Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Заргаров Джамшед Джангиевич

НАИЛУЧШЕЕ СОВМЕСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный консультант:
академик Национальной Академии
наук Республики Таджикистан,
доктор физико-математических наук
профессор М.Ш. Шабозов;
Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Г.А. Юсупов

Д У Ш А Н Б Е – 2020

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория аппроксимации функций является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математического анализа, и имеет важные приложения в прикладных областях математики. В этой теории особое место занимают экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в различных банаховых пространствах аналитических функций.

Экстремальные задачи наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций изучались, например, в работах К.И.Бабенко [3], В.М.Тихомирова [28,29], Л.В.Тайкова [24–27], J.T.Sheik [42], В.И.Белого [4,5], М.З.Двейрина [16–18], М.Ш.Шабозова [38], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [37], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [35], М.Ш.Шабозова и Х.Х.Пирова [36] и многих других.

В этой работе, продолжая исследования указанных авторов, рассматривается более общая экстремальная задача: требуется найти верхние грани наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными. Эта задача в теории приближения функций мало изучена, и известные нам работы не содержат точных решений. В этой главе задача совместной аппроксимации аналитических в круге функций подпространством полиномов полностью решена. Вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений на некоторых классах аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$.

Общая характеристика работы

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами), темами. Данное диссертационное исследование выполнено в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательской работы кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета на 2016-2020 гг. по теме «Приближения аналитических функций в единичном круге».

Цель и задачи исследования. Основная цель диссертационной работы заключается в следующем:

- найти точные значения верхних граней наилучших совместных приближений и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классах аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$;
- найти новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка от граничных значений в пространстве Харди;
- найти точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников определённых классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы теории аппроксимации и методы решения экстремальных задач теории аналитических функций, а именно метод Н.П.Корнейчука оценки сверху наилучших приближений классов функций подпространством полиномов фиксированной размерности и разработанная В.М.Тихомировым оценка снизу поперечников множеств в различных нормированных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_2$;
- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка от граничных значений в пространстве Харди;
- вычислены точные значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников определённых классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных значениях верхних граней наилучших совместных полиномиальных приближений функций и их последовательных производных;
- теоремы о точных неравенствах между величиной наилучшего среднеквадратического приближения аналитических функций и интегралами, содержащими модули непрерывности r-го порядка;
- теорема о точных значениях различных n-поперечников классов функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры математического анализа и теории функций и кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика АН РТ М.Ш. Шабозова (Душанбе, 2015-2020 гг.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", посвященной 60–летию академика АН Республики Таджикистан Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений", посвященной 85–летию академика АН Республики Таджикистан Михайлова Леонида Григорьевича (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы матема-

тики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);

- международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" (Душанбе, 27-28 апреля 2015 г.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- республиканской научной конференции „Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.).

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 10 работах [43-А — 52-А]. Из 10 работ 4 входят в списки ВАК РТ при Президенте Республики Таджикистан, а 6 в других изданиях. Из совместной с М.Ш. Шабозовым и Г.А. Юсуповым работы [52-А], соавторам принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 52 наименований, занимает 75 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА 1. Наилучшее полиномиальное приближение аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди

§ 1.1. Пространство Харди $\mathscr{H}_p$ $(1 \le p \le \infty)$

1.1.1. Определения и обозначения. Вспомогательные факты и утверждения

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ — соответственно, множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. $\mathscr{A}(U)$ — множество функций комплексного переменного $\Phi(z)$, аналитических в круге $U := \{z : \ |z| < 1\}$. Через $\mathbb{C}$ обозначим множество всех комплексных чисел вида $c := a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Определение 1.1.1. [20]. *Будем говорить, что аналитическая в единичном круге* $U := \{z : \ |z| < 1\}$ *функция*

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k, \ z = \rho e^{it}, \ 0 \le \rho < 1, \ 0 \le t \le 2\pi \tag{1.1.1}$$

принадлежит пространству Харди $\mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$, *если*

$$\|\Phi\|_p := \|\Phi\|_{\mathscr{H}_p} = \lim_{\rho \to 1-0} \Big\{ M_p(\rho, \Phi) \Big\} < \infty, \tag{1.1.2}$$

где

$$M_p(\rho, \Phi) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Phi(\rho e^{it})\right|^p dt \right\}^{1/p}.$$

Хорошо известно, что предел (1.1.2) всегда существует и если угловое граничное значение функции $\Phi(z)$ обозначить через $\Phi(e^{it}) := \Phi(t)$, то есть если полагать

$$\Phi(t) := \Phi(e^{it}) = \lim_{\rho \to 1-0} \Phi\big(\rho e^{it}\big),$$

то конечность нормы (1.1.2) означает, что

$$\|\Phi\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Phi(\rho e^{it})\right|^p dt \right\}^{1/p} < \infty.$$

При $p=\infty$ будем предполагать, что функция $\Phi(z)$ аналитична в замкнутом круге единичного круга $U^* := \{z: \ |z| \le 1\}$ вплоть до границы, а в точках окружности $\Gamma := \{z: \ |z|=1\}$ является непрерывной.

При этом для нормы получаем равенство

$$\left\|\Phi\right\|_{\infty} := \left\|\Phi\right\|_{\mathscr{H}_\infty} = \max\Big\{\left|\Phi(z)\right|: \ |z| \le 1\Big\} =$$

$$= \max\Big\{\left|\Phi\big(e^{it}\big)\right|: \ 0 \le t \le 2\pi\Big\}.$$

Для функции $\Phi(z)$, определённой равенством (1.1.1), понятие производной имеет разный смысл.

Всюду далее, равенством

$$\Phi_a^{(m)}(z) = \frac{\partial^m \Phi(\rho e^{it})}{\partial t^m}, \quad \big(m \in \mathbb{Z}_+, \ \Phi_a^{(0)}(z) \equiv \Phi(z)\big)$$

определим производную m-го порядка аналитическую в U функцию $\Phi(z)$ по аргументу t комплексного переменного $z = \rho e^{it}$ $(0 \le \rho \le 1,\, 0 \le t \le 2\pi)$, полагая при этом

$$\Phi_a'(z) := \frac{\partial}{\partial t}\Phi\big(\rho e^{it}\big) = \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \Phi'(z)zi$$

и, далее рекуррентно, по формуле

$$\Phi_a^{(m)}(z) := \Big\{\Phi_a^{(m-1)}(z)\Big\}_z', \ \ m \in \mathbb{N},\, m \ge 2$$

вычислим m-ые производные по аргументу функции $\Phi_a'(z)$.

Простые вычисления приводят к формулам

$$\Phi_a'(z) = \frac{\partial}{\partial t}\Phi\big(\rho e^{it}\big) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)c_k(\Phi)\rho^k e^{ikt}, \tag{1.1.3}$$

$$\Phi_a^{(m)}(z) = \Big\{\Phi_a^{(m-1)}(z)\Big\}_z' = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^m c_k(\Phi)\rho^k e^{ikt}. \tag{1.1.4}$$

Через $\Phi'_a(t)$ и $\Phi_a^{(m)}(t)$, соответственно, обозначим граничные значения производных $\Phi'_a(z)$ и $\Phi_a^{(m)}(z)$, определённые равенствами (1.1.3) и (1.1.4). Из (1.1.3) и (1.1.4) очевидно, что

$$\Phi'_a(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)c_k(\Phi)(e^{it})^k, \tag{1.1.3$'$}$$

$$\Phi_a^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}(ik)^m c_k(\Phi)(e^{it})^k, \quad m \in \mathbb{N},\, m \geq 2. \tag{1.1.4$'$}$$

Аналогичным образом, обычную производную m-го порядка функции $\Phi(z) \in \mathscr{A}(U)$ обозначим равенством

$$\frac{\partial^{(m)}\Phi(z)}{\partial z^m} := \Phi^{(m)}(z), \quad m \in \mathbb{N}$$

и определим по формуле

$$\Phi^{(m)}(z) := \frac{\partial^{(m)}\Phi(z)}{\partial z^m} = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)c_k(\Phi)z^{k-m}, \tag{1.1.5}$$

а угловое граничное значение производной (1.1.5) обозначим символом $\Phi^{(m)}(t)$. Ради краткости, в дальнейшем, введём обозначение

$$\alpha_{n,m} := n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad m \in \mathbb{N},\, n \geq m. \tag{1.1.6}$$

Таким образом, в силу обозначения (1.1.6) формула (1.1.5) перепишется кратко в виде

$$\Phi^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m}c_k(\Phi)z^{k-m}, \tag{1.1.5$'$}$$

а граничное значение $\Phi^{(m)}(t)$ определяется формулой

$$\Phi^{(m)}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m}c_k(\Phi)e^{i(k-m)t}. \tag{1.1.7}$$

Всюду далее, символом $\mathscr{H}_p^{(m)}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $\mathscr{H}_p^{(0)} = \mathscr{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$) обозначим множество функций $\Phi(z) \in \mathscr{A}(U)$, принадлежащих пространству Харди

