n+1}\right)^{-m}. \tag{2.1.3}$$

Утверждение теоремы 2.1.1 вытекает из сопоставления неравенств (2.1.2) и (2.1.3).

Учитывая правую часть равенства (1.3.26), соотношение (2.1.3) запишем в виде

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h),L_2)=\lambda_n^{-2r}\left(1+\frac{1}{h}\cdot\frac{(1-h)^{n+1}-1}{n+1}\right)^{-m}.$$

Отсюда, при $h=1/(n+1)$, имеем:

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}L_2(\Omega_m;\mathcal{D},h),L_2)=\lambda_n^{-2r}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}\sim\frac{e^m}{\lambda_n^{2r}}.$$

Теорема 2.1.2. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $0<h<1$, $\varphi\ge 0$ - суммируемая на интервале $(0,h)$ неэквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной $n\in\mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2)=E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi))_{L_2}=$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}, \tag{2.1.4}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ *— любой из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), d^n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} := \sup\{E_n(f)_2 : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)_{L_2}\}.$$

Доказательство. Оценку сверху всех перечисленных n-поперечников получаем из неравенства (1.4.7), соотношения (2.1.1) и определения класса функций $\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$:

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi), L_2) \le d_n(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi); L_2) \le$$

$$\le E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi))_{L_2} \le \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \tag{2.1.5}$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathcal{P}_n \cap L_2$ рассмотрим шар

$$S_{n+1} := \left\{ q_n \in \mathcal{P}_n : \|q_n\|_2 \le \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} \right\}$$

и докажем включение $S_{n+1} \subset \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$. Для произвольного полинома

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(q_n) J_\nu(\lambda_k x) \subset S_{n+1}$$

на основании формул (1.4.4), (1.4.5) и монотонного возрастания элементов последовательности собственных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ имеем

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r q_n, t) = \left\{ \sum_{k=1}^n (1-(1-t)^k)^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \lambda_n^{2r} (1-(1-t)^n)^m \left\{ \sum_{k=1}^n c_k^2(q_n) \right\}^{1/2} = \lambda_n^{2r} (1-(1-t)^n)^m \|q_n\|. \tag{2.1.6}$$

Возведя левую и правую части неравенства (2.1.6) в степень p, умножая их на весовую функцию φ и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=h$, получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r q_n,t)\varphi(t)dt \le \lambda_n^{2rp}\|q_n\|^p\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt \le$$

$$\le \lambda_n^{2rp}\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\lambda_n^{-2rp}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1} = 1,$$

и, следовательно, включение $S_{n+1}\subset \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi)$ доказано. Но тогда на основании определения бернштейновского n-поперечника и соотношения (2.1.1) между n-поперечниками запишем оценки снизу

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2) \ge b_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi),L_2) \ge$$

$$\ge b_n(S_{n+1};L_2) \ge \lambda_n^{-2r}\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{2.1.7}$$

Сравнением оценки сверху (2.1.6) и оценки снизу (2.1.7) получаем требуемое равенство (2.1.4). Теорема 2.1.2 доказана.

Из доказанной теоремы вытекает ряд утверждений.

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы* 2.1.2 *при* $\varphi_\star(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star)) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\Omega_m;h,\varphi_\star) =$$

$$= \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{2.1.8}$$

В качестве второго следствия теоремы 2.1.2 будем рассматривать экстремальную задачу вычисления точной верхней грани модулей коэффициентов Фурье-Бесселя $c_n(f)$. Такая задача для периодических классов функций рассмотрена, например, в работе [19], а для коэффициентов Фурье разложения функций по ортогональным с весом полиномов в работе [5].

Для рассматриваемых здесь классов функций эта задача также представляет определённый интерес.

Следствие 2.1.2. *Пусть* $0 < p \le 2$. *Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} =$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.1.9)$$

Доказательство. Воспользуясь свойством ортогональности частичной суммы Фурье–Бесселя

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f) J_\nu(\lambda_k x),$$

для произвольной функции $f \in L_2$, запишем равенство

$$c_n(f) = \int\limits_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx = \int\limits_0^1 x(f(x) - S_{n-1}(f, x)) J_\nu(\lambda_n x) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \{\sqrt{x}(f(x) - S_{n-1}(f, x))\}\{\sqrt{x} J_\nu(\lambda_n x)\} dx. \qquad (2.1.10)$$

Оценив по модулю равенство (2.1.10) и применив неравенства Коши-Буняковского и формулу (1.2.3), получаем соотношение

$$|c_n(f)| \le \|f - S_{n-1}(f)\| \cdot \|J_\nu(\lambda_n \cdot)\| = \|f - S_{n-1}(f)\| = E_{n-1}(f). \qquad (2.1.11)$$

