Министерство образования и науки
Республики Таджикистан

Таджикский национальный университет

УДК 517.5 На правах рукописи

Сайнаков Восиф Додхудоевич

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ОБОБЩЕННЫМИ ПОЛИНОМАМИ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик НАН Таджикистана,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 2 1

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

В диссертационной работе исследуются экстремальные задачи приближения функций двух переменных обобщенными полиномами, так называемыми квазиполиномами [4] и или “углами” [18, 19]. Хорошо известно, что, по сравнению с задачами приближения функций одного переменного, исследование вопросов приближения функций двух переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с двумерностью. Во-первых, область, на которой осуществляется приближение, может иметь сложную структуру, даже если это односвязная область. Трудности возникают при описании дифференциально-разностных свойств функций, поскольку они могут быть разными по разным направлениям. К тому же при приближении функций двух переменных усложняется и аппарат приближения. Все эти обстоятельства приводят к тому, что при приближении функций двух переменных трудно рассчитывать на получение точных оценок на классах функций.

В предлагаемой диссертационной работе решены экстремальные задачи приближения функций двух переменных на классах дифференцируемых функции, причем все полученные на классах функций оценки являются точными.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы. Среди экстремальных задач теории приближения функций двух переменных наиболее трудными являются задачи вычисления верхних граней приближения классов функций линейными агрегатами, состоящими из конечного числа произведения одномерных функций, имеющих более простую структуру. При этом, как правило, в качестве такого агрегата часто используют обобщенные полиномы (так называемые квазиполиномы, или “углами”), порожденные тензорным произведением одномерных тригонометрических или алгебраических полиномов. Такая постановка задачи приближения функций двух переменных является весьма актуальной в силу того, что позволяет решать двумерные экстремальные задачи, которые ранее другими методами не поддавались решению.

Вопросами приближения функций двух переменных суперпозициями функций одного переменного ранее занимались Н.П.Корнейчук и С.В.Переверзов [17], А.В.Вайндинер [5, 6], М.К.Потапов [18, 19], В.Ю.Брудный [4], В.Н.Темляков [24], С.Б.Вакарчук [8, 13], М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоев [29, 30, 33] и многие другие.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами, темами). Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. по теме “Теория аппроксимации функций”.

Цель и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- Найти точную константу в неравенстве Джексона-Стечкина между величиною наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности частных производных высшего порядка указанных функций.

- Вычислить точные значения колмогоровских и линейных квазипоперечников классов периодических функций двух переменных, задаваемых усредненными значениями модулей непрерывности частных производных в пространстве $L_2(Q), Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

- Найти точное неравенство типа Колмогорова для функций двух комплексных переменных, аналитических внутри бикруга, принадлежащих пространству Бергмана, и привести его приложения к экстремальным задачам совместного приближения функций и ее последовательных частных производных.

Основные методы исследования. В работе широко использованы общие методы функционального анализа, методы решения экстремальных задач функций многих переменных, а также современные методы решения многомерных задач вариационного содержания.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- Решена задача о нахождении точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций.
- Найдены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения обобщенными полиномами функций двух переменных с усреднен-

ными с весовыми функциями модулями непрерывности высших порядков частных производных в $L_2(Q)$. Вычислены колмогоровские и линейные квазипоперечники некоторых классов функций.

- Найдено точное неравенство типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и дано его приложение к экстремальным задачам в пространстве Бергмана, а также к экстремальным задачам совместного приближения функций и их производных обобщенными полиномами.

Положения, вносимые на защиту:

- основные теоремы о точных оценках приближения функций двух переменных обобщенными полиномами;
- теорема о точной константе в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций;
- теорема о точном неравенстве типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и его приложения в экстремальных задачах теории приближения функций двух комплексных переменных.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертационной работы можно применять в экстремальных задачах теории приближения многомерных функций суперпозициями функций меньшего числа переменных как в действительной, так и в комплексной областях.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Основные результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры “функционального анализа и дифференциальных уравнений” Таджикского национального университета под рукодводством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг);
- на международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложений” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- на международной научной конференции “Современные проблемы алгебры и теории чисел” (Душанбе, 14-15 декабря 2018 г.);
- республиканской научной конференции “Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- на международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений ” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.).

Публикации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 10 научных работах. Из них 5 статей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 5 в трудах международных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 44 наименования, занимает 70 страницы машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Глава I

Приближение периодической функции двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$

В этой главе мы излагаем некоторые вопросы среднеквадратического приближения дифференцируемых периодических функций двух переменных $f(x, y)$ обобщенными тригонометрическими полиномами (так называемыми "тригонометрическими углами").

§1.1. Предварительные сведения и некоторые факты. Приближение функций тригонометрическими "углами"

В дальнейшем символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ будут обозначаться соответственно множества натуральных, целых неотрицательных, целых и вещественных чисел. Всюду далее через $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ обозначим гильбертово пространство периодических функций двух переменных $f(x, y)$, суммируемых с квадратом в области Q с конечной нормой

$$\|f\|_{L_2} := \|f\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} |f(x, y)|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty.$$

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество периодических функций $f(x, y)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x, y) := \frac{\partial^{\nu+\mu} f}{\partial x^\nu \partial y^\mu}, \ \ \mu \le r, \nu \le s, \ \mu, \nu, r, s \in \mathbb{N},$$

а через $L_2^{(r,s)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f(x, y) \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r, s \in \mathbb{N}$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}(x, y)$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu = \overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}(x, y)$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования и $f^{(r,s)}(x,y) \in L_2(Q)$, то есть норма

$$\left\| f^{(r,s)} \right\|_{L_2} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} \left| f^{(r,s)}(x,y) \right|^2 dxdy \right\}^{1/2} < \infty. \qquad (1.1.1)$$

Предположим, что функция $f \in L_2(Q)$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье следующего вида

$$f(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}, \qquad (1.1.2)$$

где

$$c_{k,l}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x,y) e^{-i(kx+ly)} dxdy$$

– коэффициенты Фурье ряда (1.1.2). Продифференцировав ряд (1.1.2) по переменному x r-раз и по переменному y s-раз получаем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (ik)^r (il)^s c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)}. \qquad (1.1.3)$$

Применяя тождество Парсеваля к равенству (1.1.3), приходим к соотношению

$$\left\| f^{(r,s)} \right\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k^{2r} l^{2s} |c_{k,l}(f)|^2. \qquad (1.1.4)$$

Так как правую часть формулы (1.1.4) можно представить в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k^{2r} l^{2s} |c_{k,l}(f)|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} k^{2r} l^{2s} \left\{ |c_{-k,-l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,l}(f)|^2 \right\},$$

то, введя обозначение

$$\rho_{k,l}^2(f) = |c_{-k,-l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,l}(f)|^2, \qquad (1.1.5)$$

равенство (1.1.4) запишем в более удобном виде

$$\left\|f^{(r,s)}\right\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}k^{2r}l^{2s}|\rho_{k,l}(f)|^2. \qquad (1.1.6)$$

Таким образом, конечность нормы (1.1.1) означает, что двойной числовой ряд в правой части равенства (1.1.6) является сходящимся.

Далее рассмотрим задачу отыскания точных значений величины наилучшего приближения периодических функций двух переменных тригонометрическими "углами" [18, 19] или обобщенными тригонометрическими полиномами (квазиполиномами) [4] в пространстве $L_2(Q)$. Для этого напомним необходимые понятия и определения, нужные нам в дальнейшем, из работ [9, 28, 29, 30, 33].

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ – два линейных нормированных пространства функций одной переменной, а

$$U_m := span\left\{u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)\right\},$$

$$V_n := span\left\{v_0(y), v_1(y), \ldots, v_n(y)\right\}$$

– их конечномерные подпространства, то есть $U_m \subset X$, $V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x,y)=\sum_{k=0}^{m}u_k(x)\psi_k(y)+\sum_{l=0}^{n}v_l(y)\varphi_l(x),$$

где $\{\varphi_l(x)\}_{l=0}^n$ и $\{\psi_k(y)\}_{k=0}^m$ – наборы произвольных функций, соответственно из пространств X и Y, назовём обобщённым полиномом (квазиполиномом), порождённым подпространствами пространство U_m и V_n. Указанные обобщённые полиномы образуют подпространство Z, которое обозначим

$$G(U_m, V_n) := U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции "$\otimes$" и "$\oplus$" обозначают соответственно операции декартова произведения и прямой суммы множеств. Обозначим

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z := \mathscr{E}(f; G(U_m, V_n))_Z =$$

$$= \inf \{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G(U_m, V_n)\} \tag{1.1.7}$$

и если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий пространству Z, то положим

$$\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \sup \{\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z : \ f \in \mathfrak{M}\} =$$

$$= \sup \{\mathscr{E}(f, G(U_m, V_n))_Z : \ f \in \mathfrak{M}\}. \tag{1.1.8}$$

Величина (1.1.7) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G(U_m, V_n)$, а величина (1.1.8) – отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G(U_m, V_n)$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset Z$ величину

$$d_{m,n}(\mathfrak{M}; Z) := \inf \{\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : \ U_m \subset X, \ V_n \subset Y\} \tag{1.1.9}$$

называют колмогоровским квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ [9, 28, 29, 30, 33].

Пусть Λ – линейный оператор, действующий на функцию $f \in \mathfrak{M}$, причем образ $\Lambda(\mathfrak{M}) := \{\Lambda(f) : f \in \mathfrak{M}\}$ принадлежит множеству $G(U_m, V_n)$. Положим

$$e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z := \sup \{\|f - \Lambda(f)\|_Z : f \in \mathfrak{M}\},$$

$$e(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n))_Z := \inf \{e(\mathfrak{M}, \Lambda)_Z : \ \Lambda(\mathfrak{M}) \subset G(U_m, V_n)\}.$$

Следуя работам [9, 28, 29, 30, 33], величину

$$d'_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) := \inf \{e(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n))_Z : \ U_m \subset X, V_n \subset Y\} \tag{1.1.10}$$

назовём линейным квазипоперечником множества $\mathfrak{M}$ в пространстве Z. Непосредственно из приведенных определений следуют неравенства

$$e\left(\mathfrak{M}, G(U_m, V_n)\right)_Z \geq \mathscr{E}\left(\mathfrak{M}; G(U_m, V_n)\right)_Z, \tag{1.1.11}$$

$$d^{'}_{m,n}(\mathfrak{M}, Z) \geq d_{m,n}(\mathfrak{M}, Z). \tag{1.1.12}$$

При вычислении величин (1.1.9)-(1.1.12) всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ – пространства суммируемых с квадратом 2π-периодических функций f на отрезке $[0, 2\pi]$, а $Z := L_2(Q), Q = \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$.

Пусть теперь $U^*_{2m+1} \subset L_2[0, 2\pi]$, $V^*_{2n+1} \subset L_2[0, 2\pi]$ – два конечномерных подпространства тригонометрических полиномов соответственно порядка $2m + 1$ по переменной x и $2n + 1$ – по переменной y, то есть

$$U^*_{2m+1} := span\left\{e^{ikx}\right\}_{k=-m}^{m},\ V^*_{2n+1} := span\left\{e^{ily}\right\}_{l=-n}^{n}.$$

Очевидно, что каждый элемент $g_{m,n}(x, y) \in G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})$ представим в виде

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|k|\leq m} \psi_k(y)e^{ikx} + \sum_{|l|\leq n} \varphi_l(x)e^{ily}, \tag{1.1.13}$$

где последовательности $\{\psi_k(y)\}_{k=-m}^{m} \subset L_2[0, 2\pi], \{\varphi_l(x)\}_{l=-n}^{n} \subset L_2[0, 2\pi]$ – произвольные наборы функций. Функции вида (1.1.13) называют квазиполиномами [4] или тригонометрическими “углами” [18, 19].

Всюду далее

$$Z = L_2(Q) := L_2[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

– линейное нормированное пространство 2π-периодических по каждой из переменных x и y функций $f(x, y)$, суммируемых с квадратом в области Q, а множество $G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1}) \subset L_2(Q)$. Для произвольной функции $f \in L_2(Q)$ равенством

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{L_2(Q)} := \mathscr{E}(f; G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})) =$$

$$= \inf\left\{\|f-g_{m,n}\|_{L_2(Q)}:\ g_{m,n}\in G(U^*_{2m+1},V^*_{2n+1})\right\} \qquad (1.1.14)$$

определим величину наилучшего приближения функции f элементами (тригонометрическими "углами") из множества $G(U^*_{2m+1},V^*_{2n+1})$.

