Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5 На правах рукописи

Рахимзода Фарахноз

НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В L_2

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана,
доктор физико-математических наук
профессор М.Ш. Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2021

Оглавление

Введение

В диссертации решен ряд экстремальных задач наилучшего среднеквадратического совместного приближения комплекснозначных функций и их производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в гильбертовом пространстве L_2. При этом структурные характеристики функций и их производных определяются усреднённым с весом значением норм конечных разностей в метрике пространства L_2.

На классах функций $f \in L_2$, определяемых усреднёнными значениями с весом норм конечных разностей произвольного порядка, вычислены верхние грани наилучших совместных среднеквадратических приближений функций и их производных тригонометрическими полиномами в L_2. Полученные результаты являются точными и представляют возможность найти точное значения n-поперечников указанных класов функций.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Теория приближения функций – одна из наиболее важных частей математического анализа, возникшая в результате развития математической науки и потребностей практики, эта теория продолжает интенсивно развиваться на протяжении многих десятилетий. В ней рассматривается одна из фундаментальных проблем математики – приближение сложных объектов более простыми и более удобными. Именно эта идея стимулирует развитие теории приближения функций и связанные с нею экстремальные задачи аппроксимации. Основным объектом теории приближения функций являются задачи, связанные с необходимостью заменить сложные функции линейными суммами конечного числа более простых функций так, чтобы возникающая при этом погрешность была возможно наименьшей. Если о функции известны лишь некоторые общие свойства, то целесообразно рассматривать задачу приближения класса таких функций.

При этом если класс состоит из периодических функций, то в качестве приближающего аппарата рассматривают подпространство тригонометрических полиномов и структурные свойства характеризуются модулем непрерывности функций заданного порядка.

В диссертационной работе установлены окончательные оценки наилучшего совместного приближения периодических комплекснозначных функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными. На классах функций, у которых усреднённые с весом нормы конечных разностей ограничены сверху заданной мажорантой, вычислены точные значения различных n-поперечников в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$.

Отметим, что вопросами приближения периодических функций в различных нормированных пространствах занимались С.Н.Бернштейн, А.Н.Колмогоров, С.М.Никольский, М.Г.Крейн, Н.И.Ахиезер, С.Б.Стечкин, В.К.Дзядык, А.В.Ефимов, Н.П.Корнейчук, С.А.Теляковский и многие другие.

Вопросами нахождения точных неравенств в экстремальных задачах теории приближения и отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина в разные времена занимались Н.П.Корнейчук, С.Б.Стечкин, В.И.Бердышев, Н.И.Черных, Л.В.Тайков, Н.Айнуллоев, С.Б.Вакарчук, Ю.Хусейн, М.Ш.Шабозов, Г.А.Юсупов и многие другие.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами, темами). Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. и на 2021-2025 гг. по теме "Теория аппроксимации функций".

Цели и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точную константу в неравенстве Джексона между величиною наилучшего среднеквадратического совместного приближения комплекснозначных функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в метрике пространства L_2;
- найти точные неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных функции и их производных на классах функций, характеризующихся усреднёнными значениями нормы разности m-го $(m \geq 2)$ порядка в L_2;
- найти точные неравенства типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2;
- вычислить точные значения различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков;
- вычислить точные значения n-поперечников на классах функций, нормы разности которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху заданной мажорантой.

Основные методы исследования. В работе широко используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций в нормированных пространствах, а также современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания в функциональных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- решена экстремальная задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона между величиною совместного приближения комплекснозначных функций и их производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в пространстве L_2;
- найден явный вид точного неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных функций и их производных посредством усреднённых значений норм конечных разностей m-го порядка в L_2;
- найдено точное неравенство типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2;
- вычислены точные значения различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков;
- вычислены значения n-поперечников классов функций, нормы разностей которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху заданной мажорантой.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках наилучшего совместного приближения функций и их производных в L_2 тригонометрическими полиномами;
- теорема о точной константе в неравенстве Джексона между наилучшими

совместными приближениями и их производными тригонометрическими полиномами и усреднённым значением норм разностей первого порядка;

- теоремы о точных константах в неравенстве Джексона-Стечкина между наилучшим совместном приближением функций и их производных и усреднённым значением норм конечной разности m-го порядка функций в L_2;
- теорема о точном неравенстве Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым значением норм конечной разности высших порядков;
- теорема о точных значениях n-поперечников классов функций, нормы разностей высших порядков которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху мажорантной функцией.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы и схема их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под рукодводством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг);
- на международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложений” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);

- на международной научной конференции “Современные проблемы алгебры и теории чисел” (Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.);
- республиканской научной конференции “Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- на международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений ” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.).

Публикации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 6 научных работах, из них 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан, а 3 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 42 наименования, занимает 72 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Наилучшее среднеквадратическое приближение классов периодических дифференцируемых функций, определяемых нормами разности m-го порядка, в пространстве L_2

§ 1.1. Определения, обозначения и вспомогательные факты

1.1.1. Ряд Фурье в комплексном виде

Всюду далее $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, целых, положительных и действительных чисел; $L_2 := L_2[-\pi, \pi]$ — пространства суммируемых с квадратом по Лебегу 2π-периодических комплекснозначных функций с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[-\pi,\pi]} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1.1}$$

Множество периодических комплекснозначных полиномов вида

$$p_n(z) = \sum_{|k|\leq n} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}, \quad a_k \in \mathbb{C} \tag{1.1.2}$$

обозначим через $\mathscr{P}_n$.

Далее предполагается, что любая 2π-периодическая комплекснозначная функция $f(x)$, норма которой удовлетворяет условию (1.1.1), имеет разложение в ряд Фурье в комплексном виде

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \tag{1.1.3}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{1.1.4}$$

— коэффициенты Фурье в комплексном виде.

Легко показать, что любой тригонометрический полином вида

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big), \quad \alpha_0,\, \alpha_k,\, \beta_k \in \mathbb{R} \tag{1.1.5}$$

можно записать в комплексном виде (1.1.2). В самом деле, воспользуясь формулами Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

тригонометрический полином $T_n(x)$ запишем в виде

$$T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big) =$$

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + \beta_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} e^{ikx} + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} e^{-ikx}\right). \tag{1.1.6}$$

Введя обозначение

$$a_k := \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad a_{-k} := \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2}, \quad a_k = a_{-k}, \quad a_0 = \alpha_0, \tag{1.1.7}$$

равенство (1.1.6) запишем в виде

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k e^{ikx} + a_{-k} e^{-ikx}\big) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} a_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}. \tag{1.1.8}$$

Таким образом, между всеми тригонометрическими полиномами $\mathscr{T}_{2n+1} = \big\{T_n(x)\big\}$ вида (1.1.5) и всеми комплекснозначными полиномами $\mathscr{P}_n = \big\{p_n(x)\big\}$ вида (1.1.2) установлено взаимно однозначное соответствие. Это соответствие обеспечит возможность любой ряд Фурье функции $f \in L_2$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big), \tag{1.1.9}$$

где

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k\in\mathbb{Z}, \\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k\in\mathbb{N} \end{aligned} . \qquad (1.1.9)'$$

— коэффициенты Фурье функции $f\in L_2$, записать в следующей комплексной форме

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}. \qquad (1.1.10)$$

В соотношении (1.1.10) коэффициенты $c_k(f)$ по аналогии с равенствами (1.1.7) определены равенствами

$$c_k(f)=\frac{a_k(f)-ib_k(f)}{2},\ c_{-k}(f):=\frac{a_k(f)+ib_k(f)}{2},\ c_0(f)=\frac{1}{2}a_0(f) \qquad (1.1.11)$$

и имеют общий вид

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k\in\mathbb{Z}. \qquad (1.1.12)$$

1.1.2. Среднеквадратическое полиномиальное приближение функций в пространстве $L_2:=L_2[-\pi,\pi]$

Экстремальная задача нахождения точного значения среднеквадратического наилучшего полиномиального приближения функции $f\in L_2$ комплекснозначными полиномами вида (1.1.2) состоит в отыскании величины [34–36]

$$E_n(f)_2:=E_n(f)_{L_2}=E(f,\mathscr{P}_n)_{L_2}=$$

$$=\inf\left\{\big\|f-p_n\big\|_2:\ p_n\in\mathscr{P}_n\right\}. \qquad (1.1.13)$$

Докажем следующее важное утверждение.

Лемма 1.1.1. *Среди всех комплекснозначных полиномов вида* (1.1.2) *наилучшее среднеквадратическое полиномиальное приближение функции* $f \in L_2$ *доставляет частная сумма* n*-го порядка*

$$S_n(f,x) = \sum_{|k|\le n} c_k(f) e^{ikx} \tag{1.1.14}$$

ряда Фурье (1.1.10). *При этом*

$$E_n(f)_2 = \big\| f - S_{n-1} \big\|_2 = \left\{ 2 \sum_{|k|\ge n+1} \big| c_k(f) \big|^2 \right\}^{1/2}. \tag{1.1.15}$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2$ и $p_n(x) \in \mathscr{P}_n$ — произвольный полином вида (1.1.2). Тогда, пользуясь тем, что система функций $\left\{ e^{ikx} \right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ортогональна в $L_2[-\pi,\pi]$, то есть

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\cdot e^{-ilx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x}dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \ne l, \\ 2, & \text{если} \quad k = l, \end{cases}$$

получим

$$\big\| f - p_n \big\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big| f(x) - p_n(x) \big|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx} \right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{|k|\le n} \big(c_k(f) - a_k\big)e^{ikx} + \sum_{|k|\ge n+1} c_k(f)e^{ikx} \right|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{|k|\le n} \big(c_k(f) - a_k\big)e^{ikx} + \sum_{|k|\ge n+1} c_k(f)e^{ikx} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{|l|\le n} \big(\overline{c}_l(f) - \overline{a}_l\big)e^{-ilx} + \sum_{|l|\ge n+1} \overline{c}_l(f)e^{-ilx} \right) dx =$$

$$= \sum_{|k|\le n} \sum_{|l|\le n} \big(c_k(f) - a_k\big)\big(\overline{c}_l(f) - \overline{a}_l\big) \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx +$$

$$+ \sum_{|k|\le n} \sum_{|l|\ge n+1} \big(c_k(f) - a_k\big)\overline{c}_l(f) \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx +$$

$$+ \sum_{|k|\ge n+1} \sum_{|l|\le n} c_k(f)\big(\overline{c}_l(f) - \overline{a}_l\big) \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx +$$

$$+ \sum_{|k|\ge n+1} \sum_{|l|\ge n+1} c_k(f)\overline{c}_l(f) \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx =$$

$$= 2 \sum_{|k|\le n} \big|c_k(f) - a_k\big|^2 + 2 \sum_{|k|\ge n+1} \big|c_k(f)\big|^2.$$

Таким образом, мы доказали, что если $f \in L_2$ и $p_n(x) \in \mathscr{P}_n$, то

$$\big\|f - p_n\big\|_2^2 = 2 \left\{ \sum_{|k|\le n} \big|c_k(f) - a_k\big|^2 + \sum_{|k|\ge n+1} \big|c_k(f)\big|^2 \right\}. \tag{1.1.16}$$

Из соотношения (1.1.16) получаем

$$E_n^2(f)_2 = \inf \left\{ \big\|f - p_n\big\|_2^2 : \ p_n(x) \in \mathscr{P}_n \right\} =$$

$$= 2 \left\{ \sum_{|k|\le n} \big|c_k(f) - a_k\big|^2 + \sum_{|k|\ge n+1} \big|c_k(f)\big|^2 \right\} = \Big|a_k = c_k(f)\Big| =$$

$$= 2 \sum_{|k|\ge n+1} \big|c_k(f)\big|^2 = \Big\|f - S_n(f)\Big\|_2^2,$$

откуда и следует утверждение леммы 1.1.1.

