МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ХУДЖАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА Б.ГАФУРОВА

УДК 517.5

На правах рукописи

Тухлиев Дилшод Камаридинович

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, академик Национальной академии наук Таджикистана, профессор Шабозов Мирганд Шабозович

Х У Д Ж А Н Д – 2 0 2 0

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. К настоящему времени вопросами наилучшего полиномиального приближения комплексных функций, регулярных в некоторой ограниченной области комплексной плоскости, посвящено достаточно много работ где получен ряд окончательных результатов. Здесь в первую очередь следует указать на уже ставшей классической работе S.Bergman [4], и работах К.И.Бабенко [1], В.М.Тихомирова [34], Л.В.Тайкова [30], В.И.Белого [3], М.З.Двейрина [12], J.T.Scheik [46], S.D.Fisher, M.I.Stessin [39], A.Pinkus [23].

В дальнейшем эта тематика была развита в работах Л.В.Тайкова и Н.Айнуллоева [31], Ю.А.Фаркова [37], С.Б.Вакарчука [8], М.Ш.Шабозова [43], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [45], С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [10] и многих других. Следует отметить, что многие экстремальные задачи, в основном, решены в пространстве Харди. Что же касается решения указанных задач в более общем пространстве Бергмана, то здесь пока не достаточно много окончательных результатов и многие экстремальные задачи ждут своего решения.

В диссертационной работе, продолжая исследования вышеуказанных авторов, вводится в рассмотрение задача одновременного (или совместного) наилучшего полиномиального приближения функций и их последовательных производных. В пространстве Бергмана указанная задача рассматривается впервые. Полученные результаты обеспечивают возможность найти точные значения верхней грани наилучшего совместного приближения некоторых классов функций, принадлежащих пространству Бергмана.

Общая характеристики работы

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами.

Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информатики и вычислительной математики Худжандского государственного университета им. академика Б.Гафурова на 2016-2020 г. по теме „Теория приближения функций“.

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- доказать точные верхние грани отношения величины наилучшего совместного полиномиального приближения промежуточных производных к величине наилучшего полиномиального приближения старшей производной в пространстве Бергмана;

- установить точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего полиномиального совместного приближения промежуточных производных в пространстве Бергмана и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка;

- найти значения различных n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2;

- найти точные константы в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана.

Основные методы исследования. В диссертационной работе используются новые методы теории аппроксимации вариационного содержания и методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций и известный метод оценки снизу n-поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах.

Научная новизна исследований. Основные результаты диссертационной работы:

- найдены верхние грани отношения величины наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных к величине наилучшего приближения производной старшего порядка;

- установлены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего совместного приближения промежуточных производных и интегралами, содержащими усреднённые значения модуля непрерывности производной старшего порядка;

- найдены точные значения различных n-поперечников классов функций из пространства B_2;

- найдены точные константы в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана.

Положения, выносимые на защиту:

- теоремы о точных значениях верхних граней отношения наилучших совместных полиномиальных приближений функций и их промежуточных производных к наилучшему приближению старшей производной функции в B_2;

- теорема о точности неравенства типа Джексона–Стечкина для величины наилучшего совместного полиномиального приближения функций и их промежуточных производных;

- теоремы о точных значениях n-поперечников классов функций в пространстве Бергмана;

- теорема о точных константах прямых и обратных теорем в пространстве Бергмана.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближения комплексных функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям математики и прикладной математики.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все результаты диссертационной работы получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- ежегодных конференциях кафедры информатики и вычислительной математики Худжанского государственного университета имени академика Б.Гафурова (г.Худжанд, 2017-2020 г.);
- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика Национальной академии наук Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2017-2020 г.);
- международной конференции „Современные задачи математики и их приложения" (Душанбе, 25-26 сентября 2018 г.);
- международной конференции „Спектральная теория и смежные вопросы" (Уфа., 1-4 октября 2018 г.);
- республиканской научно-практической конференции „Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировозрения общества" (Худжанд, ХГУ им. Б.Гафурова, 26-27 октября 2018 г.);
- международной конференции „Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 29-30 сентября 2018 г.);
- международной конференции „Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа" (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции „Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами“ (Душанбе, 30-31 января 2020 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 печатных работах автора. Из них 4 статьи опубликованы в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации, а 6 статей в трудах международных и республиканских конференций. Из совместной с научным руководителем М.Ш.Шабозовым статья соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав собственных исследований, списка цитированной литературы из 57 наименований, занимает 77 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА I

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА B_2

§1.1. Постановка задач и предварительные факты

1. Пространство Бергмана B_q $(1 \le q < \infty)$

Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. $\mathcal{A}(U)$ – множество аналитических в круге U функций комплексного переменного

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \ \ z = \rho e^{i\varphi}, \ \ 0 < \rho \le 1, \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{1.1.1}$$

Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{A}(U)$ принадлежит пространству $B_q := B_q(0)$ $(1 \le q < \infty)$, если $f(z)$ – суммируемая по Лебегу в области U функция, причём

$$\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |f(z)|^q d\sigma = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |f(x+iy)|^q dxdy < \infty. \tag{1.1.2}$$

Совокупность всех функций $f(z) \in \mathcal{A}(U)$, для которых имеет место ограничение (1.1.2), образует *банахово* пространство, которое называется пространством *Бергмана* B_q, $(1 \le q < \infty)$ [4].

Мы в данной диссертационной работе преимущественно рассмотрим случай $q = 2$, то есть когда B_2 есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)_{B_2} = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} f(z)\overline{g} d\sigma \tag{1.1.3}$$

и соответствующей нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty, \tag{1.1.4}$$

где $d\sigma$ – элемент площади.

Очевидно, что, переходя к полярным координатам, норму (1.1.4) можно записать следующим образом

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho d\rho d\varphi \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1.5}$$

Учитывая разложение в ряд Маклорена (1.1.1) и применяя равенство Парсеваля, из (1.1.5) получаем

$$\|f\|_2 = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}. \tag{1.1.6}$$

Обозначим через $\mathcal{P}_n$ – множество комплексных алгебраических полиномов степени не более n:

$$\mathcal{P}_n := \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Равенством

$$E_{n-1}(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_2 = \inf \left\{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \right\} \tag{1.1.7}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f \in B_2$ элементами множества $\mathcal{P}_{n-1}$ в метрике пространства B_2. Имеет место следующая простая

Лемма 1.1.1. *Для произвольной функции* $f \in \mathcal{A}(U)$, *принадлежащей пространству* $B_2 := B_2(U)$, *имеет место равенство*

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\}^{1/2}. \qquad (1.1.8)$$

Доказательство. Пусть $p_{n-1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ – произвольный многочлен из подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$. Тогда, учитывая равенство (1.1.5) и разложение функции $f \in \mathcal{A}(U)$ в виде степенного ряда (1.1.1), запишем:

$$\left\|f - p_{n-1}\right\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi}) - p_{n-1}(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \Big|\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)(\rho e^{i\varphi})^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(\rho e^{i\varphi})^k\Big|^2 \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \Big|\sum_{k=0}^{n-1}(c_k(f) - a_k)(\rho e^{i\varphi})^k + \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f)(\rho e^{i\varphi})^k\Big|^2 \rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n-1}(c_k(f) - a_k)(\rho e^{i\varphi})^k + \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f)(\rho e^{i\varphi})^k\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{l=0}^{n-1}(\overline{c_l(f) - a_l})(\overline{\rho e^{i\varphi}})^l + \sum_{l=n}^{\infty} \overline{c_l(f)}(\overline{\rho e^{i\varphi}})^l\right)\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1}(c_k(f) - a_k)(\overline{c_l(f) - a_l})\rho^{k+l+1}e^{i(k-l)\varphi}\right\} d\rho d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=n}^{\infty}(c_k(f)-a_k)\overline{c_l(f)}\rho^{k+l+1}e^{i(k-l)\varphi}\right\}d\rho d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}c_k(f)(\overline{c_l(f)-a_l})\rho^{k+l+1}e^{i(k-l)\varphi}\right\}d\rho d\varphi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}c_k(f)\overline{c_l(f)}\rho^{k+l+1}e^{i(k-l)\varphi}\right\}d\rho d\varphi=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|c_k(f)-a_k|^2}{k+1}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого $p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}$ имеет место равенство

$$\left\|f-p_{n-1}\right\|_2^2=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|c_k(f)-a_k|^2}{k+1}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}. \tag{1.1.9}$$

Из равенства (1.1.9) сразу следует, что его правая часть принимает минимальное значение, равное $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}$, когда выполняются равенства $a_k=c_k(f)$, то есть когда полином $p_{n-1}(z)$ совпадает с частной суммой Тейлора $p_{n-1}(z)\equiv S_{n-1}(f,z)$, а потому из (1.1.9) имеем

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2}=\inf_{p_{n-1}\in\mathcal{P}_n}\left\|f-p_{n-1}\right\|_2^2=\left\|f-S_{n-1}(f)\right\|_2^2=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1},$$

что равносильно равенству (1.1.8). Лемма 1.1.1 доказана.

Для функции $f\in\mathcal{A}(U)$ запишем две разные производные:

Обычную производную порядка $m \in \mathbb{N}$ аналитической функции $f \in \mathcal{A}(U)$ определим равенством

$$f^{(m)}(z) := \frac{d^m f}{dz^m} = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(f) z^{k-m},$$

где

$$\alpha_{k,m} := k(k-1)\cdots(k-m+1) = \frac{k!}{(k-m)!}, \ \ k \geq m, \ \ k, m \in \mathbb{N}. \tag{1.1.10}$$

Определим также производную по аргументу φ, которая определяется рекуррентным равенством

$$f'_a(z) := f'(z) z'_\varphi = f'(z) zi, \ \ f_a^{(m)}(z) := \left\{ f_a^{(m-1)}(z) \right\}'_a, \ \ m \geq 2. \tag{1.1.11}$$

Из равенства (1.1.11) следует, что

$$f_a^{(m)}(z) := \frac{d^m f(\rho e^{i\varphi})}{d\varphi^m} = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^m c_k(f) (\rho e^{i\varphi})^k. \tag{1.1.12}$$

Пусть $B_{2,a}^{(m)} := \{f \in B_2, f_a^{(m)} \in B_2\}$, $B_2^{(m)} := \{f \in B_2, f^{(m)} \in B_2\}$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in B_2^{(m)}$. Используя равенство (1.1.1), введём обозначение

$$r_n(f, z) = f(z) - S_{n-1}(f, z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) z^k. \tag{1.1.13}$$

Применяя тождество Парсеваля к равенству (1.1.3) с учётом ортогональности системы функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, по площади единичного круга $U := \{z : |z| < 1\}$, получаем

$$\left\| r_n(f) \right\|_2^2 = \left\| r_n(f) \right\|_{B_2}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}.$$

Так как

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu} S_{n-1}(f, z) = S_{n-1}^{(\nu)}(f, z) =$$

$$= \sum_{k=\nu}^{n-1} \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu} = S_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}, z),$$

то при любых натуральных $n > m > \nu \geq 1$ получаем:

$$\mathcal{F}^{(\nu)}(f,z) = f^{(\nu)}(z) - S_{n-1}^{(\nu)}(f,z) =$$

$$= f^{(\nu)}(z) - S_{n-\nu-1}(f^{(\nu)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu} c_k(f) z^{k-\nu},$$

$$\mathcal{F}^{(m)}(f,z) = f^{(m)}(z) - S_{n-\nu-1}(f^{(m)}, z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(f) z^{k-m}.$$

Из этих равенств получаем

$$\left\|\mathcal{F}^{(\nu)}(f)\right\|_2^2 = E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1}, \tag{1.1.14}$$

$$\left\|\mathcal{F}^{(m)}(f)\right\|_2^2 = E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1}. \tag{1.1.15}$$

Учитывая равенства (1.1.14) и (1.1.15), будем доказывать основные теоремы, приведенные в этом параграфе. Отметим, что в работе [44] было установлено, что для любой функции $f \in B_2^{(m)}$ справедливо точное неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}(f^{(m)})_2, \tag{1.1.16}$$

где $n \geq m, m, n \in \mathbb{N}$ и знак равенства в неравенстве (1.1.16) достигается для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}(U)$.

Имеет место следующее утверждение, являющееся обобщением соотношения (1.1.16).

Теорема 1.1.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}, n > m, \nu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при условии $n > m \geq \nu$ для произвольной функции $f \in B_2^{(m)}$ справедливо точное нера-*

венство

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}(f^{(m)})_2, \qquad (1.1.17)$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$.