Для функции $f\in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной ряд Фурье (1.1.2) квазиполиномом Фурье порядка $(m,n), m,n\in\mathbb{N}$ называют выражение

$$\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y)=\left(\sum_{|k|\le m}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{|l|\le n}-\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n}\right)c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}.$$

Очевидно, что функцию $\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y)$ после некоторых простых преобразований можно также записать в виде

$$\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y)=$$

$$=\left(\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n}+\sum_{|k|\ge m+1}\sum_{|l|\le n}+\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\ge n+1}\right)c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}. \qquad (1.1.15)$$

Ряд Фурье (1.1.2) функции $f\in L_2(Q)$ с учетом равенства (1.1.15) запишем в виде

$$f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}=$$

$$=\left(\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n}+\sum_{|k|\ge m+1}\sum_{|l|\le n}+\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\ge n+1}+\sum_{|k|\ge m+1}\sum_{|l|\ge n+1}\right)c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}=$$

$$=\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y)+\sum_{|k|\ge m+1}\sum_{|l|\ge n+1}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}. \qquad (1.1.16)$$

Из (1.1.16) вытекает равенство

$$f(x,y)-\mathscr{F}_{m,n}(f;x,y)=\sum_{|k|\ge m+1}\sum_{|l|\ge n+1}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}. \qquad (1.1.17)$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|f(x,y)-\mathscr{F}_{m,n}(f)\|^2_{L_2(Q)}=\sum_{|k|\ge m+1}\sum_{|l|\ge n+1}|c_{k,l}(f)|^2.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1.1.1. *Среди всех обобщенных полиномов вида* (1.1.13), *принадлежащих множеству* $G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})$, *наилучшее приближение функции* $f \in L_2(Q)$ *доставляет ее квазиполином Фурье порядка* $(m-1, n-1)$. *При этом*

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} =$$

$$= \inf\left\{\|f - g_{m-1,n-1}\|^2_{L_2(Q)} : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\right\} =$$

$$= \|f - \mathscr{F}_{m-1,n-1}(f)\|^2_{L_2(Q)} = \sum_{|k|\geq m}\sum_{|l|\geq n} |c_{k,l}(f)|^2. \tag{1.1.18}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})$. Так как наборы функций $\{\psi_k(y)\}_{k=-(m-1)}^{m-1} \in L_2[0, 2\pi]$, $\{\varphi_l(y)\}_{l=-(n-1)}^{n-1} \in L_2[0, 2\pi]$, то в смысле сходимости в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$ справедливы разложения в ряды Фурье

$$\psi_k(y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(\psi_k)e^{ily},\ k = \overline{-(m-1), m-1}, \tag{1.1.19}$$

$$\varphi_l(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\varphi_l)e^{ikx},\ l = \overline{-(n-1), n-1}. \tag{1.1.20}$$

Если подставить вместо $\psi_k(y)$ и $\varphi_l(x)$ в равенство (1.1.13) их разложения в ряды Фурье, стоящие в правых частях соотношений (1.1.19) и (1.1.20), в смысле сходимости в метрике $L_2(Q)$ получим равенство

$$g_{m-1,n-1}(x,y) = \sum_{|k|\leq m-1}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l(\psi_k)e^{i(kx+ly)} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{|l|\leq n-1} c_k(\varphi_l)e^{i(kx+ly)},$$

которое, ради удобства, запишем также в виде

$$g_{m-1,n-1}(x,y) = \left(\sum_{|k|\leq m-1}\sum_{|l|\leq n-1} + \sum_{|k|\leq m-1}\sum_{|l|\geq n}\right) c_l(\psi_k)e^{i(kx+ly)} +$$

$$+\left(\sum_{|k|\le m-1}\sum_{|l|\le n-1}+\sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\le n-1}\right)c_k(\varphi_l)e^{i(kx+ly)}. \tag{1.1.21}$$

Пользуясь равенствами (1.1.16) и (1.1.21), запишем

$$f(x,y)-g_{m-1,n-1}(x,y)=$$

$$=\sum_{|k|\le m-1}\sum_{|l|\le n-1}\left(c_{k,l}(f)-c_k(\varphi_l)-c_l(\psi_k)\right)e^{i(kx+ly)}+$$

$$+\sum_{|k|\le m-1}\sum_{|l|\ge n}\left(c_{k,l}(f)-c_l(\psi_k)\right)e^{i(kx+ly)}+$$

$$+\sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\le n-1}\left(c_{k,l}(f)-c_k(\varphi_l)\right)e^{i(kx+ly)}+\sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)}. \tag{1.1.22}$$

Простой подсчет с учетом ортогональности системы $\left\{e^{i(kx+ly)}\right\}_{k,l=-\infty}^{+\infty}$ в квадрате $Q:=\{0\le x,y\le 2\pi\}$ приводит к следующему соотношению

$$\|f-g_{m-1,n-1}\|_{L_2(Q)}=$$

$$=\sum_{|k|\le m-1}\sum_{|l|\le n-1}\left|c_{k,l}(f)-c_k(\varphi_l)-c_l(\psi_l)\right|^2+$$

$$+\sum_{|k|\le m-1}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{k,l}(f)-c_l(\psi_k)\right|^2+$$

$$+\sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\le n-1}\left|c_{k,l}(f)-c_k(\varphi_l)\right|^2+\sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n}\left|c_{k,l}(f)\right|^2. \tag{1.1.23}$$

Из соотношения (1.1.23) сразу вытекает, что величина (1.1.14) принимает минимальное значение, равное правой части (1.1.18), тогда и только тогда, когда выполняются все равенства в следующем соотношении

$$\begin{cases} c_{k,l}(f)=c_k(\varphi_l)+c_l(\psi_k), & |k|\le m-1,\ |l|\le n-1,\\ c_{k,l}(f)=c_l(\psi_k), & |k|\le m-1,\ |l|\ge n,\\ c_{k,l}(f)=c_k(\varphi_l), & |k|\ge m,\ |l|\le n-1. \end{cases} \tag{1.1.24}$$

Подставляя в правую часть (1.1.22) вместо коэффициентов $c_k(\psi_l)$ и $c_l(\varphi_k)$ их значение через коэффициенты $c_{k,l}(f)$ из системы (1.1.24), мы получим общий вид квазиполинома Фурье порядка $(m-1, n-1)$ в виде равенства (1.1.15), и следовательно, имеет место равенство (1.1.15), чем и завершаем доказательство леммы 1.1.1.

Замечание 1.1.1. Принимая во внимание обозначение (1.1.5), формулу (1.1.18) запишем в виде

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \sum_{|k|\geq m}\sum_{|l|\geq n}|c_{k,l}(f)|^2 =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\left\{|c_{-k,-l}(f)|^2 + |c_{k,-l}(f)|^2 + |c_{-k,l}(f)|^2 + |c_{k,l}(f)|^2\right\} =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f), \tag{1.1.25}$$

более удобном в приложении. В частности, из (1.1.18) в силу (1.1.25) следует, что если $F(x,y) = \varphi(x)g(y)$, то имеем:

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(F)_{L_2(Q)} = \mathscr{E}^2(F; G(U^*_{2m-1}, U^*_{2n-1}))_{L_2(Q)} =$$

$$= \mathscr{E}^2(\varphi; U^*_{2m-1})_{L_2[0,2\pi]}\cdot\mathscr{E}^2(g; V^*_{2n-1})_{L_2[0,2\pi]} =$$

$$= \mathscr{E}^2_{2m-1}(\varphi)_{L_2[0,2\pi]}\cdot\mathscr{E}^2_{2n-1}(g)_{L_2[0,2\pi]}, \tag{1.1.26}$$

где

$$\mathscr{E}_{2\nu-1}(\psi)_{L_2[0,2\pi]} := \inf\left\{\|\psi - T_{\nu-1}(\psi)\|_{L_2[0,2\pi]} : T_{\nu-1}\subset G_{2\nu-1}\right\}$$

– величина наилучшего среднеквадратического приближения периодической функции $\psi(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1} := span\left\{e^{ijx}\right\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Имеет место также следующая важная

Лемма 1.1.2. *Для произвольной функции* $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq m^{-r}n^{-s}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}, \tag{1.1.27}$$

которое является точным в том смысле, что для функции

$$f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

обращается в равенство.

Доказательство. В самом деле, из принадлежности функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ следует, что не только смешанная производная $f^{(r,s)} \in L_2(Q)$, но и все промежуточные производные $f^{(\mu,\nu)} \in L_2(Q)\,(\mu = \overline{0, r-1}; \nu = \overline{0, s-1})$, $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. Кроме того, непосредственными вычислениями легко доказать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, при всех $\mu \in [0, r]$, $\nu \in [0, s]$ справедливы равенства

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} = \left\|f^{(\mu,\nu)} - \mathscr{F}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)\right\|^2_{L_2(Q)} =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} k^{2\mu} l^{2\nu} \rho^2_{k,l}(f), \tag{1.1.28}$$

где $\mathscr{F}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)$ – квазиполином Фурье порядка $(m-1, n-1)$ производной $f^{(\mu,\nu)}$, который из (1.1.3) вытекает заменой $r = \mu$, $s = \nu$. Отсюда, в частности, вытекают равенства, нужные нам в дальнейшем:

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} \rho^2_{k,l}(f), \tag{1.1.25}$$

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} k^{2r} l^{2s} \rho^2_{k,l}(f). \tag{1.1.29}$$

Теперь, заметив, что при любых $k \geq m$ и $l \geq n\,(k, l, m, n \in \mathbb{N})$ имеют место неравенства $(k/m)^{2r} \geq 1$, $(l/n)^{2s} \geq 1\,(r, s \in \mathbb{Z}_+)$ а потому из равенства (1.1.4) с учетом формулы (1.1.29) будем иметь

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} \rho^2_{k,l}(f) \leq$$

$$\leq \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\left(\frac{k}{m}\right)^{2r}\left(\frac{l}{n}\right)^{2s}\rho_{k,l}^2(f) =$$

$$= \frac{1}{m^{2r}}\cdot\frac{1}{n^{2s}}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}k^{2r}l^{2s}\rho_{k,l}^2(f) =$$

$$= m^{-2r}n^{-2s}\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}, \tag{1.1.30}$$

откуда и вытекает неравенство (1.1.27). Для функции

$$f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}(Q)$$

легкие вычисления дают

$$f_0^{(r,s)}(x,y) = (im)^r(in)^s e^{i(mx+ny)},$$

$\rho_{k,l}(f_0) = 0$, когда $k \neq m, l \neq n$ и $\rho_{m,n}(f_0) = 1$,

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} = 1,\ \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)} = m^r n^s, \tag{1.1.31}$$

а потому имеем:

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)} \equiv 1 = m^{-r}n^{-s}\cdot m^r n^s = m^{-r}n^{-s}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)},$$

откуда сразу следует утверждение леммы 1.1.2.

Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие 1.1.1. *Справедливо экстремальное равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} =$$

$$= \sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f;G(U_{2m-1}^*,V_{2n-1}^*))_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)};G(U_{2m-1}^*,V_{2n-1}^*)\right)_{L_2(Q)}} = \frac{1}{m^r n^s}. \tag{1.1.32}$$

Действительно, из неравенства (1.1.30) вытекает, что

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}}\le\frac{1}{m^rn^s}. \qquad (1.1.33)$$

С другой стороны, учитывая равенства (1.1.31), получаем обратное неравенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}}\ge$$

$$\ge\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0;G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1}))_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(r,s)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}}=\frac{1}{m^rn^s}. \qquad (1.1.34)$$

Требуемое равенство (1.1.32) является следствием неравенств (1.1.33) и (1.1.34), чем и завершаем доказательство следствия 1.1.1.

Теорема 1.1.1. *Пусть* $\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+:=\mathbb{N}\cup\{0\}$ $(0\le\mu\le r, 0\le\nu\le s)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}}=$$

$$=\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)};G(U^*_{2m-1},V^*_{2n-1})\right)_{L_2(Q)}}=\frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}. \qquad (1.1.35)$$

Существует функция $f_0\in L_2^{(r,s)}(Q)$, *которая реализует знак равенства в соотношении* (1.1.35).

Доказательство. Положим $f^{(\mu,\nu)}(x,y)=g(x,y)$. Тогда будем иметь $f^{(r,s)}(x,y)=g^{(r-\mu,s-\nu)}(x,y)$ и так как $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$, то очевидно, что $g\in L_2^{(r-\mu,s-\nu)}(Q)$, а потому, учитывая равенство (1.1.32), будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}}=$$

$$=\sup_{g\in L_2^{(r-\mu,s-\nu)}(Q)}\frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(g\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(g^{(r-\mu,s-\nu)}\right)_{L_2(Q)}}=\frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}.$$

Покажем точность полученного равенства на множество функций $L_2^{(r,s)}(Q)$. Для функции

$$f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}(Q),$$

рассмотренной нами при доказательстве леммы 1.1.2, при всех $0 \le \mu \le r$, $0 \le \nu \le s$ легкие вычисления дают

$$f_0^{(\mu,\nu)}(x,y) = (im)^\mu (in)^\nu e^{i(mx+ny)},\ \mu,\nu \in \mathbb{Z}_+,$$

$$f_0^{(r,s)}(x,y) = (im)^r (in)^s e^{i(mx+ny)},\ r,s \in \mathbb{N},$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} = m^\mu n^\nu,\ \ \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)} = m^r n^s.$$

Используя последние два равенства, запишем

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} =$$

$$= \frac{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_0^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}} = \frac{m^\mu n^\nu}{m^r n^s} = \frac{1}{m^{r-\mu} n^{s-\nu}},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.1.1.