Из доказанной леммы 1.1.1 вытекает известное утверждение о том, что если функция $f \in L_2$ имеет разложение в ряд Фурье (1.1.9) с коэффициентами

$(1.1.9)'$ и

$$S_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big)$$

— частичная сумма n-го порядка ряда (1.1.9), то

$$E_n(f)_2=\Big\|f-S_n(f)\Big\|_2=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\big)\right\}^{1/2}. \tag{1.1.17}$$

Полагая

$$\rho_k^2(f):=a_k^2(f)+b_k^2(f),\quad k\in\mathbb{N},$$

равенство (1.1.17) запишем в виде

$$E_n(f)_2=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{1.1.18}$$

Теперь покажем, что равенство (1.1.18) является следствием формулы (1.1.15). Действительно, из равенств (1.1.11) следует, что

$$\big|c_k(f)\big|^2+\big|c_{-k}(f)\big|^2=\big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\big)/2, \tag{1.1.19}$$

а потому из (1.1.15) имеем:

$$E_n^2(f)_2=2\sum_{|k|\ge n+1}\big|c_k(f)\big|^2=2\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big\{\big|c_k(f)\big|^2+\big|c_{-k}(f)\big|^2\Big\}=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\big)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\rho_k^2(f). \tag{1.1.20}$$

Всюду в дальнейшем, ради удобства изложения, равенства (1.1.15) и (1.1.20) будем использовать в более удобном для нас виде

$$E_{n-1}(f)_2=\left\{2\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2\right\}^{1/2}, \tag{1.1.21}$$

$$E_{n-1}(f)_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{1.1.22}$$

В дальнейшем через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество комплекснозначных функций $f(x)$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а производная r-го порядка $f^{(r)}(x) \in L_2$.

Пусть $s \in [0, r]$, $r \in \mathbb{N}$. Дифференцируя s раз ряд (1.1.10), будем иметь

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^s c_k(f) e^{ikx}. \tag{1.1.23}$$

Применяя к равенству (1.1.23) равенство Парсеваля, запишем

$$\left\| f^{(s)} \right\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s} \left| c_k(f) \right|^2. \tag{1.1.24}$$

При $s = r$ из (1.1.24) запишем

$$\left\| f^{(r)} \right\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2r} \left| c_k(f) \right|^2. \tag{1.1.25}$$

В теории аппроксимации функций $f \in L_2$ весьма важным является задача наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации в метрике L_2, то есть требуется найти точное значение следующей величины

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 := \inf \left\{ \left\| f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)} \right\|_2 : \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1} \right\} \tag{1.1.26}$$

на классе $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$.

Пользуясь схемой доказательства леммы 1.1.1, легко доказать равенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 = \left\{ 2 \sum_{|k| \geq n} |k|^{2s} \left| c_k(f) \right|^2 \right\}^{1/2}. \tag{1.1.27}$$

Из равенства (1.1.27), в частности, для задачи наилучшего совместного приближения функций $f \in L_2$ с рядом Фурье (1.1.9) обычными тригонометрическими полиномами $T_{n-1}(x) \in \mathscr{T}_{2n-1}$ будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 := \inf\left\{\left\|f^{(s)} - T_{n-1}^{(s)}\right\|_2 :\ T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}\right\} =$$

$$= \left\|f^{(s)} - S_{n-1}^{(s)}(f)\right\|_2 = \left\|f^{(s)} - S_{n-1}\big(f^{(s)}\big)\right\|_2 =$$

$$= \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big)\right\}^{1/2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \qquad (1.1.28)$$

Условимся всюду далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ предполагать, что $f \neq \mathrm{const}$.

Лемма 1.1.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} = \frac{1}{n^{r-s}}. \qquad (1.1.29)$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что в предположении леммы имеет место неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f^{(r)})_2. \qquad (1.1.30)$$

Из равенства (1.1.27) при $s = r$ запишем

$$E_{n-1}^2(f^{(r)})_2 = 2\sum_{|k|\geq n} |k|^{2r}\big|c_k(f)\big|^2. \qquad (1.1.31)$$

Из того же равенства (1.1.27) при всех $s = 0, 1, \cdots, r-1$, $r \in \mathbb{N}$, учитывая равенство (1.1.31), получаем

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 = 2\sum_{|k|\geq n} |k|^{2s}\big|c_k(f)\big|^2 = 2\sum_{|k|\geq n} |k|^{-2(r-s)+2r}\big|c_k(f)\big|^2 \leq$$

$$\leq n^{-2(r-s)} \cdot 2\sum_{|k|\geq n} |k|^{2r}\big|c_k(f)\big|^2 = n^{-2(r-s)} \cdot E_{n-1}^2(f^{(r)})_2,$$

откуда сразу следует неравенство (1.1.30).

Теперь из неравенства (1.1.30) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части (1.1.29):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} \le \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{1.1.32}$$

Для получения оценки снизу той же величины введём в рассмотрение комплекснозначную функцию

$$f_0(x) = e^{inx} \in L_2^{(r)}, \quad n, r \in \mathbb{N}, \tag{1.1.33}$$

для которой

$$f_0^{(s)}(x) = (in)^s e^{inx}, \quad s = \overline{0, r-1};\ r \in \mathbb{N}, \tag{1.1.34}$$

$$f_0^{(r)}(x) = (in)^r e^{inx}, \quad n, r \in \mathbb{N} \tag{1.1.35}$$

и, в силу равенств (1.1.27) и (1.1.31), будем иметь

$$E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2 = n^s, \quad E_{n-1}\big(f_0^{(r)}\big)_2 = n^r. \tag{1.1.36}$$

Учитывая равенства (1.1.36), запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-1}(f^{(r)})_2} \ge \frac{E_{n-1}(f_0^{(s)})_2}{E_{n-1}(f_0^{(r)})_2} = \frac{n^s}{n^r} = \frac{1}{n^{r-s}}. \tag{1.1.37}$$

Равенство (1.1.29) следует из сопоставления неравенства (1.1.32) и равенств (1.1.36). Лемма 1.1.2 доказана.

1.1.3. Норма разности m-го порядка функции $f \in L_2^{(r)}$

Для произвольной комплекснозначной функции $f \in L_2$ с рядом Фурье (1.1.10) разности первого и второго порядка в точке x с шагом h определим равенствами

$$\Delta_h^1(f, x) = f(x+h) - f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}(e^{ikh} - 1),$$

$$\Delta_h^2(f,x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}(e^{i2kh}-2e^{ikh}+1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}(e^{ikh}-1)^2.$$

Методом математической индукции разность m-го порядка для любого $m\in\mathbb{N}$ получаем

$$\Delta_h^m(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}(e^{ikh}-1)^m. \tag{1.1.38}$$

Применяя к равенству (1.1.38) равенства Парсеваля, будем иметь

$$\Big\|\Delta_h^m(f)\Big\|_2^2=2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\big|c_k(f)\big|^2\big|e^{ikh}-1\big|^{2m}. \tag{1.1.39}$$

Но так как

$$\big|e^{ikh}-1\big|^{2m}=\big|(\cos kh-1)+i\sin kh\big|^{2m}=$$

$$=\Big(\sqrt{(1-\cos kh)^2+\sin^2 kh}\Big)^{2m}=\Big(1-2\cos kh+\cos^2 kh^2+\sin^2 kh\Big)^m=$$

$$=\big(2-2\cos kh\big)^m=2^m\big(1-\cos kh\big)^m, \tag{1.1.40}$$

то с учётом равенств (1.1.40) соотношение равенству (1.1.39) запишем в виде

$$\Big\|\Delta_h^m(f)\Big\|_2^2=2^{m+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\big|c_k(f)\big|^2\big(1-\cos kh\big)^m. \tag{1.1.41}$$

Характеристики гладкости (1.1.41) является нашим основным инструментом для получении всех последующих результатов о наилучших совместных приближениях самой функции и всех её последовательных производных тригонометрическими полиномами в метрике пространства $L_2:=L_2[-\pi,\pi]$.

Заметим, что из равенства (1.1.41) для разности m-го порядка обычной функции $f(x)\in L_2$ с разложением в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\big),$$

исходя из обозначений (1.1.19) вида

$$2\Big(\big|c_k(f)\big|^2+\big|c_{-k}(f)\big|^2\Big)=a_k^2(f)+b_k^2(f)=\rho_k^2(f),$$

получаем

$$\Big\|\Delta_h^m(f)\Big\|_2^2=2^m\left\{\sum_{k=1}^{\infty}2\Big(\big|c_k(f)\big|^2+\big|c_{-k}(f)\big|^2\Big)\big(1-\cos kh\big)^m\right\}=$$

$$=2^m\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)\big(1-\cos kh\big)^m. \qquad (1.1.42)$$

Всюду далее при установлении точности результатов важную роль играет экстремальная комплекснозначная функция $f_0(x)=e^{inx}\in L_2^{(r)}$ $(n,r\in\mathbb{N}$, $L_2^{(0)}=L_2)$, ранее рассмотренная нами при доказательстве леммы 1.1.2 и для которой, кроме равенств (1.1.34) – (1.1.36), из (1.1.41) сразу следует, что

$$\Big\|\Delta_h^m(f_0)\Big\|_2^2=2^m\big(1-\cos nh\big)^m,\quad 0<nh\le\pi. \qquad (1.1.43)$$

Если же функция $f\in L_2^{(r)}$, то, как и выше, получаем

$$\Big\|\Delta_h^m(f^{(r)})\Big\|_2^2=2^{m+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^{2r}\big|c_k(f)\big|^2\big(1-\cos kh\big)^m, \qquad (1.1.44)$$

из которого также следует равенство

$$\Big\|\Delta_h^m(f^{(r)})\Big\|_2^2=2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)\big(1-\cos kh\big)^m. \qquad (1.1.45)$$

В частности, из (1.1.44) или, что то же, из (1.1.45) для функции $f_0(x)=e^{inx}\in L_2^{(r)}$ получаем

$$\Big\|\Delta_h^m(f_0^{(r)})\Big\|_2^2=2^m n^{2r}\big(1-\cos nh\big)^m. \qquad (1.1.46)$$

Равенствами (1.1.34) – (1.1.36), (1.1.43) и (1.1.46) далее воспользуемся при установлении точности полученных результатов для экстремальной функции $f_0(x)=e^{inx}\in L_2^{(r)}$.

§ 1.2. Теоремы о наилучшем совместном приближении комплекснозначных функций и их производных, характеризующихся нормой разности первого порядка в пространстве L_2

Напомним, что нормой разности первого порядка функции $f \in L_2$ называется величина

$$\Big\|\Delta_h(f)\Big\|_2 := \Big\|\Delta_h^1(f)\Big\|_2 = \Big\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\Big\|_2, \qquad (1.2.1)$$

где

$$\Big\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\Big\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|f(x+h) - f(x)\Big|^2 dx.$$

Из равенства (1.1.41) при $m = 1$ следует равенство

$$\Big\|\Delta_h(f)\Big\|_2^2 = 4\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big|c_k(f)\Big|^2\big(1 - \cos kh\big). \qquad (1.2.2)$$

Имеет место следующая

Теорема 1.2.1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любого $t \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int\limits_0^t \big\|\Delta_h(f)\big\|_2^2 dh} = \frac{nt}{2(nt - \sin nt)}. \qquad (1.2.3)$$

В частности, при $t = \pi/(2n)$ из (1.2.3) следует, что

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\dfrac{n}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/(2n)} \big\|\Delta_h(f^{(r)})\big\|_2^2 dh} = \frac{\pi}{\pi - 2}. \qquad (1.2.4)$$

Доказательство. Имеем

$$\Big\|\Delta_h(f)\Big\|_2^2 = 4\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big|c_k(f)\Big|^2\big(1 - \cos kh\big) \geq$$

$$\geq 4\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2\bigl(1-\cos kh\bigr)=$$

$$=4\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2-4\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2\cos kh=$$

$$=2E_{n-1}^2(f)_2-4\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2\cos kh.$$

Полученное неравенство, после деления обеих частей на 2, перепишем в виде

$$E_{n-1}^2(f)_2\leq\frac{1}{2}\Bigl\|\Delta_h(f)\Bigr\|_2^2+2\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2\cos kh. \tag{1.2.5}$$

Интегрируя обе части неравенства (1.2.5) по переменному h от $h=0$ до $h=t$, получим

$$tE_{n-1}^2(f)_2\leq\frac{1}{2}\int\limits_0^t\Bigl\|\Delta_h(f)\Bigr\|_2^2dh+2\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2\cdot\frac{\sin kt}{k}.$$