$\mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$, производная m-го порядка $\Phi^{(m)}(z)$ которых принадлежит также $\mathscr{H}_p$, то есть, учитывая $(1.1.5)'$, полагаем

$$\mathscr{H}_p^{(m)} := \left\{\Phi(z) \in \mathscr{H}_p : \ \left\|\Phi^{(m)}\right\|_{\mathscr{H}_p} < \infty\right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Аналогичным образом, учитывая производную m-го порядка в соотношение $(1.1.4)'$, полагаем

$$\mathscr{H}_{p,a}^{(m)} := \left\{\Phi(z) \in \mathscr{H}_p : \ \left\|\Phi_a^{(m)}\right\|_{\mathscr{H}_p} < \infty\right\}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Исходя из принятых обозначений, далее включение

$$\Phi^{(m)}(z) \in \mathscr{H}_p^{(m)} \quad \Big(\text{или} \quad \Phi_a^{(m)}(z) \in \mathscr{H}_{p,a}^{(m)}\Big), \quad 1 \le p \le \infty$$

означает, что

$$\Phi^{(m)}(z) \in \mathscr{H}_p \quad \Big(\text{или} \quad \Phi_a^{(m)}(z) \in \mathscr{H}_p\Big), \quad 1 \le p \le \infty,$$

то есть, m-ые граничные производные этих функций

$$\Phi^{(m)}(t) \in L_p[0, 2\pi] \quad \Big(\Phi_a^{(m)}(t) \in L_p[0, 2\pi]\Big), \quad 1 \le p \le \infty.$$

В дальнейшем в качестве экстремальной функции в основных наших результатах фигурирует функция $G(z) := z^n$, для которой в силу равенств $(1.1.4)'$ и $(1.1.5)'$ запишем

$$G_a^{(m)}(z) := (in)^m z^n, \quad G_a^{(m)}(t) := (in)^m e^{int},$$

причём

$$G_a^{(m)}(t) \in L_p[0, 2\pi], \ 1 \le p \le \infty, \quad \left\|G_a^{(m)}\right\|_p = n^m,$$

$$G^{(m)}(z) := \alpha_{n,m} z^{n-m}, \quad G^{(m)}(t) := \alpha_{n,m} e^{i(n-m)t},$$

$$G^{(m)}(t) \in L_p[0, 2\pi], \ 1 \le p \le \infty, \quad \left\|G^{(m)}\right\|_p = \alpha_{n,m}.$$

1.1.2. Наилучшее совместное приближение аналитических в единичном круге $U := \{z: |z| < 1\}$ функций в банаховом пространстве Харди $\mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$

Пусть функция $\Phi \in \mathscr{A}(U)$ принадлежит банахову пространству Харди $\mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k \subset \mathscr{H}_p, \ 1 \le p \le \infty.$$

Пространство комплексных алгебраических многочленов вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C}, \ |a_n| \ne 0,$$

степени n обозначим символом $\mathscr{P}_n$.

Задача наилучшего приближения функции $\Phi(z) \in \mathscr{H}_p$, $1 \le p \le \infty$ элементами $p_n \in \mathscr{P}_n$ в метрике пространства $\mathscr{H}_p$ ставится следующим образом:

Требуется найти точное значение величины

$$E_n(\Phi)_{\mathscr{H}_p} := \inf\left\{ \left\|\Phi - p_n\right\|_{\mathscr{H}_p} : \ p_n \in \mathscr{P}_n \right\} =$$

$$= \inf_{p_n \in \mathscr{P}_n} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\Phi(e^{it}) - p_n(e^{it})\right|^p dt \right\}^{1/p} =$$

$$= \inf_{a_k} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\Phi(e^{it}) - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}\right|^p dt \right\}^{1/p}. \qquad (1.1.8)$$

Известно [20, с.109; 23, с.128], что решение задачи (1.1.8) при любом значении p ($1 \le p \le \infty$) существует, однако в явном виде не выражается. Специфика гильбертова пространства $\mathscr{H}_2$ позволяет решение задачи (1.1.8) найти в явном виде. При этом полиномом наилучшего среднеквадратического приближения в задаче (1.1.8) является n-я частичная сумма

$$T_n(\Phi, z) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\Phi) z^k$$

разложения функции $\Phi(z)$ в единичном круге $U=\{z\colon\ |z|<1\}$:

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\Phi)z^k=\sum_{k=0}^{n}c_k(\Phi)z^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k(\Phi)z^k:=$$

$$:=T_n(\Phi,z)+\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k(\Phi)z^k:=T_n(\Phi,z)+R_n(\Phi,z),$$

причём (см., например, [23, с.376])

$$E_n(\Phi)_{\mathscr{H}_2}:=\inf\Big\{\big\|\Phi-p_n\big\|_{\mathscr{H}_2}:\ p_n\in\mathscr{P}_n\Big\}=$$

$$=\big\|\Phi-T_n(\Phi)\big\|_{\mathscr{H}_2}=\big\|R_n(\Phi)\big\|_{\mathscr{H}_2}=\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\right\}^{1/2}. \qquad (1.1.9)$$

Равенство (1.1.9), означает, что среди всех полиномов вида

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$$

наилучшее среднеквадратичное приближение функции $\Phi\in\mathscr{A}(U)$ в пространстве $\mathscr{H}_2$ даёт тот полином, коэффициенты a_k которого есть суть коэффициенты Тейлора разложения функции $\Phi(z)$ $(a_k\equiv c_k(\Phi))$ в ряд Тейлора. При этом величина наилучшего приближения равна

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|\Phi(e^{it})-T_{n-1}(\Phi,e^{it})\big|^2dt\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big|\Phi(e^{it})\Big|^2-\sum_{k=0}^{n-1}\big|c_k(\Phi)\big|^2dt\right\}^{1/2}=\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2dt\right\}^{1/2}.$$

Чуть ниже, в лемме 1.1.1, мы приведём строгое доказательство этого факта.

Поскольку наравне с функцией $\Phi(z)\in\mathscr{H}_2^{(m)}$ $(\Phi(z)\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)})$ последовательные производные $\Phi^{(s)}(z)$ $\big(\Phi_a^{(s)}(z)\big)$ $(s=0,1,2,\ldots,m)$ также принадлежат пространству $\mathscr{H}_2^{(m)}$ $\big(\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}\big)$, то представляет несомненный интерес отыскания точных значений величин

$$E_n(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf\left\{\left\|\Phi^{(s)} - p_n^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2} :\ p_n \in \mathscr{P}_n\right\}, \qquad (1.1.10)$$

$$E_n(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \inf\left\{\left\|\Phi_a^{(s)} - p_{n,a}^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2} :\ p_n \in \mathscr{P}_n\right\}. \qquad (1.1.11)$$

Имеет место следующая основная

Лемма 1.1.1. *Пусть* $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. *Тогда при любых* $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \in [0, m]$ *справедливы равенства*

$$E_n(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2s}\left|c_k(\Phi)\right|^2\right\}^{1/2}, \qquad (1.1.12)$$

$$E_n(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_{k,s}^2\left|c_k(\Phi)\right|^2\right\}^{1/2}. \qquad (1.1.13)$$

Доказательство. Равенства (1.1.12) и (1.1.13) доказываются одним и тем же методом, а потому достаточно доказать равенство (1.1.13). Так как для любого $s \in \mathbb{Z}_+$ производная $\Phi^{(s)}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m)$ имеет вид

$$\Phi^{(s)}(z) = \sum_{k=s}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-s+1)\, c_k(\Phi) z^{k-s} = \sum_{k=s}^{\infty} \alpha_{k,s}\, c_k(\Phi) z^{k-s},$$

а производная s-го порядка полинома $p_n(z)$ запишется в виде

$$p_n^{(s)}(z) = \sum_{k=s}^{n} k(k-1)\cdots(k-s+1)\, a_k z^{k-s} = \sum_{k=s}^{n} \alpha_{k,s}\, a_k z^{k-s},$$

то простое вычисление даёт

$$\left\|\Phi^{(s)} - p_n^{(s)}\right\|_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\Phi^{(s)}(e^{it}) - p_n^{(s)}(e^{it})\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=s}^{\infty} \alpha_{k,s}\, c_k(\Phi) e^{i(k-s)t} - \sum_{k=s}^{n} \alpha_{k,s}\, a_k e^{i(k-s)t}\Big|^2 dt =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=s}^{n}\alpha_{k,s}\big(c_k(\Phi)-a_k\big)e^{i(k-s)t}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{k,s}\,c_k(\Phi)e^{i(k-s)t}\Big|^2dt=$$

$$=\sum_{k=s}^{n}\alpha_{k,s}^2\big|c_k(\Phi)-a_k\big|^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\,\big|c_k(\Phi)\big|^2. \qquad (1.1.14)$$

Учитывая соотношение (1.1.14), запишем:

$$E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}:=\inf\Big\{\big\|\Phi^{(s)}-p_n^{(s)}\big\|_{\mathscr{H}_2}^2:\ p_n\in\mathscr{P}_n\Big\}=$$

$$=\inf\Big\{\big\|\Phi^{(s)}-p_{n-s-1}\big\|_{\mathscr{H}_2}^2:\ p_{n-s-1}\in\mathscr{P}_{n-s-1}\Big\}=$$

$$=\inf_{a_k}\left\{\sum_{k=s}^{n}\alpha_{k,s}^2\big|c_k(\Phi)-a_k\big|^2+\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\,\big|c_k(\Phi)\big|^2\right\}=\left|\begin{array}{c}a_k=c_k(\Phi)\\ k=0,1,\ldots,n\end{array}\right|=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\,\big|c_k(\Phi)\big|^2=\big\|\Phi^{(s)}-T_n^{(s)}\big(\Phi\big)\big\|_{\mathscr{H}_2}^2=\big\|\Phi^{(s)}-T_{n-s-1}\big(\Phi^{(s)}\big)\big\|_{\mathscr{H}_2}^2,$$

откуда и следует равенство (1.1.13). Лемма 1.1.1 доказана.

