«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор Государственного образовательного учреждения « Худжандский государственный университет имени Б.Гафурова» доктор исторических наук, профессор

Д. Х. Джуразода

« 14 » августа 2020 г.

Отзыв

оппонирующей организации на диссертационную работу Шукуровой Ганджины Нарзуллоевны «Построение точных решений для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре», представленную на соискание учёной степени кандидата физико - математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

К необходимости изучения интегральных уравнений с особенностями в ядре приводят задачи механики, физики, геофизики, биологии, а также теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Методы исследования таких уравнений разрабатывались в трудах многих выдающихся учёных, таких как С.Г.Михлин, Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гахов, И.Н.Векуа, А.В.Бицадзе, В.И.Смирнов, Л.Г.Михайлов, А.Д.Джураев, Н.Раджабов, З.Д.Усманов и др. В работах В.И.Смирнова приводится исследование интегрального уравнения типа Вольтерра с нижним и верхним переменными пределами интегрирования и регулярным ядром. В трудах Н.Раджабова изучены интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода с нижним или верхним переменным пределом интегрирования с сингулярной и сверхсингулярной точкой. Он доказал, что в зависимости от класса функций, где ищется решение этих уравнений, наблюдается новое явление, которое в классической теории не существует. То есть, решение уравнения второго рода может быть не единственным, а зависеть от произвольной постоянной.

Н.Раджабовым также изучены одномерные симметричные интегральные уравнения типа Вольтерра вида

$$u(x)+\int_{-x}^{x}\frac{K(x,t)}{|t|^{\alpha}}u(t)dt=f(x),\alpha\geq 1$$

с фиксированным сингулярным или сверхсингулярным ядром.

В монографиях Н.Раджабова и Н.Раджабова и Л.Н.Раджабовой изучены одномерные, двумерные и некоторые многомерные интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными точками, линиями или областями. В работах Л.Н.Раджабовой изучены двумерные интегральные уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью на границе области.

Диссертационная работа Шукуровой Г.Н. тесно примыкает к приведённым работам и посвящена исследованию ранее не изучавшегося симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре и двумерных симметричных интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью по одной переменной и граничной особенностью или сильной особенностью по другой переменной.

В связи с вышесказанным тема диссертационной работы Шукуровой Г.Н. считается важной и интересной.

Диссертация Шукуровой Г.Н. состоит из введения и трёх глав.

Во введении даётся краткий исторический обзор, обосновывается актуальность темы диссертации, кратко излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава диссертации Шукуровой Г.Н. посвящена исследованию одномерного симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре.

В параграфе 1.1 первой главы изучается модельное симметричное интегральное уравнение типа Вольтерра вида

$$u(x)+\int_{-x}^{x}\left[p+q ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{u(t)}{|t|}dt=f(x), \quad (1)$$

с постоянными параметрами p и q на интервале $L=\{x\colon -a<x<a\}$.
В зависимости от корней характеристического уравнения и знака параметров p и q, в ряде случаев получено явное представление общего решения уравнения (1), которое зависит от двух или одного произвольного постоянного, а также выделены случаи, когда уравнение имеет единственное решение. Полученные результаты приведены в виде теорем 1.1.1-1.1.9.

В параграфе 1.2 изучено общее симметричное интегральное уравнение типа Вольтерра вида

$$u(x) + \int_{-x}^{x} \left[p(x,t) + q(x,t) ln \left|\frac{x}{t}\right|\right] \frac{u(t)}{|t|} dt = f(x) \qquad (2)$$

с особенностью и логарифмической особенностью, а также с непрерывными функциями $p(x,t)$ и $q(x,t)$ в ядре. В случаях, когда обе функции $p(x,t)$ и $q(x,t)$ чётны или нечётны по всем аргументам, доказано что интегральное уравнение (2) имеет единственное решение и оно найдено в явном виде. В общем случае функций $p(x,t)$ и $q(x,t)$ при помощи аналога метода регуляризации задача о нахождении решения уравнения (2) сведена к решению системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода со слабой особенностью. В этом случае единственное решение уравнения (2) выписано при помощи резольвент системы интегральных уравнений. Полученные результаты сформулированы в виде теорем 1.2.1 – 1.2.5.