Поделив обе части полученного неравенства на t, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2\leq\frac{1}{2t}\int\limits_0^t\Bigl\|\Delta_h(f)\Bigr\|_2^2dh+2\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2\cdot\frac{\sin kt}{kt}. \tag{1.2.6}$$

Так как при $0<nt\leq\pi/2$

$$\max_{u\geq nt}\left|\frac{\sin u}{u}\right|=\frac{\sin nt}{nt}, \tag{1.2.7}$$

то из неравенства (1.2.6) следует, что

$$E_{n-1}^2(f)_2\leq\frac{\sin nt}{nt}\cdot 2\sum_{|k|\geq n}\bigl|c_k(f)\bigr|^2+\frac{1}{2t}\int\limits_0^t\Bigl\|\Delta_h(f)\Bigr\|_2^2dh,$$

или что то же

$$E_{n-1}^2(f)_2\leq\frac{\sin nt}{nt}\cdot E_{n-1}^2(f)_2+\frac{1}{2t}\int\limits_0^t\Bigl\|\Delta_h(f)\Bigr\|_2^2dh.$$

Отсюда получаем

$$\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)E_{n-1}^{2}(f)_{2}\le\frac{1}{2t}\int\limits_{0}^{t}\Big\|\Delta_{h}(f)\Big\|_{2}^{2}dh. \tag{1.2.8}$$

из (1.2.8) вытекает, что

$$E_{n-1}^{2}(f)_{2}\le\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\Big\|\Delta_{h}(f)\Big\|_{2}^{2}dh\right).$$

В полученном неравенстве функцию $f(x)$ заменим на производную $f^{(r)}(x)$, $r\in\mathbb{Z}_{+}$, получаем

$$E_{n-1}^{2}(f^{(r)})_{2}\le\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\Big\|\Delta_{h}(f^{(r)})\Big\|_{2}^{2}dh\right). \tag{1.2.9}$$

Применяя к (1.2.9) неравенство (1.1.29) в виде

$$E_{n-1}^{2}(f^{(s)})_{2}\le\frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot E_{n-1}^{2}(f^{(r)})_{2},\quad s=0,1,2,\cdots,r-1,$$

будем иметь

$$E_{n-1}^{2}(f^{(s)})_{2}\le\frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\Big\|\Delta_{h}(f^{(r)})\Big\|_{2}^{2}dh\right). \tag{1.2.10}$$

Отсюда вытекает нужная оценка сверху

$$\sup_{f\in L_{2}^{(r)}}\frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^{2}(f^{(s)})_{2}}{\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\Big\|\Delta_{h}(f^{(r)})\Big\|_{2}^{2}dh}\le\frac{nt}{2(nt-\sin nt)},\quad 0<nt\le\pi/2. \tag{1.2.11}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу, воспользуемся функцией $f_{0}(x)=e^{inx}\in L_{2}^{(r)}$, для которой, как мы установили в (1.1.36) и (1.1.46),

$$E_{n-1}^{2}(f^{(s)})_{2}=n^{2s},\quad\Big\|\Delta_{h}(f_{0}^{(r)})\Big\|_{2}^{2}=2n^{2r}\big(1-\cos nh\big)$$

и, в силу второго из этих равенств, имеем

$$\frac{1}{t}\int\limits_{0}^{t}\|\Delta_{h}(f_{0}^{(r)})\|_{2}^{2}dh=\frac{2n^{2r}}{t}\int\limits_{0}^{t}\big(1-\cos nh\big)dh=\frac{2(nt-\sin nt)}{nt}\cdot n^{2r}.$$

Таким образом, с учетом этих равенств получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h(f^{(r)})\right\|_2^2 dh} \geq \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f_0^{(s)})_2}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h(f_0^{(r)})\right\|_2^2 dh} =$$

$$= \frac{n^{2(r-s)}\,n^{2s}\,nt}{2n^{2r}(nt-\sin nt)} = \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}, \quad 0 < nt \leq \pi/2. \tag{1.2.12}$$

Из неравенств (1.2.11) и (1.2.12) следует требуемое равенство (1.2.3), из которого при $t = \pi/(2n)$ получаем (1.2.4), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Замечание. Доказанная теорема 1.2.1 является своеобразным обобщением известной теоремы Л.В.Тайкова [20] на случай наилучшего совместного полиномиального приближения функции $f \in L_2^{(r)}$ и её последовательных производные $f^{(s)} \in L_2$ $(s = 1, 2, \cdots, r-1,\ r \in \mathbb{N})$.

Так как модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2^{(r)}$ определяется равенством

$$\omega_m(f^{(r)}, \delta)_2 := \sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2 :\ ||h| \leq \delta\right\}, \tag{1.2.13}$$

то, в качестве следствия из теоремы 1.2.1 получаем

Теорема 1.2.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любом $t \in (0, \pi/n]$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, \tau)_2 d\tau} = \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}. \tag{1.2.14}$$

Доказательство. Так как

$$\left\|\Delta_h(f^{(r)})\right\|_2^2 \leq \omega^2(f^{(r)}, h)_2,$$

то из неравенства (1.2.10) получаем

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{nt}{2(nt-\sin nt)} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 dh \right) \le$$

$$\le \frac{1}{n^{2(r-s)}} \cdot \frac{nt}{2(nt-\sin nt)} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, h)_2 dh \right).$$

Отсюда следует оценка сверху

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, h)_2 dh} \le \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}. \tag{1.2.15}$$

Оценку снизу доставляет рассмотренная нами выше функция $f_0(x) = e^{inx} \in L_2^{(r)}$, для которой простые вычисления дадут равенства

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, h)_2 dh = n^{2r} \cdot \frac{2(nt-\sin nt)}{nt},$$

а потому имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, h)_2 dh} \ge \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f_0^{(s)})_2}{\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(f^{(r)}, h)_2 dh} =$$

$$= \frac{nt}{2(nt-\sin nt)}, \quad 0 < nt \le \pi/2. \tag{1.2.16}$$

Из неравенств (1.2.15) и (1.2.16) следует равенство (1.2.14), и этим теоремы 1.2.2 доказана. Отметим, что вышеупомянутая теорема Л.В.Тайкова [20] из (1.2.14) следует при $s = 0$.

Теорема 1.2.3. *При любых* $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и любого* $t \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)} E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 dh \right) dt} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))}, \tag{1.2.17}$$

где $Si(t) := \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u} du$ *— интегральный синус.*

Доказательство. Воспользуемся неравенством (1.2.6):

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq 2 \sum_{|k| \geq n} \left| c_k(f) \right|^2 \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_\tau(f) \right\|_2^2 d\tau.$$

Интегрируя полученное неравенство по переменному t от $t = 0$ до $t = h$ и поделив результат на h, будем иметь

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq$$

$$\leq 2 \sum_{|k| \geq n} \left| c_k(f) \right|^2 \cdot \frac{1}{h} \int\limits_0^h \frac{\sin kt}{kt} dt + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_\tau(f) \right\|_2^2 d\tau \right) dt.$$

Но так как

$$\frac{1}{h} \int\limits_0^h \frac{\sin kt}{kt} dt = \frac{1}{kh} \int\limits_0^{kh} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{Si(kh)}{kh},$$

то последнее неравенство перепишем в виде

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq 2 \sum_{|k| \geq n} \left| c_k(f) \right|^2 \cdot \frac{Si(kh)}{kh} + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_\tau(f) \right\|_2^2 d\tau \right) dt. \tag{1.2.18}$$

Теперь заметим, что функция

$$Si(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

при значениях $t \in [0, +\infty)$ монотонно возрастает от $S_i(0) = 0$ до $S_i(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$ (см., например, [13, с.123]), а функция $\dfrac{Si(kh)}{kh}$ в области ($n \le k < \infty$, $0 \le h < \infty$) монотонно убывает от $\dfrac{Si(nh)}{nh}$ до нуля, поэтому отсюда сразу следует экстремальное равенство

$$\sup\left\{\frac{Si(kh)}{kh} :\ k \ge n\right\} = \frac{Si(nh)}{nh}. \tag{1.2.19}$$

Пользуясь равенством (1.2.19), из (1.2.18) получаем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{Si(nh)}{nh} \cdot 2 \sum_{|k| \ge n} \left|c_k(f)\right|^2 + \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau(f)\right\|_2^2 d\tau\right) dt,$$

откуда, учитывая соотношение (1.1.15), запишем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right) \le \frac{1}{2h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau(f)\right\|_2^2 d\tau\right) dt$$

или что то же

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau(f)\right\|_2^2 d\tau\right) dt. \tag{1.2.20}$$

В полученном неравенстве функцию f заменим на производную $f^{(r)}$

$$E_{n-1}^2(f^{(r)})_2 \le \frac{n}{2(nh - Si(nh))} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau(f^{(r)})\right\|_2^2 d\tau\right) dt, \tag{1.2.21}$$

затем, воспользовавшись неравенством (1.1.30), получаем

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{2(r-s)}} E_{n-1}^2(f^{(r)})_2, \quad (0 \le s \le r)$$

и, учитывая (1.1.21), будем иметь

$$E_{n-1}^2(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{2(r-s)}}\cdot\frac{n}{2(nh-Si(nh))}\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau(f^{(r)})\right\|_2^2 d\tau\right)dt. \quad (1.2.22)$$

Так как (1.1.22) справедливо для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху экстремальной величины, стоящей в левой части равенства (1.2.17)

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_h(f^{(r)})\right\|_2^2 dh\right)dt} \le \frac{n}{2(nh-Si(nh))}. \quad (1.2.23)$$

С целью получения оценки снизу указанной величины, равной правой части неравенства (1.1.23), рассмотрим функцию $f_0(x) = e^{inx} \in L_2^{(r)}$, для которой при доказательстве предыдущих теорем мы установили, что

$$E_{n-1}^2(f_0^{(s)})_2 = n^{2s} \quad (0 \le s \le r),$$

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau(f_0^{(r)})\right\|_2^2 d\tau = 2n^{2r}\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right), \quad 0 < nt \le \pi/2.$$

Пользуясь вторым равенством, запишем

$$\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau(f_0^{(r)})\right\|_2^2 d\tau\right)dt = 2n^{2r}\int\limits_0^h\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)dt =$$

$$= 2n^{2r}\left(1-\frac{Si(nh)}{nh}\right) = 2n^{2r}\cdot\frac{nh-Si(nh)}{n}.$$

Используя полученное равенство, получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h(f^{(r)})\right\|_2^2 dh\right) dt} \geq \frac{n^{2(r-s)}E_{n-1}^2(f_0^{(s)})_2}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_h(f_0^{(r)})\right\|_2^2 dh\right) dt} =$$

$$= \frac{n^{2(r-s)}\, n^{2s}}{2n^{2r}} \cdot \frac{n}{nh - Si(nh)} = \frac{n}{2(nh - Si(nh))}. \tag{1.2.24}$$

Требуемое равенство (1.2.17) получаем из сопоставления оценки сверху (1.2.23) с оценкой снизу (1.2.24). Теорема 1.2.3 доказана.

§ 1.3. Теоремы о наилучшем совместном приближении комплекснозначных функций и их производных, характеризующихся нормой разности m-го порядка в пространстве L_2

В этом параграфе докажем теоремы, связывающие величины наилучшего совместного полиномиального приближения функций $E_{n-1}(f^{(s)})$ с интегралами, содержащими усреднённое значение нормы разности m-го порядка в L_2.

