ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.968.2 На правах рукописи

Валиев Наджиб Гуломамадович

НЕКОТОРЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПОЛЮСА

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель: **доктор физико-математических наук, профессор Джангибеков Гулходжа**

Душанбе – 2019

Содержание

Введение

0.1. Актуальность темы исследования

Основным объектом исследования данной диссертационной работы является действующий в лебеговом пространстве функций с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ двумерный сингулярный интегральный оператор Михлина-Кальдерона-Зигмунда [1]-[5]

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2}\,, \tag{0.1}$$

где D – ограниченная область комплексной плоскости, граница которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова Γ, не пересекающихся между собой. Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Интегральные уравнения с операторами S_q, где $q = 0$, встречаются во многих задачах теории обобщённых аналитических функций (Векуа И.Н. [6]), теории квазиконформных отображений (Альфорс Л. [7], Шиффер М. [8]), теории дифференциальных уравнений с частными производными (Боярский Б.В. [9], Джураев А.Д. [10]-[12], Монахов В.Н. [13]) и других. Впервые подобные уравнения были рассмотрены Векуа И.Н. [6] методом сжимающих отображений. Джураев А.Д. [10] исследовал двумерные сингулярные интегральные уравнения в пространствах $L_p(D)$ $(2 < p < \infty)$ при помощи редукции к краевым задачам для обобщёных аналитических функций.

Комяком И.И. [14]-[16] и Василевским Н.Л. [17]-[19] при изучении двумерных уравнений в пространствах $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$, были применены методы теории банаховых алгебр.

Разработанная Дудучавой Р. [20]-[21] L_p-теория многомерных сингулярных интегральных уравнений на многообразии с краем, где $1 < p < \infty$, даёт возможность свести исследование нётеровых свойств уравнений, содержащих операторы S_m и их различные комбинации, к факторизации соответствующих рациональных матриц-функций, а точнее, к нахождению их частных индексов. При этом представляет интерес установить критерий нётеровости рассматриваемого двумерного сингулярного интегрального уравнения в виде явных условий на его коэффициенты. Для широкого класса интегральных уравнений это было проделано Джангибековым Г. (см., напр.[23]-[25]) и Бойматовым К.Х. и Джангибековым Г. (совместно [26]), а также учениками Джангибекова Г. [27]-[31]. В работах указанных ученых рассматривались случаи, где сингулярный интеграл S_m имел характеристику чётного порядка. Что касается нечётного m, то в этом направлении была выполнена лишь одна работа [32].

Во всех вышеуказанных работах сингулярный интеграл S_q был исследован при $q = 0$. Что касается $q \neq 0$, то впервые оператор S_q был введён Манджавидзе Г.Ф. [22], а Джангибековым Г. и Мамадкаримовой М. [27] было показано, что при $q < 1$ оператор обратим.

Данная диссертационная работа посвящена исследованию нётеровых свойств двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с характеристиками, зависящими от полюса, и с непрерывными коэффициентами.

Цель работы

Цель работы – исследование разрешимости некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области с непрерывными коэффициентами и с характеристиками, зависящими от полюса.

Научная новизна

Результаты, выносимые на защиту, являются новыми и заключаются в следующем:

- получены необходимые и достаточные условия нётеровости а также формула для подсчёта индекса одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом и с характеристиками, зависящими от полюса ;
- получены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора для некоторых четырёхкомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;
- получены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;
- найдены левые и правые регуляризаторы некоторых сингулярных опе-

раторов нового типа на расширенной плоскости.

Теоретическая и практическая значимость работы

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер. Они могут послужить фундаментом для дальнейших теоретических исследований в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Практическая значимость работы определяется прикладной значимостью сингулярных интегральных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Метод исследования

Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методе факторизации матриц-функций.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались автором и обсуждались на семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета. Результаты диссертации были представлены в ходе выступлений на следующих конференциях:

- международной научной конференции, посвященной 85-летию академика АН РТ Михайлова Л.Г. (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 20-летию Конституции РТ (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции, посвящённой 75-летию док-

тора физико-математических наук, профессора Собирова Т.С. (Душанбе, 29-30 октября 2015г.);

- международной научной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, Филиал Московского государственного университета им. Ломоносова М.В., 2016 г.);

- международной научной конференции, посвящённой 90-летию академика АН РТ, лауреата государственной премии имени Абуали ибн Сино Михайлова Л.Г. (Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.);

- республиканской научной конференции, посвящённой 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.).

Публикации и личный вклад автора

Основные результаты диссертации опубликованы в авторских работах [52]-[61], из них в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ статьи [52]-[55], в других изданиях работы [56]-[61].

Работы [52]-[54] опубликованы в соавторстве с научным руководителем, которому принадлежат постановка задач и общее руководство, а диссертанту доказательство основных результатов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, пяти разделов, списка литературы (61 наименование), заключения и занимает 76 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX.

В диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм и формул, которые имеют двойную нумерацию, где первая цифра совпадает с номером раздела, вторая указывает на номер теоремы, леммы или формулы в данном подразделе.

0.2. Краткое содержание

Диссертация состоит из пяти разделов. Раздел 1 носит вспомогательный характер. В нём описаны используемые в работе пространства функций и приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах.

В разделе 2 в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$:

$$L^p_{\beta-2/p}(D)=\{f(z):|z|^{\beta-2/p}f(z)=F(z)\in L^p(D),\ ||f||_{L^p_{\beta-2/p}}=||F||_{L^p}\}$$

$(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ рассматривается следующий интегральный оператор:

$$A=a(z)I+b(z)S_qK, \tag{0.2}$$

где $a(z),\ b(z), q(z)$ – непрерывные в $\overline{D}=D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)|<1$ при всех $z\in\overline{D}$. Черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Отметим, что если записать оператор S_q в виде

$$(S_qf)(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D\frac{u(z,\theta)}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,$$

где характеристика $u(z,\theta)$ $(\theta=arg(\zeta-z))$ оператора S_q

$$u(z,\theta)=\frac{e^{-2i\theta}}{(1+q(z)e^{-2i\theta})^2}$$

является ограниченной функцией, зависящей от полюса z, и удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} u(z,\theta)d\theta=0,\ \forall z\in\overline{D}$.

Оператору A из (0.2) ставится в соответствие следующая матрица-функция:

$$G_z(\sigma)=\begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} \\ \\ \overline{b(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},$$

где $z\in\overline{D},\ 0<|\sigma|<\infty,\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2$.

Показывается, что имеет место

Лемма 0.1. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z\in\overline{D}$ и σ ($detG_z(\sigma)\neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)|>\frac{|b(z)|}{1-|q(z)|}\quad \forall z\in\overline{D}, \tag{0.3}$$

$$|a(z)|<\frac{|b(z)|}{1+|q(z)|}\quad \forall z\in\overline{D}. \tag{0.4}$$

Доказывается, что справедлива следующая

Теорема 0.1. *Для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|a(z)|>\frac{|b(z)|}{1-|q(z)|}\quad \forall z\in\overline{D}, \tag{0.5}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1+|q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D} \quad и \quad a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{0.6}$$

При этом, если выполнено (0.5), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении (0.6) его индекс равен

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma} a(\tau).$$

В разделе 3 изучается четырёхкомпонентный интегральный оператор с характеристиками, зависящими от полюса вида

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_q + d(z)\overline{S}_q K, \tag{0.7}$$

где коэффициенты $a(z), b(z), c(z), d(z),$ – непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| \leq q_0 < 1$ при всех $z \in \overline{D}$. Поскольку символ оператора S_q равен

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1 - q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}, \; (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \; 0 < |\sigma| < \infty),$$

то тогда, свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & b(z) + d(z)\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ & \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ & \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

Доказывается, что имеет место

Лемма 0.2. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ ($detG_z(\sigma) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.8}$$

$$|\Delta_2(z)-\Delta_1(z)|q(z)|^2-2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))|>|\lambda(z)-\Delta_1(z)q(z)|+|\mu(z)|,\forall z\in\overline{D}, \tag{0.9}$$

где

$$\Delta_1(z)=|a|^2-|b|^2, \quad \Delta_2=|c|^2-|d|^2, \quad \lambda=\overline{a}c-b\overline{d}, \quad \mu=a\overline{d}-\overline{b}c.$$

Рассмотрим следующие ограниченные операторы в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $\quad$ ($1<p<\infty$, $\quad 0<\beta<2$) :

$$T_1=\overline{a(z)}I-b(z)K,\ T_2=\overline{d(z)}I-c(z)K.$$

Из леммы следует, что при выполнении условия (0.8) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причем

$$A=T_1^{-1}A_1, \quad A_1=\Delta_1(z)I+\lambda(z)S_q+\overline{\mu(z)}KS_q.$$

В случае (0.9) оператор T_2 имеет непрерывный обратный

$$A=T_2^{-1}A_2, \quad A_2=\mu(z)I-\lambda(z)K-\Delta_2(z)KS_q.$$

Таким образом, исследование нётеровости и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2. Из результатов [26] следует, что для нётеровости A необходимо выполнение (0.8) или (0.9).

Теорема 0.2. *Для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\Delta_1(z)|>|\lambda(z)-\Delta_1(z)q(z)|+|\mu(z)|,\ \forall z\in\overline{D}, \tag{0.10}$$

$$
\begin{gathered}
|\Delta_2(z)-\Delta_1(z)|q(z)|^2-2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))|> \\
>|\lambda(z)-\Delta_1(z)q(z)|+|\mu(z)|, \forall z\in\overline{D};\ \ \mu(t)\neq 0,\,\forall t\in\Gamma.
\end{gathered} \tag{0.11}
$$

При этом, если выполнено (0.10), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении (0.11) его индекс равен

$$\varkappa = 2Ind_{\Gamma}\mu(\tau).$$

В разделе 4 в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ \ 0<\beta<2)$ изучается следующий сингулярный интегральный оператор:

$$A = a(z)I + b(z)S_{mq}K, \tag{0.12}$$

где

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{m}{2\pi i^m}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^m|\zeta-z|^{m-2}f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(|\zeta-z|^m-(-i)^m q(z)(\overline{\zeta}-\overline{z})^m\Big)^2}. \tag{0.13}$$

Черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, $(Kf)(z)=\overline{f(z)}$, $m>0-$ нечётное число и $m>0$. Оператор A будет нётеровым тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$U = \begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_mq \\ & \\ \overline{b(z)}KS_{mq}K & \overline{a(z)}I \\ & \end{pmatrix}.$$

Поскольку символ оператора S_{mn} равен $(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|})^{mn}$ и символ оператора $\overline{S}_{mn}$ равен $-(\frac{\sigma}{|\sigma|})^{mn}$ $\quad(0<|\sigma|<\infty,\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2)$, то соответственно символами операторов S_{mq} и $\overline{S}_{mq}$ будут

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = \frac{\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1-q(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = -\frac{\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1+\overline{q(z)}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

тогда, согласно работы Дудучава Р. [20], свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^{m}}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^{m}} \\ & \\ -\overline{b(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{m}}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^{m}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},\ z \in \overline{D}.$$

Лемма 0.3. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ ($detG_z(\sigma \neq 0)$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)|^2(1-|q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.14}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{0.15}$$

Имеет место следующая

Теорема 0.3. *Для того чтобы оператор A был неётеровым в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2(1-|q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{0.16}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{0.17}$$

При выполнении этих условий индекс оператора A равен

$$\varkappa = -mInd_{\Gamma} a(\tau).$$

Замечание. *Требование $|q(z)| < 1$ в теореме 0.3. можно ослабить до $|q(z)| \neq 1$. Действительно, если $|q(z)| > 1$, то достаточно заметить, что имеет место равенство $(S_{mq}f)(z) = (-1)^m q_1^2 (\overline{S}_{mq_1} f)(z)$, где*

$q_1 = -\frac{1}{(-i)^m q}$.

Далее в этом разделе изучается следующий четырёхкомпонентный интегральный оператор с нечётными характеристиками, зависящими от полюса

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)K + c(z)S_{mq} + d(z)\overline{S}_{mq}K, \tag{0.18}$$

где $a(z), b(z), c(z), d(z), q(z)$ – непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| \leq q_0 < 1, \forall z \in \overline{D}$, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$. Поскольку символ оператора S_{mq} равен

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1 - q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}, \; (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \; 0 < |\sigma| < \infty),$$

то тогда, согласно [20], свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & b(z) - d(z)\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

Имеет место

Лемма 0.4. *Матрица* $G_z(\sigma)$ *невырожденна для всех* $z \in \overline{D}$ *и* σ, $(detG_z(\sigma) \neq 0)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D} \tag{0.19}$$

$$|\Delta_2(z) + \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{0.20}$$

причем (0.19) *и* (0.20) *не могут одновременно выполняться ни при одном значении* $z \in \overline{D}$, *где*

$$\Delta_1(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c + b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} + \overline{b}c,$$

$$\Delta_1(z)\Delta_2(z) \equiv |\lambda|^2 - |\mu|^2$$

.