В параграфе 1.3 для симметричного интегрального уравнения (1), в случаях, когда общее решение зависит от произвольных постоянных, ставятся и изучаются задачи типа Коши с условиями на особой точке. Решение всех поставленных задач найдено в явном виде. Полученные результаты приведены в виде теорем 1.3.1 – 1.3.5.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию двумерного симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра вида

$$u(x,y) + \int_{-x}^{x} \left[p + q ln \left|\frac{x}{t}\right|\right] \frac{u(t,y)}{|t|} dt + \lambda \int_{0}^{y} \frac{u(x,s)}{s} ds +$$

$$+ \int_{-x}^{x} \left[p_1 + q_1 ln \left|\frac{x}{t}\right|\right] \frac{dt}{|t|} \int_{0}^{y} \frac{u(t,s)}{s} ds = f(x,y) \qquad (3)$$

с особенностью и логарифмической особенностью по одному переменному и особенностью по второму переменному в прямоугольнике $R = \{(x,y): -a < x < a; 0 < y < b\}$. Здесь параметры p, q, p_1, q_1, λ – постоянные числа.

В параграфе 2.1 интегральное уравнение (3) изучено в случае, когда параметры связаны между собой соотношениями $p_1 = \lambda p$, $q_1 = \lambda q$. В зависимости от корней характеристического уравнения и знака параметров p, q, λ уравнения в ряде случаев получена формула представления общего решения, зависящая от трёх, двух или одного функций единственного аргумента. А также выделены случаи, когда уравнение (3) имеет единственное решение. Результаты сформулированы в виде теорем 2.1.1. - 2.1.16.

В параграфе 2.2 ставятся и исследуются граничные задачи для интегрального уравнения (3) в случаях, когда параметры уравнения связаны между собой и общее решение из предыдущего параграфа зависит от произвольных функций. Всего рассмотрены 13 задач, решение которых находится в явном виде. Окончательные результаты приведены в виде теорем 2.2.1. - 2.2.13.

В параграфе 2.3 интегральное уравнение (3) изучено в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой. В этом случае решение ищется в классе функций разлагающихся в обобщённый степенной ряд по степеням y с коэффициентами, зависящими от x, при условии, что правая часть уравнения разлагается в аналогичный равномерно сходящийся ряд. Тогда исследование уравнения (3) приводится к изучению бесконечного числа интегральных уравнений типа (1) для коэффициентов ряда неизвестной функции. Используя результаты, полученные в параграфе 1.1, в зависимости от корней характеристических уравнений, соответствующих полученным интегральным уравнениям и знака их параметров, найдено представление решений рассматриваемого уравнения. Полученные представления зависят от двух или одной группы бесконечного числа произвольных постоянных, удовлетворяющих определенному условию. Выделены случаи, когда данное уравнение имеет единственное решение. Результаты приведены в виде теорем 2.3.1. - 2.3.8.

Третья глава диссертации посвящена исследованию в области R двумерного симметричного интегрального уравнения типа Вольтерра вида

$$u(x,y)+\int_{-x}^{x}\left[p+qln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{u(t,y)}{|t|}dt+\lambda\int_{0}^{y}\frac{u(x,s)}{s^{\beta}}ds+$$

$$+\int_{-x}^{x}\left[p_1+q_1ln\left|\frac{x}{t}\right|\right]\frac{dt}{|t|}\int_0^y\frac{u(t,s)}{s^{\beta}}ds=f(x,y) \qquad (4)$$

с особенностью и логарифмической особенностью по одному переменному и сильной особенностью по второму переменному, где $p, q, \lambda, p_1, q_1, \beta>1$ – постоянные числа.

В параграфе 3.1 третьей главы интегральное уравнение (4) изучено в случае, когда параметры λ, p, p_1 и q, q_1 уравнения связаны между собой как в параграфе 2.1. В зависимости от корней характеристического уравнения и знака параметров уравнения в ряде случаев получено явное представление общего решения, зависящее от трёх, двух или одного произвольных функций одного аргумента. Выделены случаи, когда уравнение (4) имеет единственное решение. Полученные результаты приведены в виде теорем 3.1.1. - 3.1.16.

В параграфе 3.2 третьей главы ставятся и исследуются граничные задачи для интегрального уравнения (4) с условиями на особых многообразиях, в случаях, когда параметры уравнения связаны между собой и общее решение содержит произвольные функции. Полученные результаты приведены в виде теорем 3.2.1. - 3.2.13.