Теорема 1.3.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и любом $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющем неравенству $0 < nh \leq \pi/2$, справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m}d\tau\right)^{m/2}} = \left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}. \tag{1.3.1}$$

В частности, если $nh = \pi/2$, то из (1.3.1) следует равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m}d\tau\right)^{m/2}} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}.$$

Доказательство. Действительно, если $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$), то, как доказали в (1.1.44), норма разности m-го порядка производной r-го порядка $f^{(r)}(x)$ имеет вид:

$$\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 = 2^{m+1}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^{2r}\left|c_k(f)\right|^2\left(1-\cos k\tau\right)^m. \tag{1.3.2}$$

Из (1.3.1) вытекает неравенство

$$\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \geq 2^{m+1}\sum_{|k|\geq n}|k|^{2r}\left|c_k(f)\right|^2\left(1-\cos k\tau\right)^m. \tag{1.3.3}$$

Используя формулу (1.1.15), запишем соотношение

$$E_{n-1}^2(f)_2 - 2\sum_{|k|\geq n}\left|c_k(f)\right|^2\cos k\tau = 2\sum_{|k|\geq n}\left|c_k(f)\right|^2\left(1-\cos k\tau\right) =$$

$$= 2\sum_{|k|\ge n}\Big(2\big|c_k(f)\big|^2\Big)^{1-1/m}\Big(2\big|c_k(f)\big|^2\Big)^{1/m}\big(1-\cos k\tau\big). \qquad (1.3.4)$$

Применив к правой части (1.3.4) неравенство Гёльдера для числовых рядов

$$\sum_{|k|\ge n}\big|a_kb_k\big| \le \left(\sum_{|k|\ge n}\big|a_k\big|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{|k|\ge n}\big|b_k\big|^q\right)^{1/q}, \qquad (1.3.5)$$

$$(p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le p\le\infty),$$

а также учитывая неравенство (1.3.3), оценим сумму в правой части соотношения (1.3.4) при помощи неравенства Гёльдера (1.3.5), полагая

$$\frac{1}{p}=1-\frac{1}{m},\quad \frac{1}{q}=\frac{1}{m},\qquad m\in\mathbb{N},$$

в итоге получаем:

$$E_{n-1}^2(f)_2 - 2\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2\cos k\tau \le$$

$$\le \left(2\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2\right)^{1-1/m}\left(2\sum_{|k|\ge n}\big|c_k(f)\big|^2\big(1-\cos k\tau\big)^m\right)^{1/m} \le$$

$$\le \big(E_{n-1}^2(f)_2\big)^{1-1/m}\left(\frac{2^{m+1}}{2^m}\sum_{|k|\ge n}\left(\frac{|k|}{n}\right)^{2r}\big|c_k(f)\big|^2\big(1-\cos k\tau\big)^m\right)^{1/m} =$$

$$= \big(E_{n-1}^2(f)_2\big)^{1-1/m}\cdot\frac{1}{2n^{2r/m}}\left(2^{m+1}\sum_{|k|\ge n}|k|^{2r}\big|c_k(f)\big|^2\big(1-\cos k\tau\big)^m\right)^{1/m} =$$

$$= \big(E_{n-1}^2(f)_2\big)^{1-1/m}\cdot\frac{1}{2n^{2r/m}}\Big\|\Delta_\tau^m\big(f^{(r)}\big)\Big\|_2^{2/m}.$$

Таким образом, для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ и любого $u\ge 0$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le 2\sum_{|k|\ge n}\left|c_k(f)\right|^2\cos ku + E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2\cdot\frac{\left\|\Delta_\tau^m\left(f^{(r)}\right)\right\|_2^{2/m}}{2n^{2r/m}}. \qquad (1.3.6)$$

Заметим, что для 2π-периодических дифференцируемых функций $f \in L_2^{(r)}$ неравенства вида (1.3.6) доказаны в [8, с.13-14].

Проинтегрировав неравенство (1.3.6) по переменной τ в пределах от $\tau = 0$ до $\tau = t$ и поделив обе части полученного результата на t, запишем

$$E_{n-1}^2(f)_2 \le$$

$$\le 2\sum_{|k|\ge n}\left|c_k(f)\right|^2\frac{\sin kt}{kt} + E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2\cdot\frac{1}{2n^{2r/m}}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau^m\left(f^{(r)}\right)\right\|_2^{2/m}d\tau.$$

Так как при $0 < nt \le \pi/2$ имеет место равенство (1.2.7), то из последнего неравенства, как и при доказательстве теоремы 1.2.1, получаем

$$\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)E_{n-1}^2(f)_2 \le E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2\cdot\frac{1}{2n^{2r/m}}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau^m\left(f^{(r)}\right)\right\|_2^{2/m}d\tau$$

или, что то же

$$\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)E_{n-1}^{2/m}(f)_2 \le \frac{1}{2n^{2r/m}}\cdot\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau^m\left(f^{(r)}\right)\right\|_2^{2/m}d\tau.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $m/2$, $m \in \mathbb{N}$, будем писать

$$\left(1-\frac{\sin nt}{nt}\right)^{m/2}E_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau^m\left(f^{(r)}\right)\right\|_2^{2/m}d\tau\right)^{m/2}.$$

Отсюда получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{1}{n^r}\left\{\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\right\}^{m/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\left\|\Delta_\tau^m\left(f^{(r)}\right)\right\|_2^{2/m}d\tau\right)^{m/2}.$$

В полученном неравенстве, полагая $r=0$, запишем

$$E_{n-1}(f)_2 \le \left\{\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\right\}^{m/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f)\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}.$$

Заменяя здесь функцию f на $f^{(r)}$, получаем

$$E_{n-1}(f^{(r)})_2 \le \left\{\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\right\}^{m/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}. \qquad (1.3.7)$$

Применяя неравенство (1.1.30) в виде

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f^{(r)})_2 \quad (s=0,1,2,\cdots,r,\ r\in\mathbb{N}),$$

с учётом (1.3.7) приходим к неравенству

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le$$

$$\le \frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\right\}^{m/2}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}. \qquad (1.3.7)'$$

Так как последнее неравенство справедливо для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.3.1):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}} \le \left\{\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\right\}^{m/2}. \qquad (1.3.8)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу снова рассмотрим функцию $f_0(x)=e^{inx}\in L_2^{(r)}$, для которой ранее мы доказали, что

$$E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = n^s,\ n\in\mathbb{N},\ s\in[0,r],\ r\in\mathbb{N}$$

и в силу (1.1.46)

$$\left\|\Delta_\tau^m(f_0^{(r)})\right\|_2^2 = 2^m n^{2r}\big(1-\cos n\tau\big)^m,$$

$$\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f_0^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2} = n^r\left\{\frac{2\big(nt-\sin nt\big)}{nt}\right\}^{m/2},$$

а потому имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}} \geq$$

$$\geq \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f_0^{(s)})_2}{\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \left\|\Delta_\tau^m(f_0^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}} =$$

$$= \frac{n^{r-s}\cdot n^s}{n^r\left\{\frac{2\big(nt-\sin nt\big)}{nt}\right\}^{m/2}} = \left\{\frac{nt}{2(nt-\sin nt)}\right\}^{m/2}. \tag{1.3.9}$$

Сравнивая оценки сверху (1.3.8) с оценкой снизу (1.3.9), получим требуемое равенство (1.3.1). Теорема 1.3.1 доказана.

Пользуясь тем, что норма разности $\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2$ является монотонно возрастающей при $\tau\in(0,\pi/(2n)]$, из равенства

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\frac{2n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}} = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2}$$

для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ получаем следующее неравенство типа

Джексона-Стечкина

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{2n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \left\| \Delta_\tau^m (f^{(r)}) \right\|_2^{2/m} d\tau \right)^{m/2} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{m/2} \le$$

$$\le \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{2n}{\pi} \cdot \left\| \Delta_\tau^m (f^{(r)}) \right\|_2^{2/m} \cdot \frac{\pi}{2n} \right)^{m/2} \cdot \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{m/2} =$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\| \Delta_\tau^m (f^{(r)}) \right\|_2^{2/m} \le$$

$$\le \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \omega_m\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n} \Big)_2.$$

Таким образом, из теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *При выполнении условий теоремы* 1.3.1 *имеет место неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-2)} \right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \omega_m\Big(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n} \Big)_2. \qquad (1.3.10)$$

Отметим, что вопрос о том, что константа Джексона-Стечкина $\Big\{\pi/(2(\pi-2))\Big\}^{m/2}$ является точной в неравенстве (1.3.10), остаётся открытым.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2^{(r)}$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \left\| \Delta_h^m (f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh \, dh \right)^{1/2}. \qquad (1.3.11)$$

Неравенство (1.3.11) *точно в том смысле, что существует комплекснозначная функция* $f_0 \in L_2^{(r)}$, *для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. Сначала докажем неравенство (1.3.11) для случая

$r = s = 0$. В первом параграфе мы доказали, что для произвольной комплекснозначной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место равенство (формула (1.1.44)):

$$\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 =$$

$$= 2^{m+1}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)\big(1-\cos kh\big)^m = \sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^2(f)\left(2\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m}. \tag{1.3.12}$$

Используя формулы Эйлера, легко доказать, что при любых $m, k \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\left(2\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m} = C_{2m}^m - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}C_{2m}^{m-j}\cos jku,$$

учитывая которое из (1.3.12) получаем

$$\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left(2\sin\frac{kh}{2}\right)^{2m} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left\{C_{2m}^m - 2\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}C_{2m}^{m-j}\cos jku\right\}.$$

Сгруппируем члены с чётным и нечётным j, получаем

$$\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left\{C_{2m}^m - 2\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\cos(2s-1)kh - \cos 2skh\right] - 2C_m^*\cos mkt\right\}, \tag{1.3.13}$$

где

$$C_m^* := \begin{cases} 0, & \text{если } \ m - \text{чётное}, \ m \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{если } \ m - \text{нечётное}, \ m \in \mathbb{N}, \ 1 \leq s \leq [m/2]. \end{cases}$$

Добавим и вычтем дробь $1/(4s^2-1)$, $1 \leq s \leq [m/2]$ внутри квадратной скобки правой части неравенства (1.3.13), в результате получаем

$$\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \geq \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left\{C_{2m}^m - 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s}\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\cos(2s-1)kh-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos 2skh - \frac{1}{4s^2-1} + \frac{1}{4s^2-1}\right] - 2C_m^*\cos mkt\right\}. \qquad (1.3.14)$$

Для значений $\nu \in \mathbb{Z}_+$ определим величину

$$\widehat{\varphi}(\nu) = \int\limits_0^{\pi/n} \sin nh\cos\nu h dh = -\frac{2n}{\nu^2-n^2}\cos^2\frac{\nu\pi}{2n}.$$

Легко проверить, что

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{2}{n}, \quad \widehat{\varphi}(n) = 0 \qquad (1.3.15)$$

и, кроме того, при любом $s \in \mathbb{N}$ и $k \geq n,\ k,n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\widehat{\varphi}(2sk) = -\frac{2n}{(2sk)^2-n^2}\cos^2\frac{sk}{n}\pi \leq 0, \qquad (1.3.16)$$

$$\widehat{\varphi}((2s-1)k) = -\frac{2n}{[(2s-1)k]^2-n^2}\cos^2\frac{(2s-1)k}{n}\pi \leq 0. \qquad (1.3.17)$$

Заметим также, что

$$\widehat{\varphi}(2sn) = -\frac{2}{n((2s)^2-1)}, \quad \widehat{\varphi}((2s-1)n) \equiv 0, \quad s,n \in \mathbb{N}. \qquad (1.3.18)$$

Умножив неравенство (1.3.14) на функцию $\sin nt$ и проинтегрировав обе части полученного таким образом соотношения по h от 0 до π/n, с учётом введённых обозначений запишем

$$\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin ntdt \geq C_{2m}^m\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\cdot\widehat{\varphi}(0)-$$

$$-2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s}\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\widehat{\varphi}((2s-1)k)-\widehat{\varphi}(2sk)-\right.$$

$$\left.-\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4s^2-1}+\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4s^2-1}\right]-2C_m^*\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\widehat{\varphi}(mk). \qquad (1.3.19)$$

Из неравенства (1.3.19), учитывая, что

$$\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)=E_{n-1}^2(f)_2,$$

запишем

$$\widehat{\varphi}(0)\left\{C_{2m}^m-2\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s}\cdot\frac{1}{4s^2-1}\right\}E_{n-1}^2(f)_2\le$$

$$\le\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin ntdt+2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s}\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\widehat{\varphi}((2s-1)k)-\right.$$

$$\left.-\widehat{\varphi}(2sk)-\frac{\widehat{\varphi}(0)}{4s^2-1}\right]+2C_m^*\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\widehat{\varphi}(mk). \qquad (1.3.20)$$