Доказывается, что справедлива следующая

Теорема 0.4. *Для нётеровости оператора* $\mathcal{A}$ *в лебеговом пространстве* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{0.21}$$

$$\begin{gathered} |\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > \\ > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D};\ \mu_1(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{0.22}$$

При этом, если выполнено (0.21), то оператор $\mathcal{A}$ *имеет ограниченный обратный, если выполнено (0.22) то его индекс равен*

$$\varkappa = mInd_{\Gamma}\mu_1(\tau).$$

В разделе 5 изучается вопрос построения регуляризатора оператора A и нахождение обратного оператора A^{-1}. Мы здесь ограничимся случаем, когда оператор A рассматривается на плоскости E. Имеют место следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 0.5. *Если $q(z)$ непрерывная на расширенной плоскости E функция и $|q(z)| \le q_0 < 1$, в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ имеет место равенство*

$$(S^E_q \overline{S}^E_q f)(z) = \frac{1}{1-|q(z)|^2}((If)(z)) + q(z)(S^E_q f)(z) + \overline{q(z)}(\overline{S}^E_q f)(z)) + T, \tag{0.23}$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Лемма 0.6. *Если $q(z)$ непрерывная на расширенной плоскости E функция и $|q(z)| \le q_0 < 1$, в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ оператор*

$$M = I + qS^E_q + \overline{q}\overline{S}^E_q \tag{0.24}$$

имеет левый и правый регуляризатор

$$R = \frac{1}{1-|q|^2}(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E), \tag{0.25}$$

а в случае $q = const$, оператор R будет левым и правым обратным для исходного оператора M.

Лемма 0.7. *Если $a(z), b(z)$ непрерывные на расширенной плоскости E функции и выполнено условие $|a(z)| + |b(z)| < 1$, при $\forall z \in E$, тогда оператор*

$$N = I + aS^E + b\overline{S}^E \tag{0.26}$$

имеет в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ *левый и правый регуляризатор*

$$R=\frac{1}{1+qr}(I-r\overline{S}^E_r)(I-qS^E_q), \qquad (0.27)$$

а в случае постоянных a *и* b *оператор* R *будет левым и правым обратным для исходного оператора* N, *где функции* $q(z)$ *и* $r(z)$ *однозначно находятся из равенств* $a=\frac{q}{1+qr},\ b=\frac{r}{1+qr}, |q(z)|<1, |r(z)|<1$ *при* $\forall z\in E$.

Теперь рассмотрим оператор A из (0.2) на плоскости E и запишем его в виде

$$A=I-\lambda S^E_q K, \qquad \lambda(z)=\frac{b(z)}{a(z)}. \qquad (0.28)$$

Нами было показано, что при условии $|\lambda(z)|<1-|q(z)|,\ \forall z\in E$ оператор A в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ обратим.

Имеет место

Теорема 0.5. *Пусть выполнено условие* $|\lambda(z)|<1-|q(z)|, \forall z\in E$. *Тогда оператор* A *из (0.28) в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$ *имеет правый и левый регуляризатор вида*

$$R=\nu(I+\overline{\mu}\overline{S}^E_\mu)(I+\mu S^E_\mu)(I-\overline{q}\overline{S}^E)(I-qS^E)(I+\lambda S^E_q K), \qquad (0.29)$$

где $\nu=\frac{1+|q|^2-|\lambda|^2}{1+|\mu|^2}$, $|\mu(z)|<1$ *и функция* μ *находится единственным образом из равенства* $\frac{\mu}{1+|\mu|^2}=\frac{q}{1+|q|^2-|\lambda|^2}$. *В случае, когда* $\lambda(z)\equiv const.$ *оператор (0.28) будет левым и правым обратным для оператора* A *из (0.29).*

1 Описание пространств функций и некоторые вспомогательные сведения

1.1 Описание используемых пространств функций

Определение 1.1. *Простую замкнутую гладкую кривую* Γ *назовём кривой Ляпунова, если она удовлетворяет следующему условию: касательная к кривой образует с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию Гельдера относительно дуги* s *кривой* Γ.

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$.

Пространство $\mathbf{L^p_{\beta-2/p}(D)}$ – это множество комплекснозначных измеримых в D функций $f(z)$, для которых функция $F(z) = |z|^{\beta-2/p}f(z)$, суммируема с p-ой степенью, где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$.

Норма в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ вводится по формуле

$$||f(z)||_{L^p_{\beta-2/p}} = \left(\iint\limits_D |F(z)|^p ds_z\right)^{1/p} = ||F||_{L^p}.$$

1.2 Нётеровые операторы и основные их свойства

В этом пункте приводятся основные понятия и факты теории нётеровых операторов в банаховых пространствах, которыми мы будем пользоваться в работе. Доказательства всех приводимых здесь утверждений можно найти в монографии Крейн С.Г. [33].

Пусть X – банахово пространство, A – линейный ограниченный оператор, действующий в X, A^* – сопряжённый к нему оператор, действующий в сопряженном пространстве X^*.

Определение 1.2. *Говорят, что оператор A допускает левую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R действующий в X, такой, что произведение RA (AR) является оператором Фредгольма т.е.*

$$RA = I + T,$$

где I - тождественный, а T - вполне непрерывный оператор в пространстве X. Оператор R в этом случае называется левым регуляризатором оператора A.

Определение 1.3. *Говорят, что оператор A допускает правую регуляризацию, если существует ограниченный оператор R действующий в X, такой, что*

$$A = I + T,$$

где I и T - операторы, соответственно тождественный и вполне непрерывный, в пространстве X. Оператор R называется правым регуляризатором оператора A.

Определение 1.4. *Говорят, что A допускает двустороннюю регуляризацию, если он одновременно допускает и правую, и левую регуляризацию.*

Множество $KerA$ всех решений уравнения

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

называется множеством нулей или ядром оператора A. Множество $KerA$ является подпространством пространства X. Размерность подпространства

$KerA$, т.е. число линейно независимых решений уравнения (1.1), будем обозначать через $\alpha_A = dimKerA$. Через $KerA^*$ обозначим подпространства нулей оператора A^*, т.е. множество всех решений уравнения

$$A^*x = 0 \tag{1.2}$$

называется ядром оператора A^* и наконец $\beta_A = \alpha_{A^*} = KerA^*$. Числа α_A, β_A называются дефектными числами оператора A. Если хотя бы одно из чисел α_A и β_A – конечное, то их разность называется индексом оператора A и обозначается через $IndA$,

$$IndA = \alpha_A - \beta_A. \tag{1.3}$$

Очевидно, $IndA$ конечен тогда и только тогда, когда обе размерности α_A и β_A – конечны.

Для того, чтобы уравнение

$$Ax = y, \;\; y \in X \tag{1.4}$$

имело хотя бы одно решение, необходимо, чтобы свободный член y был ортогонален к $KerA^*$ (иначе говоря, чтобы элемент y аннулировался любым функционалом $u \in KerA^*$). Действительно, если уравнение (1.4) имеет решение x, а $u \in KerA^*$, то

$$(y, u) = (Ax, u) = (x, A^*u) = (x, 0) = 0;$$

где круглыми скобками обозначено значение функционала на соответствующем элементе.

Если упомянутое выше условие ортогональности достаточно для разрешимости уравнения (1.3), то говорят, что оператор A нормально разрешим. Таким образом, можно дать следующее

Определение 1.5. *Оператор A называется нормально разрешимым в смысле Хаусдорфа, если неоднородное уравнение (1.4) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть y ортогональна всем решениям сопряженного однородного уравнения (1.2).*

Известна следующая теорема Хаусдорфа: *для того, чтобы оператор был нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы его область значений была замкнутой.*

Определение 1.6. *Оператор A называется нётеровым в X, если он нормально разрешим и числа α_A, β_A конечны.*

Определение 1.7. *Индексом $IndA$ нётерова оператора A называется целое число $IndA = \alpha_A - \beta_A$.*

Следующее определение из всего множества нётеровых операторов выделяет подмножество фредгольмовых операторов:

Определение 1.8. *Нётеров оператор, индекс которого равен нулю, называется фредгольмовым.*

Свойство 1.1. (теорема о композиции). *Если A и B нётеровы операторы в X, то их композиция AB также нетерова в X, причём*

$$IndAB = IndA + IndB.$$

Свойство 1.2. *Если A нётеров в X то и A^* нетеров в X^*, причем $IndA^*{=}{-}IndA$.*

Свойство 1.3. (возмущение вполне непрерывным оператором). *Если A нетеров, а T вполне непрерывен в X, то $A+T$ также нётеров в X, причём $Ind(A+T) = IndA$.*

Свойство 1.4. (возмущение малым по норме оператором). *Если A нётеров в X, то существует такое $\varepsilon = \varepsilon(A)$, что для всех таких операторов B $\quad ||B|| < \varepsilon$, оператор $A + B$ нётеров в X и*

$$Ind(A + B) = IndA.$$

Свойство 1.5. *Для того, чтобы оператор A был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы у него существовали левый и правый регуляризаторы.*

Определение 1.9. *Нётеровы операторы A и B называются гомотопными, если существует семейство нётеровых операторов $A(t)$, $t \in [0, 1]$, которое равномерно непрерывно по норме на сегменте $[0, 1]$; по любому заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если $|t_1 - t_2| < \delta$, то $||A(t_1) - A(t_2)|| < \varepsilon$, и $A(0) = A,\ A(1) = B$.*

Свойство 1.6. *Если операторы A и B гомотопны, то*

$$IndA = IndB.$$

2 Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса

2.1 Основной сингулярный интегральный оператор с характеристикой, зависящей от полюса

Пусть D – ограниченная область комплексной плоскости,содержащая внутри точку $z = 0$, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I – тождественный оператор, $a(z),\ b(z), q(z)$ -непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции, причём $|q(z)| < 1$ при всех $z \in \overline{D}$.

В пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$:

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-\frac{2}{p}}|f(z)| = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}} = ||F||_{L^p}\}$$

рассмотрим следующий сингулярный интегральный оператор

$$A = a(z)I + b(z)S_qK, \tag{2.1}$$

где

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_qf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2},$$

черта над функцией означает переход к комплексно-сопряжённым значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Отметим, что если записать оператор S_q в виде

$$(S_q f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{u(z,\theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

где характеристика $u(z,\theta)$ ($\theta = arg(\zeta - z)$) оператора S_q

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-2i\theta}}{(1 + q(z)e^{-2i\theta})^2}$$

является ограниченной функцией, зависящей от полюса z и удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} u(z,\theta)d\theta = 0, \ \forall z \in \overline{D}$, то из результатов [5] следует, что оператор S_q ограничен в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) \quad (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$. Отметим, что оператор вида S_q был введён Манджавидзе Г.Ф. [22], а Джангибековым Г. и Мамадкаримовой М [27] было показано, что оператор

$$(A_1 f)(z) = f(z)I - q(z)(S_q f)(z)$$

является регуляризатором для оператора

$$(A_2 f)(z) = f(z)I + q(z)(Sf)(z),$$

причем, если $q(z) = const$, то A_1 будет обратным оператором для A_2.

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия нётеровости сингулярных интегральных операторов типа A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ и получены формулы для вычисления индекса.

2.2 Теорема о вложении весовых функциональных пространств

Докажем одну вспомогательную теорему о вложении весовых функциональных пространств $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, представляющую также самостоятельный интерес.

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $0 < \beta < 2$. *Тогда пространство* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ *ограниченно вкладывается в* $L^s(D)$, *где*

1) если $0 < \beta \le 2/p < 1$, *то* $s = p$, *если же* $2/p < \beta < 2$, *то* $s \in (2, \frac{2}{\beta})$;

2) если $1 < \beta \le 2/p < 2$, *то* $s = p$, *если же* $2/p < \beta < 2$, *то* $s \in (1, \frac{1}{\beta})$.

Доказательство. Случай 1). Пусть $p > 2$ и $0 < \beta \le 2/p < 1$. Тогда утверждение теоремы очевидно, ибо $f(z) = \frac{F(z)}{|z|^{\beta-2/p}} \in L^p(D)$, поскольку $\beta - 2/p < 0$ и $F(z) \in L^p(D)$.

Пусть теперь $p > 2$ и $2/p < \beta < 1$, то есть $\beta = 2/p + \varepsilon$, где ε – некоторое малое положительное число. Тогда

$$||f||^s_{L^s(D)} = \iint\limits_D |f(z)|^s ds_z = \iint\limits_D \frac{|F(z)|^s}{|z|^{s(\beta-\frac{2}{p})}} ds_z \le$$

$$\le \Big(\iint\limits_D |F(z)|^{sr} ds_z\Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\iint\limits_D \frac{ds_z}{|z|^{sr'(\beta-\frac{2}{p})}}\Big)^{\frac{1}{r'}}.$$

Получим

$$sr'\Big(\beta - \frac{2}{p}\Big) = \frac{sr\varepsilon}{r-1} < \frac{p\varepsilon}{r-1},$$

где r и s выбираются таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$2 < s \le \frac{p}{r}, \quad r > 1, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \tag{2.2}$$

и

$$r > 1 + \frac{p}{2}\varepsilon. \tag{2.3}$$

Тогда получим

$$sr'\Big(\beta - \frac{2}{p}\Big) = \frac{sr\varepsilon}{r-1} < \frac{p\varepsilon}{r-1} = \frac{p\varepsilon}{1 + \frac{p\varepsilon}{2} - 1} = 2.$$

Заметим: если учесть, что $\varepsilon = \beta - \frac{2}{p}$, то неравенства (2.2) и (2.3), соответственно, преобразуются к виду

$$2 < s < \frac{2}{\beta} \quad \text{и} \quad \frac{p\beta}{2} < r < \frac{p}{2}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получили

$$||f||_{L^s(D)} < M||F||_{L^p(D)}.$$

При $1 < p < 2$ и $0 < \beta < 1$ параметры r и s нужно выбирать следующим образом:

$$\frac{p\beta}{2} < r < p,\ 1 < s < \frac{2}{\beta}.$$

Случай 2) доказывается аналогичным образом.