§1.2. Оценка наилучшего приближения самой функции и ее старших частных производных на классе $W^{(r,s)}L_2(Q)$

Всюду далее через $W^{(r,s)}L_2(Q)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которых при всех $r, s \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\left\| f^{(r,s)} \right\|_{L_2(Q)} := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} \left| f^{(r,s)}(x,y) \right|^2 dxdy \right\}^{1/2} \leq 1. \tag{1.2.1}$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *При любых $m, n \in \mathbb{N}$ для произвольных чисел $r, s \in \mathbb{Z}_+$ имеют место экстремальные равенства*

$$\sup \left\{ \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^r n^s}, \tag{1.2.2}$$

$$\sup \left\{ \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{n^s}, \tag{1.2.3}$$

$$\sup \left\{ \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q) \right\} = \frac{1}{m^r}. \tag{1.2.4}$$

Доказательство. Чтобы доказать соотношения (1.2.2)-(1.2.4) необходимо, чтобы мы величины $\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}$, $\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)}$ и $\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)}$ точно оценили посредством величины наилучшего приближения $\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}$. Заметим, что в лемме 1.1.2 для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ доказано точное неравенство

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{m^r} \cdot \frac{1}{n^s} \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}. \tag{1.2.5}$$

Аналогичные неравенства получим для двух других величин наилучших приближений частных производных $f^{(r,0)}$ и $f^{(0,s)}$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+)$. В самом деле, в равенстве (1.1.28) полагая $\mu = r$, $\nu = 0$, имеем:

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} k^{2r}\rho^2_{k,l}(f) \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} k^{2r}\left(\frac{l}{n}\right)^{2s}\rho^2_{k,l}(f) = \frac{1}{n^{2s}}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} k^{2r}l^{2s}\rho^2_{k,l}(f) =$$

$$= \frac{1}{n^{2s}}\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}. \tag{1.2.6}$$

Аналогичным образом, полагая в (1.1.28) $\mu = 0$, $\nu = s$, получаем

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} l^{2s}\rho^2_{k,l}(f) \le$$

$$\le \frac{1}{m^{2r}}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} k^{2r}l^{2s}\rho^2_{k,l}(f) = \frac{1}{m^{2r}}\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)}. \tag{1.2.7}$$

Так как для произвольной функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)} \le \left\|f^{(r,s)}\right\|_{L_2(Q)} \le 1,$$

то из неравенств (1.2.5)-(1.2.7) будем иметь

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \le \frac{1}{m^r n^s}, \tag{1.2.8}$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)} \le \frac{1}{n^s}, \tag{1.2.9}$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)} \le \frac{1}{m^r}. \tag{1.2.10}$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$f_1(x,y) = \frac{1}{m^r n^s}\sin mx \sin ny. \tag{1.2.11}$$

Покажем, что функция $f_1 \in W^{(r,s)}L_2(Q)$. Но так как

$$f_1^{(r,s)}(x,y) = \frac{1}{m^r n^s} m^r n^s \sin\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right)\sin\left(ny + \frac{s\pi}{r}\right) =$$

$$= \sin\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right)\sin\left(ny + \frac{s\pi}{r}\right),$$

и, кроме того,

$$\left\|f_1^{(r,s)}\right\|_{L_2(Q)}^2=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\left(mx+\frac{r\pi}{2}\right)\sin^2\left(ny+\frac{s\pi}{2}\right)dxdy=1,$$

то функция $f_1(x,y)$ действительно принадлежит классу $W^{(r,s)}L_2(Q)$, и так как для этой функции

$$f_1^{(r,0)}=\frac{1}{n^s}\sin\left(mx+\frac{r\pi}{2}\right)\sin ny,$$
$$f_1^{(0,s)}=\frac{1}{m^r}\sin mx\sin\left(ny+\frac{s\pi}{2}\right),$$
$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{n^s},$$
$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{m^r},$$
$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{m^rn^s},$$

то, пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу для величин, стоящих в левых частях равенств (1.2.2)-(1.2.4)

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f\right)_{L_2(Q)}:\,f\in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\}\geq$$
$$\geq\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{m^rn^s},\tag{1.2.12}$$
$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)}:\,f\in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\}\geq$$
$$\geq\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1^{(r,0)}\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{n^s},\tag{1.2.13}$$
$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)}:\,f\in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\}\geq$$
$$\geq\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f_1^{(0,s)}\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{m^r}.\tag{1.2.14}$$

Теперь требуемые равенства (1.2.2)-(1.2.4) получаем из сопоставления неравенств (1.2.8)-(1.2.10) с соответствующими неравенствами (1.2.12)-(1.2.14) чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Из доказанной теоремы 1.2.1 в качестве следствия вытекает более сильное утверждение.

Теорема 1.2.2. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s$ *имеет место экстремальное равенство*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} = \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}. \qquad (1.2.15)$$

Доказательство. В самом деле, заметив, что для любой функции $f \in W^{(r,s)}L_2(Q)$ имеет место неравенство

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)} \le \left\|f^{(r,s)}\right\|_{L_2(Q)} \le 1,$$

из равенства (1.1.35) получаем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} \le \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}} \cdot \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)},$$

откуда для величины (1.2.15) получаем оценку сверху

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} : f \in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\} \le \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}. \qquad (1.2.16)$$

С целью получения оценки снизу, равной правой части неравенства (1.2.16), введем в рассмотрение функцию $g_0(x, y) = \dfrac{1}{m^r n^s}\cos mx \cos ny$ и покажем, что функция $g_0(x, y) \in W^{(r,s)}L_2(Q)$, то есть $\left\|g_0^{(r,s)}\right\|_{L_2(Q)} \le 1$. В самом деле, для функции $g_0(x, y)$ имеем:

$$g_0^{(\mu,\nu)}(x,y) = \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}\cos\left(mx + \frac{\mu\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(ny + \frac{\nu\pi}{2}\right),$$

$$g_0^{(r,s)}(x,y) = \cos\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(ny + \frac{s\pi}{2}\right),$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(g_0^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}},$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(g_0^{(r,s)}\right)_{L_2(Q)} = \left\|g_0^{(r,s)}\right\| = 1.$$

Последнее равенство показывает, что $g_0(x,y) \in W^{(r,s)}L_2(Q)$, а предпоследнее равенство представляет возможность записать оценку снизу

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}:\, f\in W^{(r,s)}L_2(Q)\right\}\geq$$

$$\geq \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(g_0^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}=\frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}}. \tag{1.2.17}$$

Сопоставляя неравенства (1.2.16) и (1.2.17), получаем утверждение требуемого равенства (1.2.15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2. Очевидно, что равенства (1.2.12), (1.2.13) и (1.2.14) вытекают из равенства (1.2.15) соответственно при $(\mu,\nu)=(0,0), (\mu,\nu)=(r,0)$ и $(\mu,\nu)=(0,s)$, $0\leq\mu\leq r$, $0\leq\nu\leq s$. Смысл доказанной теоремы 1.2.2. заключается в том, что при совместном приближении функции $f(x,y)$ и ее частных производных $f^{\mu,\nu}(x,y)(0\leq\mu\leq r, 0\leq\nu\leq s)$ величина наилучшего приближения “углами” (квазиполиномом) Тейлора $\mathscr{F}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)$ на классе $W^{(r,s)}L_2(Q)$ оценивается точно со скоростью $m^{-(r-\mu)}n^{-(s-\nu)}(0\leq\mu\leq r, 0\leq\nu\leq s, m,n\to\infty)$.

§1.3. Основные теоремы о приближении "углом"

Для функции $f(x,y)\in L_2(Q)$ определим модуль непрерывности порядка $p\in\mathbb{N}$ по переменной x и порядка $q\in\mathbb{N}$ по переменной y равенством

$$\omega_{p,q}(f;t,\tau)_2 := \sup\left\{\|\Delta_{u,v}^{p,q}f(x,y)\|_{L_2(Q)} :\ |u|\le t,\ |v|\le\tau\right\}, \tag{1.3.1}$$

где

$$\Delta_{u,v}^{p,q}f(x,y)=\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\mu+\nu}\binom{p}{\mu}\binom{q}{\nu}f(x+\mu u,y+\nu v)$$

– конечная разность p-го порядка с шагом u по переменной x и q-го порядка с шагом v по переменной y функции $f(x,y)\in L_2(Q)$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1.3.1. *Для произвольной функции $f\in L_2(Q)$ функция* (1.3.1) *имеет вид*

$$\omega_{p,q}^2(f;t,\tau)_2 :=$$

$$:= 2^{p+q}\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)(1-\cos ku)^p(1-\cos lv)^q :\ |u|\le t,\ |v|\le\tau\right\}. \tag{1.3.2}$$

Доказательство. В самом деле, для произвольной функции $f\in L_2(Q)$, записав ее формальное разложение в двойной ряд Фурье

$$f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}c_{k,l}(f)e^{i(kx+ly)},$$

находим

$$\Delta_{u,v}^{p,q}f(x,y)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}c_{k,l}(f)\Delta_{u,v}^{p,q}\left(e^{i(kx+ly)}\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}c_{k,l}(f)\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{\mu+\nu}\binom{p}{\mu}\binom{q}{\nu}e^{ik(x+\mu u)+il(y+\nu v)}=$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k,l}(f) \left\{ \sum_{\mu=0}^{p} (-1)^{\mu} \binom{p}{\mu} e^{ik(x+\mu u)} \right\} \cdot \left\{ \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^{\nu} \binom{q}{\nu} e^{il(y+\nu v)} \right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k,l}(f) e^{i(kx+ly)} (1-e^{iku})^p (1-e^{ilv})^q. \tag{1.3.3}$$

Применив к равенству (1.3.3) тождество Парсеваля для функции двух переменных и учитывая формулу (1.1.5), будем иметь

$$\left\| \Delta_{u,v}^{p,q} f(x,y) \right\|_{L_2(Q)}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{k,l}(f)|^2 |1-e^{iku}|^{2p} |1-e^{ilv}|^{2q} =$$

$$= 2^{p+q} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |c_{k,l}(f)|^2 (1-\cos ku)^p (1-\cos lv)^q =$$

$$= 2^{p+q} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \rho_{k,l}^2(f) (1-\cos ku)^p (1-\cos lv)^q.$$

Отсюда сразу вытекает равенства (1.3.2) и тем самым лемма 1.3.1 доказана.

В качестве иллюстрации леммы 1.3.1 вычислим модуль непрерывности (1.3.2) для функции $f_0(x,y) = \cos mx \cos ny,\ m,n \in \mathbb{N}$, рассмотренный нами при доказательстве леммы 1.1.2. Для этой функции $\rho_{k,l} = 0$ при $k \neq m, l \neq n$, $\rho_{m,n} = 1$, $k = m, l = n$, а потому из равенства (1.3.3) имеем:

$$\omega_{p,q}^2(f_0; t, \tau)_{L_2(Q)} = 2^{p+q}(1-\cos mt)^p (1-\cos n\tau)^q.$$

Отметим, что, поступая так же, как при доказательстве леммы 1.3.1, для производной $f^{(r,s)}(x,y)$ функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ будем иметь

$$\omega_{p,q}^2 \left(f^{(r,s)}; t, \tau \right)_2 := 2^{p+q} \times$$

$$\times \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \rho_{k,l}^2 \left(f^{(r,s)} \right) (1-\cos ku)^p (1-\cos lv)^q :\ |u| \le t,\ |v| \le \tau \right\} :=$$

$$:= 2^{p+q} \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} k^{2r} l^{2s} \rho_{k,l}^2(f) (1-\cos ku)^p (1-\cos lv)^q :\ |u| \le t,\ |v| \le \tau \right\}. \tag{1.3.4}$$

Условимся, всюду в дальнейшем при $p=q$ вместо $\omega_{p,p}(f;t,\tau)$ писать просто $\omega_p(f;t,\tau)_{L_2(Q)}$. В соотношениях общего характера, при вычислении верхней грани по всем функциям $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ заранее предполагается, что $f^{(r,s)}(x,y)\neq const.$

В принятых обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.3.1. *Для любых натуральных m и n и любых чисел $r,s\in\mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих неравенства $0<mt\leq\pi, 0<n\tau\leq\pi$, при любом $p\in\mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}\cdot\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_{L_2(Q)}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right)^p}=\frac{1}{16^p}. \qquad (1.3.5)$$

Существует функция $g_1(x,y)\in L_2^{(r,s)}$, для которой верхняя грань в левой части (1.3.5) *реализуется и равняется правой части* (1.3.5).