Доказательство. Выше мы отметили, что при всех $\nu = 0, 1, \cdots, m$ имеет место равенство

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1}, \qquad (1.1.18)$$

а потому из соотношения (1.1.18) с учётом равенства

$$E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1}, \qquad (1.1.19)$$

при выполнении условий $n > m \geq \nu$ будем иметь

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,m}^2} \cdot \frac{k-m+1}{k-\nu+1} \cdot \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} \leq$$

$$\leq \max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,m}^2} \cdot \frac{k-m+1}{k-\nu+1} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} =$$

$$= \max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,m}^2} \cdot \frac{k-m+1}{k-\nu+1} \right\} \cdot E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2. \qquad (1.1.20)$$

Теперь заметим, что при выполнении условий $k \geq n > m \geq \nu$ будем иметь

$$\alpha_{k,m} = k(k-1)\cdots(k-m+1) =$$

$$= k(k-1)\cdots(k-\nu+1)(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(k-\nu-(m-\nu)-1) = \alpha_{k,\nu}\cdot\alpha_{k-\nu,m-\nu},$$

пользуясь которым, запишем

$$\max_{k\geq n}\left\{\frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\alpha_{k,m}^2}\cdot\frac{k-m+1}{k-\nu+1}\right\} = \max_{k\geq n}\left\{\frac{1}{\alpha_{k-\nu,m-\nu}^2}\cdot\frac{k-m+1}{k-\nu+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n-\nu,m-\nu}^2}\cdot\frac{n-m+1}{n-\nu+1} = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{\alpha_{n,m}^2}\cdot\frac{n-m+1}{n-\nu+1}. \tag{1.1.21}$$

Учитывая соотношения (1.1.21), из неравенства (1.1.20) получаем

$$E_{n-\nu+1}^2(f^{(\nu)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{\alpha_{n,m}^2}\cdot\frac{n-m+1}{n-\nu+1}\cdot E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2. \tag{1.1.22}$$

Этим неравенство (1.1.17) доказано. Знак равенства в (1.1.17) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}$ проверяется непосредственным вычислением. В самом деле, учитывая равенства (1.1.18) и (1.1.19), запишем

$$\begin{gathered} f_0^{(\nu)}(z) = \alpha_{n,\nu}\cdot z^{n-\nu}, \quad E_{n-\nu-1}^2(f_0^{(\nu)})_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu+1}, \\ f_0^{(m)}(z) = \alpha_{n,m}\cdot z^{n-m}, \quad E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2 = \frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1}. \end{gathered} \tag{1.1.23}$$

Пользуясь полученными равенствами, запишем

$$E_{n-\nu-1}^2(f_0^{(\nu)})_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu+1} = \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{\alpha_{n,m}^2}\cdot\frac{n-m+1}{n-\nu+1}\cdot\frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{\alpha_{n,m}^2}\cdot\frac{n-m+1}{n-\nu+1}\cdot E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2,$$

откуда и следует точность неравенства (1.1.17). Отметим, что из доказанной теоремы 1.1.1, при $\nu = 0$ вытекает результат М.Ш.Шабозова и М.С.Саидусайнова [44] в виде неравенства (1.1.16).

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1.1.1. *В условиях теоремы 1.1.1 имеет место равенство*

$$\sup_{f\in B_2^{(m)}} \frac{E^2_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E^2_{n-m-1}(f^{(m)})_2} = \frac{\alpha^2_{n,\nu}}{\alpha^2_{n,m}} \cdot \frac{n-m+1}{n-\nu+1}. \tag{1.1.24}$$

Доказательство. Оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.1.24), получаем из неравенства (1.1.17):

$$\sup_{f\in B_2^{(m)}} \frac{E^2_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E^2_{n-m-1}(f^{(m)})_2} \le \frac{\alpha^2_{n,\nu}}{\alpha^2_{n,m}} \cdot \frac{n-m+1}{n-\nu+1}. \tag{1.1.25}$$

Для получения оценки снизу указанной величины воспользуемся соотношениями (1.1.23), в силу которых запишем

$$\sup_{f\in B_2^{(m)}} \frac{E^2_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E^2_{n-m-1}(f^{(m)})_2} \ge \frac{E^2_{n-\nu-1}(f_0^{(\nu)})_2}{E^2_{n-m-1}(f_0^{(m)})_2} = \frac{\alpha^2_{n,\nu}}{\alpha^2_{n,m}} \cdot \frac{n-m+1}{n-\nu+1}. \tag{1.1.26}$$

Требуемое экстремальное равенство (1.1.24) получаем из сопоставления неравенств (1.1.25) и (1.1.26), и таким образом мы завершаем доказательство следствия 1.1.1.

В завершение этого параграфа, исходя из равенств (1.1.14)–(1.1.15) и (1.1.16), можно убедиться в том, что если $f \in B_2^{(m)}$ $(m \in \mathbb{N}, m \ge 2)$, то $f \in L_2^{(\nu)}$ при любом $\nu \in \mathbb{N}$ таком, что $\nu < r$. Введём в рассмотрение класс $W_2^{(m)} := W_2^{(m)}(U), (m \in \mathbb{N})$–функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\|f^{(m)}\|_2 \le 1$. В связи с этим представляет определённый интерес найти точное значение величины

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 := \sup\left\{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 : f \in W_2^{(m)}\right\}. \tag{1.1.27}$$

Величину (1.1.27) называют верхней гранью наилучшего совместного (или одновременного) среднеквадратического полиномиального приближения функции и всех её последовательных производных $f^{(\nu)}(\nu = 1, 2, \cdots, m; m \in \mathbb{N})$ на классе $W_2^{(m)}$. Очевидно, что в силу равенства (1.1.14) величину (1.1.27) можно записать и в следующем виде

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 := \sup\left\{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1}; f \in W_2^{(m)}\right\}. \qquad (1.1.27)'$$

Теорема 1.1.2. *При любых $n, m, \nu \in \mathbb{N}, m \geq 2$, для которых выполняется ограничение $n > m \geq \nu$, имеет место равенство*

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 = \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \qquad (1.1.28)$$

Доказательство. Так как для произвольной функции $f \in W_2^{(m)}$, в силу определения класса $E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 \leq \|f^{(m)}\|_2 \leq 1$, то из неравенства (1.1.22) получаем

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{\alpha_{n,m}^2} \cdot \frac{n-m+1}{n-\nu+1} \cdot E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{\alpha_{n,m}^2} \cdot \frac{n-m+1}{n-\nu+1},$$

откуда сразу следует, что

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \qquad (1.1.29)$$

Оценку снизу получаем для функции $g_0(z) \in W_2^{(m)}$, рассмотренной нами в предыдущей теореме, учитывая равенство (1.1.16):

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_2 \geq E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2 = \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}. \qquad (1.1.30)$$

Требуемое равенство (1.1.28) вытекает из неравенств (1.1.29) и (1.1.30), чем и завершаем доказательство теоремы 1.1.2.

Заметим, что при $\nu = 0$ из равенства (1.1.28) получаем

$$\mathscr{E}_{n,0}(W_2^{(m)})_2 := E_{n-1}(W_2^{(m)})_2 = \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \qquad (1.1.31)$$

Величина (1.1.31) называется наилучшим среднеквадратическим приближением класса $W_2^{(m)}$ в пространстве B_2. Значением $E_{n-1}(W_2^{(m)})_2$ в виде равенства (1.1.31) воспользуемся при вычислении значения различных n-поперечников в четвёртом параграфе данной главы.

§1.2. Неравенства типа Колмогорова для функций класса $B_2^{(m)}$

Неравенство, в котором нормы промежуточных производных функции оцениваются через нормы самих функций и нормы её производных более высокого порядка, играют важную роль в экстремальных задачах теории приближений и её приложений. Среди известных многочисленных неравенств такого типа наиболее важны неулучшаемые неравенства. На протяжении более ста лет усилия многих математиков, начиная с Адамара и Ландау, были направлены на их получение. Для функций одной вещественной переменной один из наиболее важных результатов в этом направлении был получен в 1939 А.Н.Колмогоровым [19].

В связи с этим результат неравенства для промежуточных производных часто называют неравенством типа Колмогорова. К настоящему времени известно большое количество точных неравенств типа Колмогорова, как для функции одной вещественной переменной, так и для функции многих вещественных переменных (см. монографию [2] и приведенную там многочисленную литературы). Большой интерес представляет неравенство типа Колмогорова для функций комплексной переменной в некоторой области регулярности. Для функции одного комплексного переменного некоторые результаты получены в работах С.Б.Вакарчука [7] и М.С.Саидусайнова [24] и др.

В данном параграфе мы получим новые точные неравенства, оценивающие B_2 – норму промежуточных производных $f^{(\nu)}(z)$ $(0 \le \nu \le m)$ через B_2 – норму самой функции $f(z)$ и B_2 – норму производной $f^{(m)}(z), m \in \mathbb{N}$.

Предварительно докажем одно вспомогательное утверждение. При фиксированном натуральном $\nu \in [1, m]$ вводим обозначение

$$A_m(k) := \left(\frac{k-m+1}{k+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{(\alpha_{k,m}^2)^{\nu/m}}. \tag{1.2.1}$$

Имеет место следующая

Лемма 1.2.1. *При любых $m, n, \nu \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих ограничению $n > m \geq \nu$, справедливо равенство*

$$\max_{k \geq n} A_m(k) = A_m(n) := \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}}. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Поскольку

$$\alpha_{k,\nu} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-\nu+1),$$

то представим $\alpha_{k,m}$ в виде

$$\alpha_{k,m} = k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1) =$$

$$= \underbrace{k(k-1)(k-2)\cdots(k-\nu+1)} \cdot \underbrace{(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots[(k-\nu)-(m-\nu)+1]} =$$

$$= \alpha_{k,\nu} \cdot \alpha_{k-\nu,m-\nu},$$

а потому имеем

$$\frac{\alpha_{k,\nu}^2}{(\alpha_{k,m}^2)^{\nu/m}} = \frac{\alpha_{k,\nu}^2}{\left(\alpha_{k,\nu}^2 \cdot \alpha_{k-\nu,m-\nu}^2\right)^{\nu/m}} = \frac{\alpha_{k,\nu}^{2(1-\nu/m)}}{\alpha_{k-\nu,m-\nu}^{2\nu/m}}. \tag{1.2.3}$$

Учитывая равенство (1.2.3), представим функцию $A_m(k)$ в следующем виде

$$A_m(k) = \left(\frac{k-m+1}{k+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{(\alpha_{k,\nu}^2)^{(1-\nu/m)}}{(\alpha_{k-\nu,m-\nu}^2)^{\nu/m}}. \tag{1.2.4}$$

Так как при всех $k \geq n$ функция $A_m(k) > 0$, то, прологарифмировав соотношение (1.2.4), получаем:

$$\ln A_m(k) = \frac{\nu}{m}\Big[\ln(k-m+1) - \ln(k+1)\Big] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1) +$$

$$+2\Big(1-\frac{\nu}{m}\Big)\cdot \ln\alpha_{k,\nu} - \frac{2\nu}{m}\ln\alpha_{k-\nu,m-\nu} =$$

$$= \frac{\nu}{m}\Big[\ln(k-m+1) - \ln(k+1)\Big] + \ln(k+1) - \ln(k-\nu+1) +$$

$$+2\Big(1-\frac{\nu}{m}\Big)\cdot\Big[\ln k + \ln(k-1) + \cdots + \ln(k-\nu+1)\Big] -$$

$$-\frac{2\nu}{m}\Big[\ln(k-\nu) + \ln(k-\nu-1) + \cdots + \ln((k-\nu)-(m-\nu)+1)\Big]. \qquad (1.2.5)$$

Взяв логарифмическую производную функции $\ln A_m(x)$, будем иметь

$$\frac{A'_m(x)}{A_m(x)} = \frac{\nu}{m}\Big(\frac{1}{x-m+1} - \frac{1}{x+1}\Big) + \Big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-\nu+1}\Big) +$$

$$+2\Big(1-\frac{\nu}{m}\Big)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-\nu+1}\Big) -$$

$$-\frac{2\nu}{m}\Big(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x-\nu-1} + \cdots + \frac{1}{(x-\nu)-(m-\nu)+1}\Big). \qquad (1.2.6)$$