В дальнейшем, ради удобства, равенства (1.1.12) и (1.1.13) используем в более удобном нам виде

$$E_{n-1}^2(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}=\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\big|c_k(\Phi)\big|^2, \qquad (1.1.12)'$$

$$E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\big|c_k(\Phi)\big|^2. \qquad (1.1.13)'$$

Лемма 1.1.2. *Для произвольной функции* $\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}\cap\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ *при любых* $n,m\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ *имеют место неравенства*

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}\leq n^{-(m-s)}E_{n-1}(\Phi_a^{(m)})_{\mathscr{H}_2}, \qquad (1.1.15)$$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}. \qquad (1.1.16)$$

Существует функция $G \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$, *для которой неравенства* (1.1.15) *и* (1.1.16) *обращаются в равенства.*

Доказательство. Докажем неравенство (1.1.16), так как (1.1.15) доказывается таким же образом. Из формулы $(1.1.13)'$ при $s = m$ получаем

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2. \qquad (1.1.17)$$

Учитывая равенство (1.1.17), из $(1.1.13)'$ имеем

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,m}^2} \cdot \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 \le \max_{k \ge n} \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}}\right)^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 =$$

$$= \max_{k \ge n} \left(\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}}\right)^2 \cdot E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}. \qquad (1.1.18)$$

Покажем, что

$$\max_{k \ge n} \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}.$$

В самом деле, так как $k \ge n > m \ge s$, то мы с этой целью сначала покажем, что

$$\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}} = \frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s}\, \alpha_{k-s,m-s}} = \frac{1}{\alpha_{k-s,m-s}}.$$

Действительно, так как при ограничении $k \ge n > m \ge s$, $k, m, n \in \mathbb{N}$,

$s\in\mathbb{Z}_+$, имеет место равенство

$$\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}}:=\frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{k(k-1)\cdots(k-m+1)}=$$

$$=\frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{k(k-1)\cdots(k-s+1)(k-s)\cdots(k-s-(m-s)+1)}=$$

$$=\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,s}\,\alpha_{k-s,m-s}}=\frac{1}{\alpha_{k-s,m-s}}=$$

$$=\frac{1}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-s-(m-s)+1)},$$

то отсюда следует, что

$$\max_{k\geq n}\frac{\alpha_{k,s}}{\alpha_{k,m}}=\max_{k\geq n}\frac{1}{(k-s)(k-s-1)\cdots(k-s-(m-s)+1)}=$$

$$=\frac{1}{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-s-(m-s)+1)}=\frac{1}{\alpha_{n-s,m-s}}=$$

$$=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,s}\,\alpha_{n-s,m-s}}:=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}},$$

пользуясь этим равенством из неравенства (1.1.18) получаем

$$E^2_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}\leq\frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}}\,E^2_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2},$$

откуда и следует требуемое неравенство (1.1.16).

Докажем точность (1.1.16) для функции $G(z)=z^n$, очевидно принадлежащей пересечению $\mathscr{H}_2^{(m)}\cap\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$.

Для этой функции, в силу равенств $(1.1.12)'$ и $(1.1.13)'$, имеем

$$\begin{gathered}E^2_{n-1}(G_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}=n^{2s},\quad E^2_{n-1}(G_a^{(m)})_{\mathscr{H}_2}=n^{2m},\\ E^2_{n-s-1}(G^{(s)})_{\mathscr{H}_2}=\alpha^2_{n,s},\quad E^2_{n-m-1}(G^{(m)})_{\mathscr{H}_2}=\alpha^2_{n,m},\end{gathered}\tag{1.1.19}$$

пользуясь которыми, запишем:

$$E^2_{n-1}(G^{(s)}_a)_{\mathscr{H}_2} = n^{2s} = \frac{1}{n^{2(m-s)}} \cdot n^{2m} = \frac{1}{n^{2(m-s)}} \cdot E^2_{n-1}(G^{(m)}_a)_{\mathscr{H}_2},$$

$$E^2_{n-s-1}(G^{(s)})_{\mathscr{H}_2} = \alpha^2_{n,s} = \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}} \cdot \alpha^2_{n,m} = \frac{\alpha^2_{n,s}}{\alpha^2_{n,m}} \cdot E^2_{n-m-1}(G^{(m)})_{\mathscr{H}_2}.$$

Этим доказана точность неравенств (1.1.15) и (1.1.16), чем и завершаем доказательство леммы 1.1.2.

Из леммы 1.1.2 в качестве следствия вытекает следующая

Лемма 1.1.3. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}^{(m)}_{2,a}} \frac{E_{n-1}(\Phi^{(s)}_a)_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-1}(\Phi^{(m)}_a)_{\mathscr{H}_2}} = \frac{1}{n^{m-s}}, \tag{1.1.20}$$

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}^{(m)}_{2}} \frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}. \tag{1.1.21}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство (1.1.21). Так как неравенство (1.1.16) имеет место для произвольной $\Phi \in \mathscr{A}(U)$ и принадлежит классу $\mathscr{H}^{(m)}_2$, то из него следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (1.1.21):

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}^{(m)}_{2}} \frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}. \tag{1.1.22}$$

Учитывая равенства (1.1.19), получаем оценку снизу той же величины

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}^{(m)}_{2}} \frac{E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} \geq \frac{E_{n-s-1}(G^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{E_{n-m-1}(G^{(m)})_{\mathscr{H}_2}} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}. \tag{1.1.23}$$

Равенство (1.1.21) получаем сопоставлением неравенств (1.1.22) и (1.1.23). Лемма 1.1.3 доказана.

В завершение этого пункта отметим, что из равенств $(1.1.12)'$ и $(1.1.13)'$, в силу неравенства Гёльдера для сумм, вытекают соотношения

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_p \le E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_2, \quad 1 \le p \le 2,$$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_p \le E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_2, \quad 1 \le p \le 2,$$

которые, как легко проверить, являются точными для введенной ранее функции $G(z) = z^n \in \mathscr{H}_p^{(m)} \cap \mathscr{H}_{p,a}^{(m)}$, $1 \le p \le 2$, а это значит, что все вышеприведенные леммы 1.1.1 — 1.1.3 справедливы не только при $p = 2$, но и при всех $1 \le p \le 2$. Отметим также, что неравенства (1.1.15) и (1.1.16) при $s = 0$, ранее доказаны Л.В.Тайковым [24].

1.1.3. Определение модуля непрерывности m-го порядка для аналитической функции $\Phi \subset \mathscr{H}_p^{(m)} \cap \mathscr{H}_{p,a}^{(m)}$, $(1 \le p \le \infty)$

В последующих параграфах характеристику гладкости произвольной функции $\Phi \subset \mathscr{A}(U)$, принадлежащей $\mathscr{H}_p^{(m)}$ $(1 \le p \le \infty)$, будем характеризовать скоростью убывания к нулю модуля непрерывности r-го порядка её граничных значений $\Phi(t)$ в норме лебегова пространства $L_p[0, 2\pi]$, $1 \le p \le \infty$,

$$\omega_r(\Phi, t)_p := \sup\left\{ \Big\| \sum_{l=0}^{r} (-1)^l C_r^l \Phi\big(\cdot + (r-l)\tau\big) \Big\|_{L_p} : \ |\tau| \le t \right\} \tag{1.1.24}$$

при $t \to 0$, либо зададим скорость убывания к нулю некоторой усреднённой величины, содержащей $\omega_r(\Phi, t)_p$, ограниченной сверху заданной мажорантной функцией $\Psi(t)$.

Найдём явный вид модуля непрерывности (1.1.24) в случае $p = 2$ для пространства $\mathscr{H}_2$, являющегося гильбертовым пространством с нормой (1.1.1).