Доказательство. Прежде всего заметим, что для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место соотношение

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2-\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)\left(\cos ku+\cos lv-\cos ku\cdot\cos lv\right)=$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)-\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)\left(\cos ku+\cos lv-\cos ku\cdot\cos lv\right)=$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)\left(1-\cos ku-\cos lv+\cos ku\cdot\cos lv\right)=$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^2(f)\left(1-\cos ku\right)(1-\cos lv)=$$

$$=\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho_{k,l}^{2-2/p}(f)\rho_{k,l}^{2/p}(f)\left(1-\cos ku\right)(1-\cos lv)\,. \qquad (1.3.6)$$

Применим к правой части равенства (1.3.6) неравенства Гельдера для двойных сумм следующего вида

$$\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}|a_{kl}b_{kl}| \le \left(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}|a_{kl}|^{\mu}\right)^{1/\mu}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}|b_{kl}|^{\nu}\right)^{1/\nu},$$

в итоге получаем

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f)\left(\cos ku + \cos lv - \cos ku\cdot\cos lv\right) \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f)\right\}^{1-1/p}\left\{\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f)\,(1-\cos ku)^p(1-\cos lv)^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \mathscr{E}^{2-2/p}_{m-1,n-1}(f)_2\left\{\frac{4^p}{4^p}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\left(\frac{k}{m}\right)^{2r}\left(\frac{l}{n}\right)^{2s}\rho^2_{k,l}(f)\,(1-\cos ku)^p(1-\cos lv)^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \mathscr{E}^{2-2/p}_{m-1,n-1}(f)_2\cdot\frac{1}{4m^{2r/p}\cdot n^{2s/p}}\cdot$$

$$\cdot\left\{4^p\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}k^{2r}l^{2s}\rho^2_{k,l}(f)\,(1-\cos ku)^p(1-\cos lv)^p\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \mathscr{E}^{2-2/p}_{m-1,n-1}(f)_2\cdot\frac{1}{4m^{2r/p}\cdot n^{2s/p}}\cdot\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_{L_2(Q)}.$$

Таким образом, мы доказали, что для любой функции $f\in L_2^{(r,s)}(Q)$ имеет место неравенство

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f)\left(\cos ku + \cos lv - \cos ku\cdot\cos lv\right) \le$$

$$\le \mathscr{E}^{2-2/p}_{m-1,n-1}(f)_2\cdot\frac{1}{4m^{2r/p}\cdot n^{2s/p}}\cdot\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_{L_2(Q)}. \qquad (1.3.7)$$

Умножим обе части неравенства (1.3.7) на функцию $\sin mu\sin nv$ и интегрируя полученное соотношение по прямоугольнику $\left\{0\le u\le\frac{\pi}{m}, 0\le v\le\frac{\pi}{n}\right\}$, будем иметь

$$\frac{4}{mn}\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\rho^2_{k,l}(f)\Bigg(\frac{2}{n}\int\limits_0^{\pi/m}\cos ku\sin mu\,du+$$

$$+\frac{2}{m}\int\limits_0^{\pi/n}\cos lv\sin nvdv-\int\limits_0^{\pi/m}\cos ku\sin mudu\int\limits_0^{\pi/n}\cos lv\sin nvdv\Bigg)\leq$$

$$\leq\frac{1}{4m^{2r/p}\cdot n^{2s/p}}\cdot\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2-2/p}(f)_2\cdot$$
$$\cdot\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_{L_2(Q)}\sin mu\sin nvdudv. \tag{1.3.8}$$

Теперь заметим, что при любых $\nu,\mu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq\mu$ имеем

$$\int\limits_0^{\pi/\mu}\cos\nu\tau\sin\mu\tau d\tau=\begin{cases}0, & \text{если }\nu=\mu,\\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{2\mu}{\nu^2-\mu^2}\cdot\cos^2\left(\dfrac{\mu\pi}{2\nu}\right), & \text{если }\nu>\mu,\end{cases}$$

а потому второе слагаемое в левой части неравенства (1.3.8) является положительным, и если мы его отбрасываем, то только усиливаем указанное неравенство. Таким образом, для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ из (1.3.8) будем иметь

$$\frac{4}{mn}\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_2\leq\frac{1}{4m^{2r/p}\cdot n^{2s/p}}\cdot\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2-2/p}(f)_2\cdot$$
$$\cdot\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_{L_2(Q)}\sin mu\sin nvdudv.$$

Отсюда следует, что

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_2\leq$$
$$\leq\frac{1}{4^{2p}m^{2r-p}n^{2s-p}}\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_{L_2(Q)}\sin mu\sin nvdudv\right)^p. \tag{1.3.9}$$

Из последнего неравенства вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.3.5):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}\cdot\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2}(f)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_{L_2(Q)}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right)^p}\leq\frac{1}{16^p}. \tag{1.3.10}$$

С целью получения оценки снизу указанной величины введем в рассмотрение функцию $g_1(x,y) := \sin mx \sin ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой в силу равенств (1.1.25) и (1.3.4) запишем

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(g_1)_2 = 1,$$

$$\omega_p^2\left(g_1^{(r,s)};u,v\right)_2 = 4^p m^{2r} n^{2s}(1-\cos mu)^p(1-\cos nv)^p.$$

Воспользуясь полученными равенствами будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}\cdot \mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};t,\tau\right)_{L_2(Q)}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right)^p} \geq$$

$$\geq \frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(g_1)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(g_1^{(r,s)};t,\tau\right)_{L_2(Q)}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right)^p} =$$

$$\geq \frac{m^{2r-p}\cdot n^{2s-p}}{4^p m^{2r} n^{2s}\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos mu)(1-\cos nv)\sin mu\sin nvdudv\right)^p} =$$

$$= \frac{1}{4^p(mn)^p(4/mn)^p} = \frac{1}{16^p}. \qquad (1.3.11)$$

Теперь нужное равенство (1.3.5) получаем из сравнения оценки сверху (1.3.10) с оценкой снизу (1.3.11). Непосредственным вычислением убедимся, что для функции $g_1(x,y) = \sin mx \sin ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$ верхняя грань в соотношении (1.3.5) достигается, чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Доказанная теорема 1.3.1 является обобщением хорошо известного результата В.В.Шалаева [34] о точном неравенстве, связывающем величину наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых функций одного переменного $f \in L_2^{(r)}$ с интегралом, содержащим усредненное значение модуля непрерывности высшего порядка $\omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, t\right)_2$ с весом $\sin nt$ на случай наилучшего приближения периодических дифференцируемых функций двух переменных $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ тригонометрическими "углами" с интегралами, содержащими усредненное значение модуля непрерывности $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2$ с весом $\sin mt \sin n\tau$.

Из теоремы 1.3.1 как следствие получаем

Теорема 1.3.2. *При всех $m, n, p \in \mathbb{N}$ и $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и любой функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ справедливо неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2^p m^r n^s} \cdot \omega_p\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{1.3.12}$$

Заметим, что если функция $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2$ для любых $p \in \mathbb{N}$ и $(t, \tau) \in [\pi/m, \pi/n]$ удовлетворяет условию выпуклости

$$\begin{gathered} 2\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_2 \geq \\ \geq \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2 + \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m} - t, \frac{\pi}{n} - \tau\right)_2, \end{gathered} \tag{1.3.13}$$

то неравенство (1.3.12) можно уточнить. В этом случае справедлива

Теорема 1.3.3. *На множестве функций $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, у которых функция $\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2$ удовлетворяет условию* (1.3.13), *справедливо точное неравенство типа Джексона-Стечкина*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)} \leq \frac{1}{2^p m^r n^s} \cdot \omega_p\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_2 \tag{1.3.14}$$

в том смысле, что существует функция $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Действительно, если имеет место неравенство (1.3.13), то получаем

$$\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_2\sin mu\sin nv du dv=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\left\{\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_2+\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m}-u,\frac{\pi}{n}-v\right)_2\right\}\cdot$$

$$\cdot\sin mu\sin nv du dv\le\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\sin mu\sin nv du dv=$$

$$=\frac{4}{mn}\cdot\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2. \qquad (1.3.15)$$

Теперь, учитывая неравенство (1.3.15), из (1.3.9) будем иметь

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2\le\frac{1}{16^p m^{2r-p}n^{2s-p}}\left(\frac{4}{mn}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2\right)^p=$$

$$=\frac{1}{4^p m^{2r}n^{2s}}\cdot\omega_p^2\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2,$$

откуда и следует неравенство (1.3.15).

Непосредственным вычислением убедимся, что для функции $f_0(x,y)=\cos mx\cos ny\in L_2^{(r,s)}(Q)$, ранее использованной нами при доказательстве леммы 1.1.2, неравенство (1.3.14) обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.3.

Из доказанной теоремы 1.3.3 вытекает

Следствие 1.3.4. *В предположении теоремы 1.3.3 при всех $m,n,p\in\mathbb{N}$ и $r,s\in\mathbb{Z}_+$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)}\frac{m^r n^s\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)_2}=\frac{1}{2^p}. \qquad (1.3.16)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.3.14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$ вытекает неравенство

$$\frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} \le \frac{1}{2^p},$$

откуда следует, что

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} \le \frac{1}{2^p}. \tag{1.3.17}$$

С другой стороны, для функции $f_0(x,y) = \cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}(Q)$, для которой в силу равенств (1.1.31) и (1.3.4), запишем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2 = 1,$$

$$\omega_p\left(f_0^{(r,s)}; t, \tau\right) = 2^p m^r n^s (1-\cos mt)^{p/2}(1-\cos n\tau)^{p/2},$$

$$\omega_p\left(f_0^{(r,s)}; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2m}\right)_2 = 2^p m^r n^s.$$

Учитывая эти равенства имеем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} \ge$$

$$\ge \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f_0^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{m^r n^s}{2^p m^r n^s} = \frac{1}{2^p}. \tag{1.3.18}$$

Требуемое равенство (1.3.16) следует из сопоставления неравенств (1.3.17) и (1.3.18), и этим завершается доказательство следствия 1.3.4.

Из доказанного следствия 1.3.4 вытекает более общая

Теорема 1.3.4. *В предположении следствия 1.3.4 при всех $m, n, p \in \mathbb{N}$ и $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ $(0 \le \mu \le r, 0 \le \nu \le s)$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{2^p}. \tag{1.3.19}$$

Доказательство. В самом деле, поступая так же, как при доказательстве теоремы 1.1.1, полагая $f^{(\mu,\nu)}(x,y) = g(x,y)$, получаем $f^{(r,s)}(x,y) = g^{(r-\mu,s-\nu)}(x,y)$ и так как $f^{(r,s)} \in L_2(Q)$, то $g^{(r-\mu,s-\nu)} \in L_2(Q)$, то есть из того, что $f \in L_2^{(r,s)}(Q)$, вытекает, что $g \in L_2^{(r-\mu,s-\nu)}$, а потому, учитывая равенство (1.3.16), будем иметь

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}(Q)} \frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(f^{(\mu,\nu)}\right)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(f^{(r,s)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} =$$

$$= \sup_{g\in L_2^{(r-\mu,s-\nu)}(Q)} \frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}(g)_{L_2(Q)}}{\omega_p\left(g^{(r-\mu,s-\nu)}; \dfrac{\pi}{2m}, \dfrac{\pi}{2n}\right)_2} = \frac{1}{m^{r-\mu}n^{s-\nu}},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.4.