Учитывая равенства (1.2.6), исследуем поведение функции $A_m(x)$ при $x \geq n$. Имеем:

$$\frac{A'_m(x)}{A_m(x)} = \frac{\nu}{m}\Big(\frac{1}{x-m+1} - \frac{1}{x+1}\Big) + \Big(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-\nu+1}\Big) +$$

$$+2\Big(1-\frac{\nu}{m}\Big)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-\nu+1}\Big) -$$

$$-\frac{2\nu}{m}\Big(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x-\nu-1} + \cdots + \frac{1}{(x-\nu)-(m-\nu)+1}\Big) =$$

$$= -\frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} - \Big(1 - \frac{2\nu}{m}\Big) \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-\nu+1} +$$

$$+2\Big(1 - \frac{\nu}{m}\Big)\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-\nu+1}\Big) -$$

$$-\frac{2\nu}{m}\Big(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x-\nu-1} + \cdots + \frac{1}{(x-\nu)-(m-\nu)+1}\Big) \leq$$

$$\leq -\frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} - \Big(1 - \frac{2\nu}{m}\Big) \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-\nu+1} +$$

$$+2\Big(1 - \frac{\nu}{m}\Big)\Big(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-\nu+1}\Big) -$$

$$-\frac{2\nu}{m}\Big(\frac{1}{x-\nu} + \frac{1}{x-\nu-1} + \cdots + \frac{1}{(x-\nu)-(m-\nu)+1}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{2(m-\nu)(\nu+1)}{m} \cdot \Big(\frac{1}{\nu+1} \cdot \frac{\nu+1}{x-\nu+1} - \frac{1}{m-\nu} \cdot \frac{m-\nu}{x-\nu}\Big) -$$

$$-\frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-\nu-(m-\nu)+1} - \frac{1}{x-\nu+1} =$$

$$= \frac{2(m-\nu)(\nu+1)}{m} \cdot \Big(\frac{1}{x-\nu+1} - \frac{1}{x-\nu}\Big) - \frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} - \frac{1}{x-\nu+1} =$$

$$= -\frac{2(m-\nu)(\nu+1)}{m(x-\nu+1)(x-\nu)} - \frac{\nu}{m} \cdot \frac{1}{x-m+1} - \frac{1}{x-\nu+1} < 0. \qquad (1.2.7)$$

Поскольку в силу равенства (1.2.4) $A_m(x)$ положительна при любых $x \geq n > m \geq \nu$, то из неравенства (1.2.7) вытекает, что при этом же ограничении $A'_m(x) < 0$, а это значит, что при $x \geq n$ функция $A_m(x)$ является монотонно убывающей по x, а потому

$$\sup\{A_m(x) : x \geq n\} = A_m(n) =$$

$$= \Big(\frac{n-m+1}{n+1}\Big)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}}.$$

Сформулируем наш основной результат (неравенство типа Колмогорова для функций $f \in B_2^{(m)}$) в виде следующей утверждение

Теорема 1.2.1. *Пусть числа $n, m, \nu \in \mathbb{N}, m \geq 2$ удовлетворяют ограничениям $n > m \geq \nu$. Тогда для любого $1 \leq \nu \leq m-1$ и произвольной функции $f \in B_2^{(m)}$ имеет место точное неравенство типа Колмогорова*

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/(2m)} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \times$$

$$\times \Big(E_{n-m+1}(f^{(m)})_2\Big)^{\nu/m} \cdot \Big(E_{n-1}(f)_2\Big)^{1-\nu/m}. \tag{1.2.8}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in B_2^{(m)}$. Используя равенства (1.1.14),(1.1.18) и (1.1.19), запишем

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,\nu}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-\nu+1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1}\right)^{\nu/m} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{k-m+1}{k+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{k+1}{k-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{k,\nu}}{(\alpha_{k,m})^{\nu/m}} \leq$$

$$\leq \sup\{A_m(k) : k \geq n\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1}\right)^{\nu/m}. \tag{1.2.9}$$

Применяя неравенство Гёлдера к правой части соотношения (1.2.9) и используя формулы (1.1.14),(1.1.19) и (1.2.2), получаем

$$E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_2 \leq A_m(n) \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1-\nu/m} \cdot \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k-m+1} \right\}^{\nu/m} =$$

$$= \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \Big(E_{n-1}^2(f)_2 \Big)^{1-\nu/m} \cdot \Big(E_{n-m-1}^2(f^{(m)})_2 \Big)^{\nu/m},$$

откуда и следует неравенство (1.2.8).

Теперь докажем, что для рассмотренной нами при доказательстве теоремы 1.1.1 функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(m)}, n > m$, для которой, кроме равенств (1.1.23), имеет место также равенство $E_{n-1}^2(f_0)_2 = \dfrac{1}{n+1}$, непосредственным вычислением получаем

$$\frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \Big(E_{n-1}^2(f_0)_2 \Big)^{1-\nu/m} \cdot \Big(E_{n-m-1}^2(f_0^{(m)})_2 \Big)^{\nu/m} =$$

$$= \frac{n+1}{n-\nu+1} \cdot \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{(\alpha_{n,m}^2)^{\nu/m}} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \right)^{1-\nu/m} \cdot \left(\frac{\alpha_{n,m}^2}{n-m+1} \right)^{\nu/m} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,\nu}^2}{n-\nu+1} = E_{n-\nu-1}^2(f_0)_2.$$

Точность неравенства (1.2.8) установлена, чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Далее, при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in W_2^{(m)}$ в соотношениях общего характера, условимся, что $f \notin P_m, f^{(m)} \neq const.$

Теорема 1.2.2. *Пусть* $n, m, \nu \in \mathbb{N}, m \geq 2, \quad 1 \leq \nu \leq m-1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} = \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \tag{1.2.10}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f \in W_2^{(m)}$, $m \geq 2$, которая не является элементом подпространства P_m. Для такой функции, как показали выше, имеет место неравенство

$$E_{n-m-1}(f^{(m)})_2 \leq 1, \tag{1.2.11}$$

и мы из неравенства (1.2.8) получаем

$$E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2 \leq \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}} \cdot \left(E_{n-1}(f)_2 \right)^{1-\nu/m}.$$

Из последнего неравенства сразу вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.2.4):

$$\frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{(E_{n-1}(f)_2)^{1-\nu/m}} \leq \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/(2m)} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}.$$

Переходя в этом равенстве к верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(m)}$, запишем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.2.10):

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} \leq \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1} \right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \tag{1.2.12}$$

С целью получения оценки снизу той же величины, введём в рассмотрение функцию

$g_0(z) = \dfrac{\sqrt{n-m+1}}{\alpha_{n,m}} \cdot z^n$, $m, n \in \mathbb{N}, n > m$. Так как для этой функции

$$g_0^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{n-m+1} \cdot z^{n-\nu}, \quad g_0^{(m)}(z) = \sqrt{n-m+1} \cdot z^{n-m}.$$

$$E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2 = \|g_0^{(\nu)}\|_2 = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}}, \tag{1.2.13}$$

$$E_{n-m-1}(g_0^{(m)})_2 = \|g_0^{(m)}\|_2 = 1, \quad E_{n-1}(g_0)_2 = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}},$$

то очевидно, что функция $g_0 \in W_2^{(m)}$ и для этой функции имеем:

$$\sup_{f \in W_2^{(m)}} \frac{E_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(f)_2} \geq \frac{E_{n-\nu-1}(g_0^{(\nu)})_2}{E_{n-1}^{1-\nu/m}(g_0)_2} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \left(\alpha_{n,m} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-m+1}}\right)^{1-\nu/m} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{n-m+1}{n+1}\right)^{\nu/m} \cdot \frac{n+1}{n-\nu+1} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{(\alpha_{n,m})^{\nu/m}}. \tag{1.2.14}$$

Равенство (1.2.10) получаем из сопоставления оценки сверху (1.2.12) с оценкой снизу (1.2.14). Теорема 1.2.2 доказана.

§1.3. Модуль непрерывности высших порядков функции $f \in B_2$

Для функции $f \in B_2$, исходя из разложения функции в ряд Тейлора (1.1.1), введем обозначение

$$\|\Delta_h^r f(\cdot)\|_{B_2} := \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\Delta_h^r f(\rho e^{it})\right|^2 d\rho dt\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}C_r^k f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right)\right|^2 \rho d\rho dt\right\}^{1/2} \tag{1.3.1}$$

и равенством

$$\omega_r(f;t)_{B_2} := \sup\left\{\|\Delta_h^r f(\cdot)\|_{B_2} : |h| \le t\right\} \tag{1.3.2}$$

определим модуль непрерывности r-го порядка функции $f \in B_2$. С целью получения явного вида модуля непрерывности (1.3.2) вычислим интеграл в правой части (1.3.2). Имеем

$$\left\|\Delta_h^r f(\cdot)\right\|_{B_2}^2 := \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l f\left(\rho e^{i(t+lh)}\right)\right|^2 \rho d\rho dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\left(\rho e^{i(t+lh)}\right)^k\right)\right|^2 \rho d\rho dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\left(\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l\left(\rho e^{i(t+lh)}\right)^k\right)\right|^2 \rho d\rho dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\rho^k e^{ikt}\left(\sum_{l=0}^{r}(-1)^{r-l}C_r^l\left(e^{ikh}\right)^l\right)\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\rho^k e^{ikt}\left(1-e^{ikh}\right)^r\right|^2\rho d\rho dt. \tag{1.3.3}$$

Применяя к правой части равенства (1.3.3) тождество Парсеваля, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\rho^k e^{ikt}\left(1-e^{ikh}\right)^r\right|^2\rho d\rho dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot\left|1-e^{ikh}\right|^{2r}=2^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)^r. \tag{1.3.4}$$

Теперь учитывая равенства (1.3.2) и (1.3.3),

$$\left\|\Delta_h^r f(\cdot)\right\|_{B_2}^2=2^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)^r,$$

в силу которого равенство (1.3.2) приобретает окончательный вид

$$\omega_r(f;t)_{B_2}:=2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\cdot(1-\cos kh)^r. \tag{1.3.5}$$

Затем заметим, что для произвольной функции $f\in\mathcal{A}(U)$ обычные производные r-го порядка и производные r-го порядка по аргументу имеют вид

$$f_a^{(m)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(ik)^m c_k(f)z^k, \tag{1.3.6}$$

$$f^{(m)}(z)=\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_{k,m}c_k(f)z^{k-m}. \tag{1.3.7}$$

Учитывая равенства (1.3.6) и (1.3.7), для модуля непрерывности (1.3.5) получаем

$$\omega_r^2(f_a^{(m)};t)_{B_2} = 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2m}}{k+1} |c_k(f)|^2 \cdot (1-\cos kh)^r\,, \tag{1.3.8}$$

$$\omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2} = 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\alpha_{k,m}^2}{k+1} |c_k(f)|^2 \cdot (1-\cos(k-h)t)^r\,. \tag{1.3.9}$$

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.3.1. *Для произвольной функции* $f \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$ *при любых* $n, m, r \in \mathbb{N}, n > m$ *соответственно при* $h \in (0, \pi/n]$ *и* $h \in (0, \pi/(n-m)]$ *справедливы неравенства*

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \le \frac{\int\limits_0^h \omega_r^2(f_a^{(m)};t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}t dt}{2^r n^{2m} \int\limits_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h}t dt}, \tag{1.3.10}$$

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \le \frac{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}t dt}{2^r \alpha_{n,m}^2 \int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}t dt}. \tag{1.3.11}$$

Для функции $f_0(z) = z^n \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$ *оба неравенства* (1.3.10) *и* (1.3.11) *обращаются в равенства.*

Доказательство. Неравенства (1.3.10) и (1.3.11) доказываются по одной и той же схеме, поэтому приведём доказательство неравенства (1.3.11).

По определению модуля непрерывности (1.3.9) имеем

$$\int\limits_0^h \omega_r(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \geq \int\limits_0^h \left\|\Delta_h^r f^{(m)}(\cdot)\right\|_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \geq$$

$$\geq 2^r\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,m}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\int\limits_0^h(1-\cos(k-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt \geq$$

$$\geq 2^r\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\min_{k\geq n}\left\{\alpha_{k,m}^2\int\limits_0^h(1-\cos(k-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}. \tag{1.3.12}$$

В работе [40] доказано, что при $k\geq n\geq m,\quad k,n,m\in\mathbb{N}$ функция

$$\varphi(k)=\alpha_{k,m}^2\int\limits_0^h(1-\cos(k-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt$$

возрастает при любых $k\geq n$ и $r\in\mathbb{N}$, а потому

$$\min_{k\geq n}\varphi(k)=\varphi(n)=\alpha_{n,m}^2\int\limits_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^h \omega_r(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt \geq 2^r\alpha_{n,m}^2\int\limits_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\times$$

$$\times\sin\frac{\pi}{h}tdt\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|c_k(f)|^2}{k+1}=$$

$$=2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}(f)_{B_2}\int\limits_0^h(1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt.$$

Отсюда получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \leq \frac{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt},$$

откуда и следует неравенство (1.3.11).