Для функции

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) z^k \subset \mathscr{H}_2,$$

при любом $r \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\Delta_h^r \Phi(e^{it}) := \Delta_h^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) e^{ikt} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) \Delta_h^r \big(e^{ikt}\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) \left(\sum_{l=0}^{r} (-1)^l C_r^l e^{ik(t+(r-l)h)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\Phi) e^{ikt} \left(1 - e^{ikh}\right)^r.$$

Отсюда, применяя тождества Парсеваля, в силу ортогональности системы функций $\left\{e^{ikt}\right\}_{k=0}^{\infty}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ будем иметь

$$\left\|\Delta_h^r \Phi(e^{it})\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\Delta_h^r \Phi(e^{it})\right|^2 dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \left|1 - e^{ikh}\right|^{2r} = 2^r \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1 - \cos kh\big)^r,$$

а потому, в силу равенства (1.1.24), запишем

$$\omega_r^2(\Phi, t)_2 = 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1 - \cos kh\big)^r. \qquad (1.1.25)$$

В частности, из (1.1.25) для произвольной функции $\Phi \subset \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$ получаем

$$\omega_r^2(\Phi_a^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} = 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=1}^{\infty} \left|c_k(\Phi_a^{(m)})\right|^2 \big(1 - \cos kh\big)^r =$$

$$= 2^r \sup_{|h| \le t} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2m} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1 - \cos kh\big)^r, \qquad (1.1.26)$$

$$\omega_r^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}=2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=m}^{\infty}\left|c_k(\Phi^{(m)})\right|^2\bigl(1-\cos{(k-m)h}\bigr)^r=$$

$$=2^r\sup_{|h|\le t}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k,m}^2\left|c_k(\Phi)\right|^2\bigl(1-\cos(k-m)h\bigr)^r. \qquad (1.1.27)$$

При доказательстве основных результатов и характеризации их точности, как правило, в качестве экстремальной функции выбирается функция

$$G(z):=z^n\in\mathscr{H}_2^{(m)}\cap\mathscr{H}_{2,a}^{(m)},$$

ранее использованная нами при доказательстве утверждений лемм 1.1.2 и 1.1.3. Вычислим модуль непрерывности r-го порядка m-ых производных $G_a^{(m)}(z)$ и $G^{(m)}(z)$. В силу равенств (1.1.26) и (1.1.27) имеем:

$$\omega_r^2(G_a^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}=\begin{cases}2^r n^{2m}\bigl(1-\cos nt\bigr)^r, & \text{если } 0<nt\le\pi;\\ 2^{2r}n^{2m}, & \text{если } nt>\pi,\end{cases} \qquad (1.1.28)$$

$$\omega_r^2(G^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}=\begin{cases}2^r\alpha_{n,r}^2\bigl(1-\cos(n-m)t\bigr)^r, & \text{если } 0<(n-m)t\le\pi;\\ 2^{2r}\alpha_{n,r}^2, & \text{если } (n-m)t>\pi.\end{cases} \qquad (1.1.29)$$

§ 1.2. Основные теоремы между наилучшим приближением $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$ и усредненными значениями модуля непрерывности первого порядка

В этом параграфе будем излагать некоторые точные неравенства типа Л.В.Тайкова [25], содержащие величины $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$ – наилучшее приближение функции $\Phi \subset \mathscr{A}(U)$, принадлежащее $\mathscr{H}_2$, и усредненное значение модуля непрерывности первого порядка от m-ых производных $\Phi^{(m)}(t)$ и $\Phi_a^{(m)}(t)$.

Напомним, что Л.В.Тайков [25] доказал, что для произвольной 2π-периодической функции $f \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^0 \equiv L_2$), при условии $0 < nh \leq \pi/2$ справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{2r} E_{n-1}^2(f)}{\int\limits_0^h \omega^2(f^{(r)}, t)_2 dt} = \frac{n}{2(nh - \sin nh)}. \tag{1.2.1}$$

В нижеприведенном утверждении дано обобщение равенства (1.2.1) для функции $\Phi \subset \mathscr{A}(U)$, принадлежащей классу $\mathscr{H}_2^{(m)}$.

Теорема 1.2.1. *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ справедливы следующие соотношения*

$$\frac{1}{(n-m)t} \leq \sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m} E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{((n-m)t)^2} + \frac{1}{2} \right)^{1/2}, \quad 0 < (n-m)t \leq \pi, \tag{1.2.2}$$

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m} E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{ \int\limits_0^h \omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} \, dt \right\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{ \frac{n-m}{2((n-m)t - \sin(n-m)t)} \right\}^{1/2}, \quad 0 < (n-m)t \leq \pi/2. \tag{1.2.3}$$

Доказательство. Следуя схеме рассуждений работы [25], без умаления общности, ограничимся функциями $\Phi(z)$, у которых $c_k(\Phi) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то есть введём в рассмотрение функции вида

$$\Phi(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(\Phi) z^k \in \mathscr{H}_2^{(m)}.$$

Для таких функций имеем

$$\Big\|\Delta_h^1(\Phi)\Big\|_{\mathscr{H}_2}^2 := \Big\|\Phi\big(e^{i(t+h)} - \Phi\big(e^{it}\big)\Big\|_{\mathscr{H}_2}^2 =$$

$$= 2\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 (1 - \cos kh) = 2\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 - 2\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \cos kh =$$

$$= 2E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - 2\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \cos kh. \tag{1.2.4}$$

Интегрируя обе части равенства (1.2.4) на отрезке $[0, \tau]$ по h, будем иметь

$$2\tau E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} = 2\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \frac{1}{k} \sin k\tau + \int_0^{\tau} \big\|\Delta_h^1(\Phi)\big\|_{\mathscr{H}_2}^2 dh. \tag{1.2.5}$$

Полученное равенство интегрируем по τ в отрезке $[0, t]$

$$t^2 E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= 2\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \cdot \frac{1 - \cos kt}{k^2} + \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \big\|\Delta_h^1(\Phi)\big\|_{\mathscr{H}_2}^2 dh \right) d\tau. \tag{1.2.6}$$

Заметив, что

$$\max_{k \geq n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n^2}$$

и интегрируя по частям интеграл второй части (1.2.6), запишем

$$t^2 E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le$$

$$\le \frac{2}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 (1-\cos kt) + \int\limits_0^t (t-\tau) \left\|\Delta_\tau^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{n^2} \left\|\Delta_t^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 + \int\limits_0^t (t-\tau) \left\|\Delta_\tau^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 d\tau. \tag{1.2.7}$$

но так как $\left\|\Delta_t^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 \le \omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2}$ и для интеграла в правой части неравенства (1.2.7) имеет место оценка

$$\int\limits_0^t (t-\tau) \left\|\Delta_\tau^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 d\tau \le \frac{t^2}{2} \left\|\Delta_\tau^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 \le \frac{t^2}{2} \omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2},$$

то, учитывая эти оценки, запишем неравенство (1.2.7) в виде

$$t^2 E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \left(\frac{1}{n^2} + \frac{t^2}{2}\right) \omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2}.$$

Поделив полученное неравенство на t^2, получим

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2}\right) \omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2}.$$

Отсюда, в предположении $\Phi \subset \mathscr{H}_2^{(m)}$, получаем

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \le \left(\frac{1}{((n-m)t)^2} + \frac{1}{2}\right) \omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}. \tag{1.2.8}$$

В силу неравенства (1.1.22) при $s = 0$ с учётом (1.2.8), запишем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,m}^2} E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{((n-m)t)^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}^2} \omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}.$$

Так как, полученное неравенство имеет место для любой функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, то из неё следует правая часть неравенства (1.2.2)

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}} \leq \left(\frac{1}{((n-m)t)^2} + \frac{1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \tag{1.2.9}$$

Оценка снизу величины, стоящей в левой части (1.2.9), проверяется на функции $G(z) = z^n \in \mathscr{H}_2$, поскольку для $0 < (n-m)t \leq \pi$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ имеем

$$\omega^2(G^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} = 2\alpha_{n,m}^2(1 - \cos(n-m)t) = \left(2 \sin \frac{(n-m)t}{2}\right)^2 \alpha_{n,m}^2 \geq$$

$$\geq \left(2 \cdot \frac{(n-m)t}{2}\right)^2 \alpha_{n,m}^2 = ((n-m)t)^2 \alpha_{n,m}^2.$$

Пользуясь этим неравенством, запишем оценку снизу

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}} \geq \frac{E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2}}{\omega(G^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}} \geq \frac{1}{(n-m)t} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \tag{1.2.10}$$

Требуемое равенство (1.2.2) получаем из сопоставления оценки (1.2.9) с оценкой снизу (1.2.10). Переходим к доказательству (1.2.3). Поделив обе части равенства (1.2.5) на 2τ, будем иметь

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} = \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cdot \frac{\sin k\tau}{k\tau} + \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left\|\Delta_h^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 dh, \tag{1.2.11}$$

и, так как $nt \leq \pi/2$, то пользуясь тем, что

$$\max_{u \geq nt} \left|\frac{\sin u}{u}\right| = \frac{\sin nt}{nt},$$

из равенства (1.2.11) будем иметь

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{\sin n\tau}{n\tau} \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 + \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau \left\|\Delta_h^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 dh \leq$$

$$\leq \frac{\sin n\tau}{n\tau} E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} + \frac{1}{2\tau} \int\limits_0^{\tau} \omega^2(\Phi, h)_{\mathscr{H}_2} dh.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\left(1 - \frac{\sin n\tau}{n\tau}\right) E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{2\tau} \int\limits_0^{\tau} \omega^2(\Phi, h)_{\mathscr{H}_2} dh, \tag{1.2.12}$$

или что тоже

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{n}{2(n\tau - \sin n\tau)} \int\limits_0^{\tau} \omega^2(\Phi, h)_{\mathscr{H}_2}\, dh, \quad nt \leq \pi/2.$$

Записав полученное неравенство для величины $E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, будем иметь

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{n-m}{2((n-m)\tau - \sin(n-m)\tau)} \int\limits_0^{\tau} \omega^2(\Phi^{(m)}, h)_{\mathscr{H}_2}\, dh,$$

используя которое, в силу неравенства (1.1.22), при $s = 0$ запишем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}^2} E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_{n,m}^2} \cdot \frac{n-m}{2((n-m)\tau - \sin(n-m)\tau)} \int\limits_0^{\tau} \omega^2(\Phi^{(m)}, h)_{\mathscr{H}_2}\, dh. \tag{1.2.13}$$

Из (1.2.13) вытекает оценка сверху

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\, E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left(\int\limits_0^{\tau} \omega^2(\Phi^{(m)}, h)_{\mathscr{H}_2}\, dh\right)^{1/2}} \leq$$

$$\leq \left\{\frac{n-m}{2((n-m)\tau - \sin(n-m)\tau)}\right\}^{1/2}. \tag{1.2.14}$$