§1.4. Точные значения квазипоперечников некоторых классов периодических функций

В этом параграфе вычислим точные значения квазипоперечников (1.1.9) и (1.1.10) для одного класса функций, естественным образом вытекающий из результатов теоремы 1.3.1. Пусть $\Psi_l(t)$, $l = 1, 2;$ $0 \le t < \infty$ – непрерывные, неубывающие функции, обращающиеся в нуль в точке $t = 0$. Для $p \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \le u, v \le 2\pi$ определим в множестве $L_2^{(r,s)}(Q)$ класс функций

$$W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2) := \Bigg\{ f \in L_2^{(r,s)}(Q) :$$

$$\frac{\pi}{2u} \cdot \frac{\pi}{2v} \int\limits_0^u \int\limits_0^v \omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_2 \sin\frac{\pi}{u}t \sin\frac{\pi}{v}\tau dt d\tau \le \Psi_1^2(u)\Psi_2^2(v) \Bigg\}.$$

Введем обозначения

$$(1 - \cos q\theta)_* := \begin{cases} 1 - \cos q\theta, & \text{если } q\theta \le \pi \\ 2, & \text{если } q\theta > \pi. \end{cases}$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 1.4.1. *Пусть функции $\Psi_l(t), (l = 1, 2)$ удовлетворяют условию*

$$\Psi_l^2\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \int\limits_0^{\pi\mu} (1 - \cos\theta)_* \sin\frac{\theta}{\mu} d\theta \le 2\mu\Psi_l^2(u), \; l = 1, 2 \tag{1.4.1}$$

при любом $\mu > 0$ и любом $\tau \in (0, 2\pi]$. Тогда при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= d'_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= \mathscr{E}_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 =$$

$$= e_{m-1,n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)\right)_2 = \frac{1}{2^p m^r n^s}\Psi_1^p\left(\frac{\pi}{m}\right)\Psi_2^p\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.4.2}$$

Доказательство. Неравенство (1.3.9) запишем в виде

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 \le \frac{1}{4^p m^{2r} n^{2s}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{mn}{4}\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_p^{2/p}\left(f^{(r,s)};u,v\right)_{L_2(Q)}\sin mu\sin nvdudv\right)^p.$$

Отсюда сразу получаем оценку сверху

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}\left(\Psi_1,\Psi_2\right),L_2(Q)\right)\le$$

$$\le d'_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}\left(\Psi_1,\Psi_2\right),L_2(Q)\right)\le$$

$$=\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2:\ f\in W_p^{(r,s)}\left(\Psi_1,\Psi_2\right)\right\}=$$

$$=\sup\left\{e_{m-1,n-1}(f)_2:\ f\in W_p^{(r,s)}\left(\Psi_1,\Psi_2\right)\right\}\le$$

$$\le\frac{1}{2^p m^r n^s}\Psi_1^p\left(\frac{\pi}{m}\right)\Psi_2^p\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{1.4.3}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу колмогоровского квазипоперечника будем следовать схеме рассуждений, приведенных в работах [9, 28, 29, 30, 33]. Рассмотрим пространство $L_2^\nu := L_2^{(\nu)}[0,2\pi]$, состоящее из функций $g(\tau)$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(\nu-1)$-го порядка $g^{(\nu-1)}(\tau)$ и ν-ю производную $g^{(\nu)}(\tau)\in L_2$. Введем в рассмотрение одномерные классы функций:

$$W_p^{(r)}(\Psi_1):=\left\{\varphi\in L_2^{(r)}:\ \frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega_p^{2/p}\left(\varphi^{(r)},t\right)_{L_2}\sin\frac{\pi}{u}tdt\le\Psi_1^2(u),\ 0\le u\le\pi\right\},$$

$$W_p^{(s)}(\Psi_2):=\left\{\psi\in L_2^{(s)}:\ \frac{\pi}{2v}\int\limits_0^v\omega_p^{2/p}\left(\psi^{(s)},\tau\right)_{L_2}\sin\frac{\pi}{v}\tau d\tau\le\Psi_2^2(v),\ 0\le v\le\pi\right\},$$

на основе которых полагаем

$$\widetilde{W}_p^{(r,s)}(\Psi_1,\Psi_2):=W_p^{(r)}(\Psi_1)\otimes W_p^{(s)}(\Psi_2):=$$

$$:= \left\{ \varphi(x)\psi(y) : \varphi \in W_p^{(r)}(\Psi_1),\ \psi \in W_p^{(s)}(\Psi_2) \right\}.$$

В силу равенства (1.1.26) запишем

$$d_{2m-1,2n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= d_{2m-1}\left(W_p^{(r)}(\Psi_1), L_2[0, 2\pi]\right) d_{2n-1}\left(W_p^{(s)}(\Psi_2), L_2[0, 2\pi]\right), \qquad (1.4.4)$$

где $d_k(\cdot)$ – обычный k-поперечник. Учитывая (1.4.3), включение $\widetilde{W}_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2) \subset W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2)$, а также одномерный результат из [34]:

$$d_{2q-1}\left(W_p^{(\nu)}(\Psi_1), L_2[0, 2\pi]\right) = 2^{-p/2} q^{-\nu} \Psi_1^p \left(\frac{\pi}{q}\right), \qquad (1.4.5)$$

полученный с учетом условия (1.4.1), приходим к следующей оценке снизу

$$d_{2m-1,2n-1}\left(W_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) \geq$$

$$\geq d_{2m-1,2n-1}\left(\widetilde{W}_p^{(r,s)}(\Psi_1, \Psi_2), L_2(Q)\right) =$$

$$= \frac{1}{2^p m^r n^s} \Psi_1^p \left(\frac{\pi}{m}\right) \Psi_2^p \left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (1.4.6)$$

Сопоставляя оценку сверху (1.4.3) с оценкой снизу (1.4.6), завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Глава II

Неравенство типа Колмогорова для функций двух комплексных переменных, аналитических в бикруге, и некоторые его приложения

§2.1. Предварительные сведения и результаты. Истории вопроса

Пусть $\mathcal{J} := \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ или $\mathcal{J} := \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $n, \nu \in \mathbb{N}, n \geq \nu$, $s, p, q \in \mathbb{R}_+(s, p, q \geq 1)$. В теории приближений и ее приложениях хорошо известны неравенства Колмогорова, которые оценивают сверху $L_q(\mathcal{J})$ – норму промежуточной производной функции через $L_p(\mathcal{J})$ – норму самой функции и $L_s(\mathcal{J})$ – норму ее старшей производной:

$$\left\| f^{(\nu)} \right\|_{L_q(\mathcal{J})} \leq \mathscr{K} \, \|f\|^{\alpha}_{L_p(\mathcal{J})} \cdot \left\| f^{(n)} \right\|^{1-\alpha}_{L_s(\mathcal{J})}, \qquad (2.1.1)$$

где $\alpha = \left(n - \nu - \frac{1}{s} + \frac{1}{q}\right) \left(n - \frac{1}{s} + \frac{1}{p}\right)^{-1}$, $\mathscr{K}$ – некоторая константа, зависящая от указанных числовых параметров p, q, s, ν, α.

Неравенство (2.1.1) в случае $p = q = s = 2, \nu = 0, 1; n = 2, \mathscr{K} = 1$ называется неравенством Харди и Литтлвуда [26] и впервые для периодических функций доказано в 1929 г. Затем для периодических функций в случае $p = q = s = \infty$ с конкретным значением $\mathscr{K}$ и всех $\nu = \overline{0, n-1}, n \in \mathbb{N}$ в 1939 г. доказано А.Н.Колмогоровым [16]. В случае $q = p = s = 1, \mathcal{J} = (-\infty, +\infty)$ неравенство (2.1.1) доказано Е.Стейном [22], при $q = \infty, p = s = 2, 0 \leq \nu \leq n, n \in \mathbb{N}$ доказано Л.В.Тайковым [23].

К настоящему времени получено достаточно много неравенств типа (2.1.1) в разных нормах и разных областях $\mathcal{J}$. В частности, интерес к точным неравенствам типа (2.1.1) вызван их связью с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования $\left(\mathcal{D} := \frac{d}{dx}\right)$ ограниченными операторами и другими родственными задачами.

Подробные комментарии об исследованиях, посвященных неравенствам типа Колмогорова для функций вещественного переменного как в одномерном, так и в многомерном случае и связанными с ними экстремальными задачами, можно найти в монографии В.Ф.Бабенко, Н.П.Корнейчука, В.А.Кофанова, С.А.Пичугова "Неравенства для производных и их приложения" (Киев: Наукова думка, 2003, 590 стр.), а также в обзорных статьях В.В.Арестова [2], С.Б.Вакарчука и А.В.Швачко [14]. Что же касается неравенства вида (2.1.1) для аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций в пространстве Харди $H_p := H_p(U)(p \geq 1)$ и Бергмана $B_p := B_p(U)(p \geq 1)$, то только в случае $p = 2$ такие неравенства были получены С.Б.Вакарчуком [7], М.Ш.Шабозовым и М.С.Саидусайновым [31], С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком [10, 11], М.С.Саидусайновым [20], Р.Р.Акопяном и М.С.Саидусайновым [1].

В случае функций двух комплексных переменных неравенств типа (2.1.1) для аналитических в бикруге функций впервые в пространстве Харди были получены С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком [12].

Приводим некоторые одномерные результаты для функции одного комплексного переменного.

Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – круг единичного радиуса в комплексной области $\mathbb{C}$ и $\mathscr{A}(U)$ – множество функций f, аналитических в круге U. Через $B_2 := B_2(U)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in$

$\mathscr{A}(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_2} := \|f\|_{B_2(U)} = \left\{\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)}|f(z)|^2dxdy\right\}^{1/2} < \infty. \qquad (2.1.2)$$

Для произвольного элемента

$$f(z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p(f)z^p \in B_2$$

в силу (2.1.2) имеем

$$\|f\|_{B_2} = \left\{\sum_{p=0}^{\infty}\frac{|c_p(f)|^2}{2(p+1)}\right\}^{1/2}.$$

Полагаем $\alpha_{p,k} := p(p-1)\cdots(p-k+1)$, $p,k \in \mathbb{N}, p \geq k$,

$$\mathcal{B}_2^{(k)} := \left\{f \in \mathscr{A}(U):\ f^{(k)} = \sum_{p=k}^{\infty}\alpha_{p,k}c_p(f)z^{p-k} \in B_2,\right.$$

$$\left.\left\|f^{(k)}\right\|_{B_2} = \left\{\sum_{p=k}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2\cdot|c_p(f)|^2}{2(p-k+1)}\right\}^{1/2} < \infty.\right\}. \qquad (2.1.3)$$

В этих обозначениях братья С.Б.Вакарчук и М.Б.Вакарчук [11] в 2012 г доказали следующее утверждение

Теорема A [11]. *Пусть $k,\mu \in \mathbb{N}, k > \mu \geq 1$. Тогда для произвольной функций $f \in \mathcal{B}_2^{(k)}$, у которых $c_p(f) = 0, p = k-\mu,...,k-1$, справедливо неравенство*

$$\left\|f^{(k-\mu)}\right\|_{B_2} \leq \frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}(k+1)^{1/2}}\cdot\|f\|_{B_2}^{\mu/k}\cdot\left\|f^{(k)}\right\|_{B_2}^{1-\mu/k}. \qquad (2.1.4)$$

При этом существует функция $\varphi \in \mathcal{B}_2^{(k)}$, для которой неравенство (2.1.4) *обращается в равенство.*

Результат (2.1.4) обобщен М.С.Саидусайновым [20] в 2016 г для функций

$f \in \mathscr{A}(U)$, принадлежащих весовому пространству Бергмана

$$B_{2,\gamma} := \left\{ f \in \mathscr{A}(U) : \|f\|^2_{B_{2,\gamma}(U)} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(U)} \gamma(|z|)|f(z)|^2 dxdy < \infty \right\}.$$

Теорема B [20]. *Пусть $k, \mu \in \mathbb{N}, k > \mu \geq 1, \gamma(|z|) > 0$ – произвольная непрерывная в U весовая функция. Тогда для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2^{(k)}$, у которой коэффициенты $c_p(f) = 0(p = k - \mu, ..., k - 1; k \geq 2, k \in \mathbb{N})$, справедливо неравенство*

$$\left\| f^{(k-\mu)} \right\|_{B_{2,\gamma}} \leq \frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{\int\limits_0^1 \rho^{2\mu+1}\gamma(\rho)d\rho}{\left(\int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{\mu/k} \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)d\rho\right)^{1-\mu/k}} \right\}^{1/2} \cdot \|f\|^{\mu/k}_{B_{2,\gamma}} \cdot \left\| f^{(k)} \right\|^{1-\mu/k}_{B_{2,\gamma}}. \tag{2.1.5}$$

Неравенство (2.1.5) является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in \mathcal{B}^{(k)}_{2,\gamma}$, которая обращает (2.1.5) в равенство. Очевидно, что теорема A, С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука является частным случаем теоремы B, М.С.Саидусайнова при $\gamma(|z|) \equiv 1$. Естественно, что представляет большой интерес получение неравенств типа Колмогорова для функций комплексного переменного. В случае функций несколько переменных получено значительно меньше окончательных результатов [10, 12]. В этой главе доказано неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений функций f двух комплексных переменных, аналитических в бикруге, квазиполиномами [4] (или “углами” [18, 19]) и дано его приложение к экстремальной задаче нахождения точной верхней грани наилучшего совместного приближения самой функции и ее последовательных производных указанными квазиполиномами.