Покажем точность неравенства (1.3.11) для функции $f_0(z)=z^n\in B_{2,a}^{(m)}\cap B_2^{(m)}$. В силу равенств (1.1.8) и (1.3.9) для функции $f_0(z)=z^n$ запишем

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2}=\frac{1}{\sqrt{n+1}},\quad \omega_r(f_0^{(m)};t)_{B_2}=\frac{2^{r/2}\alpha_{n,m}}{\sqrt{n+1}}(1-\cos(n-m)t)^{r/2}. \quad (1.3.13)$$

Учитывая эти равенства, получаем

$$\frac{\int\limits_0^h \omega_r^2(f_0^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}=$$

$$=\frac{2^r\alpha_{n,m}^2\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\alpha_{n,m}^2(n+1)\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}=\frac{1}{n+1}=E_{n-1}^2(f_0)_{B_2},$$

откуда и вытекает точность неравенства (1.3.11), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathscr{P}_m}}\frac{2^r\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}=$$

$$=\frac{1}{\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}t dt}. \qquad (1.3.14)$$

В частности, при $h=\pi/(n-m)$, $n>m, n,m\in\mathbb{N}$ *из* (1.3.14) *вытекает равенство*

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathscr{P}_m}} \frac{\alpha_{n,m}^2 E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin(n-m)t dt}=\frac{(r+1)(n-m)}{2^{2r+1}}. \qquad (1.3.14)'$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.3.11) сразу вытекает оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.3.14):

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathscr{P}_m}} \frac{2^r\alpha_{n,m}^2 E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}t dt}\le\frac{1}{\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}t dt}. \qquad (1.3.15)$$

Оценку снизу указанной величины получаем для функции $f_0(z)=z^n\in B_2^{(m)}$, для которой имеют место равенства (1.3.13):

$$\sup_{\substack{f\in B_2^{(m)}\\ f\notin\mathscr{P}_m}} \frac{2^r\alpha_{n,m}^2 E_{n-1}^2(f)_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}t dt}\ge\frac{2^r\alpha_{n,m}^2 E_{n-1}^2(f_0)_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(f_0^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}t dt}=$$

$$=\frac{1}{\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}t dt}. \qquad (1.3.16)$$

Требуемое равенство (1.3.14) вытекает из сопоставления неравенств (1.3.15) и (1.3.16), а равенство (1.3.14)' из (1.3.14) при $h=\pi/(n-m)$ получается непосредственным вычислением.

Теорема 1.3.1 допускает следующее обобщение.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, m \geq \nu$ *и функция* $f \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$. *Тогда, соответственно при* $h \in (0, \pi/n]$ *и* $h \in (0, \pi/(n-m)]$, *справедливы равенства*

$$\sup_{f \in B_{2,a}^{(m)}} \frac{2^r n^{m-\nu} E_{n-1}^2(f_a^{(\nu)})_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r(f_a^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} = \frac{1}{\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}, \tag{1.3.17}$$

$$\sup_{\substack{f \in B_2^{(m)} \\ f \notin \mathscr{P}_m}} \frac{2^r (\alpha_{n,r}/\alpha_{n,\nu})^2 E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r(f^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} = \frac{1}{\int\limits_0^h (1 - \cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}. \tag{1.3.18}$$

Доказательство. Приводим, например, доказательство равенства (1.3.17), так как (1.3.18) доказывается аналогичным образом. Если полагать $f_a^{(\nu)} = g$, то отсюда получаем $f_a^{(m)} = g_a^{(m-\nu)}$, а это означает, что $f \in B_{2,a}^{(m)}$, а потому $g \in B_{2,a}^{(m-\nu)}$. Поэтому имеем

$$\sup_{\substack{f \in B_{2,a}^{(m)} \\ f \notin \mathscr{P}_m}} \frac{2^r n^{m-\nu} E_{n-1}^2(f_a^{(\nu)})_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(f_a^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} = \sup_{\substack{g \in B_{2,a}^{(m-\nu)} \\ g \notin \mathscr{P}_{m-\nu}}} \frac{2^r n^{m-\nu} E_{n-1}^2(g)_{B_2}}{\int\limits_0^h \omega_r^2(g_a^{(m-\nu)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt} =$$

$$= \frac{1}{\int\limits_0^h (1 - \cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt},$$

откуда и следует равенство (1.3.17). Теорема 1.3.2 доказана.

Исходя из результатов теоремы 1.3.2, вводим классов функций, для которых будем решать экстремальную задачу совместного приближения функций и их производных.

Через $W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)$ обозначим класс функций $f \in B_{2,a}^{(m)}$, которые удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \omega_r^2(f_a^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{h}{2} t dt \le 1.$$

Аналогично, через $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$ обозначим класс функций $f \in B_2^{(m)}$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt \le 1.$$

Имеет место следующая

Теорема 1.3.3. *Пусть $n, m, r \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{Z}_+, m \ge \nu$. Тогда соответственно для $h \in (0, \pi/n]$ и $h \in (0, \pi/(n-m)], n > m$ имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n,\nu}^2(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \sup\left\{E_{n-1}^2(f_a^{(\nu)})_{B_2} : f \in W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^r n^{2(m-\nu)} \int\limits_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}, \tag{1.3.19}$$

$$\mathscr{E}_{n,\nu}^2(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \sup\left\{E_{n-\nu-1}^2(f^{(\nu)})_{B_2} : f \in W_2^{(m)}(\omega_r, h)\right\} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \frac{1}{2^r \int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt}. \tag{1.3.20}$$

Доказательство. Приводим доказательство равенства (1.3.20). Из равенства (1.3.18) для производной функции $f \in B_2^{(m)}$ следует неравенство

$$E^2_{n-\nu-1}(f^{(\nu)})_{B_2} \le \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot \frac{\int\limits_0^h \omega_r^2(f^{(m)};t)_{B_2}\sin\frac{\pi}{h}tdt}{2^r\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}. \qquad (1.3.21)$$

Из этого неравенства в предположении $f \in W_2^{(m)}(\omega_r,h)$ получаем оценку сверху

$$\mathscr{E}^2_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r,h))_{B_2} = \sup\left\{E^2_{n-\nu-1}(f^{\nu})_{B_2} : f \in W_2^{(m)}(\omega_r,h)\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^r\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt}. \qquad (1.3.22)$$

Для получения оценки снизу указанной величины вводим в рассмотрение функцию

$$g_1(z) = \frac{(n-m+1)z^n}{\alpha_{n,m}\left\{2^r\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{1/2}}. \qquad (1.3.23)$$

Дифференцируя $\nu-$раз функцию (1.3.23), получаем

$$g_1^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m+1)z^{n-m}}{\left\{2^r\int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r\sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{1/2}}.$$

Отсюда получаем

$$E^2_{n-\nu-1}(g_1^{(\nu)})_{B_2} = \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^r \int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt}. \tag{1.3.24}$$

Кроме того, непосредственным вычислением получаем

$$\int\limits_0^h \omega_r^2(g_1^{(m)};t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}tdt = 1.$$

Последнее равенство показывает, что функция $g_1(z)$, определенная равенством (1.3.23), принадлежит классу $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$, а потому запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}^2_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r,h))_{B_2} \geq E^2_{n-\nu-1}(g_1^{(\nu)})_{B_2} =$$

$$= \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^r \int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt}. \tag{1.3.25}$$

Требуемое равенство (1.3.20) следует из сопоставления неравенств (1.3.22) и (1.3.25), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.3

Следствие 1.3.2. *В условиях теоремы 1.3.3 соответственно при $h = \pi/n$ и $h = \pi/(n-m), n > m$ имеют место равенства*

$$\mathscr{E}^2_{n,\nu}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r,\frac{\pi}{n}))_{B_2} = \frac{r+1}{2^{2r}} \cdot \frac{1}{n^{2(r-\nu)-1}},$$

$$\mathscr{E}^2_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r,\frac{\pi}{n-m}))_{B_2} = \frac{r+1}{2^{2r}} \cdot \left(\frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \cdot (n-m).$$

В частности, при $\nu = 0$ из этих равенств получим значение наилучших полиномиальных приближений классов $W_{2,a}^{(m)}(\omega_r,\pi/n)_{B_2}$ и

$W_2^{(m)}(\omega_r, \pi/(n-m))_{B_2}$ *функций* $f \in B_2$:

$$E_{n-1}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, \pi/n))_{B_2} = \frac{\sqrt{r+1}}{2^r} \cdot \frac{1}{n^{r-1/2}}, \tag{1.3.26}$$

$$E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, \pi/(n-m)))_{B_2} = \frac{\sqrt{r+1}}{2^r} \cdot \frac{\sqrt{n-m}}{\alpha_{n,m}}, \quad n > m. \tag{1.3.27}$$

§1.4. Точные значения n-поперечников классов $W_2^{(m)}, W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h), W_2^{(m)}(\omega_r, h)$ в пространстве B_2

В этом параграфе мы вычислим точные значения различных n-поперечников классов $W_2^{(m)}, W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)$ и $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$, введённых соответственно во втором и третьем параграфах этой главы, в пространстве B_2. Для этих классов функций мы доказали следующие равенства

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)})_{B_2} = \sqrt{\frac{n-m+1}{n-\nu+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}},$$

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = 2^{-r/2} n^{-(m-\nu)} \left\{ \int\limits_0^h (1-\cos nt)^r \sin \frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2},$$

$$\mathscr{E}_{n,\nu}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \frac{\alpha_{n,\nu}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \left\{ \int\limits_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin \frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}.$$

Эти равенства там обозначены соответственно под номерами (1.1.28), (1.3.19) и (1.3.20) и означали верхние грани наилучших совместных приближений на классах функций $W_2^{(m)}, W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h)$ и $W_2^{(m)}(\omega_r, h)$. Из этих равенств при $\nu = 0$ получаем наилучшие приближения указанных классов функций:

$$E_{n-1}(W_2^{(m)})_{B_2} = \mathscr{E}_{n,0}(W_2^{(m)})_{B_2} = \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}, \tag{1.4.1}$$

$$E_{n-1}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \mathscr{E}_{n,0}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2} \cdot n^m} \cdot \left\{ \int\limits_0^h (1-\cos nt)^r \sin \frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}, \tag{1.4.2}$$

$$E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} = \mathscr{E}_{n,0}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2} \cdot \alpha_{n,m}} \cdot \left\{ \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}. \qquad (1.4.3)$$

Равенства (1.4.1)-(1.4.3) дают оценку сверху при вычислении n-поперечников. Напомним ряд определений и обозначений, которыми будем пользоваться в этом параграфе. Пусть S - единичный шар в пространстве B_2; $\Lambda_n \subset B_2-n$-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset B_2-$подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : B_2 \to \Lambda_n-$линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^{\perp} : B_2 \to \Lambda_n-$непрерывный оператор линейного проектирования; $Q-$выпуклое центрально-симметричное подмножество из B_2. Величины

$$b_n(Q, B_2) = sup\left\{sup\left\{\varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\right\} : \Lambda_{n+1} \subset B_2\right\},$$

$$d_n(Q, B_2) = inf\left\{sup\left\{inf\left\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\right\} : f \in Q\right\} : \Lambda_n \subset B_2\right\},$$

$$\delta_n(Q, B_2) = inf\left\{inf\left\{sup\left\{\|f-\mathscr{L}f\|_2 : f \in Q\right\} : \mathscr{L}B_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

$$d^n(Q, B_2) = inf\left\{sup\left\{\|f\|_2 : f \in Q \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset B_2\right\},$$

$$\Pi_n(Q, B_2) = inf\left\{inf\left\{sup\left\{\|f-\mathscr{L}^{\perp}f\|_2 : f \in Q\right\} : \mathscr{L}^{\perp}B_2 \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset L_2\right\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* множества Q в пространстве B_2. Перечисленные n-поперечники монотонны по n и между ними в гильбертовом пространстве B_2 выполняются соотношения [23, 34]:

$$b_n(Q, B_2) \le d^n(Q, B_2) \le d_n(Q, B_2) = \delta_n(Q, B_2) = \Pi_n(Q, B_2). \qquad (1.4.4)$$

Сначала в качестве Q рассмотрим класс $W_2^{(m)}$ функций $f \in B_2^{(m)}$, для которых $\|f^{(m)}\|_{B_2} \le 1$. Имеет место следующее утверждение

Теорема 1.4.1. *Для любых $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\left(W_2^{(m)}, B_2\right) = E_{n-1}\left(W_2^{(m)}\right)_2 =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}}, \qquad (1.4.5)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$.