Введём обозначение

$$\mathscr{K}_m=\left(C_{2m}^m-2\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s}\cdot\frac{1}{4s^2-1}\right)^{-1/2}$$

и, учитывая, что $\varphi(0)=2/n$, неравенство (1.3.20) запишем в виде

$$\frac{2}{n}\mathscr{K}_m^{-2}\,E_{n-1}^2(f)_2\le\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin ntdt+$$

$$+2\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\sum_{s=1}^{[m/2]}C_{2m}^{m-2s}\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\widehat{\varphi}((2s-1)k)-\widehat{\varphi}(2sk)-\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{4s^2-1}\right]+$$

$$+2C_m^*\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\,\widehat{\varphi}(mk). \qquad (1.3.21)$$

Покажем теперь, что при любых $s, k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$ выполняется неравенство

$$-\widehat{\varphi}(2sk) - \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{4s^2 - 1} < 0.$$

Действительно, при любых $s, k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq [m/2]$, $k \geq n$ имеем

$$-\widehat{\varphi}(2sk) - \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{4s^2 - 1} = \frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \cos^2 \frac{sk\pi}{n} - \frac{1}{4s^2 - 1} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$= \frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \left(1 - \sin^2 \frac{sk\pi}{n}\right) - \frac{1}{4s^2 - 1} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$= -\frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \sin^2 \frac{sk\pi}{n} + \frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} - \frac{1}{4s^2 - 1} \cdot \frac{2}{n} =$$

$$= -\frac{2n}{4s^2k^2 - n^2} \sin^2 \frac{sk\pi}{n} - \frac{8s^2(k^2 - n^2)}{(4s^2k^2 - n^2)(4s^2 - 1)n} < 0.$$

Заметим, что при $k = n$

$$\widehat{\varphi}(mn) = 0, \quad \widehat{\varphi}((2s-1)n) = 0, \quad -\widehat{\varphi}(2sn) - \frac{1}{4s^2 - 1} \cdot \frac{2}{n} = 0,$$

и так как при любых $1 \leq s \leq [m/2]$, $k, m, n \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, в силу (1.3.16) и (1.3.17) $\widehat{\varphi}((2s-1)k) < 0$, $\widehat{\varphi}(mk) < 0$, то второе и третье слагаемые в неравенстве (1.3.21) неположительны, а потому, отбрасывая их, мы только усилим неравенство (1.3.21) и в итоге получаем

$$\frac{2}{n} \mathscr{K}_m^{-2} E_{n-1}^2(f)_2 \leq \int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nt dt,$$

откуда сразу следует неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \mathscr{K}_m \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nt dt\right)^{1/2}. \qquad (1.3.22)$$

Докажем, что для функции $f_0(x) = e^{inx}$ неравенство (1.3.19) обращается в равенство. В самом деле, для этой функции, как показали ранее (формула (1.1.36), когда $s=0$), $E_{n-1}\big(f_0\big)_2 = 1$ и в силу (1.3.12)

$$\left\|\Delta_h^m(f_0)\right\|_2^2 = 2^m\big(1-\cos nh\big)^m = \left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{2m} =$$

$$= C_{2m}^m - 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s}\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\cos(2s-1)nt - \cos 2snt\right] - 2C_m^*\cos mnt.$$

Отсюда, учитывая равенства (1.3.18), будем иметь

$$\int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f_0)\right\|_2^2 \sin ntdt = C_{2m}^m\,\widehat{\varphi}(0) - 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s}\left[\frac{m+2s}{m-2s+1}\widehat{\varphi}((2s-1)n) - \right.$$

$$\left. -\widehat{\varphi}(2sn)\right] - 2C_m^*\widehat{\varphi}(mn) = C_{2m}^m\,\widehat{\varphi}(0) + 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s}\widehat{\varphi}(2sn) =$$

$$= \widehat{\varphi}(0)\left\{C_{2m}^m - 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s}\cdot\frac{1}{4s^2-1}\right\} =$$

$$= \frac{2}{n}\left\{C_{2m}^m - 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s}\cdot\frac{1}{4s^2-1}\right\} = \frac{2}{n}\mathscr{K}_m^{-2} \qquad (1.3.23)$$

Так как $E_{n-1}\big(f_0\big)_2 = 1$, то из последнего равенства имеем

$$\mathscr{K}_m\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f_0)\right\|_2^2\sin ntdt\right)^{1/2} =$$

$$= \mathscr{K}_m\left(\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}\mathscr{K}_m^{-2}\right) = \mathscr{K}_m\cdot\mathscr{K}_m^{-1} = 1 = E_{n-1}\big(f_0\big)_2,$$

то есть неравенство (1.3.19) обращается в равенство.

Теперь докажем, что

$$\mathscr{K}_m = \left(C_{2m}^m - 2\sum_{s=1}^{[m/2]} C_{2m}^{m-2s} \cdot \frac{1}{4s^2-1} \right)^{-1/2} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \qquad (1.3.24)$$

В самом деле, из равенства (1.3.23) имеем

$$\mathscr{K}_m^{-2} = \frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f_0)\right\|_2^2 \sin nhdh =$$

$$= \frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n} 2^m\big(1-\cos nh\big)^m \sin nhdh = 2^{m-1}\int\limits_0^{\pi} \big(1-\cos h\big)^m d\big(1-\cos h\big) =$$

$$= 2^{m-1}\cdot \frac{\big(1-\cos h\big)^{m+1}}{m+1}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2^{2m}}{m+1}.$$

Отсюда сразу получаем

$$\mathscr{K}_m = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \qquad (1.3.25)$$

Таким образом, мы доказали, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и любой комплекснозначной функции $f \in L_2$ имеет место точное неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nhdh\right)^{1/2}. \qquad (1.3.26)$$

Если заменить в этом неравенстве функцию $f(x)$ на производную $f^{(r)}(x)$, будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(r)})_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nhdh\right)^{1/2} \qquad (1.3.27)$$

и, воспользовавшись неравенством

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f^{(r)})_2 \quad (0 \le s \le r), \qquad (1.3.28)$$

в итоге приходим к следующему неравенству

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f^{(r)})_2 \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \left\| \Delta_h^m(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh \right)^{1/2}. \qquad (1.3.29)$$

Так как неравенство (1.3.29) верно для любой функции $f \in L_2^{(r)}$, то покажем, что оно точно для функции $f_0(x) = e^{inh} \in L_2^{(r)}$, где $(0 < h \leq \pi/n)$, и оно обращается в равенство. Воспользовавшись формул $E_{n-1}(f_0^{(s)})_2 = n^s$ (см, например, первое из равенств (1.1.36)),

$$\left\| \Delta_h^m(f_0^{(r)}) \right\|_2^2 = 2^m n^{2r} \big(1 - \cos nh\big)^m$$

(см. формулу (1.1.46)), будем иметь

$$\frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \left\| \Delta_h^m(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \cdot 2^m n^{2r} \int\limits_0^{\pi/n} \big(1 - \cos nh\big)^m \sin nh dh \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(2^{m-1} n^{2r} \int\limits_0^{\pi} \big(1 - \cos h\big)^m d\big(1 - \cos h\big) \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{2^m}{\sqrt{m+1}} \cdot n^s = n^s = E_{n-1}(f_0^{(s)})_2.$$

Этим точность неравенства (1.3.29) доказана, чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.2.

Из доказанной теоремы 1.3.2 вытекает

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы* 1.3.2 *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2}}=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{1.3.30}$$

Доказательство. В самом деле, с одной стороны, из (1.3.29) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2}}\le\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{1.3.31}$$

С другой стороны, для функции $f(x)=e^{inx}\in L_2^{(r)}$, рассмотренной нами при доказательстве теоремы 1.3.2, получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2}}\ge$$

$$\ge\frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\dfrac{n}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2}}=$$

$$=\frac{n^{r-s}\cdot n^s}{n^r\big(2^{2m}/(m+1)\big)^{1/2}}=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \tag{1.3.32}$$

Требуемое равенство (1.3.30) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.3.31) и оценки снизу (1.3.32).

Следствие 1.3.3. *Для произвольной комплекснозначной функции* $f \in L_2^{(r)}$ *при любых* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left\| \Delta^m_{\pi/n}(f^{(r)}) \right\|_2. \tag{1.3.33}$$

Но если m*-я разность* $\left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2$ *удовлетворяет условию*

$$\left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 + \left\| \Delta^m_{(\frac{\pi}{n}-h)}(f^{(r)}) \right\|_2^2 \leq \left\| \Delta^m_{\pi/(2n)}(f^{(r)}) \right\|_2^2, \tag{1.3.34}$$

то неравенство (1.3.33) *можно уточнить в виде*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left\| \Delta^m_{\pi/(2n)}(f^{(r)}) \right\|_2. \tag{1.3.35}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\int_0^{\pi/n} \left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh =$$

$$= \int_0^{\pi/n} \left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin n \left(\frac{\pi}{n} - h \right) dh = \int_0^{\pi/n} \left\| \Delta^m_{(\frac{\pi}{n}-h)}(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh,$$

а потому запишем

$$\int_0^{\pi/n} \left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \left\| \Delta^m_{(\frac{\pi}{n}-h)}(f^{(r)}) \right\|_2^2 \sin nh dh =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/n} \left\{ \left\| \Delta^m_h(f^{(r)}) \right\|_2^2 + \left\| \Delta^m_{(\frac{\pi}{n}-h)}(f^{(r)}) \right\|_2^2 \right\} \sin nh dh \leq$$

$$\le \left\|\Delta^m_{\pi/(2n)}(f^{(r)})\right\|_2^2 \cdot \int\limits_0^{\pi/n} \sin nh dh = \frac{2}{n} \left\|\Delta^m_{\pi/(2n)}(f^{(r)})\right\|_2^2.$$

Теперь, учитывая это, неравенство из (1.3.29) будем иметь

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \int\limits_0^{\pi/n} \left\|\Delta^m_h(f^{(r)})\right\|_2^2 \sin nh dh \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \left\|\Delta^m_{\pi/(2n)}(f^{(r)})\right\|_2^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \left\|\Delta^m_{\pi/(2n)}(f^{(r)})\right\|_2.$$

Неравенство (1.3.35) и вместе с ним следствие 1.3.3 доказаны.

Следствие 1.3.4. *Для произвольной комплекснозначной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $n, m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$ справедливо неравенство*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \, \omega_m\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{1.3.36}$$

Но если модуль непрерывности $\omega_m^2\big(f^{(r)}, h\big)_2$ для $h \in [0, \pi/n]$ удовлетворяет условию

$$\omega_m^2\big(f^{(r)}, h\big)_2 + \omega_m^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n} - h\right)_2 \le \omega_m^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)_2,$$

то неравенство (1.3.36) *можно уточнить в виде*

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \, \omega_m^2\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)_2. \tag{1.3.37}$$

Следствие 1.3.4 вытекает из следствия 1.3.3 в силу того, что

$$\left\|\Delta^m_h(f^{(r)})\right\|_2 \le \omega_m\big(f^{(r)}, h\big)_2,$$

а всё остальное доказательство следствия 1.3.4 повторяет схему доказательства следствия 1.3.3.

§ 1.4. Решение общей экстремальной задачи о совместном приближении и её последовательных производных тригонометрическими полиномами на некоторых классах функций в пространстве L_2

Теоремы, доказанные нами в предыдущих параграфах, предоставляют возможность решать экстремальную задачу о наилучшем совместном приближении $E_{n-1}(f^{(s)})$ комплекснозначной функции f и её последовательность производных $f^{(s)}$ $(s=1,2,\cdots,r)$ из класса $L_2^{(r)}$ тригонометрическими полиномами $T_{n-1}\in\mathscr{T}_{2n-1}$.

Другими словами, требуется найти точное значение верхней грани

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2:=\sup\Big\{E_{n-1}(f^{(s)})_2\colon\ f\in\mathfrak{M}^{(r)}\Big\}=$$

$$=\sup\Big\{\|f^{(s)}-S_{n-1}(f^{(s)})\|_2\colon\ f\in\mathfrak{M}^{(r)}\Big\},\tag{1.4.1}$$

$\mathfrak{M}^{(r)}$ — некоторый класс функций из множеств $L_2^{(r)}$, $S_{n-1}(f^{(s)})$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка s-раз продифференцированного ряда функций $f\in L_2^{(r)}$:

$$f^{(s)}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}(ik)^s e^{ikx},\quad S_{n-1}(f^{(s)},x)=\sum_{|k|\le n-1}(ik)^s e^{ikx}.$$

Введём следующие классы функций.