Пусть $\mathbf{z} := (\xi, \zeta) = (re^{it}, \rho e^{i\tau})$, где $0 \le r, \rho < \infty,\ 0 \le t, \tau \le 2\pi$ — точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$.

Класс всех аналитических в бикруге U^2 функций $f(z) := f(\xi, \zeta)$ обозначим через $\mathcal{A}(U^2)$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ полагаем

$$M_2(f; r, \rho) := \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}, \rho e^{i\tau}) \right|^2 dt d\tau \right\}^{1/2},$$

где $0 \le r, \rho < 1$. Символом $B_2(U^2)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2(U^2)} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(U^2)} |f(\xi, \zeta)|^2 d\sigma_\xi d\sigma_\zeta \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^1 \int_0^1 r\rho M_2^2(f; r, \rho) dr d\rho \right\}^{1/2}, \qquad (2.1.6)$$

где $d\sigma_\xi := dxdy, d\sigma_\zeta := dudv, \xi := x + iy, \zeta = u + iv, x, y, u, v \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = r^2 < 1$, $u^2 + v^2 = \rho^2 < 1$.

Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$, принадлежащей пространству $B_2(U^2)$, исходя из разложения

$$f(\xi, \zeta) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f) \xi^p \zeta^q, \qquad (2.1.7)$$

где $c_{pq}(f)$ — коэффициенты Тейлора функции f, в силу (2.1.6) и равенства Парсеваля, запишем следующее соотношение

$$\|f\|_2 = \left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)} \right\}^{1/2}.$$

Через $B_2^{(k,l)}(U^2)$, где $k,l \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(k,l)}$ по переменным ξ,ζ и частные производные $f^{(k,0)}$ и $f^{(0,l)}$ соответственно по переменной ξ и ζ принадлежат пространству $B_2(U^2)$, то есть $B_2^{(k,l)}(U^2) \subset B_2(U^2)$. Для натуральных $p \geq k, q \geq l$ числа $\alpha_{p,k}$ и $\alpha_{q,l}$ определяем равенствами

$$\alpha_{p,k} = p(p-1)\cdots(p-k+1), \quad \alpha_{q,l} = q(q-1)\cdots(q-l+1).$$

В работе С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука [12] при некоторых естественных ограничениях на коэффициенты Тейлора $c_{p,q}(f)$ функции $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ доказано неравенство типа Колмогорова следующего вида

$$\left\|f^{(k-\mu,l-\nu)}\right\|_2 \leq \frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}(\mu+1)^{1/2}} \cdot \frac{\alpha_{l,l-\nu}(l+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{l,l}^{1-\nu/l}(\nu+1)^{1/2}} \cdot$$

$$\cdot \|f\|_2^{\mu\nu/(kl)} \cdot \left\|f^{(k,0)}\right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l} \cdot \left\|f^{(0,l)}\right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k} \cdot \left\|f^{(k,l)}\right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)}, \qquad (2.1.8)$$

которое является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которой оно обращается в равенство.

Возникает естественный вопрос: Существует ли аналог указанного неравенства типа Колмогорова для наилучшего среднеквадратического приближения функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$.

В этой главе разрабатывается аппарат специального вида "углов" для наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ в пространстве Бергмана и доказывается неравенство типа (2.1.8) для наилучшего приближения $f \in \mathcal{A}(U^2)$ "углами" (или квазиполиномами), состоящими из тензорного произведения комплексных алгебраических многочленов одного переменного.

§2.2. Наилучшее приближение функций двух комплексных переменных "углом". Основная лемма

Приведем некоторые известные факты и определения, нужные нам в дальнейшем [10, 28, 29, 30]. Пусть $(\mathbb{Z}_1, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}_1})$ и $(\mathbb{Z}_2, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}_2})$ — два линейных нормированных пространства аналитических в единичном круге функций одного комплексного переменного, а $\mathfrak{M}_m \subset \mathbb{Z}_1$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathbb{Z}_2$ — конечномерные подпространства с базисами $\{a_p(\xi)\}_{p=0}^m$ и $\{b_q(\zeta)\}_{q=0}^n$ соответственно. Положим

$$\widehat{G}(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n) := \mathbb{Z}_2 \otimes \mathfrak{M}_m \oplus \mathbb{Z}_1 \otimes \mathfrak{N}_n, \tag{2.2.1}$$

где $\otimes$ и $\oplus$ означают соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Очевидно, что каждый элемент множеств (2.2.1) представим в виде

$$g_{m,n}(\xi, \zeta) := \sum_{p=0}^{m} \varphi_p(\zeta) a_p(\xi) + \sum_{q=0}^{n} \psi_q(\xi) b_q(\zeta), \tag{2.2.2}$$

где последовательности функций $\{\varphi_p(\zeta)\}_{p=0}^m \subset \mathbb{Z}_2$ и $\{\psi_l(\xi)\}_{l=0}^n \subset \mathbb{Z}_1$ — произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (2.2.2) называют обобщенными квазиполиномами [4] или "углами" [18, 19]. Пусть теперь $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ — линейное нормированное пространство аналитических в единичном бикруге $U^2 := \{(\xi, \zeta) : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ функций $f(\mathbf{z}) := f(\xi, \zeta)$ двух комплексных переменных, а множество $\widehat{G}(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n) \subset \mathbb{Z}$. Для произвольной функции $f \in \mathbb{Z}$ равенством

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{m,n}(f)_{\mathbb{Z}} := \mathscr{E}\left(f, \widehat{G}(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n)\right)_{\mathbb{Z}} = \\ = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\| : g_{m,n} \in \widehat{G}(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n)\right\}\end{gathered} \tag{2.2.3}$$

определим величину наилучшего среднеквадратического приближения функции f элементами множества (2.2.1) или наилучшим приближением функции

f "углом". Мы рассмотрим случай $\mathbb{Z} := B_2(U^2)$, $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 = B_2(U), \mathfrak{M}_m := \mathcal{P}_m, \mathfrak{N}_n := \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_m$ и $\mathcal{P}_n$ — соответственно множество комплексных алгебраических полиномов одного переменного степени ξ или ζ не более m и n. В этом случае множество $\widehat{G}(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n)$ в общем случае имеет вид

$$\widehat{G}(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n) :=$$

$$:= \left\{ g_{m,n}(\xi,\zeta) : g_{m,n}(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^{m} \varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n} \psi_q(\xi)\zeta^p : \varphi_p, \psi_q \in B_2 \right\}. \quad (2.2.4)$$

Множество (2.2.4) называют подпространством квазиполиномов или подпространством "углов" [4]. Для аналитической функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ с разложением в ряд Тейлора (2.1.7) квазиполиномом Тейлора порядка $(m,n), m,n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$T_{m,n}(f;\xi,\zeta) :=$$

$$:= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \quad (2.2.5)$$

Очевидно, что $T_{m,n}(f) \in \widehat{G}(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n)$.

В этом пункте излагаем основные результаты, полученные в данной работе. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2.1. *Среди всех обобщенных полиномов вида*

$$g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^{m-1} \varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n-1} \psi_q(\xi)\zeta^q, \quad (2.2.6)$$

принадлежащих множеству $\widehat{G}(\mathcal{P}_{m-1}, \mathcal{P}_{n-1})$, наилучшее приближение функции $f \in B_2(U^2)$ доставляет ее квазиполином Тейлора $T_{m-1,n-1}(f)$ порядка $(m-1,n-1)$. При этом

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \|f - T_{m-1,n-1}(f)\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}. \tag{2.2.7}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $g_{m-1,n-1} \in \widehat{G}(\mathcal{P}_{m-1}, \mathcal{P}_{n-1})$ вида (2.2.6). Поскольку $\{\varphi_p(\zeta)\}_{p=0}^{m-1} \subset B_2(U), \{\psi_q(\xi)\}_{q=0}^{n-1} \subset B_2(U)$, то в смысле сходимости в метрике $B_2(U)$ справедливы равенства

$$\varphi_p(\zeta) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p)\zeta^q, \ p = \overline{0, m-1}, \tag{2.2.8}$$

$$\psi_q(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p(\psi_q)\xi^p, \ q = \overline{0, n-1}. \tag{2.2.9}$$

Подставляя вместо функций $\varphi_p(\zeta), p = \overline{0, m-1}$, $\psi_q(\xi), q = \overline{0, n-1}$ в равенство (2.2.6) их разложения в ряды, стоящие в правых частях (2.2.8) и (2.2.9), в смысле сходимости в пространстве $B_2(U^2)$, получаем соотношение

$$g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) := \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p)\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} c_p(\psi_q)\xi^p\zeta^q. \tag{2.2.10}$$

Далее, в силу того, что каждая из систем функций $\{\xi^p\}_{p=0}^{\infty}$ и $\{\zeta^q\}_{q=0}^{\infty}$ является ортогональной в круге U (см., например, [21, с.201]), то система $\{\xi^p\zeta^q\}_{p,q=0}^{\infty}$ является ортогональной в бикруге U^2. Имеем

$$\|f - g_{m-1,n-1}\|_2^2 = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(U^2)} |f(\xi,\zeta) - g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)|^2 \, d\sigma_\xi d\sigma_\zeta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(U^2)} (f(\xi,\zeta) - g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)) \left(\overline{f(\xi,\zeta)} - \overline{g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)}\right) d\sigma_\xi d\sigma_\zeta. \tag{2.2.11}$$

Пользуясь формулами (2.1.7) и (2.2.10), после некоторых простых вычислений находим

$$f(\xi,\zeta) - g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}(c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p) - c_p(\psi_q))\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=n}^{\infty}(c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p))\xi^p\zeta^q +$$

$$+ \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1}(c_{pq}(f) - c_p(\psi_q))\xi^p\zeta^q + \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \tag{2.2.12}$$

Аналогичным образом для сопряженного выражения имеем

$$\overline{f(\xi,\zeta)} - \overline{g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{c_{pq}(f)} - \overline{c_q(\varphi_p)} - \overline{c_p(\psi_q)})\bar{\xi}^p\bar{\zeta}^q + \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=n}^{\infty}(\overline{c_{pq}(f)} - \overline{c_q(\varphi_p)})\bar{\xi}^p\bar{\zeta}^q +$$

$$+ \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{c_{pq}(f)} - \overline{c_p(\psi_q)})\bar{\xi}^p\bar{\zeta}^q + \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\overline{c_{pq}(f)}\,\bar{\xi}^p\bar{\zeta}^q. \tag{2.2.13}$$

Подставляя правые части равенств (2.2.12) и (2.2.13) вместо выражений $f - g_{m-1,n-1}$ и $\bar{f} - \bar{g}_{m-1,n-1}$ внутри интеграла в правой части (2.2.11) и выполнив простые выкладки с учетом ортогональности системы $\{\xi^p\zeta^q\}_{p,q=0}^{\infty}$ в бикруге U^2, получаем

$$\|f - g_{m-1,n-1}\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{|c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p) - c_p(\psi_q)|^2}{4(p+1)(q+1)} + \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f) - c_q(\varphi_p)|^2}{4(p+1)(q+1)} +$$

$$+ \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{|c_{pq}(f) - c_p(\psi_q)|^2}{4(p+1)(q+1)} + \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}. \tag{2.2.14}$$

Из (2.2.14) сразу вытекает, что величина (2.2.3) принимает минимальное значение, равное величине (2.2.7), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} c_{pq}(f) = c_q(\varphi_p) + c_p(\psi_q), & p = \overline{0, m-1}; q = \overline{0, n-1}, \\ c_{pq}(f) = c_q(\varphi_p), & p = \overline{0, m-1}; q = n, n+1, ..., \\ c_{pq}(f) = c_p(\psi_q), & q = \overline{0, n-1}; p = m, m+1, ... \end{cases}$$

Подставляя в правую часть равенства (2.2.10) вместо коэффициентов $c_q(\varphi_p)$ и $c_p(\psi_q)$ их значение через коэффициенты $c_{pq}(f)$, мы получаем квазиполином Тейлора порядка $(m-1, n-1)$ в виде равенства (2.2.5), чем и завершаем доказательство леммы 2.2.1.

§2.3. Неравенство Колмогорова для наилучшего приближения функций, аналитических в бикруге, "углом"

Пользуясь основной леммой, из предыдущего параграфа, докажем наш основной результат, а именно докажем неравенство типа Колмогорова для величины наилучшего приближения "углом" составленный из комплексных алгебраических полиномов двух переменных.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $m > k \geq \mu \geq 1, n > l \geq \nu \geq 1,\ m, n, l, \mu, \nu \in \mathbb{N}$. *Тогда для любой функции* $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ *выполняется неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{\frac{k-\mu}{2k}}(n-l+1)^{\frac{l-\nu}{2l}}(m+1)^{\frac{\mu}{2k}}\cdot(n+1)^{\frac{\nu}{2l}}}{(\alpha_{m,k})^{1-\frac{\mu}{m}}\cdot(\alpha_{n,l})^{1-\frac{\nu}{l}}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\left(f^{(k,0)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}, \qquad (2.3.1)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(\xi,\zeta) = \xi^m\zeta^n \in B_2^{(k,l)}(U^2)$.