Из формул (2.1.4) и (2.1.11) получаем оценку сверху модулей коэффициентов Фурье-Бесселя на всём классе функций:

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} \le E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)) =$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1 - (1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.1.12)$$

Для получения оценки снизу величины, записанной в левой части неравенства (2.1.12), рассмотрим функцию

$$g_0(x) := \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p} J_\nu(\lambda_n x),$$

которая, легко проверить, содержится в шаре S_{n+1}, введенном при доказательстве теоремы 2.1.2. Но, так как $S_{n+1} \subset \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)$, то функция g_0 принадлежит этому же классу. Следовательно,

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}_p^{(r)} L_2(\Omega_m; h, \varphi)\} \geq c_n(g_0) =$$

$$= \lambda_n^{-2r} \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} \varphi(t) dt \right)^{-1/p}. \qquad (2.1.13)$$

Из сравнения оценки сверху (2.1.12) и оценки снизу (2.1.13) следует утверждение следствия 2.1.2.

§2.2. Значения n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $L_{2,\nu}$

Введём класс функций, вытекающих из результата теоремы 1.6.1, для которой вычислим точные значения перечисленных в параграфе 2.1 n-поперечников.

Неубывающую на положительной полуоси $[0,\infty)$ функцию Φ называют k-можарантой, если функция $\Phi(t)/t^k, k\in\mathbb{N}$ не возрастает на $(0,\infty), \Phi(0)=0$ и при $t\to 0, \Phi(t)\to 0$ (см., например, [20]). Множество всех k-мажорант обозначим символом $\mathscr{F}^k$. Через $W_{2,k}^{(r)}(\mathscr{K}_m;\Phi), r\in\mathbb{Z}_+, m,k\in\mathbb{N}$ обозначим класс функций $f\in L_{2,\nu}^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r f, t^m)\le\Phi(t^m)$, где $0<t\le 1$ – любое число, а мажоранта Φ – произвольная функция, принадлежащая $\mathscr{F}^k$. В случае $k=1$ вместо символа $W_{2,1}^{(r)}(\mathscr{K}_m;\Phi)$ будем писать $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m;\Phi)$.

Теорема 2.2.1. *Для любых $m,n\in\mathbb{N}$ и $r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место следующие равенства*

$$\rho_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi),L_{2,\nu}\right)=E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)\right)_{2,\nu}=\lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}),\qquad(2.2.1)$$

где $\rho_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot),d_n(\cdot),d^n(\cdot),\delta_n(\cdot),\Pi_n(\cdot)$, а

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\nu}:=inf\left\{E_{n-1}(f)_{2,\nu}:\ f\in L_{2,\nu}\right\}$$

для $\mathfrak{M}\subset L_{2,\nu}$.

Доказательство. Из соотношения между n-поперечниками (1.6.24) и равенством (1.6.15) с учётом определения класса $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)$ запишем оценки сверху

$$\rho_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi),L_{2,\nu}\right)\le E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)\right)_{2,\nu}=$$
$$=\sup\left\{E_{n-1}(f)_{2,\nu}:f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Phi)\right\}\le\lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}).\qquad(2.2.2)$$

Для получения оценок снизу рассматриваемых n-поперечников вводим в рассмотрение шар

$$\tilde{S}_{n+1}:=\left\{q_n\in\mathcal{P}_n:\|q_n\|_{2,\nu}\le\lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m})\right\}$$

и покажем, что $\tilde{S}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$. Теперь заметим, что мажоранта Φ в силу определения классе $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$ принадлежит семейству $\mathscr{F}^1$. В самом деле, согласно определению $\mathscr{F}^1$ для любых значений $0 < x_1 \leq x_2 < 1$ выполняется неравенство

$$x_2\Phi(x_1) \geq x_1\Phi(x_2). \tag{2.2.3}$$

Полагая $x_1 = t_1^m, x_2 = t_2^m$, где $0 < t_1 \leq t_2 < 1$, из неравенства (2.2.2) имеем

$$\frac{\Phi(t_1^m)}{\Phi(t_2^m)} \geq \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m. \tag{2.2.4}$$

Воспользуемся также неравенством

$$\|\mathcal{D}^{r+m}q_n\|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2(r+m)}\|q_n\|_{2,\nu}, \ q_n \in \mathcal{P}_n, \tag{2.2.5}$$