Доказательство. Оценку сверху всех рассматриваемых n-поперечников класса $W_2^{(m)}$ получаем из равенство (1.4.1) в силу которого имеем:

$$\lambda_n\left(W_2^{(m)}, B_2\right) \le E_{n-1}\left(W_2^{(m)}\right)_2 \le \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \qquad (1.4.6)$$

Для получения оценки снизу всех вышеперечисленных n-поперечников, равных правой части равенства (1.4.5), в $(n+1)$-мерном подпространстве комплексных алгебраических полиномов степени $\le n$ вида

$$\mathcal{P}_n := \left\{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\right\} \qquad (1.4.7)$$

введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \left\{p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_2 \le \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}\right\},$$

$n > m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$, и покажем, что шар $S_{n+1} \subset W_2^{(m)}$. В самом деле, для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}$ в силу определения класса $W_2^{(m)}$ имеем:

$$\|p_n^{(m)}\|_2 = \sum_{k=m}^{n} \alpha_{k,m}^2 |a_k|^2 \cdot \frac{1}{k-m+1} = \sum_{k=m}^{n} \alpha_{k,m}^2 \cdot \frac{k+1}{k-m+1} \cdot \frac{|a_k|^2}{k+1} \le$$

$$\le \alpha_{n,m}^2 \cdot \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \sum_{k=m}^{n} \frac{|a_k|^2}{k+1} \le \alpha_{n,m}^2 \cdot \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \|p_n\|_2^2 \le$$

$$\le \alpha_{n,m}^2 \cdot \frac{n+1}{n-m+1} \cdot \frac{n-m+1}{n+1} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}^2} = 1,$$

откуда и следует включение $S_{n+1} \subset W_2^{(m)}$. Но тогда согласно определению бернштейновского n-поперечника и соотношения (1.4.4) между n-поперечниками запишем оценку снизу

$$\lambda_n(W_2^{(m)}, B_2) \ge b_n(W_2^{(m)}, B_2) \ge b_n(S_{n+1}, B_2) \ge$$

$$\ge \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-m+1)} \cdot \sqrt{\frac{n-m+1}{n+1}}. \qquad (1.4.8)$$

Требуемое равенство (1.4.5) получаем из сопоставления оценки сверху (1.4.6) и оценки снизу (1.4.8). Теорема 1.4.1 доказана.

Теорема 1.4.2. *Для любых $n, r \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, \pi/n]$ имеют место равенства*

$$\lambda_n(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h), B_2) = E_{n-1}(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \frac{1}{n^m} \cdot \left\{ \int_0^h (1-\cos nt)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}, \qquad (1.4.9)$$

где λ_n – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Теорема 1.4.3. *При любых $n, r \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+, n > m$ и $h \in (0, \pi/(n-m)]$ имеют место равенства*

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r, h), B_2) = E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} =$$

$$= \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \left\{ \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}. \qquad (1.4.10)$$

Приводим доказательство теоремы 1.4.3, поскольку теорема 1.4.2 доказывается аналогичным образом.

Доказательство теоремы 1.4.3 Пользуясь соотношениями (1.4.4) и равенством (1.4.3), запишем оценку сверху n-поперечников:

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r, h), B_2) \leq E_{n-1}(W_2^{(m)}(\omega_r, h))_{B_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{r/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \cdot \left\{ \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}. \tag{1.4.11}$$

Для получения оценки снизу всех вышеперечисленных n-поперечников, равной выражению в правой части неравенств (1.4.11) в $(n+1)$-мерном подпространстве комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n$ вида (1.4.7), введём в рассмотрение шар

$$\sigma_{n+1} := \{p_n(z) \in P_n : \|p_n\|_{B_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{r/2} \cdot \alpha_{n,m}} \cdot \{ \int_0^h (1-\cos(n-m)t)^r \sin\frac{\pi}{h} t dt\}^{-1/2}\},$$

где $n > m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$, и докажем включение $\sigma_{n+1} \subset W_2^{(m)}(\omega_r, h)$. Для этого мы должны доказать, что для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ выполняется неравенство

$$\int_0^h \omega_r^2(p_n^{(m)}; t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h} t dt \leq 1.$$

С этой целью из равенства (1.4.10) получаем

$$\omega_r^2(p_n^{(m)}; t)_{B_2} = 2^r \sup_{|h|\leq t} \sum_{k=m}^{n} \frac{\alpha_{k,m}^2}{k+1} |c_k(f)|^2 \cdot \big(1-\cos(k-m)t\big)^r \leq$$

$$\leq 2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \cdot \sum_{k=m}^{n} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \leq$$

$$\leq 2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= 2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \cdot \|p_n\|_{B_2}^2.$$

Итак, мы доказали, что для произвольной $p_n \in \sigma_{n+1}$ имеет место неравенство

$$\omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2} \leq 2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \cdot \|p_n\|_{B_2}^2.$$

Умножив обе части полученного неравенства на функцию $\sin\dfrac{\pi}{h}t$ и интегрируя по отрезку $[0,h]$, получаем

$$\int_0^h \omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}tdt \leq$$

$$\leq 2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \int_0^h \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt \cdot \|p_n\|_{B_2}^2. \tag{1.4.12}$$

Так как полином $p_n \in \sigma_{n+1}$, то для её нормы получаем

$$\|p_n\|_{B_2}^2 \leq \frac{1}{2^r \cdot \alpha_{n,m}^2} \cdot \left\{\int_0^h \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{-1}. \tag{1.4.13}$$

Учитывая неравенство (1.4.13), из (1.4.12) имеем

$$\int_0^h \omega_r^2(p_n^{(m)};t)_{B_2} \sin\frac{\pi}{h}tdt \leq$$

$$\leq 2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \int_0^h \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt \times$$

$$\times \left\{2^r \cdot \alpha_{n,m}^2 \cdot \int_0^h \big(1-\cos(n-m)t\big)^r \sin\frac{\pi}{h}tdt\right\}^{-1} = 1.$$

Последнее неравенство означает, что шар σ_{n+1} принадлежит классу $W_2^{(m)}(\Omega_r, h)$, а потому пользуясь, определением n-поперечника Бернштейна, запишем оценку снизу

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r, h), B_2) \geq b_n(W_2^{(m)}(\omega_r, h), B_2) \geq$$

$$\geq b_n(\delta_{n+1}, B_2) \geq \frac{1}{2^{r/2} \cdot \alpha_{n,m}} \cdot \left\{ \int_0^h (1 - \cos(n-m)t)^r \sin \frac{\pi}{h} t dt \right\}^{-1/2}. \quad (1.4.14)$$

Из сравнения неравенств (1.4.11) и (1.4.14) вытекает требуемое равенство (1.4.10), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.3.

Из теоремы 1.4.2 вытекает

Следствие 1.4.1 *В условиях теоремы 1.4.3 при любых* $n, m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_{2,a}^{(m)}(\omega_r, \pi/n), B_2) = \frac{\sqrt{r+1}}{2^{r+1/2}} \cdot \frac{1}{n^{m-1/2}},$$

где $\lambda_n(\cdot)$ *– любое из* n*-поперечников* $b_n(\cdot), d_n(\cdot), d^n(\cdot), \delta_n(\cdot)$ *и* $\Pi_n(\cdot)$.

Аналогично, из теоремы 1.4.3 вытекает

Следствие 1.4.2 *При выполнении условий теоремы 1.4.3, в частности когда* $h = \pi/(n-m), n > m, n, m \in \mathbb{N},$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_2^{(m)}(\omega_r, \pi/(n-m)), B_2) = \frac{\sqrt{n-m}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{\sqrt{r+1}}{2^{r+1/2}}.$$

ГЛАВА II

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ТЕОРЕМАХ АППРОКСИМАЦИИ В $B_2 := B_2(U)$

§2.1. Основные определения и обозначения

Напомним, что понятие наилучшего приближения принадлежит П.Л.Чебышеву [41], понятие первого модуля непрерывности ввел А.Лебег [21] в 1910 г, а понятие r-го модуля непрерывности — С.Н.Бернштейн [5].

В теории приближения функций принято выделять аппроксимативные свойства функции, определяемые скоростью её приближения, и структурные гладкостные свойства функции, отражающие её внутренние свойства. Под прямыми теоремами понимают неравенства, в которых аппроксимативные свойства функции оцениваются через её структурные свойства. В нашем случае аппроксимативные свойства функции будут характеризоваться величиною наилучшего приближения или скоростью приближения линейным методом, а структурные свойства функции — её модулями непрерывности произвольного порядка.

Первая прямая теорема была доказана в 1911 г. Д.Джексоном [14]:

Теорема Джексона. *Для произвольной функции $f \in C[0, 2\pi]$ выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f)_C := \inf\{\|f - T_{n-1}\|_C : T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\} \le K \cdot \omega(f, \frac{\pi}{n})_C, \qquad (2.1.1)$$

где K – абсолютная константа, T_{n-1} – тригонометрический полином степени $\le n-1$, а $\Im_{2n-1} := \{T_{n-1}\}$ – подпространства полиномов T_{n-1}.

Неравенства подобного типа с первым модулем непрерывности принято называть *неравенствами Джексона.*

В 1937 г. немецкий математик Е.Кваде [18] распространил неравенства Джексона (2.1.1) на пространстве $L_p[0,2\pi], \ \ 1 \le p < \infty$.

Теорема Кваде. *Для любой функции* $f \in L_p[0,2\pi], \ \ 1 \le p < \infty$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p := \inf\{\|f - T_{n-1}\|_p : T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\} \le K \cdot \omega(f, \frac{\pi}{n})_p, \qquad (2.1.2)$$

где K *– абсолютная константа.*

Для доказательства (2.1.1) Кваде использовал линейный метод приближения, известный как метод Джексона:

$$\mathcal{J}_{m,2}(f,x) = (f * \mathcal{J}_{m,2})(x) \in \Im_{2n-1},$$

где

$$\mathcal{J}_{m,2}(t) = c_m \cdot \left(\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right)^4, \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{J}_{m,2}(t)dt = 1, \quad m = \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

- ядро Джексона.

Для любой $f \in L_p[0,2\pi], \ \ 1 \le p < \infty$, справедлива оценка

$$\|f(x) - \mathcal{J}_{m,2}(f,x)\|_p \le C \cdot \omega(f, \frac{\pi}{n})_p, \quad C = const,$$

из которой вытекают неравенства (2.1.1) и (2.1.2).

В 1945 г. А.Зигмунд [15] установил, что если

$$\omega_2(f,\delta)_C = \sup_{|h|\le t} \|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\|_C = O(\delta),$$

то и наилучшее приближение $f \in C, \quad E_{n-1}(f)_C = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

В общем случае прямую теорему со вторым модулем непрерывности опубликовал в 1947 г. Н.И.Ахиезер в своей известной монографии "Лекции по теории аппроксимации."

Теорема Н.И.Ахиезера. *Для любой функции $f \in L_p[0, 2\pi], 1 \leq p < \infty$, выполняется неравенство*

$$E_{n-1}(f)_p \leq C \cdot \omega_2(f, \frac{\pi}{n})_p, \quad C = const. \tag{2.1.3}$$

Отметим, что неравенство (2.1.3) также доказывается с помощью метода Джексона.

В 1947 г. С.Н.Бернштейн [6] доказал, что если $\omega_r(f, \delta)_C = O(\delta^\alpha)$, где $0 < \alpha \leq r$, то $E_{n-1}(f)_C = O(1/n^\alpha)$.

Таким образом, возникла твёрдая уверенность, что неравенство (2.1.3) может быть верно для модулей непрерывности высших порядков. Основная трудность при установлении этого факта состояла в том, что метод Джексона, будучи линейным положительным методом, не может приближать какой бы не была хорошей функция (даже непрерывно дифференцируемой) со скоростью большей, чем $O(1/n^2)$, в то время как модуль непрерывности $\omega_r(f, \pi/n)_p$ может стремиться к нулю с большой скоростью. В дальнейшем Р.М.Тригуб [35] полностью охарактеризовал аппроксимативные возможности метода Джексона следующим асимптотическим равенством:

$$\|f(x) - \mathcal{J}_{m,2}(f, x)\|_p \asymp \omega_2(f, \frac{\pi}{n})_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Это равенство означает, что метод Джексона при доказательстве неравенства типа (2.1.3) для модулей непрерывности r-го порядка при $r \geq 2$ непригоден.

Эту трудность смог преодолеть С.Б.Стечкин [26]. Ему удалось построить необходимый метод приближения. Хотя Стечкин доказывает неравенство (2.1.3) при любом r в пространстве непрерывных функций, его рассуждения верны для пространства $L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, поэтому сформулируем его утверждение с наибольшей полнотой.

Теорема Стечкина. *Для любой* $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 \leq p < \infty, r \geq 3$ *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_p \leq C_r \cdot \omega_r(f, \frac{\pi}{n})_p, \quad C_r := C(r) = const. \tag{2.1.4}$$

Неравенство вида (2.1.4) с произвольным модулем непрерывности произвольного порядка называют неравенством Джексона–Стечкина. Отметим, что неравенство Джексона–Стечкина (2.1.4) для $0 < p < 1$ в семидесятых годах независимо было доказано В.И.Ивановым [16] и Э.А.Стороженко, В.Г.Кротовым и П.Освальдом [29].