Доказательство. Очевидно, что для произвольной $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, в силу равенств (2.1.7) и (2.2.5), имеет место равенство

$$R_{m,n}(f;\xi,\zeta) := f(\xi,\zeta) - T_{m-1,n-1}(f;\xi,\zeta) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \qquad (2.3.2)$$

При этом из того, что $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, вытекает, что $f \in B_2^{(k-\mu,l-\nu)}(U^2)$, а из (2.3.2) следует, что $R_{m,n}(f) \in B_2^{(m-k,n-l)}(U^2)$. Легко проверить, что при выполнении условия теоремы относительно указанных числовых параметров справедливы равенства

$$T^{(k,0)}_{m-1,n-1}(f;\xi,\zeta)=T_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)};\xi,\zeta\right),$$

$$T^{(0,l)}_{m-1,n-1}(f;\xi,\zeta)=T_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)};\xi,\zeta\right),$$

$$T^{(k,l)}_{m-1,n-1}(f;\xi,\zeta)=T_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)};\xi,\zeta\right).$$

Из этих равенств и соотношения (2.3.2) при $m>k\geq\mu\geq 1, n>l\geq\nu\geq 1$ получаем

$$R^{(k,0)}_{m,n}(f;\xi,\zeta)=f^{(k,0)}(\xi,\zeta)-T^{(k,0)}_{m-1,n-1}(f;\xi,\zeta)=$$

$$=f^{(k,0)}(\xi,\zeta)-T_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)};\xi,\zeta\right)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{p,k}c_{pq}(f)\xi^{p-k}\zeta^{q}. \qquad (2.3.3)$$

Аналогичным образом будем иметь

$$R^{(0,l)}_{m,n}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{q,l}c_{pq}(f)\xi^{p}\zeta^{q-l}, \qquad (2.3.4)$$

$$R^{(k,l)}_{m,n}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{p,k}\alpha_{q,l}c_{pq}(f)\xi^{p-k}\zeta^{q-l}, \qquad (2.3.5)$$

$$R^{(k-\mu,l-\nu)}_{m,n}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{p,k-\mu}\alpha_{q,l-\nu}c_{pq}(f)\xi^{p-k+\mu}\zeta^{q-l+\nu}. \qquad (2.3.6)$$

Из равенства (2.3.2), в силу равенства (2.2.7), имеем

$$\|R_{m,n}(f)\|_2^2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}=\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2^2, \qquad (2.3.7)$$

а из соотношений (2.3.3)-(2.3.6) сразу следуют равенства

$$\left\|R^{(k,0)}_{m,n}(f)\right\|_2^2=$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{p,k}^2 \, |c_{pq}(f)|^2}{4(p-k+1)(q+1)} = \mathscr{E}_{m-k-1,n-1}^2 \left(f^{(k,0)} \right)_2, \tag{2.3.8}$$

$$\left\| R_{m,n}^{(0,l)}(f) \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{q,l}^2 \, |c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q-l+1)} = \mathscr{E}_{m-1,n-l-1}^2 \left(f^{(0,l)} \right)_2, \tag{2.3.9}$$

$$\left\| R_{m,n}^{(k,l)}(f) \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{p,k}^2 \cdot \alpha_{q,l}^2 \, |c_{pq}(f)|^2}{4(p-k+1)(q-l+1)} = \mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}^2 \left(f^{(k,l)} \right)_2, \tag{2.3.10}$$

$$\left\| R_{m,n}^{(k-\mu,l-\nu)}(f) \right\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{p,k-\mu}^2 \cdot \alpha_{q,l-\nu}^2 \, |c_{pq}(f)|^2}{4(p-k+\mu+1)(q-l+\nu+1)} =$$

$$= \mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}^2 \left(f^{(k-\mu,l-\nu)} \right)_2. \tag{2.3.11}$$

Оценим теперь величину (2.3.11) сверху посредством величин (2.3.7)-(2.3.10). Имеем:

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}^2 \left(f^{(k-\mu,l-\nu)} \right)_2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{p,k-\mu}^2 \cdot \alpha_{q,l-\nu}^2}{4(p-k+\mu+1)(q-l+\nu+1)} |c_{pq}(f)|^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{p,k}^2\cdot\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot\left\{\frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{4(p+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{\frac{\mu\nu}{kl}}\cdot\left\{\frac{\alpha_{p,k-\mu}\cdot\alpha_{q,l-\nu}}{\alpha_{p,k}^{1-\mu/k}\cdot\alpha_{q,l}^{1-\nu/l}}\right\}^2\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{(p-k+1)^{1-\mu/k}\cdot(q-l+1)^{1-\nu/l}(p+1)^{\mu/k}(q+1)^{\nu/l}}{(p-k+\mu+1)(q-l+\nu+1)}\right\}. \qquad (2.3.12)$$

Полагаем

$$\varphi_{k,\mu}(p) := \frac{\alpha_{p,k-\mu}\cdot(p-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(p+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{p,k}^{1-\mu/k}\cdot(p-k+\mu+1)^{1/2}},$$

$$\varphi_{l,\nu}(q) := \frac{\alpha_{q,l-\nu}\cdot(q-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(q+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{q,l}^{1-\nu/l}\cdot(q-l+\nu+1)^{1/2}}.$$

Из (2.3.12) получаем

$$\mathscr{E}^2_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 \le \left\{\sup_{p\ge m}\varphi_{k,\mu}(p)\right\}^2\cdot\left\{\sup_{q\ge n}\varphi_{l,\nu}(q)\right\}^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left\{\frac{\alpha_{p,k}^2\cdot\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot\left\{\frac{1}{4(p+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{\frac{\mu\nu}{kl}}. \qquad (2.3.13)$$

Если теперь воспользоваться двумерным аналогом неравенства Гельдера для сумм (см., например, [10],[26, с.36])

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}^{\alpha} b_{pq}^{\beta} d_{pq}^{\gamma} \delta_{pq}^{c} \le$$

$$\le \left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\right)^{\alpha} \left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} b_{pq}\right)^{\beta} \left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} d_{pq}\right)^{\gamma} \left(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \delta_{pq}\right)^{c}, \qquad (2.3.14)$$

где $a_{pq}, b_{pq}, d_{pq}, \delta_{pq}$ — неотрицательные числа, $\alpha+\beta+\gamma+c=1$, то, учитывая равенства (2.3.7)-(2.3.10), из неравенства (2.3.13) в силу (2.3.14) имеем

$$\mathscr{E}^2_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 \le \left\{\sup_{p\ge m}\varphi_{k,\mu}(p)\right\}^2 \cdot \left\{\sup_{q\ge n}\varphi_{l,\nu}(q)\right\}^2 \cdot$$

$$\cdot \left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{p,k}^2\cdot\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})} \cdot$$

$$\left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})} \cdot$$

$$\left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{1}{4(p+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\right\}^{\frac{\mu\nu}{kl}} = \left\{\sup_{p\ge m}\varphi_{k,\mu}(p)\right\}^2 \cdot \left\{\sup_{q\ge n}\varphi_{l,\nu}(q)\right\}^2 \cdot$$

$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{\frac{2\mu\nu}{kl}} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}(f^{(k,0)})_2\right)^{2(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}} \cdot$$

$$\cdot \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{2(1-\frac{\nu}{l})\frac{\mu}{k}} \cdot \left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}(f^{(k,l)})_2\right)^{2(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}. \qquad (2.3.15)$$

Из результата работы [11] вытекает, что

$$\sup_{p\ge m}\varphi_{k,\mu}(p) = \varphi_{k,\mu}(m), \quad \sup_{q\ge n}\varphi_{l,\nu}(q) = \varphi_{l,\nu}(n). \qquad (2.3.16)$$

Неравенство (2.3.1), с учетом (2.3.16), следует из (2.3.15). Докажем точность неравенства (2.3.1) для функции

$$f_0(\xi,\zeta)=\xi^m\zeta^n\in B_2^{(k,l)}(U^2), m>k, n>l,\ m,n,k,l\in\mathbb{N}.$$

Для этой функции, в силу (2.3.7)-(2.3.11), имеем:

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2=\frac{1}{2\sqrt{(m+1)(n+1)}}, \tag{2.3.17}$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f_0^{(k,0)}\right)_2=\frac{\alpha_{m,k}}{2\sqrt{(m-k+1)(n+1)}}, \tag{2.3.18}$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f_0^{(0,l)}\right)_2=\frac{\alpha_{n,l}}{2\sqrt{(m+1)(n-l+1)}}, \tag{2.3.19}$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f_0^{(k,l)}\right)_2=\frac{\alpha_{m,k}\cdot\alpha_{n,l}}{2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)}}, \tag{2.3.20}$$

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f_0^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2=\frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}}{2\sqrt{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}. \tag{2.3.21}$$

Подставляя равенства (2.3.17)-(2.3.20) в правую часть неравенства (2.3.1), убедимся, что оно обращается в равенство (2.3.21), откуда и следует утверждение теоремы 2.3.1.

Приводим некоторые приложения доказанной теоремы. Нам далее понадобится следующая нужная в дальнейшем

Лемма 2.3.1. *Пусть $m,n,k,l\in\mathbb{N}$ удовлетворяют неравенства $m\geq k\geq 1$, $n\geq l\geq 1$. Тогда для произвольной $f\in B_2^{(k,l)}$ справедливы соотношения*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}} \cdot \frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}} \mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2, \qquad (2.3.22)$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)}\right)_2 \leq \sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,l}} \mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2, \qquad (2.3.23)$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2 \leq \sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{m,k}} \mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2. \qquad (2.3.24)$$

Для функции $f_0(\xi,\zeta) = \xi^m\zeta^n \in B_2^{(k,l)}$ *все неравенства* (2.3.22)-(2.3.24) *обращаются в равенства.*

Доказательство. Не умаляя общности, для произвольной функции $f \in B_2^{(k,l)}$ докажем неравенство (2.3.22). Заметим, что для такой функции в силу (2.3.10) имеет место соотношение

$$\mathscr{E}^2_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha^2_{p,k}\cdot\alpha^2_{q,l}}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2,$$

а потому, пользуясь доказанным в [32] соотношением

$$\sup_{\substack{p\geq m\\ q\geq n}} \frac{(p-k+1)(q-l+1)}{(p+1)(q+1)} \cdot \frac{1}{\alpha^2_{p,k}\cdot\alpha^2_{q,l}} = \frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)} \cdot \frac{1}{\alpha^2_{m,k}\cdot\alpha^2_{n,l}},$$

будем иметь

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)} =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2_{p,k}\cdot\alpha^2_{q,l}} \cdot \frac{(p-k+1)(q-l+1)}{(p+1)(q+1)} \cdot \frac{\alpha^2_{p,k}\cdot\alpha^2_{q,l}}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2 \leq$$

$$= \frac{1}{\alpha^2_{m,k}\cdot\alpha^2_{n,l}} \cdot \frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)} \cdot \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \frac{\alpha^2_{p,k}\cdot\alpha^2_{q,l}}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2 =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2_{m,k}\cdot\alpha^2_{n,l}} \cdot \frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)} \cdot \mathscr{E}^2_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2,$$

откуда и следует неравенство (2.3.22). Аналогичным образом доказываются два других неравенства (2.3.23) и (2.3.24).

Непосредственным вычислением можно убедиться, что все неравенства (2.3.22)-(2.3.24) обращаются в равенства для функции $f_0(\xi,\zeta) = \xi^m\zeta^n \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которой имеют место равенства (2.3.17)-(2.3.21). Лемма 2.3.1 доказана.

Пусть $W_2^{(k,l)}(k,l \in \mathbb{N})$ — класс функций $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которых $\left\|f^{(k,l)}\right\|_2 \leq 1$.

