«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Ректор Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни

_____________ Н. У. Гаффори

«_29_»_03_______ 2021 г.

О Т З Ы В

оппонирующей организации на диссертационную работу
Сайнакова Восифа Додхудоевича
на тему
«Некоторые экстремальные задачи приближения функций двух переменных обобщенными полиномами»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Общеизвестно, что по сравнению с одномерным случаем, исследование вопросов приближения функции двух и большего числа переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Во-первых, область, на которой осуществляется приближение, может иметь весьма сложную структуру и, во-вторых, трудности возникают при описании дифференциально-разностных свойств функций многих переменных, поскольку эти свойства могут быть различными по разным направлениям. В-третьих, усложняется и приближающий аппарат. Всё это в совокупности приводит к тому, что методы исследования экстремальных задач, существенно использующие специфику одномерного случая, не удается перенести на функции двух и более переменных. В связи с этим точных результатов в экстремальных задачах наилучшего приближения в многомерном случае, в том числе и в задачах вычисления точных значений квазипоперечников компактных классов функций, совсем мало.

При изучении некоторых вопросов теории аппроксимации функций многих переменных С.М.Никольским в 1963 году был введен в рассмотрение класс функций с доминирующим смешанным модулем гладкости (см. Сибирский мат. журнал, 1963, т.4, №6, с.1342-1364). Для указанного класса не удавалось найти конструктивные характеристики в теоремах приближения функций многих переменных полиномами или целыми функциями. В частности, не удавалось получить теорему вложения в общем виде, аналогичную одномерной теореме П.Л.Ульянова. Для решения задач, возникших в указанном направлении, М.К.Патаповым было введено в рассмотрение так называемое приближение "углом" и показано, что при помощи указанного метода аппроксимации можно получить конструктивные характеристики классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости. Эти конструктивные характеристики позволили получить различные теоремы вложения и, в частности, такого же типа, как и одномерная теорема П.Л.Ульянова. Возникший впоследствии интерес к аппроксимативным конструкциям подробного вида обобщёнными полиномами или "углами" был связан с работами А.Н.Вайндинера, В.Ю.Брудного, М.Б.Бабаева, D.D.Stancu, В.Н.Темлякова, Н.П.Корнейчука, С.В.Переверзева, С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова, М.О.Акобиршоева и многих других. Так, А.Н.Вайндинер показал определённые преимущества предлагаемого метода аппроксимации перед другими при решении ряда задач, связанных с проблемами математической физики. В свою очередь Н.П.Корнейчук и С.В.Переверзев продемонстрировали преимущества данного метода как аппарата приближения при получении точных в том или ином смысле решений экстремальных задач, связанных с аппроксимацией функций многих переменных. Исходя из изложенного, выбранная тема диссертационной работы Сайнакова В.Д. является весьма актуальной в приложении.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка цитируемой литературы и занимает 70 страниц машинописного текста.

Цель диссертационной работы – получение неравенств типа Джексона-Стечкина для дифференцируемых периодических функций двух переменных, связывающих наилучшее приближение функций обобщенными полиномами с усредненными модулями непрерывности высших порядков частных производных в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ и вычисление точных значений колмогоровских и линейных квазипоперечников некоторых классов функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков частных производных в $L_2(Q)$ (Глава I), а также получение точных неравенств типа Колмогорова для комплексных функций двух переменных аналитических в бикруге и их приложения в решении экстремальных задач аппроксимации.

В первой главе диссертации получено достаточно много результатов, но наиболее интересным результатом первой главы, на наш взгляд, является общая теорема, доказанная в третьем параграфе первой главы, которая является обобщением хорошо известного результата В.В.Шалаева в одномерном случае для $f(x) \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$ (Укр. матем. журн., 1991, Т.43, №1, С.125-129).

Приведем этот интересный результат, пользуясь обозначениями, принятыми в диссертации.

Теорема 1.3.1. *Для любых натуральных m и n и любых чисел $r, s \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих неравенства $0 < mt \le \pi$, $0 < n\tau \le \pi$, при любом $p \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{2r-p} \cdot n^{2s-p} \cdot \mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n} \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_{L_2(Q)} \sin mt \sin n\tau dt d\tau\right)^p} = \frac{1}{16^p}. \qquad (1)$$

Существует функция $g_1(x, y) \in L_2^{(r,s)}$, для которой верхняя грань в левой части (1) реализуется и равняется правой части (1).

Из теоремы 1.3.1 вытекают различные следствия, одним из которых является общее утверждение о наилучших совместных приближениях функций и их последовательных производных.