Согласно известной теореме Бернштейна, $E_n(f)_p$ – левая часть неравенства (2.1.4) может быть любой монотонно убывающей к нулю последовательностью. В то время как последовательность $\omega_r(f, \frac{\pi}{n})_p$ в правой части (2.1.4) имеет более регулярное поведение и не может стремиться к нулю для нетривиальной функции быстрее, чем $O(n^{-r})$. Возникает гипотеза, что (2.1.4) можно усилить, поставив в левую часть этого неравенства некоторое среднее из наилучших приближений. В 1966 г. М.Ф.Тиман [33] доказал неравенство

$$\frac{1}{n^r}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma r-1} E_{\nu-1}^{\gamma}(f)_p\right\}^{1/\gamma} \leq C_{p,r} \cdot \omega_r(f, \frac{\pi}{n})_p, \quad \gamma = \max\{2, p\}.$$

Одной из важнейших задач теории приближения является задача нахождения точной константы в неравенстве Джексона–Стечкина (2.1.4).

При решении задач теории приближения в $L_p[0,2\pi]$ вопросы вычисления точных констант

$$\mathcal{K}(t) := \mathcal{K}_{n,m,r,p}(t) := \sup_{f\in L_p^{(m)}} \frac{n^m \cdot E_{n-1}(f)_p}{\omega_r(f^{(m)}, t/n)_p}, \ \ 1 \le p \le \infty$$

в неравенствах Джексона–Стечкина (2.1.4) исследовались С.Б.Стечкиным [28], Н.П.Корнейчуком [20], В.А.Юдиным [47], А.А.Лигуном [22], В.И.Ивановым и О.И.Смирновым [17], Л.В.Тайковым [30], А.Г.Бабенко [1], С.Б.Вакарчуком [9], М.Ш.Шабозовым [43] и другими.

Так например, Н.П.Корнейчук [20] доказал, что

$$\mathcal{K}_\infty(\pi) = \mathcal{K}_{n,0,1,\infty}(\pi) = \sup_{f\in C} \frac{E_{n-1}(f)_C}{\omega(f,\pi/n)_C} = 1,$$

а Н.И.Черных [42] доказал, что

$$\mathcal{K}_2(\pi) = \mathcal{K}_{n,0,1,2}(\pi) = \sup_{f\in L_2} \frac{E_n(f)_2}{\omega(f,\pi/n)_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Наравне с прямыми теоремами в теории приближений весьма важными являются обратные теоремы. В обратных теоремах структурные свойства периодических функций характеризуются с помощью их аппроксимативных свойств. Первые результаты здесь принадлежат Бернштейну [5] и Валле-Пуссену [11]. В 1912 г. Бернштейн доказывает, в частности, утверждение: если $E_{n-1}(f)_C = O(n^{-\alpha}),\ \ 0 < \alpha < 1$, то $\omega(f,\delta)_C = O(\delta^\alpha)$. Основным техническим аппаратом для доказательства обратных теорем стало неравенство Бернштейна [5] для производной тригонометрического полинома

$$\|T_n'\|_c \le n\|T_n\|, \ \ T_n \in \Im_{2n-1}.$$

Первая общая обратная теорема была доказана Р.Салемом [25] в 1935 г.

Теорема Салема. *Если* $f \in C[0,2\pi]$, *то*

$$\omega(f,\frac{\pi}{n})_C \le \frac{K}{n}\cdot\sum_{\nu=1}^{n} E_{\nu-1}(f)_C,$$

K *– абсалютная константа.*

Отметим, что теорема Салема является обратным утверждением к неравенству Джексона (2.1.1).

В 1951 г. С.Б.Стечкин [26] опубликовал доказательство обратного неравенство для модуля непрерывности r-го порядка в пространстве $C[0,2\pi]$, причём его метод доказательства годился и для пространства $L_p[0,2\pi]$ при всех $1 \le p \le \infty$. Сформулируем его утверждение в общем виде.

Обратная теорема Стечкина. *Если* $f \in L_p[0,2\pi], 1 \le p \le \infty, r \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_r(f,\frac{\pi}{n})_p \le \frac{C_r}{n^r}\cdot\sum_{\text{ß}=1}^{n} \nu^{r-1}E_\nu(f)_p, \quad C_r := C(r) = const. \tag{2.1.5}$$

Заметим, что при $1 < p < \infty$ неравенство (2.1.5) можно усилить. В 1958 г. М.Ф.Тиман [32] доказал следующее утверждение

Теорема М.Ф.Тимана. *Если* $f \in L_p[0,2\pi], \quad 1 < p < \infty$,

$\gamma = \min\{2,p\}, \quad r \in \mathbb{N}$, *то*

$$\omega_r(f,\frac{\pi}{n})_p \le \frac{C_{p,r}}{n^r}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\gamma r-1}E_\nu^\gamma(f)_p\right)^{1/\gamma}. \tag{2.1.6}$$

Наконец в 1953 г. С.Б.Стечкин [27] в $L_p[0,2\pi]$ доказал более точное и простое обратное неравенство для модуля непрерывности первого порядка

$$\omega(f,\frac{\pi}{n})_2 \le \frac{C}{n}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu^2(f)_2\right)^{1/2},$$

и при $r \geq 2$ для модулей непрерывности r-го порядка доказал асимптотическое неравенство

$$\omega_r(f, \frac{\pi}{n})_2 \asymp \frac{1}{n^r} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{2r-1} E_\nu^2(f)_2 \right)^{1/2}. \qquad (2.1.7)$$

В связи с последним равенством С.Б.Стечкин поставил задачу: определить точную константу C и экстремальную функцию $f_0 \in L_2[0, 2\pi]$, для которых неравенства (2.1.6) и (2.1.7) обращаются в равенства.

Некоторые точные результаты для функций $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi](r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} \equiv L_2)$ получены в работе М.Г.Есмаганбетова и М.Ж.Шакеновой [13].

В следующем параграфе поставленную задачу Стечкина решим для некоторых классов функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2.

§2.2. Точные константы в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана $B_2 := B_2(U)$

Напомним, что всюду далее будем рассматривать пространство $B_2 := B_2(U)$ функций f аналитических в единичном круге $U := \{z \in C : |z| < 1\}$ таких, для которых норма

$$\|f\|_2 := \|f\|_{\mathcal{B}_2} = \left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma\right)^{1/2} < \infty, \qquad (2.2.1)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ - элемент площади. Как обычно, норму (2.2.1) в первой главе при решении конкретных задач аппроксимации функций $f \in B_2$, мы использовали в следующей форме

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt\right)^{1/2} < \infty. \qquad (2.2.2)$$

В первом параграфе первой главы мы доказали, что если $\mathcal{P}_n$-подпространства комплексных алгебраических полиномов степени не более $n-1$, то среди всех полиномов $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ наилучшее квадратичное приближение функции $f \in B_2$ в области U доставляет частичная сумма $(n-1)$-го порядка

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

разложения функции $f(z)$ в степенной ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k.$$

При этом, как доказано в (1.1.8), для величины наилучшего среднеквадратического приближения произвольной функции $f \in B_2$ имеем:

$$E_{n-1}(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_{B_2} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} =$$

$$= \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \tag{2.2.3}$$

и если функция $f \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}$, то как мы доказали (см. соотношение (1.1.18)), что при всех $0 \le s \le m$ имеют место равенства

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 = \|f^{(s)} - T_{n-s-1}(f^{(s)})\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2},$$

$$E_{n-1}(f_a^{(s)})_2 = \|f_a^{(s)} - T_{n-1}(f_a^{(s)})\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}.$$

В первом параграфе первой главы для произвольной функции $f \in B_2$ равенством

$$\omega_r(f;t)_2 := \sup \left\{ \|\Delta_h^r f(\cdot)\|_{B_2} : |h| \le t \right\}, \tag{2.2.4}$$

где

$$\left\| \Delta_h^r f(\rho e^{it}) \right\|_{B_2} := \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k f\left(\rho e^{i(t+kh)}\right) \right|^2 \rho d\rho dt \right\}^{1/2},$$

определим модуль непрерывности r-го порядка функции $f \in B_2$. Применяя равенство Парсеваля из равенства (2.2.4), из последнего равенства получаем

$$\left\| \Delta_h^r f(\cdot) \right\|_{B_2}^2 = 2^r \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos kh)^r, \tag{2.2.5}$$

в силу которого запишем явный вид модуля непрерывности r-го порядка

$$\omega_r^2(f;t)_{B_2} := 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos kh)^r. \tag{2.2.6}$$

Так как для функции $f \in B_{2,a}^{(m)}$ имеет место разложение

$$f_a^{(m)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^m c_k(f) z^k, \tag{2.2.7}$$

а для функции $f \in B_2^{(m)}$ имеет место разложение

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m} c_k(f) z^{k-m}, \tag{2.2.8}$$

то из (2.2.7) и (2.2.8), учитывая (2.2.6), получаем

$$\omega_r(f_a^{(m)}; t)_{B_2} := 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(f_a^{(m)})|^2}{k+1} \cdot (1-\cos kh)^r =$$

$$= 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(ik)^r c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1-\cos kh)^r =$$

$$= 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2r}}{k+1} \cdot |c_k(f)|^2 \cdot (1-\cos kh)^r. \tag{2.2.9}$$

Аналогично для любой $f \in B_2^{(m)}$ имеем

$$\omega_r(f^{(m)}; t)_{B_2} = 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k,m}^2}{k+1} \cdot |c_k(f)|^2 \cdot (1-\cos(k-m)h)^r. \tag{2.2.10}$$

Полученные формулы (2.2.9) и (2.2.10) являются основными нашими инструментами при доказательстве теорем в этой главе.

Во всём дальнейшем в качестве экстремальной функции выступает функция

$$f_0(z) = z^n \in B_{2,a}^{(m)} \cap B_2^{(m)}, z \in \mathbb{C}, n, m \in \mathbb{N},$$

для которой в силу равенств (2.2.9) и (2.2.10) запишем

$$\omega_r^2(f_{0,a}^{(m)}; t)_{B_2} = 2^r \cdot \frac{n^{2r}}{n+1} \cdot (1-\cos nh)^r, \tag{2.2.11}$$

$$\omega_r^2(f_0^{(m)}; t)_{B_2} = 2^r \cdot \frac{\alpha_{n,r}^2}{n+1} \cdot (1-\cos(n-m)h)^r. \tag{2.2.12}$$

Нам понадобится следующая основная

Лемма 2.2.1. *Для произвольной функции $f \in B_2$ и любых $r, n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n} k^{2r} \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot E_k^2(f)_{B_2}. \tag{2.2.13}$$

Доказательство. Применяя к первой сумме в левой части равенства (2.2.13) преобразование Абеля [38], получаем

$$\frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n} k^{2r} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n^{2r}} \cdot \left\{ n^{2r} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{|c_l(f)|^2}{l+1} \right\} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} - \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot \sum_{l=0}^{k} \frac{|c_l(f)|^2}{l+1} =$$

$$= \|f\|_{B_2}^2 - \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot \left(\|f\|_{B_2}^2 - \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{|c_l(f)|^2}{l+1} \right) =$$

$$= \|f\|_{B_2}^2 \left(1 - \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \right) +$$

$$+ \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{|c_l(f)|^2}{l+1} =$$

$$= \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot E_k^2(f)_{B_2},$$

откуда и следует утверждение леммы 2.2.1.

Теорема 2.2.1. *Для произвольной функции $f \in B_2$, при любых $r, n \in \mathbb{N}$ справедливо точное неравенство*

$$\omega_r^2\left(f; \frac{2}{n}\right)_{B_2} \le \frac{2^{2r}}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot E_k^2(f)_{B_2}. \qquad (2.2.14)$$

Существует функция $f_0 \in B_2$, для которой неравенство (2.2.14) *обращается в равенство.*

Доказательство. Действительно, в силу равенства (2.2.5) запишем

$$\left\|\Delta_h^r f(\cdot)\right\|_{B_2}^2 = 2^{2r} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos kh)^r =$$

$$= 2^{2r} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left(\sin \frac{kh}{2}\right)^{2r}.$$

Так как $0 < nh \le \pi$, то разбивая последнюю сумму от $k = 0$ до $k = n$ и $k = n+1$ до $k = \infty$, имеем

$$\left\|\Delta_h^r f(\cdot)\right\|_{B_2}^2 = 2^{2r} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left(\sin \frac{kh}{2}\right)^{2r} +$$

$$+2^{2r} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left(\sin \frac{kh}{2}\right)^{2r}. \qquad (2.2.15)$$

Так как для $0 \le k \le n$, $\sin \frac{kh}{2} \le \frac{kh}{2}$, а при $n+1 \le k < +\infty$ $\left|\sin \frac{kh}{2}\right| \le 1$, то из (2.2.15) получаем неравенство

$$\left\|\Delta_h^r f(\cdot)\right\|_{B_2}^2 = 2^{2r} \cdot \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \left(\frac{kh}{2}\right)^{2r} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\} \le$$

$$\le 2^{2r} \cdot \left\{\left(\frac{h}{2}\right)^{2r} \cdot \sum_{k=0}^{n} k^{2r} \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\},$$

то отсюда при $h = 2/n$ с учётом равенства (2.2.13) получаем

$$\omega_r^2\left(f; \frac{2}{n}\right)_{B_2} = \sup\left\{\left\|\Delta_h^r f(\cdot)\right\|_{B_2}^2 : 0 < h \leq 2/n\right\} \leq$$

$$\leq 2^{2r} \cdot \left\{\frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n} k^{2r} \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}\right\} =$$

$$= \frac{2^{2r}}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot E_k^2(f)_{B_2},$$

и таким образом неравенство (2.2.14) доказано.