Пусть $\Phi(h)$, где $0\le h\le 2\pi$ есть непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0)=0$. Всюду далее функцию Φ назовём мажорантой.

Символом $W_m^{(r)}(\Phi)$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, для которых при любом $0<h\le\pi/n$ имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\big\|\Delta_h^m(f^{(r)})\big\|_2^{2/m}dh\right)^{m/2}\le\Phi(h)$$

при любых $m,n\in\mathbb{N}$.

Аналогичным образом, через $W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$ и $h \in [0, \pi/n]$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} \sin nh dh\right)^{m/2} \le \Phi(h).$$

Приводим решение сформулированной задачи (1.4.1) в случаях, когда $\mathfrak{M}^{(r)} = W_m^{(r)}(\Phi)$ и $\mathfrak{M}^{(r)} = W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.4.1. *При любых $m, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$ и $h \in [0, \pi/(2n)]$ имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \Phi\left(h\right). \tag{1.4.2}$$

В частности, при $h = \pi/(2n)$ из (1.4.2) *следует, что*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 = \left\{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.4.3}$$

Доказательство. Напомним, что при доказательстве теоремы 1.3.1 мы доказали, что для произвольной комплекснозначной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место неравенство (см., неравенство (1.3.7)$'$):

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nt}{2(nt - \sin nt)}\right\}^{m/2} \left(\frac{1}{h}\int_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} d\tau\right)^{m/2}.$$

Отсюда, в предположении, что функция f также принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Phi)$, учитывая определение этого класса, получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nt}{2(nt - \sin nt)}\right\}^{m/2} \Phi(h),$$

из которого сразу вытекает оценка сверху всего класса

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2 \le \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \Phi\left(h\right). \tag{1.4.4}$$

Для получении аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$\mathrm{g}(x)=\frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}\Phi\left(h\right)\cos nx.$$

Очевидно, что при всех $s=0,1,2,\ldots,r$ производная

$$\mathrm{g}^{(s)}(x)=\frac{1}{n^{r-s}}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}\Phi\left(h\right)\cos\left(nx+\frac{s\pi}{2}\right)$$

и в силу равенства (1.1.28) имеем

$$E_{n-1}(\mathrm{g}^{(s)})_2=\frac{1}{n^{r-s}}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}\Phi\left(h\right). \tag{1.4.5}$$

Кроме того, выполнив простые вычисления, получаем

$$\left\|\Delta_h^m\mathrm{g}^{(r)}\right\|_2^2=\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m}\Phi^2\left(h\right)\left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{2m}.$$

Используя полученное равенство, непосредственной проверкой приходим к равенству

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h\left\|\Delta_\tau^m(\mathrm{g}^{(r)})\right\|_2^{2/m}d\tau\right)^{m/2}=\Phi(h),$$

а это означает, что функция g принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Phi)$. Учитывая равенство (1.4.5), запишем оценку снизу всего класса

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2\geq E_{n-1}(\mathrm{g}^{(s)})_2=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}\Phi\left(h\right). \tag{1.4.6}$$

Требуемое равенство (1.4.2) получаем из сопоставления оценки сверху (1.4.4) с оценкой снизу (1.4.6), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Замечание 1.4.1 Заметим, что из утверждения теоремы 1.4.1, в частности при $s=0$, получаем точную верхнюю грань наилучшего приближения класса $W_m^{(r)}(\Phi)$:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(0)}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2=\mathscr{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi)\big)_2=$$

$$=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2}\Phi\,(h)\,. \tag{1.4.7}$$

Полученная оценка (1.4.7) представляет собой оценку сверху всех далее рассматриваемых нами n-поперечников класса $W_m^{(r)}(\Phi)$ в следующей главе.

Теорема 1.4.2. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq s$. *Тогда справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)\big)_2=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.4.8}$$

Доказательство. Действительно, из неравенства (1.3.29) вида

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\leq\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2},$$

учитывая определения рассматриваемого класса для любой функции $f\in W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)$, получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\leq\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(f^{(r)})\right\|_2^2\sin nhdh\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

из которого сразу следует оценка сверху наилучшего одновременного приближения тригонометрическими полиномами всего класса $W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)$:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)\big)_2\leq\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.4.9}$$

Получим аналогичную оценку класса снизу. Для этого вводим в рассмотрение периодическую комплекснозначную функцию

$$\mathrm{g}_1(x)=\frac{1}{n^r}\cdot\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{inx},$$

для которой при всех $s=0,1,2,\ldots,r$ имеем

$$\mathrm{g}_1^{(s)}(x)=\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i(nx+s\pi/2)}.$$

Отсюда в силу равенства (1.1.28) получаем

$$E_{n-1}\big(\mathrm{g}_1^{(s)}\big)_2=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.4.10)$$

Так как

$$\mathrm{g}_1^{(r)}(x)=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{i(nx+r\pi/2)},$$

и в силу равенства (1.1.46) имеет место равенство

$$\big\|\Delta_h^m(\mathrm{g}_1^{(r)})\big\|_2=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^m, \qquad (1.4.11)$$

то, учитывая определение класса $W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)$ и равенства (1.4.11), непосредственным вычислением имеем

$$\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\big\|\Delta_h^m(\mathrm{g}_1^{(r)})\big\|_2^2\sin nh\,dh\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\left(2\sin\frac{nh}{2}\right)^{2m}\sin nh\,dh\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^{2m}}{m+1}\right)^{1/2}=\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Последнее равенство означает, что функция $\mathrm{g}_1(x)$ принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)$, а потому, учитывая равенство (1.4.10), запишем оценку снизу величины, стоящей в левой части равенства (1.4.8)

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_m^{(r)}(\Phi,\sin n\cdot)\big)_2\geq E_{n-1}\big(\mathrm{g}_1^{(s)}\big)_2=$$

$$=\frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{n^{r-s}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.4.12)$$

Равенство (1.4.8) следует из сравнения неравенств (1.4.9) и (1.4.12) и тем самым теорема 1.4.2 доказана.

Замечание 1.4.2 В утверждении теоремы 1.4.2 при $s = 0$ получаем значение верхней грани наилучшего совместного приближения класса функций $W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)$ подпространством $\mathscr{T}_{2n-1}$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$:

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(0)}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 = \mathscr{E}_{n-1}\big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin n\cdot)\big)_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.4.13}$$

Точная оценка (1.4.13) далее используется при оценке сверху ряда n-поперечников во второй главе.

ГЛАВА 2. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, содержащих нормы разностей m-го порядка в $L_2[0, 2\pi]$

В этой главе рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений целого ряда n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными значениями норм разностей высших порядков, вытекающих из результатов последних параграфов первой главы. Прежде чем сформулировать результаты этой главы, приводим необходимые понятия и определения.

Пусть $B := \{f \in L_2, \ \|f\| \leq 1\}$ — единичный шар в пространстве L_2; $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из L_2; $\mathscr{L}_n \subset L_2$ — n-мерное подпространство; $\mathscr{L}^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n; $\Lambda : L_2 \to \mathscr{L}_n$ — непрерывный линейный оператор; $\Lambda^{\perp} : L_2 \to \mathscr{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon B \cap \mathscr{L}_{n+1} \subset \mathfrak{N}\right\} : \mathscr{L}_{n+1} \subset L_2\right\},$$

$$d_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\| : \varphi \in \mathscr{L}_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\right\},$$

$$\delta_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda f\| : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda L_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L} \subset L_2\right\},$$

$$d^n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap \mathscr{L}^n\right\} : \mathscr{L}^n \subset L_2\right\},$$

$$\Pi_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \Lambda^{\perp} f\| : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda^{\perp} L_2 \subset \mathscr{L}_n\right\} : \mathscr{L}_n \subset L_2\right\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским и проекционным n-поперечниками* множества $\mathfrak{N}$ в L_2. Известно [18, 22], что в пространстве L_2 между приведёнными выше n-поперечниками выполняются соотношения:

$$b_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) \leq d^n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) \leq d_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \delta_n\big(\mathfrak{N}; L_2\big) = \Pi\big(\mathfrak{N}; L_2\big). \qquad (2.0.1)$$

Напомним, что вычислению в пространстве L_2 точных значений n-поперечников гладких классов дифференцируемых 2π-периодических функций, определённых при помощи различных характеристик модулей непрерывности первых и высших порядков, посвящены работы Л.В.Тайков [19–21], В.В.Шалаева [32], М.Г.Есмаганбетова [33], С.Б.Вакарчука [5, 7, 8], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [10], М.Ш.Шабозова [24], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [26, 27] и многих других.

§ 2.1. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых нормами разностей m-го порядка

В четвёртом параграфе первой главы мы ввели в рассмотрение класс $W_m^{(r)}(\Phi)$ функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $h \in (0, \pi/n]$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \|\triangle_h^m(f^{(r)})\|^{2/m} dh\right)^{m/2} \leq \Phi(h),$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, а $\Phi(h)$ $(0 < h \leq 2\pi)$ — непрерывная возрастающая функция, такая, что $\Phi(0) = 0$.

Аналогичным образом, через $W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любых $m, n, r \in \mathbb{N}$ и $h \in (0, \pi/n]$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{h}\int\limits_0^h \left\|\triangle_h^m(f^{(r)})\right\|_2^{2/m} \sin nh dh\right)^{m/2} \leq \Phi(h).$$

Для этих классов функций приводим точные значения всех перечисленных n-поперечников в начале этой главы.

Имеет место следующая

Теорема 2.1.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ и $h \in [0, \pi/(2n)]$ — любое число. Тогда справедливы следующие равенства*

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) = \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) =$$

$$[5mm] = \mathscr{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi)\Big)_2 = \frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{m/2} \cdot \Phi(h), \qquad (2.1.1)$$

где $\gamma_N(\cdot)$ — любой из N-поперечников: бернштейновский $b_N(\cdot)$, колмогоровский $d_N(\cdot)$, линейный $\delta_N(\cdot)$, гельфандовский $d^N(\cdot)$, проекционный $\Pi_N(\cdot)$. В частности, из (2.0.1) при $h = \pi/(2n)$ из (2.0.1) следует равенство

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) = \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) =$$

$$= \mathscr{E}_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) = \left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{m/2} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\Big(\frac{\pi}{2n}\Big).$$

Доказательство. Оценку сверху всех n-поперечников получаем из результата теоремы 1.4.1 при $s = 0$, для класса $W_m^{(r)}(\Phi)$ из соотношения (2.0.1):

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) \le \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) \le$$

$$\le E_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi)\Big)_2 \le \frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2} \cdot \Phi(h). \qquad (2.1.2)$$

Для получения оценки снизу, равной правой части (2.1.2) рассматриваемых n-поперечников в пространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$, рассмотрим шар

$$S_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \le \frac{1}{n^r}\left[\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right]^{m/2} \cdot \Phi(h)\right\}$$

и докажем, что имеет место включение $S_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$. Для этого покажем, что любой $T_n \subset S_{2n+1}$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \left\|\triangle_h^m(T_n^{(r)})\right\|^{2/m} dh\right)^{m/2} \le \Phi(h).$$

Из равенство (1.3.2), для произвольной $T_n \in S_{2n+1}$ имеем:

$$\left\|\triangle_h^m(T_n^{(r)})\right\|^2 = 2^m \sum_{k=1}^n k^{2r}\rho_k^2(T_n)(1-\cos kh)^m \le$$

$$\le 2^m(1-\cos nh)^m \cdot \|T_n\|^2 \cdot n^{2r}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{h}\int_0^h \left\|\triangle_h^m(T_n^{(r)})\right\|^{2/m} dh\right)^{m/2} \le \left(\frac{1}{h}\int_0^h 2(1-\cos nh)dh\right)^{m/2} \cdot \|T\|^{2/m} =$$

$$= n^{r/m}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\} \cdot \frac{1}{2^{r/m}} \cdot \left\{\frac{2(nh-\sin nh)}{nh}\right\} \cdot \Phi(h) = \Phi(h).$$

Этим доказано, что $S_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$. Используя соотношение (2.0.1) и определение n-поперечника Бернштейна, запишем оценки снизу

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) \geq b_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) \geq$$

$$\geq b_{2n}\Big(S_{2n+1}, L_2\Big) \geq \frac{1}{n^r}\left\{\frac{nh}{2(nh-\sin nh)}\right\}^{m/2} \cdot \Phi(h). \tag{2.1.3}$$

Сравнивая цепочки неравенств для оценки сверху (2.1.2) с цепочкой неравенств снизу (2.1.3), получаем равенства (2.1.1), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.1.