Для получения аналогичной оценки снизу, введём в рассмотрение функцию

$G(z) = z^n \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, для которой, в силу равенств (1.1.9) и (1.2.6), имеем

$$E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2} = 1, \quad \omega(G^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} = \sqrt{2}\alpha_{n,m}\big(1 - \cos(n-m)t\big)^{1/2},$$

а потому простые вычисления дают

$$\int\limits_0^\tau \omega^2(G^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} dt = 2\alpha_{n,m}^2 \left(\tau - \frac{\sin(n-m)\tau}{n-m}\right) =$$

$$= 2\alpha_{n,m}^2 \, \frac{(n-m)\tau - \sin(n-m)\tau}{n-m},$$

пользуясь которой запишем оценку снизу

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\, E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(\Phi^{(m)}, h)_{\mathscr{H}_2}\, dh\right)^{1/2}} \geq \frac{\alpha_{n,m}\, E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2}}{\left(\int\limits_0^\tau \omega^2(G^{(m)}, h)_{\mathscr{H}_2}\, dh\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,m} \cdot 1 \cdot (n-m)^{1/2}}{\big(2((n-m)\tau - \sin(n-m)\tau)\big)^{1/2}\alpha_{n,m}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2((n-m)\tau - \sin(n-m)\tau)}\right\}^{1/2}. \tag{1.2.15}$$

Равенство (1.2.3) получаем как следствие сопоставления неравенств (1.2.14) и (1.2.15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Из теоремы 1.2.1 вытекает

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы* 1.2.1 *выполняются соотношения*

$$\frac{1}{\pi} \leq \sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m} E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\omega\big(\Phi^{(m)}, \pi/(n-m)\big)_{\mathscr{H}_2}} \leq \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2}\right)^{1/2},$$

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\,E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\dfrac{2(n-m)}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2(n-m)}\omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{1/2}} = (\pi-2)^{-1/2}.$$

Схема рассуждений, применяемая нами при доказательстве теоремы 1.2.1, без особого труда позволяет доказать следующее утверждение, являющееся одновременно и обобщением указанной теоремы.

Теорема 1.2.2. *При любых $n, m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$ справедливы соотношения*

$$\frac{1}{(n-m)t} \leq \sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{((n-m)t)^2}+\frac{1}{2}\right)^{1/2}, \quad 0 < (n-m)t \leq \pi, \qquad (1.2.16)$$

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\displaystyle\int\limits_0^h \omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{1/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2((n-m)h-\sin(n-m)h)}\right\}^{1/2}, \quad 0 < (n-m)h \leq \pi/2. \qquad (1.2.17)$$

В нижеследующей теореме вычисляется точная верхняя грань экстремальной аппроксимационной характеристики, в которой модуль непрерывности содержится не только в подынтегральном выражении, но также и вне интеграла.

Теорема 1.2.3. *Для любых* $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ *и* $t \in (0, \pi/n]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\, E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} + (n-m)^2 \int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right\}^{1/2}} = \frac{1}{(n-m)t}. \tag{1.2.18}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.2.7)

$$t^2 E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{n^2}\left\|\Delta_t^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 + \int\limits_0^t (t-\tau)\left\|\Delta_\tau^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 d\tau,$$

учитывая, что $\left\|\Delta_t^1(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 \le \omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2}$, будем иметь

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{(nt)^2}\,\omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2} + \frac{1}{t^2}\int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi, \tau)_{\mathscr{H}_2}^2\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{(nt)^2}\left\{\omega^2(\Phi, t)_{\mathscr{H}_2} + n^2\int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right\}. \tag{1.2.19}$$

Отсюда следует, что

$$E_{n-m-1}^2(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,m}^2} \cdot \frac{1}{((n-m)t)^2} \times$$

$$\times \left\{\omega^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} + (n-m)^2\int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right\}. \tag{1.2.20}$$

Полученное неравенство справедливо для любой функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, а потому из него следует оценка сверху для экстремальной характеристики, лежащей в левой части равенства (1.2.18)

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\,E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right\}^{1/2}}\le\frac{1}{(n-m)t}. \tag{1.2.21}$$

Оценка снизу указанной характеристики доставляет рассмотренная нами ранее функция $G=z^n\in\mathscr{H}_2^{(m)}$:

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\,E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right\}^{1/2}}\ge$$

$$\ge\frac{\alpha_{n,m}\,E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(G^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(G^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right\}^{1/2}}=\frac{1}{(n-m)t}. \tag{1.2.22}$$

Требуемое равенство (1.2.18) вытекает из сопоставления неравенств (1.2.21) и (1.2.22), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.3.

В качестве следствия из теоремы 1.2.3 вытекает более общая

Теорема 1.2.4. *Для любых $n\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\ge s$ и $0<h\le\pi/(n-m)$ справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}+(n-m)^2\int\limits_0^t(t-\tau)\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right\}^{1/2}}=\frac{1}{(n-m)t}.$$

Так как схема доказательства теоремы 1.2.4 повторяет схему доказательства теоремы 1.2.3, то мы здесь его не приводим. Отметим только лишь, что теорема 1.2.4 одновременно обобщает теорему 1.2.3, которая вытекает из теоремы 1.2.4 при $s=0$.

В следующем утверждении приведено точное равенство, содержащее наилучшее приближение $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$ функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ и усредненное значение модуля непрерывности $\omega(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}$, являющееся своеобразным обобщением равенства (1.2.3).

Теорема 1.2.5. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n > m$ *и* $0 < (n-m)h \leq \pi$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}^2 E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right) dt} = \frac{n-m}{2\big[(n-m)h - Si((n-m)h)\big]}, \tag{1.2.23}$$

где $Si(u) := \int\limits_0^u \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$ *— интегральный синус.*

Доказательство. Из равенства (1.2.11) получаем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cdot \frac{\sin kt}{kt} + \frac{1}{2t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi, \tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau. \tag{1.2.24}$$

Интегрируя обе части равенства (1.2.24) по переменному t на отрезке $[0, h]$ $(0 < h \leq \pi/n)$, получаем

$$hE_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \int\limits_0^h \frac{\sin kt}{kt} dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi, \tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \frac{1}{k}\int\limits_0^{kh} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi, \tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \frac{Si(kh)}{kh} + \frac{1}{2}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi, \tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt.$$

Поделив обе части полученного неравенство на h, имеем

$$E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \frac{Si(kh)}{kh} + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi,\tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt. \quad (1.2.25)$$

Пользуясь тем, что [19, с.128]

$$\max\left\{\frac{Si(kh)}{kh} :\ k \geq n\right\} = \frac{Si(nh)}{nh},$$

из (1.2.25) приходим к неравенству

$$E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{Si(nh)}{nh} \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi,\tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt =$$

$$= \frac{Si(nh)}{nh} E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} + \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi,\tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt.$$

Отсюда следует, что

$$\left(1 - \frac{Si(nh)}{nh}\right) E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{2h}\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi,\tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt,$$

или что тоже

$$E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \left\{\frac{n}{2(nh - Si(nh))}\right\} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi,\tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt.$$

Отсюда получаем

$$E^2_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \leq$$

$$\leq \left\{\frac{n-m}{2((n-m)h - Si((n-m)h))}\right\} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(\Phi,\tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau\right) dt,$$

используя это неравенство, приходим к соотношению

$$E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{\alpha^2_{n,m}} E^2_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha^2_{n,m}} \cdot \frac{n-m}{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau \right) dt. \quad (1.2.26)$$

Из (1.2.26) вытекает оценка сверху

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha^2_{n,m} E^2_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau \right) dt} \le \frac{n-m}{2\big[(n-m)h - Si((n-m)h)\big]}. \quad (1.2.27)$$

Оценку снизу доставляет функция $G(z) = z^n \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, поскольку для этой функции, как доказано в первом параграфе,

$$E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2} = 1, \quad \omega^2(G^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} = 2\alpha^2_{n,m}\big(1 - \cos(n-m)\tau\big),$$

и так как

$$\int\limits_0^t \omega^2(G^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} d\tau = \int\limits_0^t \big[\, 2\alpha^2_{n,m}(1 - \cos(n-m)\tau)\big] d\tau =$$

$$= 2\alpha^2_{n,m} \left(t - \frac{\sin(n-m)t}{n-m} \right)$$

и

$$\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega^2(G^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt =$$

$$= 2\alpha_{n,m}^2\int\limits_0^h \left(1-\frac{\sin(n-m)t}{(n-m)t}\right)dt = 2\alpha_{n,m}^2\frac{(n-m)t - Si((n-m)t)}{n-m},$$

то, учитывая полученное равенство, запишем оценку снизу

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt} \geq \frac{\alpha_{n,m}^2E_{n-1}^2(G)_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(G^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt} =$$

$$= \frac{n-m}{2\big[(n-m)h - Si((n-m)h)\big]}. \tag{1.2.28}$$

Утверждение теоремы 1.2.5 в виде равенства (1.2.23) вытекает из сравнения оценки сверху (1.2.27) с оценкой снизу (1.2.28). Как и в предыдущих случаях, теорема 1.2.5 допускает следующее обобщение, из которого она вытекает как частный случай при $s = 0$.