вытекающим из соотношения (1.6.21). Пусть сначала $0 < t \leq 1/\lambda_n$. В этом случае полагаем в неравенстве (2.2.4) $t_1 = t^2, t_2 = 1/\lambda_n^2$, применяя второе неравенство из (1.6.22), а также (2.2.5), для любого $q_n \in \tilde{S}_{n+1}$ получаем

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^{r+m}q_n, t^{2m}) \leq t^{2m}\|\mathcal{D}^{r+m}q_n\|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2(r+m)} \cdot t^{2m}\|q_n\|_{2,\nu} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{2(r+m)} \cdot t^{2m} \cdot \lambda_n^{-2r} \cdot \Phi(\lambda_n^{-2m}) = t^{2m}\lambda_n^{2m}\Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}). \tag{2.2.6}$$

Далее, полагая $1/\lambda_n \leq t < 1$ и используя первое неравенство из соотношения (1.6.22) и неравенство (1.6.21), а также учитывая, что Φ – неубывающая функция, для произвольного $q_n \in \tilde{S}_{n+1}$ получаем

$$\mathscr{K}_m(\mathcal{D}^r q_n, t^{2m}) \leq \|\mathcal{D}^r q_n\|_{2,\nu} \leq \lambda_n^{2r}\|q_n\|_{2,\nu} \leq$$

$$\leq \lambda_n^{2r} \cdot \lambda_n^{-2r} \cdot \Phi(\lambda_n^{-2m}) = \Phi(\lambda_n^{-2m}) \leq \Phi(t^{2m}). \tag{2.2.7}$$

Из неравенств (2.2.6) и (2.2.7) следует включение $\tilde{S}_{n+1} \subset W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$. Пользуясь соотношениями (2.1.1) и определением бернштейновского n-поперечника, запишем оценки снизу

$$\rho_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}\right) \geq b_n\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi), L_{2,\nu}\right) \geq$$

$$\geq b_n(\tilde{S}_{n+1}; L_{2,\nu}) \geq \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}). \tag{2.2.8}$$

Теперь равенство (2.2.1) следует из сравнения оценок (2.2.2) и (2.2.8), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1 *справедливы равенства*

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right\} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}). \tag{2.2.9}$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_{2,\nu}$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенства

$$b_n^2(f) = \|j_\nu(\lambda_n x)\|_{2,\nu}^{-2}\int\limits_0^1 x^{2\nu+1} f(x) j_\nu(\lambda_n x)dx =$$

$$= \|j_\nu(\lambda_n x)\|_{2,\nu}^{-2}\int\limits_0^1 x^{2\nu+1}\{f(x) - S_{n-1}(f,x)\} j_\nu(\lambda_n x)dx =$$

$$= \|j_\nu(\lambda_n x)\|_{2,\nu}^{-2}\int\limits_0^1 \left\{x^{2\nu+1}[f(x) - S_{n-1}(f,x)]\right\}\left\{x^{(2\nu+1)/2} j_\nu(\lambda_n x)\right\}dx, \tag{2.2.10}$$

где $S_{n-1}(f)$ – частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье-Бесселя функции f по системе специальных функций $\{j_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{n-1}$, ортонормированных с весом $x^{2\nu+1}$ на отрезке $(0,1)$. Применяя к правой части равенства (2.2.10) неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|b_n(f)| \le \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\nu} = E_{n-1}(f)_{2,\nu}. \tag{2.2.11}$$

Из соотношений (2.2.1) и (2.2.11) запишем оценку сверху

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right\} \le E_{n-1}\left(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right)_{2,\nu} \le$$

$$\le \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}). \tag{2.2.12}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (2.2.12), вводим в рассмотрение экстремальную функцию

$$g_0(x) := \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}) j_\nu(\lambda_n x)\|j_\nu(\lambda_n x)\|^{-1},$$

которая, как легко проверить, является элементом шара S_{n+1}, введённого нами в теореме 2.2.1, а потому принадлежит классу $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)$.

Следовательно,

$$\sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Phi)\right\} \geq |a_n(g_0)| =$$

$$= \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}). \tag{2.2.13}$$

Сравнивая оценку сверху (2.2.12) с оценкой снизу (2.2.13), получаем равенство (2.2.9). Следствие 2.2.1 доказано.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные оценки скорости сходимости ряда Фурье-Бесселя на некоторых классах функций, задаваемых дифференциальным оператором второго порядка и характеризующихся усреднённым значением обобщённого модуля непрерывности m-го порядка в пространстве L_2 ;
- найдены точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_2\left([0,1], x^{2\nu+1}dx\right), \nu > -\frac{1}{2}$;
- найдено точное неравенство Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье-Бесселя и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя второго порядка;
- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка.