Теорема 2.2. *Для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1 - |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.4}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1 + |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D} \quad \text{и} \quad a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{2.5}$$

При этом, если выполнено (2.4), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении (2.5) его индекс равен

$$\varkappa = -2Ind_{\Gamma}a(\tau).$$

2.3 Построение матрицы-символа оператора A

Оператор A будет нётеровым тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$B=\begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_q \\ \overline{b(z)}KS_qK & \overline{a(z)}I \end{pmatrix}.$$

К оператору B применимы результаты, полученные в работе [20]. Разложив характеристику $u(z,\theta)$ в ряд по степеням $e^{-2i\theta}$:

$$u(z,\theta)=\frac{e^{-2i\theta}}{(1+q(z)e^{-2i\theta})^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)q^k(z)e^{-2i(k+1)\theta},$$

представим оператор S_q в виде

$$(S_qf)(z)=\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}(z)\frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta\equiv\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}(z)(S_mf)(z). \tag{2.6}$$

Поскольку символ оператора S_m равен $(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^m \quad (0<|\sigma|<\infty,\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2)$, то символом оператора S_q будет

$$\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^m=\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\right)^{m-1}=\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}},$$

и тогда, согласно [20], свойства оператора S_q определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma)=\begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} \\ \overline{b(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} & \overline{a(z)} \end{pmatrix},\ z\in\overline{D}.$$

Лемма 2.1. *Матрица* $G_z(\sigma)$ *невырожденна для всех* $z \in \overline{D}$ *и* σ *(*$\det G_z(\sigma) \neq 0$*) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1 - |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.7}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1 + |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}. \tag{2.8}$$

Из результатов [20] следует, что для нётеровости оператора A из (2.1) необходимо выполнение (2.7) или (2.8). Рассмотрим сначала случай (2.7) и временно ограничимся пространством $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$. В силу результатов [20] для нётеровости A необходимо и достаточно, чтобы матрицы $G_\tau(\sigma_1 \pm i)$ $(-\infty < \sigma_1 < \infty), \tau \in \Gamma$, имели нулевые частные индексы. Поскольку $G_\tau(\sigma_1 \pm i)$ не зависят от p, то оператор A будет одновременно нётеровым или ненётеровым в $L^p(D)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Поскольку $S_m = S^m$ (см.[24]) и $||S^m||_{L^p(D)} \leq ||S||^m_{L^p(D)}$, то в силу того, что $||S||_{L^2(D)} < 1$ (см.[6]), с учётом (2.6) получим

$$||S_q||_{L^2(D)} \leq \sum_{m=1}^{\infty} |q(z)|^{m-1} ||S||^m_{L^2(D)} < \sum_{m=1}^{\infty} |q(z)|^{m-1} = \frac{1}{1 - |q(z)|}.$$

Поэтому в силу (2.7) из принципа сжатых отображений следует обратимость оператора A в $L^2(D)$. Следовательно, частные индексы матриц $G_\tau(\sigma_1 \pm i), \tau \in \Gamma$ равны нулю.

Рассмотрим теперь семейство нётеровых операторов

$$M_\nu \equiv a(z)I + \nu \cdot b(z) S_q K,$$

непрерывно зависящих от параметра $\nu \in [0, 1]$. Поскольку $M_0 = a(z)I$, $M_1 = A$, то индекс A равен нулю в любом $L^p(D)$ при

$1 < p < \infty$. Далее, в силу вложения $L^p(D) \subset L^2(D)$ $(p > 2)$, оператор A имеет нулевое ядро в $L^p(D)$ при $p > 2$. При $1 < p < 2$ этот факт устанавливается путём перехода к сопряжённому оператору. Таким образом, показано, что A – обратимый оператор в $L^p(D)$, $1 < p < \infty$. Что касается утверждения теоремы относительно пространства $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, то достаточно сослаться на вложение $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) \subset L^s(D)$ при некотором $s > 1$ из теоремы 2.1.

2.4 Факторизация матриц функции $G_t(\sigma_1 \pm i)$

Пусть выполнено условие (2.8). По символу оператора A построим следующие матрицы:

$$G^-_\tau(t) = \begin{pmatrix} a(\tau) & b(\tau)\frac{\bar{t}}{1-q(\tau)\bar{t}} \\ \overline{b(\tau)}\frac{t}{1-\overline{q(\tau)}t} & \overline{a(\tau)} \end{pmatrix},$$

$$G^+_\tau(t) = \begin{pmatrix} a(\tau) & b(\tau)\frac{t}{1-q(\tau)t} \\ \overline{b(\tau)}\frac{\bar{t}}{1-\overline{q(\tau)}\bar{t}} & \overline{a(\tau)} \end{pmatrix},$$

где $t = \frac{\sigma_1 - i}{\sigma_1 + i}$, $-\infty < \sigma_1 < \infty$, τ-точка границы Γ. Из [20] следует, что оператор A нетеров в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$, если покажем, что матрицы $G^\pm_\tau(t)$ факторизуются с нулевыми частными индексами. Поэтому для матрицы $G^\pm_\tau(t)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| < 1$ функций $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$:

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = a(\tau)\Phi_1^+(t) + \frac{b(\tau)\bar{t}}{1-q(\tau)\bar{t}}\Phi_2^+(t) \\ \Phi_2^-(t) = \frac{\overline{b(\tau)}t}{1-\overline{q(\tau)}t}\Phi_1^+(t) + \overline{a(\tau)}\Phi_2^+(t) \end{cases}, \tag{2.9}$$

где $\Phi_{1,1}^+(t)$, $\Phi_{1,2}^-(t)$–неизвестные функции точки окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимые по t, соответственно, внутри и вне единичного круга $|t| < 1$.

Решаем задачу Римана. Во втором равенстве системы (2.9) слева аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля эта функция равна постоянной, то есть

$$\Phi_2^-(\zeta) = c_1 \text{ или } \frac{\overline{b(\tau)}t}{1-\overline{q(\tau)}t}\Phi_1^+(t) + \overline{a(\tau)}\Phi_2^+(t) = c_1.$$

Пусть $a(\tau) \neq 0$ на границе Γ, тогда

$$\Phi_2^+ = \frac{c_1}{\overline{a(\tau)}} - \frac{\overline{b(\tau)} \cdot t}{\overline{a(\tau)}(1-\overline{q(\tau)}t)}\Phi_1^+(t). \tag{2.10}$$

Поставим значение Φ_2^+ в первом уравнении системы (2.9) и получим

$$\Phi_1^-(t) = a(\tau)\Phi_1^+(t) - \frac{|b(\tau)|^2}{\overline{a(\tau)}(1-|q(\tau)|)^2}\Phi_1^+ + \frac{c_1}{\overline{a(\tau)}} \cdot \frac{b(\tau)\bar{t}}{1-q(\tau)\bar{t}}$$

Учитывая, что $detG_\tau(t) = |a(\tau)|^2 - \frac{|b(\tau)|^2}{(1-|q(\tau)|)^2}$ можно факторизовать в виде $\frac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0,\ \ F^-(t) \neq 0$ – функции, аналитически продолжимые, соответственно, внутри и вне единичного круга, получим

$$\Phi_1^-(t) = \frac{c_1}{\overline{a(\tau)}} \cdot \frac{b(\tau)\bar{t}}{1-q(\tau)\bar{t}} + \frac{F^+(t)}{F^-(t)\overline{a(\tau)}} \cdot \Phi_1^+(t)$$

или

$$\Phi_1^-(t) = \frac{c_1}{\overline{a(\tau)}} \cdot \frac{b(\tau)t}{t-q(\tau)} = \frac{F^+(t)}{\overline{a(\tau)}F^-(t)}\Phi_1^+(t). \tag{2.11}$$

Отсюда

$$F^-(t)\Big[\Phi_1^-(t)-\frac{c_1}{\overline{a(\tau)}}\cdot\frac{b(\tau)t}{t-q(\tau)}\Big]=\frac{F^+(t)}{\overline{a(\tau)}}\Phi_1^+(t)$$

В последнем равенстве левая часть аналитически продолжима вне единичного круга, а правая часть внутри единичного круга. Из теоремы Лиувилля следует

$$F^-(t)\Big[\Phi_1^-(t)-\frac{c_1}{\overline{a(\tau)}}\cdot\frac{b(\tau)t}{t-q(\tau)}\Big]=\frac{F^+(t)}{\overline{a(\tau)}}\Phi_1^+(t)=c_2,$$

то есть

$$\Phi_1^+(\zeta)=\frac{\overline{a(\tau)}}{F^+(\zeta)}\cdot c_2. \tag{2.12}$$

Поставив значение (2.12) в формуле (2.11) получим

$$\Phi_1^-(\zeta)=\frac{c_2}{F^-(t)}+\frac{c_1}{\overline{a(\tau)}}\cdot\frac{b(\tau)\zeta}{\zeta-q(\tau)},$$

соответственно, поставив (2.12) в (2.10) найдем

$$\Phi_2^+(t)=\frac{c_1}{\overline{a(\tau)}}-\frac{\overline{b(\tau)}\zeta}{\overline{a(\tau)}(1-\overline{q(\tau)}\zeta)}\cdot\frac{c_2}{F^+(\zeta)}.$$

Теперь, сначала выбирая $c_1=1,\ c_2=0$, а потом $c_1=0,\ c_2=1$ найдем элементы матрицы $\Phi^-(\zeta)$ и $\Phi^+(\zeta)$:

$$\Phi_{11}^-(\zeta)=\frac{1}{\overline{a(\tau)}}\cdot\frac{b(\tau)\zeta}{\zeta-q(\tau)},\ \ \Phi_{21}^-(\zeta)=1,\ \ \Phi_{12}^-(\zeta)=\frac{1}{F^-(\zeta)},\ \ \Phi_{22}^-(\zeta)=0,$$

$$\Phi_{11}^+(\zeta)=0,\ \ \Phi_{12}^+(\zeta)=\frac{\overline{a(\tau)}}{F^+(\zeta)},\ \ \ \Phi_{21}^+(\zeta)=\frac{1}{\overline{a(\tau)}},\ \ \Phi_{22}^+(\zeta)=-\frac{\overline{b(\tau)}\zeta}{1-\overline{q(\tau)}\zeta}\cdot\frac{1}{F^+(\zeta)}.$$

или

$$\Phi^-(\zeta)=\begin{pmatrix}\frac{b(\tau)\zeta}{\overline{a(\tau)}(\zeta-q(\tau))} & \frac{1}{F^-(\zeta)}\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \ \Phi^+(\zeta)=\begin{pmatrix}0 & \frac{\overline{a(\tau)}}{F^+(\zeta)}\\ \frac{1}{\overline{a(\tau)}} & -\frac{\overline{b(\tau)}}{(1-\overline{q(\tau)}\zeta)F^+(\zeta)}\end{pmatrix},$$

При этом

$$det\Phi^{-}(\zeta) = -\frac{1}{F^{-}(\zeta)} \neq 0,\;\; det\Phi^{+}(\zeta) = -\frac{1}{F^{+}(\zeta)} \neq 0$$

Таким образом, при выполнении условии $a(\tau) \neq 0,\;\; \forall\tau \in \Gamma$ имеем

$$\Phi^{-}(\zeta) = G^{+}_{\tau}(\zeta)\cdot\Phi^{+}(\zeta) \;\text{ или }\; G^{+}_{\tau}(\zeta) = \Phi^{-}(\zeta)\cdot(\Phi^{+}(\zeta))^{-1},$$

где

$$(\Phi^{+}(\zeta))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{b(\tau)}\zeta}{1-q(\tau)\zeta} & \overline{a(\tau)} \\ \frac{F^{+}(\zeta)}{\overline{a(\tau)}} & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично доказывается, что при условии $a(\tau) \neq 0,\;\; \forall\tau \in \Gamma$ имеет место представление $G^{-}_{\tau}(\zeta) = \Phi^{+}(\zeta)\cdot(\Phi^{-}(\zeta))^{-1}$, где

$$(\Phi^{-}(\zeta))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ F^{-}(\zeta) & -\frac{b(\tau)\zeta}{\overline{a(\tau)}(\zeta-q(\tau))} \end{pmatrix}.$$

Установлено, что если $a(\tau) \neq 0,\; \forall\tau \in \Gamma,\; t = \frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}$, то матрицы функции $G_{\tau}(\sigma_1 \pm i)$ факторизуются с нулевыми частными индексами в явном виде:

$$\begin{pmatrix} a(\tau) & \frac{b(\tau)\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}}{1-q(\tau)\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}} \\ \frac{\overline{b(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}}{1-\overline{q(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}} & \overline{a(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b(\tau)\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}}{\overline{a(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}-q(\tau)\right)} & \frac{1}{F^{-}_{\tau}(\sigma_1)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\overline{b(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}}{1-\overline{q(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}} & \overline{a(\tau)} \\ \frac{F^{+}_{\tau}(\sigma_1)}{\overline{a(\tau)}} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\frac{F^{+}_{\tau}(\sigma_1)}{F^{-}_{\tau}(\sigma_1)} = \det G_{\tau}(\sigma_1+i), -\infty < \sigma_1 < \infty$, функции $F^{\pm}_{\tau}(\sigma_1)$ соответственно аналитически продолжимы по σ_1 в верхней и нижней полуплоскостях; левая матрица справа от равенства аналитически продолжима по σ_1 в нижней полуплоскости, а правая матрица – в верхней полуплоскости.