Лемма 2.3.2. *Пусть числа* $m,n,k,l \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют неравенства* $m \geq k \geq 1, n \geq l \geq 1$. *Тогда справедливы равенства*

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}}, \tag{2.3.25}$$

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}}, \tag{2.3.26}$$

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} = \frac{1}{\alpha_{m,k}} \cdot \sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}. \tag{2.3.27}$$

Доказательство. Заметим, что для произвольной функции $f \in W_2^{(k,l)}$ имеет место неравенство

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2 \leq \|f^{(k,l)}\|_2 \leq 1. \tag{2.3.28}$$

Учитывая (2.3.28), из соотношений (2.3.22)-(2.3.24) получаем следующие неравенства

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}}, \tag{2.3.29}$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)}\right)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}}, \tag{2.3.30}$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{m,k}} \cdot \sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}. \tag{2.3.31}$$

Неравенства (2.3.29)-(2.3.31) на множестве функций $W_2^{(k,l)}$ являются точными. Знак равенства в них достигается для функции

$$f_1(\xi,\zeta) = \frac{\xi^m\zeta^n}{\alpha_{m,k}\cdot\alpha_{n,l}} \cdot 2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)}, \tag{2.3.32}$$

очевидно принадлежащей множеству $W_2^{(k,l)}$. Для этой функции

$$f_1^{(k,0)}(\xi,\zeta) = \frac{\xi^{m-k}\zeta^n}{\alpha_{n,l}} \cdot 2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)},$$

$$f_1^{(0,l)}(\xi,\zeta) = \frac{\xi^m\zeta^{n-l}}{\alpha_{m,k}} \cdot 2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)},$$

и, как следует из равенств (2.3.7)-(2.3.9),

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_1)_2 = \frac{1}{\alpha_{m,k}\cdot\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}},$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\left(f_1^{(k,0)}\right)_2 = \frac{1}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}},$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f_1^{(0,l)}\right)_2 = \frac{1}{\alpha_{m,k}} \cdot \sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}.$$

Этим равенства (2.3.25)-(2.3.27) доказаны, и вместе с ним лемма 2.3.2 доказана.

Утверждение леммы 2.3.2 в сочетании с результатом теоремы 2.3.1 позволяет решать следующую экстремальную задачу: требуется найти величину

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f\in W_2^{(k,l)}\right\}, \tag{2.3.33}$$

где $m>k\geq\mu\geq 1, n>l\geq\nu\geq 1$. Имеет место следующая

Теорема 2.3.2. *Пусть $m,n,k,l,\mu,\nu\in\mathbb{N}$ удовлетворяют ограничениям $m>k\geq\mu\geq 1$, $n>l\geq\nu\geq 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f\in W_2^{(k,l)}\right\}=\\ =\frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\cdot\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\cdot\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.\end{gathered} \tag{2.3.34}$$

Доказательство. Так как для произвольной функции $f\in W_2^{(k,l)}$ имеют место оценки (2.3.28)-(2.3.30), то, пользуясь этими оценками, из неравенства (2.3.1) получаем

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2\leq$$

$$\leq\frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{\frac{k-\mu}{2k}}(n-l+1)^{\frac{l-\nu}{2l}}(m+1)^{\frac{\mu}{2k}}\cdot(n+1)^{\frac{\nu}{2l}}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\cdot(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}}\cdot$$

$$(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\left(f^{(k,0)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)}\right)_2\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot\left(\mathscr{E}_{m-\mu-1,n-\nu-1}\left(f^{(k,l)}\right)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}\leq$$

$$\leq \frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{\frac{k-\mu}{2k}}(n-l+1)^{\frac{l-\nu}{2l}}(m+1)^{\frac{\mu}{2k}}\cdot(n+1)^{\frac{\nu}{2l}}}{(\alpha_{m,k})^{1-\frac{\mu}{m}}\cdot(\alpha_{n,l})^{1-\frac{\nu}{l}}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}}\cdot\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}}\right)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\cdot\left(\frac{1}{\alpha_{n,l}}\cdot\sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}}\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\cdot$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_{m,k}}\cdot\sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}=\frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{m,k}^{1-\frac{\mu}{k}+\frac{\mu\nu}{kl}+\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\cdot\alpha_{n,l}^{1-\frac{\nu}{l}+\frac{\mu\nu}{kl}+\frac{\nu}{l}(1-\frac{\mu}{k})}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(m-k+1)^{\frac{k-\mu}{2k}}(n-l+1)^{\frac{l-\nu}{2l}}(m+1)^{\frac{\mu}{2k}}\cdot(n+1)^{\frac{\nu}{2l}}}{\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}\right\}^{\frac{\mu\nu}{2kl}}\cdot\left\{\frac{n-l+1}{n+1}\right\}^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{2l}}\cdot\left\{\frac{m-k+1}{m+1}\right\}^{\frac{\mu}{2k}(1-\frac{\nu}{l})}=$$

$$=\frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\cdot\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\cdot\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}. \tag{2.3.35}$$

и таким образом оценка сверху величины (2.3.33) получена.

Для получения оценки снизу рассмотрим ту же функцию (2.3.32), введенную нами в конце доказательства леммы 2.3.2. Для этой функции

$$f_1^{(k-\mu,l-\nu)}(\xi,\zeta)=\frac{\alpha_{m,k-\mu}\cdot\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{m,k}\cdot\alpha_{n,l}}\xi^{m-k+\mu}\zeta^{n-l+\nu}\cdot 2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)}.$$

$$\begin{gathered}\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f_1^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2=\\ \frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\cdot\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\cdot\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.\end{gathered} \tag{2.3.36}$$

Учитывая равенство (2.3.36), получаем оценку снизу

$$\sup\left\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 : f \in W_2^{(k,l)}\right\} \geq$$

$$\geq \mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\left(f_1^{(k-\mu,l-\nu)}\right)_2 = \tag{2.3.37}$$

$$= \frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}} \cdot \frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}} \cdot \sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.$$

Требуемое равенство (2.3.34) получаем из сопоставления оценки сверху (2.3.35) и оценки снизу (2.3.37). Теорема 2.3.2 доказана.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- решена задача о нахождении точной константы в неравенстве Джексона-Стечкина между величиной наилучшего приближения функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами и модулями непрерывности высших порядков частных производных функций;

- найдены новые точные неравенства, связывающие наилучшие приближения обобщенными полиномами функций двух переменных с усредненными модулями непрерывности высших порядков частных производных с весовыми функциями в $L_2(Q)$. Вычислены колмогоровские и линейные квазипоперечники некоторых классов функций;

- найдено точное неравенство типа Колмогорова для аналитических в бикруге функций и дано его приложение к экстремальным задачам в пространстве Бергмана, а также к экстремальным задачам совместного приближения функций и ее производных обобщенными полиномами.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы можно применять в экстремальных задачах теории приближения многомерных функций суперпозициями функций меньшего числа переменных, как в действительной, так и в комплексной областях.

Список литературы

А) Список использованных источников

1. Акопян Р.Р., Саидусайнов М.С. Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т.23, № 3. – С. 22–32.

2. Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51, – № 6. – С. 89–124.

3. Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения – Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.

4. Брудный Ю.А. Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Серия: Математика. – 1970. – Т.34. – №3. – С. 564–583.

5. Вайндинер А.И. К оценке остатка обобщенного ряда Фурье дифференцируемых функций двух переменных // Доклады АН СССР. – 1969. – Т.184. – № 3. – С.511-513.

6. Вайндинер А.И. Приближение непрерывных и дифференцируемых функций многих переменных обобщенными полиномами (конечной линейной суперпозицией функций меньшего числа переменных) // Доклады АН СССР. – 1969. – Т.192. – № 3. – С.483-486.

7. Вакарчук С.Б. О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций – В сб.: Некоторые вопросы

анализа и дифференциальной топологии // Института математики АН УССР. – Киев. – 1988. – С. 4–7.

8. Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. – 1991. – 3 – С. 14-25.

9. Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журн. – 1996. – Т.48. – №3. – С. 301-308.

10. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенство типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журнал. – 2011. – Т.63. – № 12. – С. 1579–1601.

11. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. – 2012. – Т.17. – № 6/1. – С. 82–88.

12. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. – 2013. – Т.18. – №6/1. – С. 61–66.

13. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении “углом” в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита // Збірник праць Інстиут математики НАН Україні. – 2014. – Т.11. – №3. – С. 35-46.

14. Вакарчук С.Б., Швачко А.В. Неравенства колмогоровского типа для

производных двух переменных и их приложение к аппроксимации "углом" // Изв. вузов. Матем. – 2015. – 11. – С. 3-22.

15. Gronska H., Jetter K. Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials // J. Approxim. Theory. – 1986. – V.48. – №4. – P. 396-406.

16. Колмогоров А.Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избранные труды. Математика, механика. – М.: Наука. – 1985. – С. 252-263.

17. Корнейчук Н.П., Переверзов С.В. К вопросу о приближении функций двух переменных операторами, построенными на базе одномерных операторов. В сб.: "Теории функций и топология". – Киев. – 1983. – С. 43-49.

18. Потапов М.К. О приближении "углом". Proceedings of the conference on constructive theory of functions. Akademiai Kiado. Budapesht. – 1972. – С. 371-399.

19. Потапов М.К. Изучение некоторых классов функций при помощи приближения "углом" // Тр. МИАН СССР. 1972. – Т.117. – С. 256-291.

20. Саидусайнов М.С. Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. – Труды Международной летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций. Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа, 2016. – С. 217–223.

21. Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного – М.-Л.: Наука. – 1964. – 440 с.

22. Stein E.M. Functions of exponential type // Analysis Mathematica. – 1957. – V.65. – №2. – P. 582-592.

23. Тайков Л.В. Неравенство типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Матем. заметки. – 1968. – Т.4. – №2. – С. 233-238.

24. Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1986. – Т.178. – С. 3-113.

25. Томич М. О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости // Publ. De. L'Inst. Math. (Beograd). – 1978. – Т.23. – №37. – С. 193-206.

26. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е и Полиа Г. Неравенства – М. – 1948. – 456 с.

27. Haussmann W., Zeller K. Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation – Proc. of Intern. Symp.(College Station, Tex., January 10-14, 1983) // Approximation Theory IV. Academic Press. New York. – 1983. – P. 509-514.

28. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журнал. – 1996. – Т.48, – №3. – С.301-308.

29. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России. – 2005. – Т.404. – №4. – С.460–464.

30. Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журн. – 2009. – Т.61. – №6. – С. 855-864.

31. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2007. – Т.50, – № 1. – С. 14–19.

32. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Матем. заметки. – 2018. – Т.103. – №4. – С.617–631.

33. Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables // Analysis Mathematica. – 2009. – V.35. – №1. – P. 61-72.

34. Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журн. – 1991. – Т.43. – №1. – С. 125-129.

Б) Список публикаций соискателя учёной степени:

1. В журналах входящих в перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК Российской Федерации

[1-А] Сайнаков В.Д. Значение квазипоперечников некоторых классов периодических функций двух переменных в L_2 / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук – 2018. – №2(171). – С. 7–16.

[2-А] Сайнаков В.Д. О неравенствах типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных / М.Ш.Шабозов, В.Д.Сайнаков // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т.24. – № 4. – С. 270–282.

[3-А] Сайнаков В.Д. Неравенства типа Колмогорова в пространстве Бергмана для функций двух переменных / М.Ш.Шабозов, В.Д.Сайнаков // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2018. – Т.61. – № 7-8. – С. 615–619.

[4-А] Сайнаков В.Д. Среднеквадратическое приближение функций двух переменных обобщенными тригонометрическими полиномами / В.Д.Сайнаков // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, – 2018, – № 4(173), – С. 37–43.

[5-А] Сайнаков В.Д. О наилучшем приближении в среднем обобщенными полиномами функций двух переменных / В.Д.Сайнаков // Доклады Академии Наук Республики Таджикистан – 2020. – Т. 63, №5-6. – С. 300–308.

2. В других изданиях:

[6-А] Сайнаков В.Д. Квазипоперечники некоторых функциональных классов функций двух переменных в L_2 / М.О.Акобиршоев, Сайнаков В.Д. // 'Современные проблемы математики и ее приложений" – Материалы международной научной конференции (г. Душанбе, 14-15 марта 2018). – С. 46-49.

[7-А] Сайнаков В.Д. Неравенство типа Колмогорова для периодических дифференцируемых функций двух переменных / В.Д.Сайнаков // "Современные проблемы алгебры и теории чисел” – Материалы научно-теоретической конференции (г. Душанбе, 14-15 декабря 2018). – С. 93-94.

[8-А] Сайнаков В.Д. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций двух переменных в L_2 / М.О.Акобиршоев, Сайнаков В.Д. // “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” – Материалы международной научной конференции (г. Душанбе, 30-31 января 2020). – С. 54-58.

[9-А] Сайнаков В.Д. Приближении в среднем обобщёнными полиномами функций двух переменных / В.Д.Сайнаков // “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений” – Материалы республиканской научно-практической конференции посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук, (Душанбе, 26 сентября 2020), С. 252-258.

[10-А] Сайнаков В.Д. Наилучшее приближение „углом” в пространстве $L_{2,\mu}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита / М.О.Акобиршоев, В.Д.Сайнаков // Теорія наближень і її застосування Міжнародна наукова конференція присевяшена 100-річчю з дня народження М.П.Карнейчука (16-19 вересня 2020 Дніпро, Украіна). С. 32.