Теорема 2.1.2. *При любых $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,$ и $h \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место равенство*

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot), L_2\Big) = \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot), L_2\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)\Big)_2 = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.1.4}$$

Доказательство. Из неравенства (1.4.9) при $s = 0$ получаем неравенство

$$E_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)\Big)_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда и из соотношения (2.0.1) сразу следует оценка сверху всех n-поперечников:

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot), L_2\Big) \leq \gamma_{2n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot), L_2\Big) \leq$$

$$\leq E_{n-1}\Big(W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)\Big)_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.1.5}$$

С целью получения оценки снизу, как и в предыдущей теореме 2.1.1 введём, в рассмотрение шар

$$\sigma_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\| \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем, что шар σ_{2n+1} принадлежит классу $W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$, то есть имеет место включение $\sigma_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$. Но этот факт сразу вытекает из определения класса $W_m^{(r)}(\Phi, \sin\cdot)$ в силу того, что в [21] доказано, что для произвольного полинома $T_n \in \sigma_{2n+1}$ всегда

$$\left(\frac{n}{\pi}\int\limits_0^{\pi/n}\left\|\Delta_h^m(T_n^{(r)})\right\|_2^{2/m}\sin nh dh\right)^{m/2} \leq \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

то есть $\sigma_{2n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)$, а потому, согласно определению бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу

$$\gamma_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) \geq b_{2n}\Big(W_m^{(r)}(\Phi), L_2\Big) \geq$$

$$\geq b_{2n}\Big(\sigma_{2n+1}, L_2\Big)_2 \geq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{n^r}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.1.6)$$

Требуемое равенство (2.1.4) получаем из сопоставления оценки сверху (2.1.5) с оценками снизу (2.1.6), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.2.

§ 2.2. Поперечники классов функций, характеризующихся нормой разности m-го порядка, в L_p $(0 < p \le 2)$

Прежде чем продолжить вычисление n-поперечников других классов функций в пространстве L_p, вводим в рассмотрение аппроксимационные характеристики следующего вида

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h) := \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \left\| \Delta_h^m (f^{(r)}) \right\|^p dh \right)^{1/p}}, \tag{2.2.1}$$

где $m, n, r \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}_+,\ 1/r < p \le 2,\ h \in (0, \pi/n]$.

Имеет место следующая общая

Теорема 2.2.1. *Для произвольных* $m, n, r \in \mathbb{N},\ 1/r < p \le 2,\ h \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h) = \left\{ \int\limits_0^h (1 - \cos nt)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p}. \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Воспользуемся следующим неравенством (см. например [18, с.104]):

$$\left(\int\limits_0^h \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| f_k(t) \right|^2 \right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \ge \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int\limits_0^h \left| f_k(t) \right|^p dt \right)^{2/p} \right)^{1/2}, \quad 0 < p \le 2.$$

Воспользуемся тем, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеет место соотношение

$$\left\| \Delta_\tau^m (f^{(r)}) \right\|^2 := 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos k\tau)^m,$$

применяя вышеприведенное неравенство, получаем

$$\left(\int\limits_0^h \left\| \Delta_\tau^m (f^{(r)}) \right\|^p d\tau \right)^{1/p} \ge \left(\int\limits_0^h \left\{ 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) (1 - \cos k\tau)^m \right\}^{p/2} d\tau \right)^{1/p} \ge$$

$$\geq 2^{m/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\left\{k^{rp}\int\limits_0^h(1-\cos k\tau)^{mp/2}d\tau\right\}^{2/p}\right)^{1/2}. \qquad (2.2.3)$$

Функция

$$\eta(t)=t^{rp}\int\limits_0^h(1-\cos t\tau)^{mp/2}d\tau$$

возрастает по $t>0$, поскольку $rp>1,\ r\in\mathbb{N}$ и её производная

$$\eta'(t)=t^{rp-1}\left\{h(1-\cos th)^{mp/2}+(rp-1)\int\limits_0^h(1-\cos t\tau)^{mp/2}d\tau\right\}>0.$$

Следовательно, имеем:

$$\min\Big\{\eta(k):k\geq n\Big\}=\varphi(n)=n^{rp}\int\limits_0^h(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau.$$

Учитывая последнее равенство, из (2.2.3) получаем

$$\left(\int\limits_0^h\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p}\geq 2^{m/2}\cdot n^r\cdot\left(\int\limits_0^h(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\right)^{1/p}\cdot\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f)\right\}^{1/2}=$$

$$=2^{m/2}n^r\left(\int\limits_0^h(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\right)^{1/p}\cdot E_{n-1}(f)_2.$$

Отсюда

$$E_{n-1}(f)\leq\frac{1}{2^{m/2}n^r}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^h\left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\right)^{1/p}}.$$

В этом неравенстве, полагая $r=0$ и заменяя f на $f^{(r)}$, получаем

$$E_{n-1}(f^{(r)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{1/p}}. \tag{2.2.4}$$

Пользуясь неравенством (2.2.4) и доказанным в первой главе неравенством

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{n^{r-s}} E_{n-1}(f^{(r)}), \quad s=0,1,2\ldots,r,$$

получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \leq \frac{1}{2^{m/2}n^{r-s}} \cdot \frac{\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta_\tau^m\big(f^{(r)}\big)\right\|^p d\tau\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{1/p}}. \tag{2.2.5}$$

Так как неравенство (2.2.5) справедливо для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него получаем оценку

$$\frac{2^{m/2}n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})}{\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p}} \leq \left(\int\limits_0^h (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{-1/p}.$$

Отсюда сразу следует оценка сверху величины (2.2.1):

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h) \leq \left(\int\limits_0^h (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{-1/p}. \tag{2.2.6}$$

Рассмотрим теперь комплекснозначную функцию $f_0 = e^{inx} \in L_2^{(r)}$ $(n, r \in \mathbb{N},\ L_2^{(0)} = L_2)$, ранее рассмотренную нами при доказательстве леммы 1.1.2 и для которой в (1.1.43) доказали, что

$$\left\|\Delta_h^m(f_0)\right\|_2^2 = 2^m(1-\cos nh)^m,\ 0 < nh \le \pi. \tag{2.2.7}$$

Так как согласно равенству (1.1.36)

$$E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2 = n^s \tag{2.2.8}$$

то, пользуясь равенствами (2.2.7) и (2.2.8), запишем

$$\chi_{m,n,r,p,s}(h) \ge \frac{2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}(f_0^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f_0^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{2^{m/2}\cdot n^{r-s}\cdot n^s}{2^{m/2}\cdot n^r \cdot \left(\int\limits_0^h (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^h (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{-1/p}. \tag{2.2.9}$$

Теперь утверждение теоремы 2.2.1 в виде равенства (2.2.2) вытекает из сопоставления оценок сверху (2.2.6) и снизу (2.2.9). Теорема 2.2.1 полностью доказана.

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.1 при $h = \pi/n$ имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,r,p,s}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \left(\int\limits_0^{\pi/n} (1-\cos n\tau)^{mp/2} d\tau\right)^{-1/p} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1/p}} \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{mp\cdot\Gamma(mp/2)}{\Gamma(mp+1/2)}\right\}^{1/p} \cdot n^{-(r-s)+1/p},$$

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция Эйлера.

Через $W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, которые для любых $m, n, r \in \mathbb{N},\ 1/r < p \le 2$ и $0 < h \le \pi/n$ удовлетворяют неравенству

$$\left(\int_0^h \left\|\Delta_\tau^m(f^{(r)})\right\|^p d\tau\right)^{1/p} \le \Phi(h).$$

Поставим целью при некоторых ограничениях на множестве $\Phi(u)$ найти точное значение перечисленных в начале этой главы n-поперечников. Для этого введём следующее обозначение

$$(\sin\tau)_+ := \Big\{\sin\tau,\ \text{если}\ 0 \le \tau \le \pi/2;\ \ 1,\ \text{если}\ \tau > \pi/2\Big\}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть $\nu \in \mathbb{R}_+$ — произвольное число, $r, m \in \mathbb{N},\ u \in (0, \pi],\ 1/r < p \le 2$, а мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\nu u)}{\Phi^p(u)} \ge \frac{\int_0^{\nu u}(1-\cos\tau)_+^{mp}d\tau}{\int_0^{\pi}(1-\cos\tau)^{mp}d\tau}. \tag{2.2.10}$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi)\right)_2 = 2^{-m-1/p}\cdot n^{-r+1/p}\left(\int_0^\pi \sin^{mp}\tau d\tau\right)^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.2.11}$$

где $\gamma_k(\cdot)$ — любой из k-поперечников: колмогоровский $d_k(\cdot)$, бернштейновский $b_k(\cdot)$, линейный $\delta_k(\cdot)$, гельфандовский $d^k(\cdot)$, проекционный $\Pi_k(\cdot)$.

Доказательство. Используя неравенство (2.0.1) между вышеперечисленными n-поперечниками и полагая в неравенстве (2.2.4) $h = \pi/n$, получаем

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le d_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \le$$

$$\leq E_{n-1}\left(W^{(r)}_{m,p}(\Phi), L_2\right) \leq 2^{-m/2}\cdot n^{-r}\left(\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\right) =$$

$$= 2^{-m-1/p}\cdot n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\pi}\sin^{mp}\tau d\tau\right)^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.12)$$

Для получения, такой же оценки рассматриваемых n-поперечников оценим снизу бернштейновский n-поперечник класса $W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$, введя в рассмотрение (2n+1)-мерную сферу полиномов

$$\sigma^*_{2n+1} := \left\{T_n : \|T_n\| = 2^{-m-1/p}\cdot n^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{\pi/2}(\sin t)^{mp}dt\right)^{-1/p}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и докажем, что $\sigma^*_{2n+1}\subset W^{(r)}_{m,p}(\Phi)$. В [21] доказано, что для произвольного полинома $T_n\in\mathcal{T}_{2n+1}$ имеет место неравенство

$$\left\|\Delta^m_\tau(T^{(r)}_n)\right\| \leq 2^m n^r\left(\sin\frac{nt}{2}\right)^m_+\cdot\|T_n\|. \qquad (2.2.13)$$

Обе части неравенства (2.2.13) возведём в степень p $(1/r < p \leq 2)$ и проинтегрируем полученное выражение по переменному τ в пределах от 0 до νu, а затем в интеграле, расположенном в правой части полученного неравенства, произведём замену переменной $nt = \vartheta$, а также заменим норму полинома $T_n \in \sigma^*$ её значением:

$$\int\limits_0^{\nu u}\left\|\Delta^m_\tau(T^{(r)}_n)\right\|^p d\tau \leq \Phi^p(\pi/n)\int\limits_0^{\nu u}(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\left\{\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos n\tau)^{mp/2}d\tau\right\}^{-1} =$$

$$= \Phi^p(\pi/n)\int\limits_0^{\nu u}\left(\sin\frac{n\tau}{2}\right)^{mp}_+ d\tau\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\sin\frac{n\tau}{2}\right)^{mp}d\tau\right\}^{-1} =$$

$$= \Phi^p(\pi/n)\int\limits_0^{\nu n u}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_+ d\tau\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi}\left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{mp}d\tau\right\}^{-1}.$$

В правой части полученного равенства, полагая $nu = \pi$ и учитывая условие (2.2.10), придем к соотношению

$$\int\limits_0^{\nu u} \left\| \Delta_\tau^m (T_n^{(r)}) \right\|^p d\tau \le \frac{\Phi^p(u) \int\limits_0^{\nu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2} \right)_+^{mp} d\tau}{\int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2} \right)^{mp} d\tau} \le \Phi^p(\nu u).$$

Этим доказано, что шар $\sigma_{2n+1}^* \subset W_{m,p}^{(r)}(\Phi)$. Но тогда, согласно определению бернштейновского n-поперечника,

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \ge \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \ge b_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) \ge$$

$$\ge b_{2n}\left(\sigma_{2n+1}^*, L_2\right) = 2^{-m-1/p} \cdot n^{-r+1/p} \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^{mp} \tau d\tau \right)^{-1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.14)$$

Сравнивая оценки сверху (2.2.12) и снизу (2.2.14), получаем требуемое равенство (2.2.11). Теорема 2.2.2 доказана.