Таким образом, при $a(\tau) \neq 0, \tau \in \Gamma$ из результатов [20] следует, что оператор A нётеров в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D),\ 0<\beta<2, 1<p<\infty$. Если же выполнено (2.8), но нарушено условие $a(\tau)\neq 0, \tau\in\Gamma$, то оператор A не может быть Φ_+ или Φ_- оператором в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D),\ 0<\beta<2, 1<p<\infty$, в этом случае, что нетрудно проверить, матрица $G_z(\sigma_1+i)$ факторизуется с частными индексами $\varkappa^+ = 1$ и $\varkappa^- = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{b(\tau)\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}}{1-q(\tau)\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}} \\ \frac{\overline{b(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}}{1-\overline{q(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b(\tau)}{1-q(t)\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\overline{b(\tau)}}{1-\overline{q(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь остаётся доказать формулу для вычисления индекса оператора A. Для этого рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\nu = a(z)I + b(z)S_{\nu q}K,$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\nu \in [0,1]$. Поскольку $M_1 = A$ и $M_0 = a(z)I + b(z)SK$, то из результатов полученных Бильманом Б.М. и Джангибековым Г. [46] следует, что индекс оператора A равен

$$\varkappa = -2Ind_\Gamma a(\tau).$$

Замечание 2.1. *Аналогичным образом исследован оператор*

$$\overline{A} = a(z)I + b(z)\overline{S}_qK,\ (\overline{S}_qf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\overline{\zeta}-\overline{z}+q(z)(\zeta-z)\Big)^2},$$

где,как в теореме 2.2 индекс оператора $\overline{A}$ *будет равен* $\varkappa = 2Ind_\Gamma a(\tau)$.

Замечание 2.2. *Требование* $|q(z)|<1$ *в теореме 1 можно ослабить до* $|q(z)|\neq 1$. *Действительно, если* $|q(z)|>1$, *то достаточно заметить,* *что имеет место равенство* $q(S_q f)(z) = q_1 \overline{S}_{q_1} f)(z)$, где $q_1 = \frac{1}{q}$.

2.5 Исследование обобщенного оператора $(S_{mq} f)(z)$, при чётных m

В пространстве $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ рассмотрим следующий интегральный оператор

$$A = a(z)I + b(z)S_{mq}K, \tag{2.13}$$

где

$$(S_{mq} f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{\Big((\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})^m\Big)^2},$$

m – целое чётное число и $m \neq 0$, D – ограниченная область комплексной плоскости, содержащая внутри точку $z = 0$, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I - тождественный оператор, $a(z),\ b(z), q(z)$ – непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции, причём $|q(z)| < 1$ при всех $z \in \overline{D}$, черта над функцией означает переход к комплексно-сопрежённым значениям, dS_ζ – элемент плоской меры Лебега, двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Прежде всего преобразуем оператора $(S_{mq} f)(z)$,

$$(S_{mq} f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{\Big((\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})^m\Big)^2} =$$

$$= \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(\zeta - z)^{(m-1)}(\overline{\zeta} - \overline{z})^{m-1} f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^{2m}\Big(1 + (-1)^{m-1} q(z)\Big(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\Big)^m\Big)^2} =$$

$$= \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^{m-1} f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^{m+1} \Big(1 + (-1)^{m-1} q(z) \Big(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\Big)^m\Big)^2} =$$

$$= \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{\Big(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\Big)^m f(\zeta) ds_\zeta}{|\zeta - z|^2 \Big(1 + (-1)^{m-1} q(z) \Big(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\Big)^m\Big)^2},$$

Так как, $\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} = e^{-2im\theta}, \ \theta = arg(\zeta - z)$, тогда

$$(S_{mq} f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{e^{-2im\theta} f(\zeta) ds_\zeta}{|\zeta - z|^2 \Big(1 + (-1)^{m-1} q(z) e^{-2im\theta}\Big)^2},$$

Через $u(z, \theta)$ обозначим следующее выражение

$$u(z, \theta) = \frac{-2im\theta}{(1 + (-1)^{m-1} q(z) e^{-2im\theta})^2},$$

а оператор $(S_{mq} f)(z)$ представим в таком виде

$$(S_{mq} f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{u(z, \theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

здесь $u(z, \theta), \ (\theta = arg(\zeta - z))$ называется харакеристикой оператора S_{mq} и является ограниченной функцией, зависящей от полюса. Как видно, что $\int_0^{2\pi} u(z, \theta) d\theta = 0, \ \forall z \in \overline{D}$, то есть выполняется условие существования интеграла. Из результатов [5] следует, что в пространстве $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, \ 0 < \beta < 2)$ оператор S_{mq} ограничен, а обратимость оператора при $m = 2$ была показана в работе (см. [27]), где, при любом четным m можно показать, что оператор

$$(A_{1m} f)(z) = f(z) I - q(z)(S_{mq} f)(z)$$

является регуляризатором для оператора

$$(A_{2m} f)(z) = f(z) I + q(z)(S_m f)(z),$$

причем, если $q(z)=const$, то A_1 будет обратным оператором для A_2.

Далее займёмся установлением условия нёторовости оператора (2.13) в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ и получением формулы для вычисления индекса. Из результатов [20] следует, что оператор A только тогда будет нёторовым, если нёторовой является операторная матрица

$$U=\begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_{mq} \\ \overline{b(z)}KS_{mq}K & \overline{a(z)}I \end{pmatrix}.$$

Разложив характеристику $u(z,\theta)$ в ряд по степеням $e^{-2im\theta}$, получим

$$u(z,\theta)d\theta=\frac{e^{-2im\theta}}{(1+(-1)^{m-1}q(z)e^{-2im\theta})^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(-1)^{(m-1)k}q^k(z)e^{-2im(k+1)\theta}$$

Отсюда

$$(S_{mq}f)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}(z)(-1)^{m(n-1)}\cdot n\cdot\frac{(-1)^m m}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{-2imn\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)dS_\zeta=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}(z)\cdot\frac{(-1)^{mn}mn}{\pi}\iint\limits_D\frac{e^{-2imn\theta}}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)dS_\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}(z)(S_{mn}f)(z).$$

Поскольку символ оператора S_{mn} равен $(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^{mn}$ $(0<|\sigma|<\infty,\ \sigma=\sigma_1+i\sigma_2)$, то символом S_{mq} будет

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\Big)^{mn}=\Big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\Big)^m\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}(z)\Big(\Big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\Big)^m\Big)^{(n-1)}=\frac{\Big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\Big)^m}{1-q(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\Big)^m}$$

Ссылаясь на результаты Дудучава Р. [20] можно утверждать, что свойства оператора S_{mq} определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^m}{1-q(z)(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^m} \\ & \\ \overline{b(z)}\frac{(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}})^m}{1-\overline{q(z)}(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}})^m} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.2. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ, тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1 - |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{2.14}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1 + |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D} \tag{2.15}$$

Действительно, матрица $\forall z \in \overline{D}$ невырождена. Это означает, что $detG_z(t) \neq 0$, то есть $detG_z(t) = |a(z)|^2 - \frac{|b(z)|^2}{|1-|q(z)||^2} \neq 0$, это неравенство эквивалентно неравенствам (2.14) и (2.15).

Имеет место

Теорема 2.3. *Для нётеровости оператора A из (2.13) в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: (2.14) или (2.15). При этом, если выполнено условие (2.14), то оператор A имеет ограниченный обратный, а если выполнено условие (2.15), то его индекс равен*

$$\varkappa = -2mInd_{\Gamma}a(\tau).$$

Используя доказательство теоремы 2.2 аналогично можно доказать и эту теорему.

Замечание 2.3. *Аналогичный результат в лебеговом пространстве* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ *получен для оператора*

$$\overline{A} = a(z)I + b(z)\overline{S}_{mq}K,$$

где

$$(\overline{S}_{mq}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{\Big((\overline{\zeta} - \overline{z})^m + (-1)^{m-1} q(z)(\zeta - z)^m\Big)^2}.$$

Замечание 2.4. *Если рассматривать оператор*

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)S^E_{mq}K, \tag{2.16}$$

где E – комплексная плоскость $z = x + iy$, $|q(z)| < 1$,

$$(S^E_{mq}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_E \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{\Big((\zeta - z)^m + (-1)^{m-1} q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})^m\Big)^2},$$

то имеет место

Теорема 2.4. *Для нётеровости оператора $\mathcal{A}$ из (2.16) в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.14) или (2.15), при этом, если одно из этих условий выполнено, то оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный.*

3 О некоторых четырёхкомпонентных двумерных сингулярных интегральных операторах с характеристиками, зависящими от полюса

Пусть D - ограниченная область комплексной плоскости,содержащая внутри точку $z = 0$ граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой, I - тождественный оператор, $a(z), b(z), c(z), d(z), q(z)$ – непрерывные в $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ комплекснозначные функции, причём $|q(z)| \leq q_0 < 1$ при всех $z \in \overline{D}$.

В пространстве $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-\frac{2}{p}}|f(z)| = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}} = ||F||_{L^p}\}$$

рассмотрим следующий сингулярный интегральный оператор:

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_q + d(z)\overline{S}_qK, \tag{3.1}$$

где

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_qf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z})\Big)^2},$$

черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Оператор (3.1) в случае $q(z) \equiv 0$ изучен в работе [26]. В статье [52] нами был показан случай когда в (3.1) $b(z) = c(z) = 0$ и $|q(z)| \leq q_0 < 1$. В данной работе установлены необходимые и достаточные условия нётеровости сингулярных интегральных операторов типа A в лебеговом пространстве

$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ и получены формулы для вычисления индекса.

3.1 Сведение оператора A к соответствующим операторам A_1 и A_2

Поскольку символ оператора S_q (см.[52]) равен

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}},\ (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2,\ 0 < |\sigma| < \infty),$$

то тогда, согласно [20], свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & b(z) + d(z)\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \\ \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}} & \overline{a(z)} + \overline{c(z)}\frac{\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}}{1-\overline{q(z)}\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}} \end{pmatrix},\ z \in \overline{D}.$$

Лемма 3.1. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ ($det G_z(\sigma) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{3.2}$$

$$|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c.$$

Рассмотрим ограниченные в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ операторы $T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K, T_2 = \overline{d(z)}I - c(z)K$. Из леммы следует, что при выполнении условия (3.2) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причём

$$A = T_1^{-1} A_1, \quad A_1 = \Delta_1(z) I + \lambda(z) S_q + \overline{\mu(z)} K S_q.$$

В случае (3.3) оператор T_2 имеет непрерывный обратный

$$A = T_2^{-1} A_2, \quad A_2 = \mu(z) I - \lambda(z) K - \Delta_2(z) K S_q.$$

3.2 Необходимые и достаточные условия нётеровости оператора A

Исследование нётеровости оператора A и получение формулы для индекса сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2. Из результатов [20] следует, что для нётеровости A необходимо выполнение (3.2) или (3.3).

Теорема 3.1. *Для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z) - \Delta_1(z) q(z)| + |\mu(z)|, \ \forall z \in \overline{D}, \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} |\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)} q(z))| > \\ > |\lambda(z) - \Delta_1(z) q(z)| + |\mu(z)|, \forall z \in \overline{D}; \ \mu(t) \neq 0, \ \forall t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{3.5}$$

При этом, если выполнено условие (3.4), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении условия (3.5) его индекс равен

$$\varkappa = 2 Ind_\Gamma \mu(\tau).$$

3.3 Факторизация символической матрицы оператора A_2

3.3.1. Сначала расмотрим оператор A_2. Соответствующая оператору A матрица символ имеет вид

$$G_z^{(1)}(\sigma) = \begin{pmatrix} \mu(z) & -\Big(\lambda(z) + \Delta_2(z)\frac{\frac{\sigma}{\bar\sigma}}{1-q(z)\frac{\sigma}{\bar\sigma}}\Big) \\ -\Big(\overline{\lambda(z)} + \Delta_2(z)\frac{\frac{\bar\sigma}{\sigma}}{1-q(z)\frac{\bar\sigma}{\sigma}}\Big) & \overline{\mu(z)} \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

Если мы покажем, что матрица $G_z^{(1)}(\sigma)$ факторизуется с нулевыми частными индексами, то из результатов [20] будет следовать, что оператор нётеров в $(L^2(D)$. С этой целью для матрицы $G_z^{(1)}(\sigma)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| < 1$ функций $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$.