Дальнейшее развитие исследований по теме диссертационной работы может быть связано с рассмотрением аналогичных задач для функций двух переменных, поскольку именно в случае функций двух переменных указанные задачи имеют применение в задачах электродинамики, небесной механики и современной прикладной математики.

Список литературы

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд. – М.: Наука. 1988. 512 с.

2. Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье – Бесселя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015, т.55, №6, С. 917-927.

3. Фёдоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева – Эрмита // Известия вузов. Математика. 1984, №6, С. 55-63.

4. Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышева – Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Математика. Механика. 1997, №6, С. 68-71.

5. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1};[-1,1]\right)$ // Известия Тульского госуниверситета. Естест. науки. 2014, вып. 1, ч.1, С. 83-97.

6. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал. 2011, т.52, №6, С. 1414-1427.

7. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. вісник. 2014, т.11, №3, С. 417-441.

8. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшей аппроксимации в среднем алгебраическими полиномами с весом и точных значениях поперечников классов функций // Укр. матем. журнал, 2013, т. 65, №12, С. 1604–1621.

9. Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье-Бесселя // Известия вузов. Математика. 2001, т. 18, №8, С. 3–9.

10. Левитан Б.М. Теория операторов обобщённого сдвига. – М.: Наука, 1973, 312 с.

11. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1970, 671 с.

12. Ditzian Z., Totik V. K-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx.Theory. 1986, V.46, №1, P.38–41.

13. Löfstróm J., Peetre J. Approximation theorems connected with generalized translations // Math.Ann. 1969, V.181, P. 255-268

14. Ditzian Z., Totik V. Moduli of smoothness. –New York etc.: Springer-Verlag, 1987, 228 p.

15. Feng Dai. Some equivalence theorems with K-functionals // J. Appr. Theory. 2003, V.121, P. 143-157.

16. Белкина Е.С., Платонов С.С. Эквивалентность $\mathcal{K}$-функционалов и модулей гладкости, построенных по обобщенным сдвигам Данкля // Известия вузов. Математика. 2008, №8, С. 3-15.

17. Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer–Verlag. 1985, 292 p.

18. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений, –М. МГУ, 1976. 318 с.

19. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012, Т. 38, №2, С. 154–165.

20. Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, 225 с.

21. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971, 288 с.

22. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона-Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых клас-

сов функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015, т.21, №4, С. 292-308.

23. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Усп. матем. наук. 1951, т. 6, №2, С. 102–143.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и Российской Федерации:

24. Шабозов М.Ш., Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье-Бесселя и значения n-поперечников некоторых классов функций // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015, №2, С. 39-47.

25. Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя и значения $\mathcal{K}$–функционалов // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015, №4(161), С. 16-26.

26. Муродов К. Н. Верхние грани среднеквадратических приближений некоторых классов функций частичными суммами Фурье-Бесселя заданного порядка // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 - 25 августа 2016 г., С. 176-181.

27. Тухлиев К., Муродов К. Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $l_{2,\nu}$ и значения поперечников некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд.физ.-мат.,хим., геол. и техн. н. 2017, №2(167), С. 17-29.

28. Муродов К.Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя и значение поперечников функциональных классов // ДАН РТ. 2017, т.60, №1-2, С. 20-25.

В других изданиях:

29. Тухлиев К., Муродов К.Н. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье - Бесселя в пространстве L_2 // В материалах международной научно-практической конференции „Тенденции и переспективы развития науки XXI век"(Екатренбург, 18 октябр 2015 г.), С. 14-16.

30. Муродов К.Н. О приближении функций суммами Фурье-Бесселя в гильбертовом пространстве //В материалах республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы естественных наук", 24 ноября 2017 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Душанбе, С. 29-31.

31. Муродов К.Н. Точные верхние грани наилучших приближений суммами Фурье-Бесселя в пространстве $L_{2,\nu}$ // В материалах международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений", посвящённой 70-летию академика АН РТ Илолова М. (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.), С. 38-40.

32. Муродов К.Н. Точные значение n-поперечников некоторых классов функций //В материалах международной конференции „Современные проблемы математики и её приложений", 21-22 июня 2018 г., Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова, Душанбе, С. 67-68.

33. Муродов К.Н. Наилучшие приближения функций суммами Фурье-Бесселя и точные значение поперечников некоторых классов функций // В материалах республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировозрения общества" посвященная 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан, 26-27 октября 2018 г., ХГУ им. Б.Гафурова, Худжанд, С. 42-46.