Теорема 1.3.4. *В предположении следствия 1.3.4 при всех $m, n, p \in \mathbb{N}$ и $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s)$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{2^p}.$$

В четвертом параграфе вычислены точные значения квазипоперечников некоторых классов периодических функций, а именно доказано следующее общее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть функции $\Psi_l(t), (l = 1, 2)$ удовлетворяют условию*

$$\Psi_l^2\left(\frac{\tau}{\mu}\right)\int\limits_0^{\pi\mu}(1-\cos\theta)_* \sin\frac{\theta}{\mu} d\theta \le 2\mu\Psi_l^2(u),\ l = 1, 2$$

при любом $\mu > 0$ и любом $\tau \in (0, 2\pi]$. Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) = d'_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= \mathcal{E}_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 =$$

$$= e_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 = \frac{1}{2^p m^r n^s}\Psi_1^p\left(\frac{\pi}{m}\right)\Psi_2^p\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Во второй главе диссертации найдено точное неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений функций двух комплексных переменных, аналитических в бикруге $U^2 = \{(\xi,\zeta) \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ обобщенными квазимногочленами или "углами", составленными из тензорного произведения алгебраических комплексных полиномов одного переменного, принадлежащих пространству $B_2(U^2)$. Отметим, что для аналитических в круге одномерных функций неравенства типа Колмогорова ранее были получены С.Б.Вакарчуком, М.Б.Вакарчуком, А.А.Акопяном, К.Ю.Осипенко, М.Ш.Шабозовым, М.С.Саидусайновым.

С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком при некоторых ограничениях на коэффициенты Тейлора $c_{p,q}(f)$ функции $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ доказано неравенство типа Колмогорова следующего вида

$$\left\|f^{(k-\mu,l-\nu)}\right\|_2 \leq \frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}(\mu+1)^{1/2}} \cdot \frac{\alpha_{l,l-\nu}(l+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{l,l}^{1-\nu/l}(\nu+1)^{1/2}} \cdot$$

$$\cdot \|f\|_2^{\mu\nu/(kl)} \cdot \left\|f^{(k,0)}\right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l} \cdot \left\|f^{(0,l)}\right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k} \cdot \left\|f^{(k,l)}\right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)},$$

которое является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которой оно обращается в равенство.

Наиболее значимым результатом второй главы является следующее утверждение, которое является обобщением вышеприведенного результата.

Теорема 2.3.1. *Пусть $m > k \geq \mu \geq 1, n > l \geq \nu \geq 1,\ m,n,l,\mu,\nu \in \mathbb{N}$. Тогда для любой функции $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ выполняется неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_{m,k-\mu}\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{\frac{\mu\nu}{kl}} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\left(f^{(k,0)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}, \qquad (2)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(\xi,\zeta) = \xi^m\zeta^n \in B_2^{(k,l)}(U^2)$.

Пусть $W_2^{(k,l)}(k,l \in \mathbb{N})$ — класс функций $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которых $\left\|f^{(k,l)}\right\|_2 \leq 1$.

Из теоремы 2.3.1 вытекает в качестве следствия

Теорема 2.3.2. *Пусть $m, n, k, l, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяют ограничениям $m > k \geq \mu \geq 1$, $n > l \geq \nu \geq 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}} \cdot \frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.$$

В диссертации встречается незначительное число опечаток в основном тексте (ст. 28, 34, 45, 58). Однако эти замечания и имеющиеся некоторые грамматические и стилистические погрешности не снижают в целом высокой оценки диссертационной работы. В автореферате опечатки и ошибки не обнаружены.

В целом в диссертации проделана большая, содержательная работа. Автор диссертации владеет современными методами теории аппроксимации функций, функционального анализа и теории функций многих комплексных переменных. Диссертация написана автором самостоятельно, содержит новые научные результаты, выдвигаемые для публичной защиты, и характеризует личный вклад автора диссертации в теорию приближения функций.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются. Автореферат соответствует требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах из Перечня ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ, а также доложены на ведущих по данной тематике международных конференциях и семинарах.

Вышесказанное даёт основание считать, что диссертационная работа В.Д.Сайнакова «Некоторые экстремальные задачи приближения функций двух переменных обобщенными полиномами», представленная на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, является научно-квалификационной работой, в которой решены важные задачи, вносящие существенный вклад в теорию приближения функций и их приложения, и полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК при Президенте Республики Таджикистан к кандидатским диссертациям, а её автор – Сайнаков Восиф Додхудоевич заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Результаты диссертационной работы Сайнакова Восифа Додхудоевича заслушаны на специальном семинаре кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С.Айни 01.03.2021 г.

Отзыв составила доцент кафедры математического анализа ТГПУ им. С.Айни, кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ М.Б.Холикова.

Отзыв обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа Таджикского государственного педагогического университета им. С.Айни (протокол №8 от 26.03.2021г.).

Председатель заседания, эксперт по диссертации,
зав. кафедрой математического анализа
Таджикского государственного педагогического
университета имени С.Айни
кандидат физ.-мат. наук, доцент **М.Б.Холикова**

Секретарь заседания,
старший преподаватель **С.Лашкарбеков**

Адрес:
Таджикский государственный педагогический университет им. С.Айни, 734003, Таджикистан, г. Душанбе, проспект Рудаки, 121.
Вебсайт: www.tgpu.tj; E-mail: info@tgpu.tj
Тел. рабочий: +992 (37) 224-13-83; Тел. моб. (+992) 93-425-07-77

Подписи М.Б.Холиковой и С.Лашкарбекова
заверяю

Начальник
УК и ОД ТГПУ им. С.Айни **Д.Назаров**