Теорема 1.2.6. *При любых $n\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ и $0<h\leq\pi/(n-m)$ справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{\big(\alpha_{n,m}^2/\alpha_{n,s}^2\big)E_{n-s-1}^2(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt} = \frac{n-m}{2\big[(n-m)h - Si((n-m)h)\big]}. \tag{1.2.29}$$

§ 1.3. Теоремы для модулей непрерывности r-го порядка

В первом параграфе в пункте 1.1.3 для произвольной функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ равенством (1.1.27) мы определили модуль непрерывности r-го порядка

$$\omega_r^2(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} = 2^r \sup_{|h|\le t} \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1-\cos(k-m)h\big)^r. \tag{1.3.1}$$

При доказательстве приведенных ниже теорем будем пользоваться модулем непрерывности (1.3.1).

Теорема 1.3.1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при $n > m$ и любого h, удовлетворяющего условия $0 < h \le \pi/(n-m)$, справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\, h^r E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}. \tag{1.3.2}$$

Доказательство. Сначала докажем оценку сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.3.2). Для этого воспользуемся рядом рассуждений, имевших место при доказательстве теоремы 1 работы С.Б.Вакарчука [12]. Для произвольной функции $\Phi \subset \mathscr{H}_2^{(m)}$ в пункте 1.1.3 первого параграфа было доказано равенство

$$\Big\|\Delta_h^r(\Phi)\Big\|_{\mathscr{H}_2}^2 = 2^r \sum_{k=1}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1-\cos kh\big)^r,$$

из которого вытекает соотношение

$$\Big\|\Delta_h^r(\Phi^{(m)})\Big\|_{\mathscr{H}_2}^2 = 2^r \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1-\cos(k-m)h\big)^r. \tag{1.3.3}$$

Учитывая равенство (1.3.3) и применив к правой части соотношения

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cos{(k-m)t} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^{2-2/r} \left|c_k(\Phi)\right|^{2/r} \bigl(1 - \cos{(k-m)t}\bigr)$$

неравенства Гёльдера и используя определение модуля непрерывности r-го порядка, имеем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cos{(k-m)t} \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2\right\}^{1-1/r} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \bigl(1 - \cos{(k-m)t}\bigr)^r\right\}^{1/r} \le$$

$$\le (E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2})^{2-2/r} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,m}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 \bigl(1 - \cos{(k-m)t}\bigr)^r\right\}^{1/r} \le$$

$$\le (E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2})^{2-2/r} \left\{\frac{2^r}{2^r \alpha_{n,m}^2} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 \bigl(1 - \cos{(k-m)t}\bigr)^r\right\}^{1/r} \le$$

$$\le \Bigl(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Bigr)^{2-2/r} \cdot \frac{\left\|\Delta_h^r(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r}}{2\alpha_{n,m}^{2/r}} \le \Bigl(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Bigr)^{2-2/r} \frac{\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}.$$

Таким образом, доказано, что для любого $\Phi \subset \mathscr{H}_2^{(m)}$ при любом значении $h \in (0, \pi/(n-m)]$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cos{(k-m)t} \le$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}\Big(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{2-2/r}\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}. \qquad (1.3.4)$$

Интегрируя обе части неравенства (1.3.4) по переменному t на отрезке $[0,\tau]$, приходим к неравенству

$$\tau E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\cdot\frac{\sin{(k-m)\tau}}{k-m} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}\Big(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{2-2/r}\int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt. \qquad (1.3.5)$$

Интегрируя ещё раз обе части неравенства (1.3.5) по переменному τ по отрезку $[0,h]$ $(0<h\leq\pi/(n-m))$, будем иметь

$$\frac{h^2}{2}E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\cdot\frac{1-\cos{(k-m)h}}{(k-m)^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}\Big(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{2-2/r}\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)d\tau.$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$h^2E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq h^2\sum_{k=n}^{\infty}\big|c_k(\Phi)\big|^2\left(\frac{2\sin((k-m)h/2)}{(k-m)h}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{\alpha_{n,m}^{2/r}}\Big(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{2(1-1/r)}\int\limits_0^h\left(\int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)d\tau. \qquad (1.3.6)$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^h \left(\int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)d\tau = \int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt,$$

неравенство (1.3.6) примет вид

$$h^2 E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le h^2 \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \left(\frac{2\sin((k-m)h/2)}{(k-m)h}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{\alpha_{n,m}^{2/r}}\Big(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{2(1-1/r)} \int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt.$$

Отсюда получаем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\, h^2 \left(1-\left(\frac{2\sin((k-m)h/2)}{(k-m)h}\right)^2\right) +$$

$$+\frac{1}{\alpha_{n,m}^{2/r}}\Big(E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{2-2/r} \int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt,$$

или

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le h^{-r}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \times$$

$$\times\frac{1}{\alpha_{n,m}}\left(\int\limits_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)^{r/2}. \qquad (1.3.7)$$

Из соотношения (1.3.7) следует оценка сверху величины в левой части равенство (1.3.2)

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\, h^r E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}} \leq$$

$$\leq \left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}. \qquad (1.3.8)$$

Для получения оценки снизу той же величины рассмотрим снова функции $G(z) = z^n \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, для которой в предыдущем параграфе мы доказали равенства

$$E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2} = 1, \quad \omega_r^2(G^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2} = 2^r\alpha_{n,m}^2\big(1-\cos(n-m)\tau\big)^r, \qquad (1.3.9)$$

где $0 \leq t \leq \pi/(n-m)$, $n > m$, $n,m \in \mathbb{N}$ и, как нетрудно убедиться путём простых вычислений, с учётом (1.3.9) имеем

$$\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(G^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2} =$$

$$= \alpha_{n,m}\, h^r \left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{r/2}. \qquad (1.3.10)$$

Учитывая равенство (1.3.10) получаем

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}\, h^r E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}} \geq$$

$$\geq \frac{\alpha_{n,m}\, h^r E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(G^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,m}\, h^r \cdot 1}{\alpha_{n,m}\, h^r \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}. \tag{1.3.11}$$

Сопоставляя оценку сверху (1.3.8) с оценкой снизу (1.3.11), получаем требуемое соотношение (1.3.2), и тем самым получаем утверждение теоремы 1.3.1.

Имеет место более общее утверждение.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $m, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$ *и* $0 < (n-m)h \leq \pi$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{h^r\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big) E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}. \tag{1.3.12}$$

Чтобы доказать равенство (1.3.12), полагаем $\Phi^{(s)} = \Phi_1$. Тогда имеем $\Phi^{(m)} = \Phi_1^{(m-s)}$, и так как $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, то $\Phi_1 \in \mathscr{H}_2^{(m-s)}$ и, учитывая равенство (1.3.2), будем иметь

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{h^r\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big) E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \sup_{\Phi_1 \in \mathscr{H}_2^{(m-s)}} \frac{h^r \alpha_{n,m-s}\, E_{n-1}(\Phi_1)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi_1^{(m-s)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}, \qquad (1.3.13)$$

откуда и следует равенство (1.3.12). При доказательстве равенства (1.3.13) мы использовали тот факт, что для функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ при любом $0 \leq s \leq m$ имеет место равенство $\alpha_{n,m} = \alpha_{n,s} \cdot \alpha_{n,m-s}$.

Теорема 1.3.3. *Для любых $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n > m$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющего неравенству $0 < (n-m)h \leq \pi$, справедливы равенства*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m} E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right) dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)}\right\}^{r/2}. \qquad (1.3.14)$$

Замечание. Сформулированная теорема 1.3.3 является обобщением и распространением теоремы 1.2.1, доказанной для модулей непрерывности первого порядка $\omega\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2}$ на случай модулей непрерывности r-го ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$) порядка $\omega_r\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2}$ m-й производной граничной функции $\Phi(t)$.

Доказательство. В параграфе 1.3 мы доказали, что для произвольной функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ норма разности r-го порядка m-й производной $\Phi^{(m)}(t)$ имеет вид

$$\left\|\Delta_h^r(\Phi^{(m)})\right\|_{\mathscr{H}_2}^2 = 2^r \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2 \big(1 - \cos{(k-m)h}\big)^r. \qquad (1.3.15)$$

Докажем, что для произвольной функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cos{(k-m)t} \le$$

$$\le \left(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\right)^{1-1/r} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}\, \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}. \qquad (1.3.16)$$

В самом деле, пользуясь определением наилучшего среднеквадратического приближения функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, запишем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} - \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cos{(k-m)t} = \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1-\cos{(k-m)t}\big) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^{2-2/r} \Big(\left|c_k(\Phi)\right|^{2/r} \big(1-\cos{(k-m)t}\big)\Big) \le$$

$$\le \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2\right\}^{1-1/r} \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1-\cos{(k-m)t}\big)^r\right\}^{1/r} \le$$

$$\le \big(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\big)^{1-1/r} \left\{\frac{2^r}{2^r} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,m}}{\alpha_{n,m}}\right)^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1-\cos{(k-m)t}\big)^r\right\}^{1/r} =$$

$$\le \big(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\big)^{1-1/r} \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}} \left\{2^r \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,m}^2 \left|c_k(\Phi)\right|^2 \big(1-\cos{(k-m)t}\big)^r\right\}^{1/r} \le$$

$$\le \left(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\right)^{1-1/r} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}} \left\|\Delta_h^r(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r} \le$$

$$\leq \left(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\right)^{1-1/r} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}\,\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2},$$

откуда и следует неравенство (1.3.16). Отметим, что при доказательстве неравенства (1.3.16) мы воспользовались неравенством Гёльдера для числовых рядов вида

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|a_kb_k\right| \leq \left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|a_k\right|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left|b_k\right|^q\right)^{1/q}, \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ 1\leq p\leq\infty\right),$$

когда $\left|a_k\right| = \left\{|c_k(\Phi)|^2\right\}^{1-1/r}$, $\left|b_k\right| = \left|c_k(\Phi)\right|^{2/r}\big(1-\cos(k-m)t\big)$, $p=r/(r-1)$, $q=r$, $1/p+1/q=1-1/r+1/r=1$, а также определение модуля непрерывности m-го порядка.