Для функции $f_1(z) = z^{2n} \in B_2$, неравенство (2.2.14) обращается в равенство. В самом деле, для этой функции при всех $k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$ имеем

$$E_k^2(f_1)_{B_2} = \frac{1}{2n+1},$$

$$\omega_r^2\left(f_1; \frac{2}{n}\right) = \frac{2^{2r}}{2n+1} \cdot \sup_{0<h\leq 2/n} (1 - \cos 2nh)^r =$$

$$= \frac{2^{2r}}{2n+1} \cdot \sup_{0<h\leq 2/n} (\sin nh)^{2r} = \frac{2^{2r}}{2n+1} \cdot \left(\sin n \cdot \frac{\pi}{2n}\right)^{2r} = \frac{2^{2r}}{2n+1},$$

а потому имеем

$$\frac{2^{2r}}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] \cdot E_k^2(f_1)_{B_2} =$$

$$= \frac{2^{2r}}{2n+1} \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left[(k+1)^{2r} - k^{2r}\right] =$$

$$= \frac{2^{2r}}{2n+1} \cdot \frac{1}{n^{2r}} \cdot n^{2r} = \frac{2^{2r}}{2n+1} = \omega_r^2(f_0; \frac{2}{n})_{B_2},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

Отметим, что в случае $r = 1$ модуль непрерывности первого порядка функции $f \in B_2$ имеет вид:

$$\omega(f;t)_{B_2} := \omega_1(f;t)_{B_2} = 2 \cdot \sup_{|h|\le t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot (1 - \cos kh). \qquad (2.2.16)$$

Для модуля непрерывности первого порядка (2.2.16) имеет место следующее утверждение

Теорема 2.2.2. *Для любой функции $f \in B_2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2}. \qquad (2.2.17)$$

Доказательство. Неравенство (2.2.17) вытекает из неравенства (1.3.10) при $h = \pi/n, m = 0, r = 1$ и является обобщением теоремы Н.И.Черных [42] для модулей непрерывности первого порядка функций $f \in B_2$. Для функций $f_0 = z^n \in B_2$ неравенство (2.2.17) обращается в равенство.

Действительно, так как

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \;\; \omega^2(f_0,t) = \frac{2}{n+1} \cdot (1 - \cos nt),$$

то мы запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega^2(f_0,t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n+1} \int_0^{\pi/n} (1 - \cos nt) \sin ntdt \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n+1} \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = E_{n-1}(f_0)_{B_2},$$

и теорема 2.2.2 полностью доказана.

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.2 для произвольной функции* $f \in B_2, f \neq const$ *имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \omega \left(f; \frac{\pi}{n} \right)_{B_2}, \tag{2.2.18}$$

константа $1/\sqrt{2}$ *при каждом* n *уменьшена быть не может.*

Доказательство. Неравенство (2.2.18) вытекает из (2.2.17). В самом деле, в силу того, что модуль непрерывности $\omega(f,t)_{B_2}$ монотонно возрастает на отрезке $[0, \pi/n]$, то $\omega(f,t)_{B_2} \leq \omega(f, \frac{\pi}{n})_{B_2}$, а потому из неравенства (2.2.17) получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega^2(f,t)_{B_2} \sin ntdt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \frac{n}{2} \cdot \omega^2(f, \frac{\pi}{n})_{B_2} \cdot \int_0^{\pi/n} \sin ntdt \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{n}{2} \cdot \omega^2(f, \frac{\pi}{n})_{B_2} \cdot \frac{2}{n} \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \omega(f, \frac{\pi}{n})_{B_2}$$

и неравенство (2.2.18) доказано. Неулучшаемость константы $\frac{1}{\sqrt{2}}$ вытекает из схемы доказательства аналогичного факта в работе С.Б.Вакарчука [8] для пространства Харди H_2.

Теорема 2.2.3. *Для любой функции $f \in B_2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы точные оценки*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \le \frac{1}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}, \tag{2.2.19}$$

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \le \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}. \tag{2.2.20}$$

Знак равенства в (2.2.19) *реализует функция* $f_0(z) = z^n \in B_2$. *Константа* $\sqrt{2}$ *в* (2.2.20) *уменьшена быть не может.*

Доказательство. Неравенство (2.2.19) является следствием основной леммы (равенство (2.2.13)). В самом деле, из правой части (2.2.13) при $r = 1$ в силу монотонного убывания величины $E_{n-1}(f)_{B_2}$ по n:

$$E_0(f)_{B_2} \ge E_1(f)_{B_2} \ge ... \ge E_{n-1}(f)_{B_2} \ge E_n(f)_{B_2} \ge ...,$$

в силу которого получаем:

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2 \right] \cdot E_k^2(f)_{B_2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \ge$$

$$\ge E_{n-1}^2(f)_{B_2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = E_{n-1}^2(f)_{B_2}$$

и этим неравенство (2.2.19) доказано.

Так как для функции $f_0(z) = z^n \in B_2$, при всех $k = 1, 2, \cdots, n$ $E_{k-1}(f_0)_{B_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, то мы имеем

$$\frac{1}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f_0)_{B_2} \right\}^{1/2} = \frac{1}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot \frac{1}{n+1} \right\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{n} \cdot \{n^2\}^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} = E_{n-1}(f_0)_{B_2},$$

откуда и следует точность (2.2.19).

Заметим, что неравенство (2.2.20) является следствием неравенства (2.2.19), так как

$$E_{n-1}^2(f)_{B_2} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} = \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}. \tag{2.2.21}$$

Из (2.2.21) сразу следует (2.2.20)

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}.$$

Покажем теперь, что константу $\sqrt{2}$ в (2.2.20) уменьшить нельзя, то есть покажем, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2} \frac{n \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}} = \sqrt{2}. \tag{2.2.22}$$

В самом деле, с одной стороны, неравенство

$$\sup_{f \in B_2} \frac{n \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}} \leq \sqrt{2}, \tag{2.2.23}$$

сразу вытекает из (2.2.20). Докажем противоположное неравенство. Для этого заметим, что для введенной нами функции $f_0(z) = z^n \in B_2$, $n \in \mathbb{N}$ в предыдущих теоремах

$$E_{k-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad (k = \overline{1,n}),$$

а потому запишем:

$$E_{n-1}(f_0)_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \left\{ \frac{2}{n(n+1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f_0)_{B_2} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f_0)_{B_2} \right\}^{1/2} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f_0)_2 \right\}^{1/2} \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f_0)_2 \right\}^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{n \cdot E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f_0)_{B_2} \right\}^{1/2}} \geq \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} \right),$$

Следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in B_2} \frac{n \cdot E_{n-1}(f)_{B_2}}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cdot E_{n-1}(f_0)_{B_2}}{\left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f_0)_{B_2} \right\}^{1/2}} \geq$$

$$\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} \right) = \sqrt{2}. \qquad (2.2.24)$$

Требуемое равенство (2.2.22) получаем из сопоставления оценки сверху (2.2.23) и оценки снизу (2.2.24), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.3.

§2.3. Точные теоремы для скорости сходимости сумм Фейера

Пусть функция $f \in B_2(U)$ имеет разложение в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \tag{2.3.1}$$

и пусть

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k \ - \tag{2.3.2}$$

частичная сумма $(n-1)$-го порядка функции $f \in B_2$.

Сумму вида

$$\sigma_{n-1}(f, z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T_k(f, z) \tag{2.3.3}$$

называют суммой Фейера $(n-1)$-го порядка ряда (2.3.1). Представим разности $f(z) - \sigma_{n-1}(f, z)$ в следующем виде

$$f(z) - \sigma_{n-1}(f, z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(z) - T_k(f, z)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot c_k z^k + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k. \tag{2.3.4}$$

Из равенства (2.3.4), пользуясь определением нормы в пространстве B_2 и утверждением леммы 2.2.1, при $r = 1$ будем иметь

$$\left\| f(z) - \sigma_{n-1}(f, z) \right\|_{B_2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) - \sigma_{n-1}(f, \rho e^{it}) \right|^2 \rho d\rho dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot c_k(f) (\rho e^{it})^k - \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f) (\rho e^{it})^k \right|^2 \rho d\rho dt =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}. \tag{2.3.5}$$

Если $f \neq const$, то, как показали выше при доказательстве теоремы 2.2.3, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} < \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}. \tag{2.3.6}$$

Учитывая неравенства (2.2.19), (2.3.6) и равенство (2.3.5), нами доказано следующее утверждение

Теорема 2.3.1. *Для любой функции $f \in B_2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место точные двусторонние оценки*

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \left\| f - \sigma_{n-1}(f) \right\|_{B_2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{n} k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}. \tag{2.3.7}$$

Константы 1 и $\sqrt{2}$, соответственно в левой и правой частях неравенства (2.3.7)*, не могут быть уменьшены.*

Отметим, что теорема 2.3.1 является обобщением и уточнением одной теоремы П.Л.Ульянова [36].

Имеет место также следующая

Теорема 2.3.2. *Для произвольной функции $f \in B_2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ имеют место точные оценки*

$$E_{2n}(f)_{B_2} \leq \left\| f - \sigma_{2n-1,n-1}(f) \right\|_{B_2} \leq E_n(f)_{B_2}, \tag{2.3.8}$$

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} - 2 \cdot E_n^2(f)_{B_2} \leq \left\| f - \sigma_{2n-1,n-1}(f) \right\|_{B_2}^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} - 2 \cdot E_{2n}^2(f)_{B_2}. \tag{2.3.9}$$

Знак равенства в (2.3.8) *и* (2.3.9) *достигается, в частности, для функции* $f_0 = z^{2n+1} \in B_2$.

Доказательство. Выполнив элементарные преобразования и учитывая, что

$$E_{n-1}(f)_{B_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

получаем:

$$\left\| f - \sigma_{2n-1,n-1}(f) \right\|_{B_2}^2 = \left\| \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=n}^{2n-1} (f - T_k(f)) \right\|_{B_2}^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{k-n}{n} \right)^2 \cdot |c_k(f)|^2 + \sum_{k=2n+1}^{\infty} |c_k(f)|^2. \qquad (2.3.10)$$

Из равенства (2.3.10), замечая, что при всех $n+1 \le k \le 2n$, $\left(\frac{k-n}{n} \right)^2 \le 1$, сразу получаем:

$$\left\| f - \sigma_{2n-1,n-1}(f) \right\|_{B_2}^2 \le \sum_{k=n+1}^{2n} |c_k(f)|^2 + \sum_{k=2n+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 = E_n^2(f). \qquad (2.3.11)$$

С другой стороны, отбрасывая первое слагаемое правой части (2.3.10), будем иметь:

$$\left\| f - \sigma_{2n-1,n-1}(f) \right\|_{B_2}^2 \ge \sum_{k=2n+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 = E_{2n}^2(f)_{B_2}. \qquad (2.3.12)$$

Из равенств (2.3.10) и неравенства (2.3.11) следует (2.3.8). Для установления неравенства (2.3.9) преобразуем правую часть равенства (2.3.10) в следующий вид

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{k-n}{n} \right)^2 \cdot |c_k(f)|^2 + \sum_{k=2n+1}^{\infty} |c_k(f)|^2 =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot |c_k(f)|^2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n} \cdot |c_k(f)|^2 + \sum_{k=n+1}^{2n} |c_k(f)|^2 +$$

$$+\sum_{k=2n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2 = 4\cdot\left[\frac{1}{(2n)^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}k^2\cdot|c_k(f)|^2+\sum_{k=2n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot|c_k(f)|^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2\right]-3\sum_{k=2n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2+\sum_{k=n+1}^{2n}|c_k(f)|^2-2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\cdot|c_k(f)|^2=$$

$$=\frac{4}{(2n)^2}\cdot\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)\cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}-\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2-3\sum_{k=2n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2+\sum_{k=n+1}^{2n}|c_k(f)|^2-2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\cdot|c_k(f)|^2=$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)\cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}+\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2-3\sum_{k=2n+1}^{\infty}|c_k(f)|^2+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{2n}|c_k(f)|^2-2\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\cdot|c_k(f)|^2. \qquad (2.3.13)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{2n}|c_k(f)|^2\le\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{n}\cdot|c_k(f)|^2\le 2\sum_{k=n+1}^{2n}|c_k(f)|^2, \qquad (2.3.14)$$

а потому, оценивая правую часть (2.3.13) с учетом (2.3.14), получаем требуемое неравенство (2.3.9). Для функции $f_0(z)=z^{2n+1}\in B_2$, $E_k(f_0)_2=\dfrac{1}{2(n+1)}$, $k=\overline{1,2n}$, и мы из левой части неравенства (2.3.9) имеем:

$$\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)\cdot E_{k-1}^2(f_0)-2\cdot E_n^2(f_0)=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)\cdot\frac{1}{2(n+1)}-$$

$$-\frac{2}{2(n+1)}=\frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)-\frac{1}{n+1}=$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(4n^2 - n^2\right) - \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)} \cdot \left[\frac{1}{n^2} \cdot 3n^2 - 2\right] = \frac{1}{2(n+1)}. \qquad (2.3.15)$$

Аналогичным образом, для правой части (2.3.9) будем иметь:

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f_0) - 2 \cdot E_n^2(f_0) =$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1) \cdot \frac{1}{2(n+1)} - \frac{2}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}. \qquad (2.3.16)$$

Точность неравенство (2.3.9) следует из сопоставления равенств (2.3.15) и (2.3.16). Теорема 2.3.2 доказана.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены верхние грани отношения величины наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных к величине наилучшего приближения производной старшего порядка;
- установлены точные неравенства типа Джексона–Стечкина между величиной наилучшего совместного приближения промежуточных производных и интегралами, содержащими усреднённые значения модуля непрерывности производной старшего порядка;
- найдены точные значения различных n-поперечников классов функций из пространства B_2;
- найдены точные константы в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Методы и результаты работы можно использовать при решении экстремальных задач в пространствах Шильдса, Дюрена и Смирнова, а также при аппроксимации аналитических функций в бикруге.