Следствие 2.2.2. *В условиях теоремы 2.2.2 справедливо равенство*

$$\gamma_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) = \gamma_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(\Phi), L_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1/p}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{mp \cdot \Gamma(mp/2)}{\Gamma(mp+1/2)} \right\}^{1/p} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n^{-r+1/p}.$$

В связи с условием (2.2.10) возникает следующий вопрос: существует ли функция $\Phi_0(u)$, удовлетворяющая условию (2.2.10)? На этот вопрос отвечает следующая теорема

Теорема 2.2.3. *Функция* $\Phi_0(\tau) = \tau^\beta$, *где*

$$\beta = \pi \cdot \left\{ p \int\limits_0^{\pi} \left(\sin\frac{\upsilon}{2} \right)^{mp} d\upsilon \right\}^{-1} \qquad (2.2.15)$$

удовлетворяет условию (2.2.10).

Доказательство. Так как $\sin \upsilon/2 \le 1,\ 0 \le \upsilon \le \pi$, то

$$p\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\upsilon}{2}\right)^{mp} d\upsilon < p\int\limits_0^\pi d\upsilon = \pi p, \quad \text{а потому} \quad \beta > \frac{1}{p}.$$

С другой стороны, при $0 < \upsilon \le \pi$,

$$\sin\frac{\upsilon}{2} \ge \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\upsilon}{2} = \frac{\upsilon}{\pi}, \ \text{а потому} \ \ p\int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\upsilon}{2}\right)^{mp} d\upsilon \ge p\int\limits_0^\pi \left(\frac{\upsilon}{\pi}\right)^{mp} d\upsilon = \frac{p\pi}{mp+1},$$

и в силу (2.2.6)

$$\beta < \frac{1}{p}(mp+1). \tag{2.2.16}$$

Таким образом, $1/p < \beta < (mp+1)/p$ — границы значения β. В рассматриваемом случае условие (2.2.10) запишется в виде

$$\nu^{\beta p} \ge \int\limits_0^{\nu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_+^{mp} d\tau \Bigg/ \int\limits_0^\pi \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)^{mp} d\tau. \tag{2.2.17}$$

Учитывая (2.2.15), полученное неравенство запишем в виде

$$\frac{\pi}{\beta p}\cdot\nu^{\beta p} \ge \int\limits_0^{\nu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_+^{mp} d\tau, \quad 0 < \nu < \infty. \tag{2.2.18}$$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$r(\nu) := \frac{\pi}{\beta p}\cdot\nu^{\beta p} - \int\limits_0^{\nu\pi} \left(\sin\frac{\tau}{2}\right)_+^{mp} d\tau. \tag{2.2.19}$$

Из (2.2.19) в окрестности $\nu = 0$ имеем

$$r(\nu) = \frac{\pi}{\beta p}\cdot\nu^{\beta p} - \int\limits_0^{\nu\pi} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{mp} d\tau = \nu^{\beta p}\left(\frac{\pi}{\beta p} - 0(\nu^{mp+1-\beta p})\right) \tag{2.2.20}$$

а потому при $\nu \to 0$ из (2.2.20) и неравенства $\beta < (2m+1)/p$ получаем, что $r(\nu) > 0$. Из (2.2.19) и (2.2.16) имеем $r(0) = r(1) = 0$. Теперь надо установить, что на интервале $(0,1)$ функция (2.2.19) не меняет знак. Рассуждая от противного, допустим, что $r(\nu)$ в некоторой точке $\tau_0 \in (0,1)$ меняет знак. Тогда в силу теоремы Ролля производная

$$r'(\nu) = \pi\nu^{\beta p-1} - \pi\left(\sin\frac{\nu\pi}{2}\right)^{mp}$$

на интервале $(0,1)$ имеет не менее двух различных нулей. Значит столько же различных нулей в тех же точках, что и производная $r'(\nu)$, должна иметь функция

$$r_*(\nu) = \pi^{1/mp}\cdot\left(\nu^{(\beta p-1)/mp} - \sin\frac{\nu\pi}{2}\right). \tag{2.2.21}$$

Так как в силу неравенства $\beta > 1/p$ $(\beta p - 1 > 0)$ и равенства (2.2.21) $r_*(0) = r_*(1) = 0$, функция

$$r'_*(\nu) = \pi^{1/mp}\cdot\left(\frac{\beta p-1}{mp}\cdot\nu^{(\beta p-mp-1)/mp} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\nu\pi}{2}\right) \tag{2.2.22}$$

на основании той же теоремы Ролля должна иметь на интервале $(0,1)$ не менее трёх различных нулей. Но из (2.2.22) и неравенства $\beta < (mp+1)/p$ следует, что производная $r'_*(\nu)$ является разностью двух положительных функций, одна из которых монотонно убывает и выпукла вниз, а другая монотонно убывает и выпукла вверх. В этом случае, как следует из геометрических соображений, производная $r'_*(\nu)$ не может иметь на интервале $(0,1)$ более двух различных нулей. Это противоречие доказывает, что $r(\nu) > 0$ для $\nu \in (0,1)$.

Пусть теперь $1 \le \nu < \infty$. Тогда в силу (2.2.19) и (2.2.16) функция $r(\nu)$ примет вид

$$r(\nu) = \nu^{\beta p} - \beta p(\nu - 1) - 1. \tag{2.2.23}$$

Отсюда получаем

$$r'(\nu) = \beta p(\nu^{\beta p-1} - 1). \tag{2.2.24}$$

В силу неравенства $1/p < \beta$ и (2.2.24) получаем, что $r'(\nu) \ge 0$ в области $[1,\infty)$. Поскольку в силу равенства (2.2.20) $r(1) = 0$, то $r(\nu) \ge 0$ на $[1,\infty)$.

Но это означает, что неравенство (2.2.17) или, что то же, условие (2.2.10) выполняется для функции

$$\Phi_*(\tau) = \tau^{\beta} \quad \text{при} \quad \beta = \pi \left\{ p \int\limits_0^{\pi} \left(\sin \frac{\tau}{2} \right)^{mp} d\tau \right\}^{-1},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.3.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- решена экстремальная задача отыскания точной константы в неравенстве Джексона между величиною совместного приближения комплексно-значных функций и их производных тригонометрическими полиномами и усреднёнными значениями норм конечной разности первого порядка в пространстве L_2 [1-А, 2-А, 4-А];
- найден явный вид точного неравенства типа Джексона-Стечкина между величиною наилучшего совместного приближения комплекснозначных функции и их производных посредством усреднённых значений норм конечных разностей m-го порядка в L_2 [1-А, 2-А, 5-А];
- найдено точное неравенство типа Черныха между наилучшим совместным приближением и усреднённым с весом $\sin nt$ значением норм разностей высших порядков в L_2 [1-А, 3-А, 6-А];
- вычислено точное значение различных n-поперечников на классах функций, характеризующихся усреднённым с весом значением норм конечных разностей высших порядков [3-А, 5-А, 6-А];
- вычислены значения n-поперечников классов функций, нормы разностей которых в метрике L_p $(0 < p \leq 2)$ ограничены сверху мажорантой [1-А, 2-А, 3-А, 6-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и схемы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди H_p.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Айнуллоев Н. О поперечниках дифференцируемых функций в L_2 // Доклады АН ТаджССР. – 1985. – Т.28, – №6. – С.309-313.

[2] Айнуллоев Н. Наилучшее приближение некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. – 1986. – С.3-10.

[3] Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. – 1986. – Т.39, – №5. – С.651-664.

[4] Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона-Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1998. – Т.5, – С.183-198.

[5] Vakarchuk S.B. Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East Journal on Approx., – 2004. – V.10, – №1-2. – P.27-39.

[6] Вакарчук С.Б., Щитов А.Н. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2004. – Т.56, – №11. – С.1458-1466.

[7] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78, – №5. – С.792-796.

[8] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – №1. – С.11-19.

[9] Vakarchuk S.B., Zabutna V.I. Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East Journal on Approximation. Bulgarian Academy of Sciences: Sofia. – 2008. – V.14, – №4. – P.411-421.

[10] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92, – №4. – С.497-514.

[11] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Забутная В.И. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. вiсник. – 2014. – Т.11, – №3. – С.417-441.

[12] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99, – №2. – С.215-238.

[13] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука. – 1977. – 511 с.

[14] Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. – 1973. – Т.14, – №1. – С.21-30.

[15] Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 1978. – Т.24, – №6. – С.785-792.

[16] Лигун А.А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1985. – Т.38, – №2. – С.248-256.

[17] Маковоз Ю.И. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах // Мат. сборник. – 1972. – Т.87(129), – №1. – С.136-142.

[18] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 p.

[19] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20, – №3. – С.433-438.

[20] Тайков Л.В. Наилучшие приближения дифференцируемых функций в метрике пространства L_2 // Матем. заметки. – 1977, – Т.22. – №4. – С.535-542.

[21] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25, – №2. – С.217-223.

[22] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // МГУ. – М. – 1976. – 325 с.

[23] Шабозов М.Ш. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения n-поперечников некоторых классов функций из L_2 // Изв. АН Республики Таджикистан. – 2010. – №4(141). – С.7-24.

[24] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87, – №4. – С.616-623.

[25] Шабозов М.Ш. Точные неравенства типа Джексона-Стечкина для 2π-периодических функций в L_2 и поперечники некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2011. – Т.63, – №10. – С.1040-1048.

[26] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90, – №5. – С.764-775.

[27] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал. – 2011. – Т.52, – №6. – С.1414-1427.

[28] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. – 2012. – Tomus 38, – №2. – P.154-165.

[29] Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Widths of Certain Classes of Periodic Functions in L_2 // Journ. of Approx. Theory. – 2012.– V.164. – Issue 1. – P.869-878.

[30] Shabozov M.Sh., Palavonov K.K. Exact values of width sofcertain classes of periodic differentiable functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ // Analysis Mathematica. – 2015. – V.41. – P.103-115.

[31] Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. Значения поперечников классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Известия ТулГУ. – 2012. – Вып.3. –С.60-68.

[32] Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. – 1991. – 43:1. – С. 125-129.

[33] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки. – 1999. – 65:5. – 816-820.

[34] Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2. №5. – С.513-522.

[35] Черных Н.И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН СССР. – 1967. – Т.88. – С.71-74.

[36] Черных Н.И. Неравенства Джексона в $L_2(0, 2\pi)$ $(1 \leq p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН. – 1992. – Т.198. – С.232-241.

Б) Работы автора по теме диссертации:

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте РТ

[1-А] Раимзода Ф. Об одновременном приближении функции и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – 2020. – №1(178). – С. 29-36.

[2-А] Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения функций и нормы разности в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Доклады

Академии наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т.63, – №11-12. – С. 29-36.

[3-А] Раимзода Ф. Точные неравенства, содержащие наилучшие приближения и нормы разности высших порядков в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Доклады Академии Наук Республики Таджикистан. – 2021. – Т.64. – №3-4. – С.315-320.

2. В других изданиях:

[4-А] Раимзода Ф. О приближении функций и её производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Міжнародна наукова конференція „*Теорія наближень і її застосування*", присевячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). С. 58-59.

[5-А] Раимзода Ф. Одновременное приближение функции и ее производные тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Материалы международной научной конференции „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*", посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 248-250.

[6-А] Раимзода Ф. Приближении функций и ее производных тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Ф. Раимзода // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 258-261.