Проинтегрировав обе части неравенства (1.3.16) по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=\tau$ и затем поделив обе части полученного результата на τ, запишем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\cdot\frac{\sin{(k-m)\tau}}{(k-m)\tau}+$$

$$+\left(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\right)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,m}^{2/r}\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt. \qquad (1.3.17)$$

Повторно интегрируя обе части неравенства (1.3.17) по переменному τ в промежутке $[0,h]$ $(0<(n-m)h\leq\pi)$, с учётом определения интегрального синуса, приходим к неравенству

$$hE_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty}\left|c_k(\Phi)\right|^2\cdot\frac{Si((k-m)h)}{(k-m)h}+$$

$$+\left(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\right)^{1-1/r}\cdot\frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}}\int\limits_0^{h}\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau}\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)d\tau.$$

Из последнего неравенства получаем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 \cdot \frac{Si((k-m)h)}{(k-m)h} +$$

$$+\Big(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{1-1/r} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,m}^{2/r}} \cdot \frac{1}{h} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right) d\tau. \qquad (1.3.18)$$

Так как при всех $k \geq n > m,\ k, n, m \in \mathbb{N}$

$$\max_{k \geq n} \frac{Si((k-m)h)}{(k-m)h} = \frac{Si((n-m)h)}{(n-m)h}, \quad 0 < (n-m)h \leq \pi,$$

то, пользуясь этим соотношением и тем фактом, что

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left|c_k(\Phi)\right|^2 = E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2},$$

из неравенства (1.3.18) будем иметь

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \left(1 - \frac{Si((n-m)h)}{(n-m)h}\right) \leq$$

$$\leq E_{n-1}^{2-2/r}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \cdot \frac{1}{2h\, \alpha_{n,m}^{2/r}} \int\limits_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right) d\tau,$$

откуда находим

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq$$

$$\leq \left\{1 - \frac{Si((n-m)h)}{(n-m)h}\right\}^{-r/2} \cdot \frac{1}{(2h)^{r/2}\, \alpha_{n,m}} \left\{\int\limits_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right) d\tau\right\}^{r/2} =$$

$$= \left\{ \frac{n-m}{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)} \right\}^{r/2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}} \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^h \left(\frac{1}{\tau} \int\limits_0^\tau \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} \, dt \right) d\tau \right\}^{r/2}. \qquad (1.3.19)$$

Так как неравенство (1.3.19) справедливо для любой функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, то из него следует оценка сверху для величины, стоящей в левой части равенства (1.3.14)

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m} E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{ \int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} \, d\tau \right) dt \right\}^{r/2}} \le$$

$$\le \left\{ \frac{n-m}{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)} \right\}^{r/2}. \qquad (1.3.20)$$

Для получения противоположного неравенства снизу по-прежнему вводим в рассмотрение функцию $G(z) = z^n \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, для которой мы доказали, что

$$E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2} = 1, \quad \omega_r^{2/r}(G^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} = 2\,\alpha_{n,m}^{2/r}\big(1 - \cos(n-m)\tau\big),$$

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(G^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} \, d\tau = 2\alpha_{n,m}^{2/r} \left(1 - \frac{\sin(n-m)t}{(n-m)t} \right),$$

$$\left(\int\limits_0^h \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega^2(G^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2} \, d\tau \right) dt \right)^{r/2} =$$

$$= \alpha_{n,m} \left\{ \frac{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)}{n-m} \right\}^{r/2}.$$

Пользуясь этими равенствами, получаем нужную оценку снизу

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\alpha_{n,m}E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}} \geq$$

$$\geq \frac{\alpha_{n,m}E_{n-1}(G)_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(G^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)}\right\}^{r/2}. \tag{1.3.21}$$

Сопоставим оценки для экстремальной величины из левой части равенства (1.3.2) в виде соотношений (1.3.20) и (1.3.21) и получим требуемое равенство (1.3.2), чем и завершим доказательство теоремы 1.3.3.

Из доказанной теоремы 1.3.3 вытекает более общее утверждение

Теорема 1.3.4. *Для любых $n,r\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ и любого числа $h\in\mathbb{R}_+$, для которой $0<h\leq\pi/(n-m)$, справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}} \frac{\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big)E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}} =$$

$$= \left\{\frac{n-m}{2\big((n-m)h - Si((n-m)h)\big)}\right\}^{r/2}. \tag{1.3.22}$$

В частности, из (1.3.22) *при* $h=\pi/(n-m)$ *получаем*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}}\frac{\big(\alpha_{n,m}/\alpha_{n,s}\big)E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/(n-m)}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}}=\left\{\frac{n-m}{2\big(\pi-Si(\pi)\big)}\right\}^{r/2}.$$

Заметим, что из этого неравенства, в силу того, что модулем непрерывности r-го порядка $\omega_r(\Phi^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}$ при всех $t\in(0,\pi/(n-m)]$ является возрастающая функция, получаем следующее обобщённое неравенство типа Джексона – Стечкина

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\le\frac{1}{\alpha_{n,s}}E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}\le\frac{1}{\alpha_{n,m}}E_{n-m-1}(\Phi^{(m)})_{\mathscr{H}_2}\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{n-m}{2\big(\pi-Si(\pi)\big)}\right\}^{r/2}\omega_r\Big(\Phi^{(m)},\pi/(n-m)\Big)_{\mathscr{H}_2}. \qquad (1.3.23)$$

Будет ли константа $\big\{2\big(\pi-Si(\pi)\big)\big\}^{-r/2}$ наилучшей при всех $n,m,r\in\mathbb{N}$ в неравенстве Джексона – Стечкина, нам доказать не удалось, но тем не менее указанная константа является наименьшей в оценке сверху для $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$, что представляет возможность применения неравенства (1.3.23) в задачах численного анализа.

§ 1.4. Наилучшее среднеквадратическое приближение функций $\Phi \subset \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$, скорость стремления к нулю которых характеризуется модулями непрерывности производной $\Phi_{2,a}^{(m)}(t)$

Теоремы, доказанные нами в предыдущих параграфах, характеризовали быстроту сходимости к нулю среднеквадратического приближения $E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}$ посредством модулей непрерывности r-го ($r \in \mathbb{N}$) порядка m-й производной $\Phi^{(m)}(t)$ граничной функции $\Phi(t)$.

Аналогичные теоремы имеют место для модулей непрерывности r-го порядка m-й производной по аргументу $\Phi_a^{(m)}(t)$. Так как метод доказательства существенно не меняется и в основном повторяет схему доказательства теорем из предыдущих параграфах, то мы в этом параграфе ограничимся лишь их формулировкой.

Теорема 1.4.1. *При всех $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ справедливы соотношения*

$$\frac{1}{nt} \leq \sup_{\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}} \frac{n^m E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2}}{\omega(\Phi_a^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}} \leq \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{2}\right)^{1/2}, \quad 0 < nt \leq \pi,$$

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}} \frac{n^m E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h \omega^2(\Phi_a^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\, dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - \sin nh)}\right\}^{1/2}, \quad 0 < nh \leq \pi/2.$$

Теорема 1.4.2. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $m, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > m \geq s$ и $0 < nh \leq \pi$ справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}} \frac{n^{m-s} E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\omega^2(\Phi_a^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2} + n^2 \int\limits_0^t (t-\tau)\omega^2(\Phi_a^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau\right\}^{1/2}} = \frac{1}{nt}.$$

Теорема 1.4.3. *При любых* $n\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ *и* $0<nh<\pi$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}}\frac{n^{m-s}E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega^2(\Phi_a^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}}=\left\{\frac{n}{2\bigl(nh-Si(nh)\bigr)}\right\}^{r/2}.$$

Теорема 1.4.4. *Пусть* $n,r\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ *и* $0<nh\leq\pi$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}}\frac{h^r n^{m-s}E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h(h-t)\,\omega_r^{2/r}(\Phi_a^{(m)},t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right\}^{r/2}}=\left\{1-\left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-r/2}.$$

Теорема 1.4.5. *Для любых* $n,r\in\mathbb{N}$, $m,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>m\geq s$ *и любого* h, *для которого* $0<h\leq\pi/n$, *справедливо равенство*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}}\frac{n^{m-s}E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^h\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi_a^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}}=\left\{\frac{n}{2\bigl(nh-Si(nh)\bigr)}\right\}^{r/2}.$$

В частности, при $h=\pi/n$ *отсюда имеем:*

$$\sup_{\Phi\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}}\frac{n^{m-s}E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t\omega_r^{2/r}(\Phi_a^{(m)},\tau)_{\mathscr{H}_2}\,d\tau\right)dt\right\}^{r/2}}=\left\{\frac{n}{2\bigl(\pi-Si(\pi)\bigr)}\right\}^{r/2}.$$