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = \mu\Phi_1^+(t) + (-\lambda + \frac{\Delta_2 t}{1-\bar q t})\Phi_2^+(t) \\ \Phi_2^-(t) = (-\overline{\lambda} + \frac{\Delta_2 \bar t}{1-q\bar t})\Phi_1^+(t) + \mu\Phi_2^+(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

где $\Phi_{1,1}(t)$, $\Phi_{1,2}(t)$. – неизвестные функции точки окружности $|t| = 1$, аналитически продолжимые по t, соответственно, внутри и вне единичного круга.

Займемся решением задачи Римана. В первом равенстве системы (3.6) слева стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля эта функция равна постояной, то есть $\Phi_1^-(t) = c_1$. Тогда

$$c_1 = \mu\Phi_1^+ + (-\lambda + \frac{\Delta_2 t}{1-\bar q t})\Phi_2^+(t)$$

или

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1}{\mu} - \frac{(-\lambda + \frac{\Delta_2 t}{1-\bar q t})}{\mu}\Phi_2^+(t) \tag{3.7}$$

Поставив значение $\Phi_1^+(t)$ во второе равенство системы (3.6) и учитывая, что

$$detG_z(t) = |\mu|^2 - | - \lambda + \frac{\Delta_2 t}{1 - \overline{q}t}|^2$$

можно факторизовать в виде $\frac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0,\ F^-(t) \neq 0$ – аналитческие продолжимые, соответственно, внутри и вне единичного круга функции, получим

$$\Phi_2^-(t) = \frac{c_1}{\mu}(-\overline{\lambda} + \frac{\Delta_2 \overline{t}}{1 - q\overline{t}}) + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{F^+(t)}{F^t(t)}\Phi_2^+(t)$$

Отсюда

$$F^-(t)[\Phi^-(t) - \frac{c_1}{\mu}(-\overline{\lambda} + \frac{\Delta_2 \overline{t}}{1 - q\overline{t}})] = \frac{F^+(t)}{\mu}\Phi_2^+(t). \tag{3.8}$$

Левая часть последнего равенства аналитически продолжима вне единичного круга функций, а правая часть внутри единичного круга за исключением точка q

$$F^-(t)[\Phi^-(t) - \frac{c_1}{\mu}(-\overline{\lambda} + \frac{\Delta_2 \overline{t}}{1 - q\overline{t}})] = c_2$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{c_2 \mu}{F^+(t)} \tag{3.9}$$

Далее найдём

$$\Phi_2^-(t) = \frac{c_2}{F^+(t)} + \frac{c_1}{\mu}(-\overline{\lambda} + \frac{\Delta_2 \overline{t}}{1 - q\overline{t}})$$

Поставив значение (3.9) в (3.7) найдём

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1}{\mu} - \frac{(-\lambda + \frac{\Delta_2 \overline{t}}{1 - q\overline{t}})}{\mu}\Phi_2^+(t)$$

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1}{\mu} - \frac{(-\lambda + \frac{\Delta_2 \overline{t}}{1 - q\overline{t}})c_2}{F^+(t)}.$$

Тепер, выбрав сначала $c_1 = 1,\ c_2 = 0$, а затем $c_1 = 0,\ c_2 = 1$, найдём элементы матрицы $\Phi^-(\xi)$ и $\Phi^+(\xi)$

$$\Phi^{-}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}(-\overline{\lambda}+\frac{\Delta_2\overline{t}}{1-q\overline{t}}) & \frac{1}{F^{-}(t)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{+}(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & -\frac{(-\lambda+\frac{\Delta_2 t}{1-\overline{q}t})}{F^{+}(t)} \\ 0 & \frac{\mu}{F^{+}(t)} \end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$det\Phi^{-}(t)=\frac{1}{F^{-}(t)}\neq 0,\ \ det\Phi^{+}(t)=\frac{1}{F^{+}(t)}\neq 0$$

и $\Phi^{-}(t) = G_z(t)\cdot\Phi^{+}(t)$ или $G_z(t) = \Phi^{-}(t)(\Phi^{+}(t))^{-1}$ В матричном виде матрица $G_z(t)$ имеет такой вид:

$$G_z(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}(-\overline{\lambda}+\frac{\Delta_2\overline{t}}{1-q\overline{t}}) & \frac{1}{F^{-}(t)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mu}(-\overline{\lambda}+\frac{\Delta_2\overline{t}}{1-q\overline{t}}) & \frac{1}{F^{-}(t)} \end{pmatrix}$$

В случае, если $\mu=0$, матрица $G_z(t)$ факторизуется в таком виде:

$$G_z(t)=\begin{pmatrix} 0 & \lambda+\frac{\Delta_2 t}{1-\overline{q}t} \\ -\overline{\lambda}+\frac{\Delta_2\overline{t}}{1-q\overline{t}} & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \Delta_2+\lambda\overline{q}-\lambda\overline{t} \\ \frac{1}{1-q\overline{t}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t^{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta_2+\overline{\lambda}q-\lambda t & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\overline{q}t} \end{pmatrix}$$

Установлено, что если $\mu(\tau)\neq 0, \tau\in\Gamma$, то матрицы-функции $G_{\tau}^{(1)}(\sigma_1\pm i)$ факторизуются с нулевыми частными индексами в явном виде:

$$G_\tau^{(1)}(\sigma_1 \pm i) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ -\frac{1}{\mu(\tau)}\left(\overline{\lambda(\tau)} + \frac{\Delta_2(\tau)}{\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}-q(\tau)}\right) & \frac{1}{F_\tau^-(\sigma_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(\tau) & -\left(\lambda(\tau) + \frac{\Delta_2(\tau)\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}}{1-\overline{q(\tau)}\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}}\right) \\ & \\ 0 & \frac{F_\tau^+(\sigma_1)}{\mu(\tau)} \end{pmatrix},$$

где $\frac{F_\tau^+(\sigma_1)}{F_\tau^-(\sigma_1)} = \det G_\tau^{(1)}(\sigma_1+i), -\infty < \sigma_1 < \infty$, функции $F_\tau^\pm(\sigma_1)$, соответственно, аналитически продолжимы по σ_1 в верхней и нижней полуплоскостях; левая матрица справа от равенства аналитически продолжима по σ_1 в нижней полуплоскости, а правая матрица – в верхней полуплоскости. Таким образом, при $\mu(\tau) \neq 0, \tau \in \Gamma$ из результатов [20] следует, что оператор A нётеров в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2, 1 < p < \infty)$. Если же выполнено условие (3.5), но нарушено условие $\mu(\tau) \neq 0, \tau \in \Gamma$, то оператор A не может быть Φ_+ или Φ_- оператором в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2, 1 < p < \infty)$, в этом случае, что нетрудно проверить, матрица $G_z^{(1)}(\sigma_1 + i)$ факторизуется с частными индексами $\varkappa^+ = 1$ и $\varkappa^- = -1$.

Теперь остаётся доказать формулу для вычисления индекса оператора A. Для этого рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\nu = \mu(z)I - \nu\lambda(z)K - \Delta_2(z)KS_q,$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\nu \in [0, 1]$. Поскольку $M_1 = A_1$ и $M_0 = \mu(z)I - \Delta_2(z)KS_q$, то из результатов [52] следует, что индекс оператора A равен $\varkappa = -2Ind_\Gamma\mu(\tau)$.

3.3.2. Пусть выполнено условие (3.4). Тогда также, как в пункте **3.3.1.** доказывается, что соответствующая матрица $G_\tau^{(2)}(\sigma_1 \pm i)$ безусловно факторизуется с нулевыми частными индексами, и тем самым из [20] следует, что оператор A при условии (3.4) нётеров в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D), 0<\beta<2, 1<p<\infty$. Далее заметим, что в пространстве $L^2(D)$ норма оператора S_q имеет оценку

$$||S_q||_{L^2(D)} < \max_{\substack{z\in D,\\ |t|=1}} |\Phi_z(t)| \leq \frac{1}{1-q_0}.$$

Тогда при условии $|\Delta_1(z)| < \frac{|\lambda(z)|+|\mu(z)|}{1-q_0}$ из принципа сжатых отображений следует обратимость оператора A_1 в $L^2(D)$.

Рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\nu = \Delta_1(z)I + \lambda(z)K + \overline{\mu(z)}KS_{\nu q},$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\nu \in [0,1]$. Поскольку $M_1 = A_1$ и $M_0 = \Delta_1(z)I + \lambda(z)K + \overline{\mu(z)}KS_q$, то из результатов [26] следует, что оператор A обратим в $L^p(D)(1<p<\infty)$, а в силу теоремы 2.1 из [52] в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1<p<\infty,\ \ 0<\beta<2)$.

3.3.3. Обобщение. Аналогичный результат в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1<p<\infty, 0<\beta<2)$ получен для оператора

$$A = a(z)I + b(z)K + c(z)S_{mq} + d(z)\overline{S}_{mq}K,$$

где

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{(-1)^m m}{\pi} \iint\limits_D \frac{|\zeta - z|^{2(m-1)} f(\zeta) ds_\zeta}{\Big((\overline{\zeta}-\overline{z})^m + (-1)^{m-1}q(z)(\zeta-z)^m\Big)^2}.$$

4 Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса

4.1 Основной сингулярный интегральный оператор с нечётной характеристикой, зависящей от полюса

Пусть D – ограниченная область комплексной плоскости, граница Γ которой состоит из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова, не пересекающихся между собой и содержащая внутри точку $z = 0$, I - тождественный оператор, $a(z)$, $b(z), q(z)$ -непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| < 1$ при всех $z \in \overline{D}$.

В пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$:

$$L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-\frac{2}{p}}|f(z)| = F(z) \in L^p(D), ||f||_{L^p_{\beta-\frac{2}{p}}} = ||F||_{L^p}\}$$

исследуем следующий сингулярный интегральный оператор

$$A = a(z)I + b(z)S_{mq}K, \tag{4.1}$$

где

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{m}{2\pi i^m}\iint\limits_D \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^m|\zeta-z|^{m-2}f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(|\zeta-z|^m-(-i)^m q(z)(\overline{\zeta}-\overline{z})^m\Big)^2}, \tag{4.2}$$

черта над функцией означает переход к комплексно-сопряженным значениям, а двумерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$ и m нечётное число и $m > 0-$.

Если записать оператор S_{mq} в виде

$$(S_{mq}f)(z) = \frac{m}{2\pi i^m}\iint\limits_D \frac{u(z,\theta)}{|\zeta-z|^2}f(\zeta)ds_\zeta,$$

где характеристика $u(z,\theta)$ $(\theta = arg(\zeta - z))$ оператора S_{mq}

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-im\theta}}{(1-(-i)^m q(z)e^{-im\theta})^2}$$

является ограниченной функцией, зависящей от полюса z и удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} u(z,\theta)d\theta = 0, \ \forall z \in \overline{D}$, то из результатов [5], следует, что оператор S_{mq} ограничен в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D) \quad (1 < p < \infty, \ 0 < \beta < 2)$. Отметим, что оператор S_{mq}, при $m = 2$ был введён в работе [22], в статье [52] нами был показан оператор A при $m = 2$, а в работе [32] при любом целом $m-$ было показано, что оператор

$$(A_{mq}f)(z) = f(z)I - q(z)(S_{mq}f)(z) \tag{4.3}$$

является регуляризатором для оператора

$$(A_m f)(z) = f(z)I + q(z)(S_m f)(z), \tag{4.4}$$

причём, если $q(z) = const$, то A_{mq} будет обратным оператором для A_m.

Цель данной работы установить необходимые и достаточные условия нётеровости сингулярных интегральных операторов типа A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ и получить формулы для вычисления индекса.