В третьем параграфе третьей главы изучено интегральное уравнение (4) в случае, когда параметры уравнения не связаны между собой. Решение в этом случае ищется в классе функций, представимых в виде обобщенного функционального ряда вида $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) e^{-(n+\gamma)\omega_b^{\beta}(y)}$, $\gamma > 0$, где $\omega_b^{\beta}(y) = \left[(\beta-1)y^{\beta-1}\right]^{-1}$, предполагая, что правая часть уравнения разлагается в аналогичный, равномерно сходящийся ряд. Тогда коэффициенты $u_n(x)$ ряда находятся как решение соответствующих интегральных уравнений типа (1). Таким образом, также как в параграфе 2.3, получены представления решений, зависящие от двух или одной группы бесконечного числа произвольных постоянных, удовлетворяющих определённому условию. Выделены случаи, когда данное уравнение имеет единственное решение. Полученные результаты приведены в виде теорем 3.3.1. -3.3.8.

Переходя к оценке полученных в диссертации результатов, отметим, что научные положения, выводы и рекомендации, сформулированные в исследовании, обоснованы с помощью общепризнанных методов теории дифференциальных и интегральных уравнений. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми, подтверждены строгими доказательствами, согласуются с известными результатами других авторов и являются существенным вкладом в общую теорию интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми точками и линиями.

В диссертационной работе имеются отдельные недостатки технического характера, допущены некоторые грамматические и стилистические ошибки.

Например, имеются следующие замечания по оформлению и содержанию диссертации:

1. В диссертации на стр. 23 в формуле (1.2.5) на второй строке вместо $u(-t)$ написано $u(t)$.
2. В диссертации на стр. 24 в теоремах 1.2.1 и 1.2.2 вместо $x \in \bar{L}$ написано $(x) \in C(\bar{L})$, а на стр. 29 в теореме 1.2.5 вместо $u(x) \in \mathrm{C}(\bar{L})$ написано $u(x)\mathrm{C}(\bar{L})$.

3. В диссертации на стр. 113 в формулах (3.3.2) и (3.3.3) имеется лишняя запись $n = 0,1,2,3 \ldots,$.

Высказанные замечания не снижают научных достоинств диссертации и не могут существенно повлиять на её общую оценку.

По материалам диссертации опубликовано 10 работ диссертанта, из них 7 статей опубликованы в изданиях из перечня рецензируемых изданий ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

Полученные в диссертации результаты прошли должную апробацию и доложены на двух международных конференциях, ежегодных конференциях ТНУ и на семинаре кафедры математического анализа и теории функций ТНУ «Комплексный анализ и его приложения» (руководитель - академик НАН РТ Н.Р. Раджабов).

Автореферат правильно отражает содержание диссертационной работы. Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Тематика диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Полученные в диссертации Шукуровой Г.Н. результаты могут быть применены в дальнейших научных исследованиях, проводимых в Таджикском Национальном Университете, Таджикском государственном педагогическом университете им. С.Айни, Худжандском государственном университете им. Б.Гафурова, Бохтарском государственном университете им. Н.Хусрава и других научных и учебных учреждениях, где проводятся исследования по теории интегральных уравнений типа Вольтерра с особыми точками и линиями и дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами.

На основании вышеизложенного считаем, что диссертационная работа Шукуровой Г.Н. **«Построение точных решений для одного класса интегральных уравнений типа Вольтерра с особенностью и логарифмической особенностью в ядре»** удовлетворяет требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Результаты диссертационной работы Шукуровой Ганджины Нарзуллоевны заслушаны на научно - теоретическом семинаре кафедры математического анализа им. профессора А.Мухсинова Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова 5 августа 2020 г.

Отзыв подготовлен кандидатом физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, доцентом кафедры математического анализа им. профессора А. Мухсинова Олими А.Г.

Отзыв на диссертацию обсуждён и утверждён на заседании кафедры математического анализа им. профессора А. Мухсинова математического факультета Худжандского государственного университета им. Б.Гафурова (протокол № 1 от 7 августа 2020 г.).

Заведующая кафедрой математического анализа им.
профессора А. Мухсинова, кандидат физико-математических наук
по специальности 01.01.02 - Дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление
Д.А. Воситова

Председатель заседания семинара, кандидат физико-математических
наук по специальности 01.01.02- Дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление,
доцент А.Г. Олими

Секретарь заседания семинара, кандидат физико-математических
наук по специальности 01.01.02- Дифференциальные
уравнения, динамические системы и оптимальное управление
М.Я. Дадоджанова

Адрес: 735700, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова 1
Тел. (83422) 6-52-73
Телефакс (83422) 6-75-18
E-mail: hgu-rektor@khujandi.com
Тел. моб. (+992) 92-623-50-74

Подпись Воситовой Д.А., Олими А.Г. и Дадоджановой М.Я. заверяю.
Начальник ОК и СР ХГУ им. Б.Гафурова З.Н.Ашрапова