Главы диссертации можно использовать при чтении спецкурса для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности „Математика“.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Бабенко, А. Г. О неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами [Текст] / А.Г. Бабенко // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2001. – Т. 7. – №1. – С.30-46.

[2] Бабенко, В. Ф., Корнейчук, Н. П., Кофанов, В. А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения // В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов. — Киев: Наукова думка. – 2003. – 590 с.

[3] Белый, В. И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге [Текст] / В.И. Белый // Укр. матем. журнал. – 1967. – Т. 19. – №2. – С.104-108.

[4] Bergman, S. The cernel function and conformal mapping // S. Bergman – Math. survays, 5 N. Y.: Amer. Math. soc. – 1950. – 163 p.

[5] Бернштейн, С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени [Текст] / С.Н. Бернштейн // Сообщ. Харьк. матем. о-ва. – 1912. – Т.13. – Вып. 2. –С.49-144.

[6] Бернштейн, С. Н. О свойствах однородных функциональных классов [Текст] / С.Н. Бернштейн // ДАН СССР. – 1947. – Т. 57. – №2. – С.111-114.

[7] Вакарчук, С. Б. О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций / Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии / Сб. науч. работ Ин-та математики АН УССР // С.Б. Вакарчук. — Киев: Наукова думка. – 1988. – С.4-7.

[8] Вакарчук, С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 [Текст] / С.Б. Вакарчук // Укр. матем. журнал. – 1989. – Т. 41. – №26. – С.799-802.

[9] Вакарчук, С. Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 [Текст] / С.Б. Вакарчук // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78. – №5. – С.792-796.

[10] Вакарчук, С. Б., Шабозов, М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге [Текст] / С.Б. Вакарчук, М.Ш. Шабозов // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201. – №8. – С.3-22.

[11] Vallée–Poussin, Ch. J. Sur l'approximation des functions d'une variable réelle et de leur dérivées par des polynómes et des suites finies de Fourier [Text] / Ch.J. Vallée–Poussin // Bull. Acad. de Belgique. – 1908. – Tome 3. – P.193-254.

[12] Двейрин, М. З. О приближении функций, аналитических в единичном круге / Математические вопросы теории функций и отображений // М.З. Двейрин. — Киев: Наукова думка. – 1975. – Вып 6. – С.41-54.

[13] Есмаганбетов, М. Г., Шакенова, М. Ж. О точных константах в неравенствах Валле - Пуссена, С.Б.Стечкина, П.Л.Ульянова и М.Ф.Тимана в L_2 [Текст] / М.Г. Есмаганбетов, М.Ж. Шакенова // Сборник "Современные вопросы теории функции и функционального анализа". – Караганда, 1992. – С.58-68.

[14] Jackson, D. Über die Genauigkeit der Annaheruny stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Frades und trigonometrischen

Summen gegebener Ordnung: dissertation // D. Jackson. – Göttingen, 1911.

[15] Zygmund, A. Smooth functions [Text] / A. Zygmund // Duke Math. Journal. – 1945. – Vol. 12. – P.47-76.

[16] Иванов, В. И. Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ [Текст] / В.И. Иванов // Матем. заметки. – 1975. – Т.18. – Вып 5. – С.641-658.

[17] Иванов, В. И., Смирнов, О. И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p [Текст] / В.И. Иванов, О.И. Смирнов // Тула: ТулГУ. – 1995. – С.192.

[18] Quade, E. S. Trigonometric approximation in the mean [Text] / E.S. Quade // Duke Math. Journal. – 1937. – Vol. 3. – P.529-543.

[19] Колмогоров, А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале [Текст] / А.Н. Колмогоров // Ученые записки МГУ. Математика. – 1939. – Т.30. – №3. – С.3-16.

[20] Корнейчук, Н. П. Точная константа в неравенстве Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций [Текст] / Н.П. Корнейчук // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – №3. – С.514-515.

[21] Lebesque, H. Sur la reprèsentation trigonomètrique approchèe des functions satisfaisant à une condition de Lipschitz [Text] / H. Lebesque // Bulletin de la S. M. F. – 1910, – Tome 38. – P.184-210.

[22] Лигун, А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 [Текст] / А.А. Лигун // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – №6. – С.785-792.

[23] Pinkus, A. n-Widths in approximation Theory // A. Pinkus. — Berlin: Springer–Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985. – 252 p.

[24] Саидусайнов, М. С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана для аналитических функций одной переменной [Текст] / М.С. Саидусайнов // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн.н. – 2014. – №4(157). – С.24-31.

[25] Salem, R. Sur certaines fonctions continues et le propriétés de leur séries de Fourier [Text] / R. Salem // Comptes Rendus Acad. Sci. – 1935. – Vol. 201. – P.703-705.

[26] Стечкин, С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций [Текст] / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1951. – Т. 15. – №3. – С.219-242.

[27] Стечкин, С. Б. О теореме Колмогорова–Селиверстова [Текст] / С.Б. Стечкин // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1953. – Т. 17. – №6. – С.499-512.

[28] Стечкин, С. Б. О приближении периодических функций суммами Фейера [Текст] / С.Б. Стечкин // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Т. 62. – С.48-60.

[29] Стороженко, Э. А., Кротов, В. Г., Освальд, П. Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p [Текст] / Э.А. Стороженко,

В.Г. Кротов, П. Освальд // Матем. сборник. – 1975. – Т.98(140). – №3(11). – С.395-415.

[30] Тайков, Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 [Текст] / Л.В. Тайков // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20. – №3. – С.433-438.

[31] Тайков, Л. В., Айнуллоев, Н. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций [Текст] / Л.В. Тайков, Н. Айнуллоев // Матем. заметки. – 1986. – Т.40. – №3. – С.341-351.

[32] Тиман, М. Ф. Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p [Текст] / М.Ф. Тиман // Матем. сборник. – 1958. – Т. 46. – №1. – С.125-132.

[33] Тиман, М. Ф. О теореме Джексона в пространствах L_p [Текст] / М.Ф. Тиман // Укр. матем. журнал. – 1966. – №1. – С.134-137.

[34] Тихомиров, В. М. Некоторые вопросы теории приближений // В.М. Тихомиров. – М.:МГУ. – 1976. – 325 с.

[35] Тригуб, Р. М. Конструктивные характеристики некоторых классов функций [Текст] / Р.М. Тригуб // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1965. – Т. 29. – №3. – С.615-630.

[36] Ульянов, П. Л. О приближении функций [Текст] / П.Л. Ульянов // Сиб. матем. журнал. – 1964. – С.418-437.

[37] Фарков, Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}_n$ [Текст] / Ю.А. Фарков // Успехи матем. наук. – 1990. – Т. 45. – №3. –

С.197-198.

[38] Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Г.М. Фихтенгольц. – М.:Наука. – 1970. – Т. 2. – С.305-306.

[39] Fisher, S. D., Stessin, M. I. The n-widths of the unit ball of H^q [Text] / S.D. Fisher, M.I. Stessin // Journal Approx. Theory. – 1991. – Vol. 67. – №3. – P.347-356.

[40] Холмамадова, Ш. А. Неравенства для производных аналитических функций и наилучшее полиномиальное приближение в пространстве Харди: диссертация кандидата физ.-мат. наук // Ш.А. Холмамадова. – Душанбе, 2015. – 85 с.

[41] Чебышев, П. Л. Теория механизмов, известных под именем параллелограммов // П.Л. Чебышев. – М.:Наука, 1853. – Сочинения. – Т. 1. – С.111-143.

[42] Черных, Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 [Текст] / Н.И. Черных // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2. – Вып. 5. – С.513-522.

[43] Шабозов, М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана [Текст] / М.Ш. Шабозов // ДАН России – 2002. – Т.383. – №2. – С.171-174.

[44] Шабозов, М. Ш., Саидусайнов, М. С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников [Текст] / М.Ш. Шабозов, М.С. Саидусайнов // Матем. заметки. – 2018. – Т.103. – №4. – С.613-627.

[45] Шабозов, М. Ш., Шабозов, О. Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана [Текст] / М.Ш. Шабозов, О.Ш. Шабозов // ДАН России. – 2007. – Т. 412. – №4. – С.466-469.

[46] Scheik, J. T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk [Text] / J.T. Scheik // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 17. – P.1238-1243.

[47] Юдин, В. А. Диофантовы приближения в экстремальных задачах [Текст] / В.А. Юдин // ДАН СССР. – 1980. – Т. 251. – №1. – С.54-57.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, зарегистрированных в реестре ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

[1-А] Тухлиев, Д. К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана [Текст] / М.Ш. Шабозов, Д.К. Тухлиев // ДАН РТ. – 2018. – Т. 61. – №5. – С.419-426.

[2-А] Тухлиев, Д. К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана [Текст] / Д.К. Тухлиев // ДАН РТ. – 2018. – Т.61. – №6. – С.517-523.

[3-А] Тухлиев, Д. К. О точных константах в теоремах о приближении функций в пространстве Бергмана [Текст] / Д.К. Тухлиев // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественных и экономических наук. – 2018. – №3(46). – С.12-22.

[4-А] Тухлиев, Д. К. Об одноверeменном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана [Текст] / Д.К. Тухлиев

// Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2019. – №2. – С.14-18.

В других изданиях:

[5-А] Тухлиев, Д. К. Точные константы в экстремальных задачах средних квадратических полиномиальных приближениях аналитических в круге функций [Текст] / Д.К. Тухлиев // Материалы международной научной конференции „*Современные задачи математики и их приложения*", посвященной 80-летию со дня рождения академика АН РТ Раджабова Н. (Душанбе, 25-26 сентября 2018 г.). – С.260-263.

[6-А] Тухлиев, Д. К. О точных константах в прямых и обратных теоремах в пространстве Бергмана [Текст] / Д.К. Тухлиев // Международная научная конференция „*Спектральная теория и смежные вопросы*" (Уфа, 1-4 октября 2018 г.). – С.156-157.

[7-А] Тухлиев, Д. К. Приближение в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье по ортогональной системе [Текст] / Д.К. Тухлиев // „*Математический анализ и его приложения*" – Материалы республиканской научной конференции, посвященной 80-летию профессора Имомназарова Б. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.121-125.

[8-А] Тухлиев, Д. К. О Приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана [Текст] / Д.К. Тухлиев // Материалы республиканской научно-практической конференции „*Современные проблемы точных наук и их роль в формировании научного мировозрения общества*", посвященная 30-летию Государственной независимости Республики Таджикистан. (Худжанд, 26-27 октября 2019 г.). – С.64-68.

[9-A] Тухлиев, Д. К. О совместном приближении аналитических функций и их последовательных производных [Текст] / Д.К. Тухлиев // Материалы международной научной конференции „*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*", посвященной 60-летию академика АН РТ профессора Рахмонова З.Х. и члена-корреспондента АН РТ профессора Исхокова С.А. (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С.239-242.

[10-A] Тухлиев, Д. К. Неравенства типа Колмогорова для функций класса $B_2^{(m)}$ в пространстве Бергмана [Текст] / Д.К. Тухлиев // „*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*" – Материалы международной научной конференции, посвященной 70-летию профессора Джангибекова Г. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.270-273.