4.2 Теорема о нётеровости оператора A

Теорема 4.1. *Для того чтобы оператор A был неётеровым в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$|a(z)|^2(1-|q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{4.5}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{4.6}$$

При выполнении этих условий индекс оператора A равен

$$\varkappa = -mInd_{\Gamma} a(\tau).$$

Схема доказательства. Оператор A будет нётеровым тогда и только тогда, когда нётеровой является операторная матрица

$$B = \begin{pmatrix} a(z)I & b(z)S_m q \\ \overline{b(z)} K S_{mq} K & \overline{a(z)} I \end{pmatrix}.$$

К оператору B применимы результаты [20]. Разложив характеристику $u(z,\theta)$ в ряд по степеням $e^{-im\theta}$:

$$u(z,\theta) = \frac{e^{-im\theta}}{(1-(-i)^m q(z) e^{-im\theta})^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^{mk}(k+1) q^k(z) e^{-im(k+1)\theta},$$

представим оператор S_{mq} в виде

$$(S_{mq} f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)(-i)^{m(n-1)} n \frac{m}{2\pi i^m} \iint\limits_D \frac{e^{-imn\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z) \frac{(-i)^{m(n-1)} i^{mn}}{i^m} \cdot \frac{mn}{2\pi i^{mn}} \iint\limits_D \frac{e^{-imn\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta \equiv \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)(S_{mn} f)(z). \tag{4.7}$$

4.3 Символ сингулярного оператора S_{mq}

Поскольку символ оператора S_{mn} равен $(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|})^{mn}$ и символ оператора $\overline{S}_{mn}$ равен $-(\frac{\sigma}{|\sigma|})^{mn}$ $\quad (0 < |\sigma| < \infty,\ \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2)$, то, соответственно, символами операторов S_{mq} и $\overline{S}_{mq}$ будут

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = \frac{\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1-q(z)\Big(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{mn} = \Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}\sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}^{n-1}(z)\Big(-\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m(n-1)} = -\frac{\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}}{1+\overline{q(z)}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big)^{m}},$$

тогда, согласно [20], свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} \\ -\overline{b(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} & \overline{a(z)} \end{pmatrix}, \; z \in \overline{D}.$$

Лемма 4.1. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ $(detG_z(\sigma \neq 0))$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|a(z)|^2(1-|q(z)|^2) + |b(z)|^2 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{4.8}$$

$$a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{4.9}$$

Из результатов [20] следует, что для нётеровости A необходимо выполнение (4.8) или (4.9). Рассмотрим сначала случай (4.8) и временно ограничимся пространством $L^p(D), 1 < p < \infty$. Согласно результатом полученным Дудучавой Р. [20] для нётеровости A необходимо и достаточно, чтобы матрицы $G_\tau(\sigma_1 \pm i)$ $(-\infty < \sigma_1 < \infty), \tau \in \Gamma$ имели нулевые частные индексы. Поскольку $G_\tau(\sigma_1 \pm i)$ не зависят от p, то оператор A будет одновременно нётеровым или ненётеровым в $L^p(D)$ для всех $p \in (1, \infty)$. Поскольку $S_{mn} = S^{mn}$ (см.[24]) и $||S^{mn}||_{L^p(D)} \leq ||S||^{mn}_{L^p(D)}$, то в силу того, что $||S^m||_{L^2(D)} < 1$ с учётом (4.7) получим

$$||S_{mq}||_{L^2(D)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |q(z)|^{n-1} ||S||^{mn}_{L^2(D)} < \sum_{n=1}^{\infty} |q(z)|^{n-1} = \frac{1}{1 - |q(z)|}.$$

Поэтому в силу (4.8) из принципа сжатых отображений следует обратимость оператора A в $L^2(D)$. Следовательно, частные индексы матриц $G_\tau(\sigma_1 \pm i), \tau \in \Gamma$ равны нулю. Рассмотрим теперь семейство нётеровых операторов

$$M_\nu \equiv a(z)I + \nu \cdot b(z) S_{mq} K,$$

непрерывно зависящих от параметра $\nu \in [0, 1]$. Поскольку $M_0 = a(z)I, M_1 = A$, то индекс A равен нулю в любом $L^p(D)$ при $1 < p < \infty$. Далее, в силу вложения $L^p(D) \subset L^2(D)$ $(p > 2)$, оператор A имеет нулевое ядро в $L^p(D)$ при $p > 2$. При $1 < p < 2$ этот факт устанавливается путём перехода к сопряженному оператору. Таким образом, показано, что A – обратимый оператор в $L^p(D)$ $(1 < p < \infty)$. Что касается утверждения теоремы относительно пространства $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D)$, то достаточно сослаться на вложение $L^p_{\beta - \frac{2}{p}}(D) \subset L^s(D)$ при некотором $s > 1$ (см.[52].)

Пусть выполнено условие (4.9). Установлено, что если $a(\tau) \neq 0, \quad \tau \in \Gamma$, то матрицы-функции $G_\tau(\sigma_1 \pm i)$ факторизуются с нулевыми частными индексами в явном виде:

$$\begin{pmatrix} a(\tau) & \frac{b(\tau)\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^{\frac{m}{2}}}{1-q(\tau)\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^{\frac{m}{2}}} \\ -\frac{\overline{b(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}}{1+\overline{q(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}} & \overline{a(\tau)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b(\tau)\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}}{\overline{a(\tau)}\left(\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}-q(\tau)\right)} & \frac{1}{F_\tau^-(\sigma_1)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\overline{b(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}}{1+\overline{q(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}} & \overline{a(\tau)} \\ \frac{F_\tau^+(\sigma_1)}{\overline{a(\tau)}} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\frac{F_\tau^+(\sigma_1)}{F_\tau^-(\sigma_1)} = \det G_\tau(\sigma_1+i)$ $(-\infty < \sigma_1 < \infty)$ функции $F_\tau^\pm(\sigma_1)$, соответственно, аналитически продолжимы по σ_1 в верхней и нижней полуплоскостях; левая матрица справа от равенства аналитически продолжима по σ_1 в нижней полуплоскости, а правая матрица – в верхней полуплоскости.

Таким образом, при $a(\tau) \neq 0, \tau \in \Gamma$ из результатов [20] следует, что оператор A нётеров в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ \ 1 < p < \infty)$. Если же выполнено условие (4.9), но нарушено условие $a(\tau) \neq 0, \tau \in \Gamma$, то оператор A не может быть Φ^+ или Φ^- оператором в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0 < \beta < 2,\ \ 1 < p < \infty)$ в этом случае что нетрудно проверить, матрица $G_z(\sigma_1+i)$

факторизуется с частными индексами $\varkappa^+ = 1$ и $\varkappa^- = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{b(\tau)\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^{\frac{m}{2}}}{1-q(\tau)\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^{\frac{m}{2}}} \\ -\frac{\overline{b(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}}{1+\overline{q(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{b(\tau)}{1-q(t)\left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^{\frac{m}{2}}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sigma_1+i}{\sigma_1-i}\right)^{\frac{m}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\overline{b(\tau)}}{1+\overline{q(\tau)}\left(\frac{\sigma_1-i}{\sigma_1+i}\right)^{\frac{m}{2}}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь остаётся доказать формулу для вычисления индекса оператора A. Для этого рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\nu = a(z)I + b(z)S_{\nu mq}K,$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\nu \in [0,1]$. Поскольку $M_0 = A$ и $M_1 = a(z)I + b(z)S_mK$, то из результатов [46] следует, что индекс оператора A равен $\varkappa = -mInd_\Gamma a(\tau)$.

Замечание 4.1. *Аналогичным образом исследован оператор*

$$\overline{A} = a(z)I + b(z)\overline{S}_{mq}K,\ (\overline{S}_{mq}f)(z) = \frac{m}{2\pi i^m}\iint\limits_D \frac{(\zeta-z)^m|\zeta-z|^{m-2}f(\zeta)ds_\zeta}{\Big(|\zeta-z|^m - (-i)^m q(z)(\zeta-z)^m\Big)^2}$$

где, как в теореме 4.1 индекс оператора $\overline{A}$ будет равен $\varkappa = mInd_\Gamma a(\tau)$.

Замечание 4.2. *Требование $|q(z)| < 1$ в теореме 4.1 можно ослабить до $|q(z)| \neq 1$. Действительно, если $|q(z)| > 1$, то достаточно заме-*

тить, что имеет место равенство $(S_{mq}f)(z) = (-1)^m q_1^2(\overline{S}_{mq_1}f)(z)$, где $q_1 = -\frac{1}{(-i)^m q}$.

4.4 Четырёхкомпонентный сингулярный интегральный оператор с нечётной характеристикой, зависящией от полюса

В пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассмотрим следующий сингулярный интегральный оператор:

$$\mathcal{A} = a(z)I + b(z)K + c(z)S_{mq} + d(z)\overline{S}_{mq}K, \tag{4.10}$$

где $a(z), b(z), c(z), d(z), q(z)$ – непрерывные в $\overline{D} = D\bigcup\Gamma$ комплекснозначные функции, причем $|q(z)| \leq q_0 < 1$, $\forall z \in \overline{D}$. $(Kf)(z) = \overline{f(z)}$,

Оператор (4.10) в случае $q(z) \equiv 0$ изучен в работе [26]. В статье [53] нами был исследован случай, когда в (4.10) $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и $m = 2$.

Поскольку символ оператора S_{mq} равен

$$\Phi_z(\sigma) = \frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1 - q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}, \ (\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2,\ 0 < |\sigma| < \infty),$$

то тогда, согласно [20], свойства оператора A определяются свойствами матрицы

$$G_z(\sigma) = \begin{pmatrix} a(z) + c(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & b(z) - d(z)\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \\ \overline{b(z)} + \overline{d(z)}\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & \overline{a(z)} - \overline{c(z)}\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \end{pmatrix},\ z \in \overline{D}.$$

Лемма 4.2. *Матрица $G_z(\sigma)$ невырожденна для всех $z \in \overline{D}$ и σ ($detG_z(\sigma) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D} \qquad (4.11)$$

$$|\Delta_2(z)+\Delta_1(z)|q(z)|^2-2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > |\lambda_1(z)-\Delta_1(z)q(z)|+|\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D}, \qquad (4.12)$$

причем (4.11) и (4.12) не могут одновременно выполняться ни при одном значении $z \in \overline{D}$, где

$$\Delta_1(z) = |a|^2 - |b|^2, \quad \Delta_2 = |c|^2 - |d|^2, \quad \lambda = \overline{a}c - b\overline{d}, \quad \mu = a\overline{d} - \overline{b}c,$$

$\lambda_1 = \overline{a}c + b\overline{d}, \quad \mu_1 = a\overline{d} + \overline{b}c$ и $\Delta_1(z)\Delta_2(z) \equiv |\lambda_1|^2 - |\mu_1^2|$

Действительно, пусть матрица $G_z(\sigma)$ при всех $z \in \overline{D}$, $|t|^m = 1$ невырожденна, то есть

$$detG_z(\sigma) = \big(a+(c-aq)\overline{t}^m\big)\cdot\big(\overline{a}-(\overline{c}-\overline{aq})t^m\big)-\big(b-(d-b\overline{q})t^m\big)\cdot\big(\overline{b}+(\overline{d}-\overline{b}q)\overline{t}^m\big) =$$

$$\Delta_1(z)(1-|q|^2) - \Delta_2(z) + 2Re\lambda(z)\overline{q(z)} + 2iIm(\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z))\overline{t}^m \neq 0.$$

Это равносильно тому, что

$$\Delta_1(z)(1-|q|^2) - \Delta_2(z) + 2Re\lambda(z)\overline{q(z)} \neq 0, \quad \forall z \in \overline{D}, \qquad (4.13)$$

так как слагаемое

$$2iIm(\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z))\overline{t}^m = (\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z))\overline{t}^m - (\overline{\lambda(z)} - \Delta_1(z)\overline{q(z)})t^m =$$

$$= (\lambda(z) - \Delta_1(z)q(z))e^{-im\varphi} - (\overline{\lambda(z)} - \Delta_1(z)\overline{q(z)})e^{im\varphi}$$

является тригонометрическим полиномом относительно $\varphi \in [0, 2\pi]$ без свободного члена, и не может сохранять для всех значений $\varphi \in [0, 2\pi]$ постоянный знак. Если теперь учесть тождество $|\lambda_1(z)|^2 - |\mu_1(z)|^2 = \Delta_1(z)\Delta_2(z)$ и неравенство $\Big|\Delta_1(z)\Delta_2(z)\Big| > \Big(|\lambda_1(z)| + |\mu_1(z)|\Big)^2$ или $\Big||\lambda_1(z)|^2 - |\mu_1(z)|^2\Big| > \Big(|\lambda_1(z)| + |\mu_1(z)|\Big)^2$, то получим, что неравенство (4.13) эквивалентно выполнению одного из неравенств (4.11) или (4.12).

4.5 Необходимые и достаточные условия нётеровости опрератора $\mathcal{A}$

Рассмотрим следующие ограниченные в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ операторы $T_1 = \overline{a(z)}I - b(z)K, T_2 = \overline{d(z)}I + c(z)K$. Из леммы следует, что при выполнении условия (4.11) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причём

$$\mathcal{A} = T_1^{-1}\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_1 = \Delta_1(z)I + \lambda_1(z)S_{mq} + \overline{\mu_1(z)}KS_{mq}.$$

В случае (4.12) оператор T_2 имеет непрерывный обратный

$$\mathcal{A} = T_2^{-1}\mathcal{A}_2, \quad \mathcal{A}_2 = \mu_1(z)I + \lambda_1(z)K - \Delta_2(z)KS_{mq}.$$

Теорема 4.2. *Для нётеровости оператора $\mathcal{A}$ в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:*

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D}, \tag{4.14}$$

$$\begin{gathered}|\Delta_2(z) - \Delta_1(z)|q(z)|^2 - 2Re(\overline{\lambda(z)}q(z))| > \\ > |\lambda_1(z) - \Delta_1(z)q(z)| + |\mu_1(z)|, \forall z \in \overline{D};\ \mu_1(t) \neq 0, \forall t \in \Gamma.\end{gathered} \tag{4.15}$$

При этом, если выполнено условие (4.14), то оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный, а при выполнении условия (4.15) его индекс равен

$$\varkappa = mInd_{\Gamma}\mu_1(\tau).$$

Доказательство. Исследование нётеровости и индекса оператора $\mathcal{A}$ сводится к соответствующему исследованию операторов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Для нётеровости оператора $\mathcal{A}$ необходимо выполнение условия (4.14) и (4.15).

4.6 Решение задача Римана для матрицы-символа $G_z^{(1)}(\sigma)$

4.6.1. Сначала рассмотрим оператор $\mathcal{A}_1$. Соответствующая оператору $\mathcal{A}$ матрица-символ имеет вид

$$G_z^{(1)}(\sigma) = \begin{pmatrix} \mu_1(z) & \lambda_1(z) + \Delta_2(z)\frac{\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m}{1+\overline{q(z)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)^m} \\ \overline{\lambda_1(z)} - \Delta_2(z)\frac{\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m}{1-q(z)\left(\frac{\overline{\sigma}}{|\sigma|}\right)^m} & \overline{\mu_1(z)} \end{pmatrix}, \ z \in \overline{D}.$$

Если матрица $G_z^{(1)}(\sigma)$ факторизуется с нулевыми частными индексами, то оператор нётеров в $L^2(D)$. С этой целью для матрицы $G_z^{(1)}(\sigma)$ построим задачу Римана для аналитических в единичном круге $|t| < 1$ функций $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\xi)$.

$$\begin{cases} \Phi_1^-(t) = \mu_1\Phi_1^+(t) + (\lambda_1 + \frac{\Delta_2 t^m}{1+\overline{q}t^m})\Phi_2^+(t) \\ \Phi_2^-(t) = (\overline{\lambda} - \frac{\Delta_2\overline{t^m}}{1-q\overline{t^m}})\Phi_1^+(t) + \mu\Phi_2^+(t) \end{cases} \tag{4.16}$$

где $\Phi_{1,1}(t)$, $\Phi_{1,2}(t)$. – неизвестные функции точки окружности $|t^m| = 1$, аналитически продолжимые по t, соответственно, внутри и вне единичного круга.

Займёмся решением задачи Римана. В первом равенстве системы (4.16) слева стоит аналитически продолжимая вне единичного круга функция, а справа аналитически продолжимая внутри единичного круга функция. По теореме Лиувилля эта функция равна постояной, то есть $\Phi_1^-(t) = c_1$. Тогда

$$c_1 = \mu_1 \Phi_1^+ + (\lambda_1 + \frac{\Delta_2 t^m}{1 + \overline{q} t^m}) \Phi_2^+(t)$$

или

$$\Phi_1^+(t) = \frac{c_1}{\mu_1} - \frac{\lambda_1 + \frac{\Delta_2 t^m}{1+\overline{q}t^m}}{\mu_1} \Phi_2^+(t) \tag{4.17}$$

Поставив значение $\Phi_1^+(t)$ во второе равенство системы (4.16) и учитывая, что

$$detG_z(t) = |\mu_1|^2 - (\lambda_1 + \frac{\Delta_2 t^m}{1 + \overline{q} t^m}) \cdot (\overline{\lambda_1} - \frac{\Delta_2 \overline{t}^m}{1 - q\overline{t}^m})$$

можно факторизовать матрицу $G_z(t)$ в виде $\frac{F^+(t)}{F^-(t)}$, где $F^+(t) \neq 0$, $F^-(t) \neq 0$ – аналитческие продолжимые, соответственно, внутри и вне единичного круга функции.

Получим

$$\Phi_2^-(t) = \frac{c_1}{\mu_1}(\overline{\lambda_1} - \frac{\Delta_2 \overline{t}^m}{1 - q\overline{t}^m}) + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{F^+(t)}{F^-(t)} \Phi_2^+(t).$$

Отсюда

$$F^-(t)[\Phi_2^-(t) - \frac{c_1}{\mu_1}(\overline{\lambda_1} - \frac{\Delta_2 \overline{t}^m}{1 - q\overline{t}^m})] = \frac{F^+(t)}{\mu_1} \Phi_2^+(t). \tag{4.18}$$

Левая часть последнего равенства аналитически продолжима вне единичного круга функций, а правая часть внутри единичного круга за исключением точка q

$$F^{-}(t)[\Phi_2^{-}(t)-\frac{c_1}{\mu_1}(\overline{\lambda_1}-\frac{\Delta_2\overline{t}^m}{1-q\overline{t}^m})]=c_2$$

$$\Phi_2^{+}(t)=\frac{c_2\mu_1}{F^{+}(t)}. \tag{4.19}$$

Далее найдём

$$\Phi_2^{-}(t)=\frac{c_2}{F^{-}(t)}+\frac{c_1}{\mu_1}(\overline{\lambda}-\frac{\Delta_2\overline{t}^m}{1-q\overline{t}^m}).$$

Поставив значение (4.19) в (4.17) найдём

$$\Phi_1^{+}(t)=\frac{c_1}{\mu_1}-\frac{(\lambda_1+\frac{\Delta_2 t^m}{1+\overline{q}t^m})}{\mu_1}\Phi_2^{+}(t)$$

$$\Phi_1^{+}(t)=\frac{c_1}{\mu_1}-\frac{(\lambda_1+\frac{\Delta_2 t^m}{1+\overline{q}t^m})c_2}{F^{+}(t)}.$$

Теперь, выбрав сначала $c_1=1,\ c_2=0$, а затем $c_1=0,\ c_2=1$, найдем элементы матрицы $\Phi^{-}(\xi)$ и $\Phi^{+}(\xi)$

$$\Phi^{-}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\mu_1}(\overline{\lambda_1}-\frac{\Delta_2\overline{t}^m}{1-q\overline{t}^m}) & \frac{1}{F^{-}(t)} \end{pmatrix}$$

$$\Phi^{+}(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1} & -\frac{(\lambda_1+\frac{\Delta_2 t^m}{1+\overline{q}t^m})}{F^{+}(t)} \\ 0 & \frac{\mu_1}{F^{+}(t)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$det\Phi^{-}(t)=\frac{1}{F^{-}(t)}\neq 0,\ \ det\Phi^{+}(t)=\frac{1}{F^{+}(t)}\neq 0$$

и $\Phi^-(t) = G_z(t)\cdot\Phi^+(t)$ или $G_z(t) = \Phi^-(t)(\Phi^+(t))^{-1}$ В матричном виде матрица $G_z(t)$ имеет такой вид:

$$G_z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ \frac{1}{\mu_1}(\overline{\lambda_1} - \frac{\Delta_2\bar{t}^m}{1-q\bar{t}^m}) & \frac{1}{F^-(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ \\ \overline{\lambda_1} + \frac{\Delta_2 t^m}{1+\overline{q}t^m} & \frac{F^+(t)}{\mu_1}, \end{pmatrix}$$

где вторая матрица справа аналитически продолжима по переменной t внутри единичного круга, а первая матрица вне единичного круга.

В случае, если $\mu_1 = 0$, матрица $G_z(t)$ факторизуется в таком виде:

$$G_z(t) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 + \frac{\Delta_2 t}{1+\overline{q}t^m} \\ \\ \overline{\lambda_1} - \frac{\Delta_2\bar{t}^m}{1-q\bar{t}^m} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Delta_2 + \lambda_1\overline{q} + \lambda_1\bar{t}^m \\ \\ \frac{1}{1-q\bar{t}^m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t}^m & 0 \\ \\ 0 & t^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\Delta_2 + \overline{\lambda_1}q) + \lambda t^m & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\overline{q}t^m} \end{pmatrix}$$

Теперь остаётся доказать формулу для вычисления индекса оператора $\mathcal{A}$. Для этого рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\nu = \mu_1(z)I + \nu\lambda_1(z)K - \Delta_2(z)KS_{mq},$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\nu \in [0,1]$. Поскольку $M_1 = \mathcal{A}_1$ и $M_0 = \mu_1(z)I - \Delta_2(z)KS_{mq}$, то из ранее полученых резултатов следует, что индекс оператора $\mathcal{A}$ равен $\varkappa = -mInd_{\Gamma}\mu_1(\tau)$.

4.6.2. Пусть выполнено (4.14). Тогда также, как в пункте **4.6.1.** доказывается, что соответствующая матрица $G_{\tau}^{(2)}(\sigma_1 \pm i)$ безусловно факторизуется с нулевыми частными индексами, и тем самым, согласно [20] следует, что оператор A при условии (4.14) нётеров в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(0<\beta<2,\ 1<p<\infty)$.

Далее заметим, что в пространстве $L^2(D)$ норма оператора S_{mq} имеет оценку

$$||S_{mq}||_{L^2(D)} < \max_{\substack{z\in D,\\ |t|=1}} |\Phi_z(t)| \leq \frac{1}{1-q_0}.$$

Тогда при условии $|\Delta_1(z)| < \frac{|\lambda_1(z)|+|\mu_1(z)|}{1-q_0}$ из принципа сжатых отображений следует обратимость оператора $\mathcal{A}_1$ в $L^2(D)$. Рассмотрим семейство нётеровых операторов

$$M_\nu = \Delta_1(z)I + \lambda_1(z)K + \overline{\mu_1(z)}KS_{\nu mq},$$

непрерывно по норме зависящих от параметра $\nu \in [0,1]$. Поскольку $M_1 = \mathcal{A}_1$ и $M_0 = \Delta_1(z)I + \lambda_1(z)K + \overline{\mu_1(z)}KS_{mq}$, то из результатов [6] следует, что оператор A обратим в $L^p(D)(1<p<\infty)$, а в силу теоремы 2.1. из [52] в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ $(1<p<\infty,\ 0<\beta<2)$.

5 Об одном новом сингулярном интегральном операторе

5.1 Вспомогательные утверждения и сведение исследуемого оператора

Векуа И.Н. в своей монографии [6] в связи с нахождением гомеоморфизма системы Бельтрами
$$\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}} - q(z)\frac{\partial\omega}{\partial z} = 0,$$
впервые представил простейшее сингулярное интегральное уравнение
$$f(z) - q(z)(S^E f)(z) = g(z), \tag{5.1}$$
где $q(z)$ – заданная в комплексной плоскости E ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству $|q(z)| \leq q_0 < 1$ и
$$(S^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta, \quad z \in E.$$
На основе принципа сжатых отображений он показал, что подобное уравнение безусловно и однозначно разрешимо в пространстве $L^p(E)$ при p близком к двум. Впоследствие Виноградов В.С. [51] и Комяк Н.Н. [16] доказали справедливость увеждения о существовании ограниченного обратного оператора $(I - qS^E)^{-1}$, действующего в $L^p(E)$ при всех $p > 1$. Далее Манджавидзе Г.Ф. [22] в связи с применением уравнения (5.1) к граничным задачам со смещением ввёл в рассмотрение новое сингулярное интегральное уравнение
$$f(z) + q(z)(S_q^E f)(z) = g(z), \tag{5.2}$$

где

$$(S_q^E f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z + q(z)(\overline{\zeta} - \overline{z}))^2} ds_\zeta.$$

Таким образом, Манджавидзе Г.Ф. показал, что при условии непрерывности функции $q(z) : |q(z)| \leq q_0 < 1$, оператор $I + q(z)S_q^E$ является левым и правым регуляризатором оператора $I - q(z)S^E$ в пространствах Гельдера $H_\alpha (0 < \alpha < 1)$ и в пространстве Лебега $L^p(E)(1 < p < \infty)$.

Следует отметить, что изучение разрешимости интегрального уравнения (5.2) по плоскости E или по ограниченной области D представляет самостоятельный интерес. Дело в том, что сингулярный интегральный оператор S_q относится к интегралам типа Михлина-Кальдерона с характеристиками зависящими от полюса и вопросы нётеровости, вычисление индекса и обратимости операторов с такими интегралами в лебеговых пространствах L^p не изучены. В работе [52] для оператора

$$A = a(z)I + b(z)S_q K, \tag{5.3}$$

по ограниченной области D с границей Ляпунова Г нами было доказано: *для нётеровости оператора A в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий*

$$|a(z)| > \frac{|b(z)|}{1 - |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{5.4}$$

$$|a(z)| < \frac{|b(z)|}{1 + |q(z)|} \quad \forall z \in \overline{D} \quad \textit{и} \quad a(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma. \tag{5.5}$$

При этом, если выполнено условие (5.4), то оператор A имеет ограниченный обратный, а при выполнении условия (5.5) его индекс $\varkappa = -2Ind_\Gamma a(\tau)$.

5.2 Построение регуляризатора оператора A

Естественно возникает вопрос построения регуляризатора оператора A, а в случае выполнения условия (5.4) нахождения обратного оператора A^{-1}. Мы здесь ограничимся случаем, когда оператор A рассматривается на плоскости E. Имеет место

Лемма 5.1. *Если $q(z)$ непрерывная на расширенной плоскости E функция и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ имеет место равенство*

$$(S^E_q \overline{S}^E_q f)(z) = \frac{1}{1-|q(z)|^2}((If)(z)) + q(z)(S^E_q f)(z) + \overline{q(z)}(\overline{S}^E_q f)(z)) + T, \tag{5.6}$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Лемма 5.2. *Если $q(z)$ непрерывная на расширенной плоскости E функция и $|q(z)| \leq q_0 < 1$, в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ оператор*

$$M = I + qS^E_q + \overline{q}\overline{S}^E_q, \tag{5.7}$$

имеет левый и правый регуляризатор

$$R = \frac{1}{1-|q|^2}(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E), \tag{5.8}$$

а в случае $q = const$, оператор R будет левым и правым обратным для исходного оператора M.

Лемма 5.3. *Если $a(z), b(z)$ непрерывные на расширенной плоскости E функции и если выполнено условие $|a(z)| + |b(z)| < 1$, при $\forall z \in E$, тогда* *оператор*

$$N = I + aS^E + b\overline{S}^E, \tag{5.9}$$

имеет в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ $(1 < p < \infty,\ 0 < \beta < 2)$ *левый и правый регуляризатор*

$$R = \frac{1}{1+qr}(I - r\overline{S}^E_r)(I - qS^E_q), \tag{5.10}$$

а в случае постоянных a *и* b *оператор* R *будет левым и правым обратным для исходного оператора* N, *где функции* $q(z)$ *и* $r(z)$ *однозначно находятся из равенств* $a = \frac{q}{1+qr},\ b = \frac{r}{1+qr}, |q(z)| < 1, |r(z)| < 1$ *при* $\forall z \in E$.

Теперь рассмотрим оператор A из (5.3) по плоскости E и запишем его в виде

$$A = I - \lambda S^E_q K, \qquad \lambda(z) = \frac{b(z)}{a(z)}. \tag{5.11}$$

Очевидно, что при условии $|\lambda(z)| < 1 - |q(z)|, \forall z \in E$ оператор A в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ обратим. Имеет место

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* $|\lambda(z)| < 1 - |q(z)|, \forall z \in E$. *Тогда оператор* A *из (5.11) в* $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(E)$ $(1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ *имеет правый и левый регуляризатор вида*

$$R = \nu(I + \overline{\mu}\overline{S}^E_\mu)(I + \mu S^E_\mu)(I - \overline{q}\overline{S}^E)(I - qS^E)(I + \lambda S^E_q K), \tag{5.12}$$

где $\nu = \frac{1+|q|^2-|\lambda|^2}{1+|\mu|^2}$, $|\mu(z)| < 1$ *и функция* μ *находится единственным образом из равенства* $\frac{\mu}{1+|\mu|^2} = \frac{q}{1+|q|^2-|\lambda|^2}$.

В случае, когда $\lambda(z) \equiv const.$ *оператор из (5.12) будет левым и правым обратным для оператора* A *из (5.11).*

Заключение

В результате проделанной работы получены:

- необходимые и достаточные условия нётеровости и получена формула для подсчёта индекса для одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;
- необходимые и достаточные условия нётеровости, а также даны формулы для подсчёта индекса оператора для некоторых четырёхкомпонентных классов двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;
- необходимые и достаточные условия нётеровости и формула для подсчёта индекса, для некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса по ограниченной области в лебеговых пространствах с весом;
- а также найдены левые и правые регуляризаторы некоторых сингулярных операторов нового типа на расширенной плоскости;

Полученные результаты могут быть применены к решению краевых задач теории функций, а также могут быть использованы при чтении спецкурсов по теории сингулярных интегральных уравнений для студентов факультетов математического профиля.

Список литературы

[1] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения /С.Г. Михлин// М.: Физматгиз. 1962. 254 с.

[2] Calderon A., Zygmund A.On the existense of certain singular integrals /A. Calderon, A. Zygmund// Acta math.-1952. -v.88. -№1. p. 85-139.

[3] Calderon A., Zygmund A. On singular integrals /A. Calderon, A. Zygmund// American j. math. -1956. -78.-p. 289-309.

[4] Zygmund A. On singular integrals /A. Zygmund// Rend. math. eapplic. -1957.-v. 5-16. -fass 3-4.-p. 468-505.

[5] Stein E.M. Note on singular integral /M.E. Stein// Proc. Amer. Math. Soc. -1957. -8, №2. p. 250-254.

[6] Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции /И.Н. Векуа// М.: Физматгиз, 1959, 672 с.

[7] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям /Л. Альфорс// М.: Мир. 1969.

[8] Шиффер М. Экстремальные проблемы и вариационные методы в конфрмном отображении /М. Шиффер// В кн.: Международный математический конгресс в Эдинберге (обзорные доклады). М.: Физматгиз. -1962, с. 193-218.

[9] Боярский Б.В. Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций /Б.В.Боярский// Дисс. докт. физ.-мат. наук. М. 1960.

[10] Джураев А.Д. Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной плоской области /А.Д.Джураев// ДАН СССР. 1971, т. 197, №6, -с.1251-1254.

[11] Джураев А.Д. Труды симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа /А.Д. Джураев // т. 2, - Тбилиси, 1972 -с.104-118.

[12] Джураев А.Д. Метод сингулярных интегральных уравнений /А.Д.Джураев// М.: Наука, 1997, 415 с.

[13] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений /В.Н. Монахов// Новосибирск: Наука. 1977, 424 с.

[14] Комяк И.И. Общее решение одного двумерного сингулярного интегрального уравнения /И.И.Комяк// Докл. АН БСССР.-1977, т. 21, №2, с. 1074-1077.

[15] Комяк И.И. Об условиях нётеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений /И.И.Комяк// Докл. АН БССР, 1978, т.22, №6, с. 488-491.

[16] Комяк И.И. Об одном двумерном сингулярном интегральном уравнении /И.И.Комяк// ДАН СССР.- 1980, т.250. №6, с. 1307-1310.

[17] Василевский Н.Л. Об алгебре, порожденной двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами /Н.Л. Василевский // ДАН СССР.-1983.-т.271, №5.- с. 1041-1044.

[18] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами I /Н.Л.Василевский// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №2,-с. 12-21.

[19] Василевский Н.Л. Банаховы алгебры, порожденные двумерными интегральными операторами с ядром Бергмана и кусочно-непрерывными коэффициентами II./Н.Л.Василевский// Изв. ВУЗов Матем.-1986, №3,-с. 33-38.

[20] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. I: the half-spase case /R.Duduchava// J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 41-76.

[21] Duduchava R. On multidimensional singular integral operators. II: the case of compact manifulds /R.Duduchava// J. of operator theory. 1984. v. 11, p. 199- 214.

[22] Манджавидзе Г.Ф. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения / Г.Ф. Манджавидзе // -Тбилиси, -1979. с. 1165-1186

[23] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах /Г. Джангибеков// Матем. заметки, 1989, т. 46, №46, с. 91-93.

[24] Джангибеков Г. О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами /Г. Джангибеков// Изв. ВУЗов. матем. 1992, №9, с. 25-37.

[25] Джангибеков Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эл-

липтических систем уравнений на плоскости /Г. Джангибеков// Док. РАН, 1993, т. 330, №4, с. 415-417.

[26] Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе /К.Х.Бойматов, Г.Джангибеков// Успехи математических наук, 1988, .т.43, вып.8, с. 171-172.

[27] Джангибеков Г., Мамадкаримова М. Об одной формуле обращения / Джангибеков Г., М. Мамадкаримова // Вестник Хорогского гос. университета, 1999. серия 1, №1, с. 26-29.

[28] Чоршанбиева М.Ч. -Некоторые двумерные сингулярные интегральные опeратры с чётными характеристиками. /М.Ч.Чоршанбиева// Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: 2017.

[29] Зарифбеков М.Ш. - Некоторые классы двумерных интегральных операторов с подвижными и неподвижными особенностиями и их приложжения к краевым задачам для эллиптических систем с сингулярными коэффициентами. /М.Ш. Зарифбеков// Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.:2004.

[30] Худжаназарова Г - Некоторые двумерные сингулярные интегральные уравнения и их прложения к дифференциалные уравнения. /Г. Худжаназарова// Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.:2004.

[31] Одинабеков Д.М. - Некоторые классы двумерных интегральных операторов с несколькамии фиксированными особенностями и их приложения к эллиптичиским системам дифференциалных уравнений. /Д.М. Одинабеков// Дисс. канд.физ.-мат. наук. М.:2007.

[32] Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области /Г.Джангибеков// Док. РАН, 2002, т. 383, №1, с. 7-9.
[33] Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве /С.Г.Крейн// М. 1971, 103 с.
[34] Гахов Ф.Д. Краевые задачи /Ф.Д. Гахов// М.: Физ.-мат. лит., 1958, -545 с.
[35] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике /Н.И.Мусхелишвили// М.: Физ.-мат., 1968,-513 с.
[36] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений /Н.П. Векуа// М.: Н, 1970, -379 с.
[37] Симоненко И.Б. Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I, II. /И.Б.Симоненко// Изв. АН СССР, сер. матем. 1965, т. 29, №3,4 с. 567-580, 757-782.
[38] Симоненко И.Б., Чин Нгок Минь. Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость /И.Б.Симоненко// Изво Ростов. унив. 1986, 58 с.
[39] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторах /И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн// Успехи матем. наук.-1957,т. 12, -№2, с. 44-118.

[40] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений /И.С.Градштейн, И.М.Рыжик// М.: Физматгиз, 1963.- 1108 с.

[41] Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов /Г.Джангибеков// ДАН СССР, 1991, т. 319, №4, с. 811-815.

[42] Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области / Г.Джангибеков // ДАН России, - 2004. - т.394. - №6. - с. 811-815.

[43] Михайлов Л.Г. О некоторых двумерных интегральных уравнениях с однородными ядрами /Л.Г.Михайлов// ДАН СССР, -1970. т. 192,№2, -с. 272-275.

[44] Дудучава Р.В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики /Р.В.Дудучава// Тбилиси: Мецниереба, 1979, 133 с.

[45] Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 /Л.Г.Михайлов// Душанбе: Дониш, 1966, 47 с.

[46] Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области /Б.М. Бильман, Г. Джангибеков// ДАН СССР, 1986, т. 288, №4, с. 792-797.

[47] Джангибеков Г. /Г. Джангибеков// Докл. АН ТаджССР, 1977, т.20, №5, с. 3-7.

[48] Михайлов Л.Г. Об одном интегральном уравнений теории обобщенных аналитических функций в сингулярном случае /Л.Г. Михайлов// ДАН СССР, -1970. т. 190. №3, с. 531-534.
[49] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного /Г.М.Голузин// М.: Наука, 1966.-626 с.
[50] Джангибеков Г. - Об одном классе двумерных сингулярных уравнений содержащих комплексное сопражение искомой функции /Г.Джангибеков// Докл. АН ТаджССР, 1981, т. 24, №2, с. 80-85.
[51] Виноградов В.С. Об одной граничной задаче,для эллиптической ситсемы специального вида /В.С. Виноградов// Дифференциальные уравнения, 1971.-т.7, №7, с.1226-1234.

Работы автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Президенте РТ и ВАК РФ:

[52] Валиев Н.Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //ДАН РТ. 2013. Т.56, №1. с.10-17.
[53] Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //ДАН РТ. 2014. Т.57, №7. с.556-562.
[54] Валиев Н.Г. Об одном новом сингулярном интегральном операторе / Джангибеков Г., Валиев Н.Г. // Вестник ТНУ. Серия естественных наук 2017, №1-5, с.138-140.
[55] Валиев Н.Г. Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с неччтными характеристиками, зави-

сящими от полюса / Валиев Н.Г. //Вестник ТНУ. Серия естественных наук 2019, №2, с.212-221.

Работы в других изданиях:

[56] Валиев Н.Г. О нётеровости и индексе одного класса двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. //Материалы международной научной конференции,"Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений"(Душанбе, 17-18 июня 2013 г.) с.39-41.

[57] Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и еҷ преподавания посвященной 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 2014, г. 2(150).) с.150-152.

[58] Валиев Н.Г. Об одном новом сингулярном интегральном операторе /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел посвященной 75-летию доктора физико-математических наук, профессора Собирова Т.С. (Душанбе, 29-30 октября 2015г.) с.167-170.

[59] Валиев Н.Г. Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками, зависящими от полюса[Текст]/ Валиев Н.Г. // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и еёприложений"(Душанбе, 3-4 июня 2016г.) с.12-14.

[60] Валиев Н.Г. Двумерные сингулярные интегральные операторы с характеристиками, зависящими от полюса /Джангибеков Г., Валиев Н.Г. // Материалы международной научной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций"(Душанбе, 27-28 февраля 2018 г.) с.50-52.

[61] Валиев Н.Г. Исследование некоторых классов двумерных сингулярных интегральных операторов с нечётными характеристиками, зависящими от полюса / Валиев Н.Г., Ёгибеков Б.Ш. //Материалы республиканской научной конференции "Математический анализ и его приложения"(Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) с.40-44.