§ 1.5. Об экстремальной задаче совместного приближения функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ и её последовательных производных $\Phi^{(s)} \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m;\ m \in \mathbb{N})$ алгебраическими комплексными полиномами на некоторых классах функций, задаваемых модулями непрерывности

В предыдущих параграфах мы отметили, что если функция $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} \cap \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$, то её последовательные производные $\Phi^{(s)} \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ $(\Phi_a^{(s)} \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)})$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$ и, исходя из формулы

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} := \big\|\Phi - T_{n-1}(\Phi)\big\|_{\mathscr{H}_2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2\right\}^{1/2},$$

вычислим значения наилучших среднеквадратических приближений производных $\Phi^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m;\ n > m)$ и $\Phi_a^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$

$$E_{n-s-1}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \big\|\Phi^{(s)} - T_{n-s-1}\big(\Phi^{(s)}\big)\big\|_{\mathscr{H}_2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \big|c_k(\Phi)\big|^2\right\}^{1/2},$$

$$E_{n-1}(\Phi_a^{(s)})_{\mathscr{H}_2} := \big\|\Phi_a^{(s)} - T_{n-1}\big(\Phi_a^{(s)}\big)\big\|_{\mathscr{H}_2} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \big|c_k(\Phi)\big|^2\right\}^{1/2}.$$

Теоремы, доказанные нами в предыдущих параграфах, обеспечивают возможность решать следующую экстремальную задачу: *если $\mathfrak{M}^{(m)} \subset \mathscr{H}_2^{(m)}$ (или $\mathfrak{M}_a^{(m)} \subset \mathscr{H}_{2,a}^{(m)}$) некоторое множество функций $\big\{\Phi(z)\big\}$, то требуется найти точное значение величин*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(m)}\big) := \mathscr{E}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(m)}, \mathscr{T}_{n-1}\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \sup\left\{E_{n-s-1}\big(\Phi^{(s)}\big)_{\mathscr{H}_2} :\ \Phi \in \mathfrak{M}^{(m)}\right\}, \qquad (1.5.1)$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}_a^{(m)}\big) := \mathscr{E}^{(s)}\big(\mathfrak{M}_a^{(m)}, \mathscr{T}_{n-1}\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \sup\left\{E_{n-1}\big(\Phi_a^{(s)}\big)_{\mathscr{H}_2}:\ \Phi\in\mathfrak{M}_a^{(m)}\right\}. \tag{1.5.2}$$

Напомним, что величины (1.5.1) и (1.5.2) означают соответственно наилучшего совместного среднеквадратического приближения множества $\mathfrak{M}^{(m)}$ и $\mathfrak{M}_a^{(m)}$ подпространством тригонометрических полиномов $\mathscr{T}_{n-1}$.

Непрерывную возрастающую на полупрямой $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$ функцию $\Psi(t)$ такую, что $\Psi(0)=0$, назовьём мажорантной функции или, просто, мажорантой. Множество всех мажорант обозначим символом $\mathfrak{N}$.

Через $\mathfrak{N}_k,\ k\in\mathbb{N}$ обозначим множество мажорант $\Psi\in\mathfrak{N}$, для которых выполняются условия

I. $\dfrac{\Psi(\tau_1)}{\tau_1^k}<\dfrac{\Psi(\tau_2)}{\tau_2^k},\quad$ если $\quad 0<\tau_1<\tau_2<\pi;$

II. $\lim\limits_{\tau\to 0+}\dfrac{\Psi(\tau)}{\tau^k}=0.$

Для произвольных натуральных m,r и $0<h\le 2\pi$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_r^{(m)}(h) := \left\{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}:\ \int_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}\,dt\le 1\right\},$$

$$W_r^{(m)}(\Psi) := \left\{\Phi\in\mathscr{H}_2^{(m)}:\ \left(\int_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)^{r/2}\le\Psi(h)\right\},$$

где мажоранта $\Psi\subset\mathfrak{N}_2$. Аналогичным образом определим классы функций

$$W_{r,a}^{(m)}(h) := \left\{\Phi\in\mathscr{H}_{2,a}^{(m)}:\ \int_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(\Phi_a^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}\,dt\le 1\right\},$$

$$W_{r,a}^{(m)}(\Psi) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_{2,a}^{(m)} : \ \left(\int\limits_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}\big(\Phi_a^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2}\, dt \right)^{r/2} \le \Psi(h) \right\}.$$

Теорема 1.5.1. *При всех* $r, n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$ *и любых* $h > 0$, *для которых* $0 < (n-m)h \le \pi$, *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\big(W_r^{(m)}(h)\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\, h^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h} \right)^2 \right\}^{-r/2}, \tag{1.5.3}$$

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\, h^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h} \right)^2 \right\}^{-r/2} \Psi(h). \tag{1.5.4}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство (1.5.4), так как (1.5.3) доказывается аналогично. Из неравенства (1.3.12) для любой функции $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ будем иметь

$$E_{n-m-1}^{(s)}(\Phi^{(s)})_{\mathscr{H}_2} \le$$

$$\le \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} h^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h} \right)^2 \right\}^{-r/2} \left(\int\limits_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2}\, dt \right)^{r/2}.$$

Из этого неравенства в предположении, что функция $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$ также принадлежит классу $W_r^{(m)}(\Psi)$, получаем

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} \le$$

$$\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\,h^{-r}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}\Psi(h). \qquad (1.5.5)$$

Для получения соответствующей оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$\Phi_0(z)=\frac{\Psi(h)}{\alpha_{n,m}}\,h^{-r}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}\cdot z^n.$$

Для этой функции, выполнив простые вычисления, получаем

$$E_{n-s-1}\big(\Phi_0^{(s)}\big)_{\mathscr{H}_2}=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\,h^{-r}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}\Psi(h),$$

$$\omega_r\big(\Phi_0^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}=\frac{\Psi(h)\big(1-\cos(n-m)h\big)^{r/2}}{h^r\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{r/2}}.$$

В силу ряда простых вычислений получаем

$$\left(\int\limits_0^h(h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(\Phi_0^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)^{r/2}=$$

$$=\Psi(h)\cdot\frac{h^r\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{r/2}}{h^r\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{r/2}}=\Psi(h). \qquad (1.5.6)$$

Последнее равенство (1.5.6) означает, что функция $\Phi_0(z)\in W_r^{(m)}(\Psi)$, в силу которого получаем нужную оценку снизу

$$\mathscr{E}_{n-m-1}^{(s)}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2}\geq E_{n-m-1}\big(\Psi_0^{(s)}\big)_{\mathscr{H}_2}=$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}}\, h^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h} \right)^2 \right\}^{-r/2} \Psi(h). \qquad (1.5.7)$$

Требуемое равенство (1.5.3) получаем из сравнения неравенств (1.5.5) и (1.5.7). Теорема 1.5.1 доказана.

Следствие 1.5.1. *В условиях теоремы* 1.5.1 *при* $h = \pi/(n-m)$, $n > m$, $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $n > m \geq s$ *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-m-1}\Big(W_r^{(m)}\Big(\frac{\pi}{n-m}\Big)\Big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\pi^{m-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}}, \qquad (1.5.8)$$

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-m-1}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\pi^{m-r}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}}\, \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right). \qquad (1.5.9)$$

Доказательство. Не умаляя общности, приведём доказательство равенства (1.5.9). Полагая в правой части равенства (1.5.4) $h = \pi/(n-m)$, получаем

$$\mathscr{E}^{(s)}_{n-m-1}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \left(\frac{\pi}{n-m}\right)^{-r} \left\{ 1 - \left(\frac{2\sin(\pi/2)}{\pi} \right)^2 \right\}^{-r/2} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \left(\frac{n-m}{\pi}\right)^{r} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \right\}^{-r/2} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \left(\frac{n-m}{\pi}\right)^{r} \left\{ \frac{\pi^2}{\pi^2-4} \right\}^{r/2} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,m}} \cdot \frac{(n-m)^r}{\sqrt{(\pi^2-4)^r}}\, \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right).$$

Следствие 1.5.1 доказано.

Повторяя схему рассуждений доказанной теоремы 1.5.1 для функций $\Phi \in \mathscr{H}^{(m)}_{2,a}$, легко доказывается следующая

Теорема 1.5.2. *При всех* $r, n, m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ *и* $0 < nh \leq \pi$ *справедливы равенства*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{r,a}^{(m)}(h)\big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{n^{m-s}}\, h^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-r/2}, \qquad (1.5.10)$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{r,a}^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{n^{m-s}}\, h^{-r} \left\{1 - \left(\frac{2\sin(nh/2)}{nh}\right)^2\right\}^{-r/2} \Psi(h). \qquad (1.5.11)$$

Из теоремы 1.5.2 вытекает

Следствие 1.5.2. *В условиях теоремы* 1.5.2, *при* $h = \pi/n$, *имеют место равенства*

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\left(W_{r,a}^{(m)}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi^2 - 4}\right)^r} \cdot \frac{1}{n^{r-m-s}},$$

$$\mathscr{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_{r,a}^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\left(\sqrt{\pi^2 - 4}\right)^r} \cdot \frac{1}{n^{r-m-s}} \Psi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

ГЛАВА 2. Значение n-поперечников некоторых классов функций в пространстве $\mathscr{H}_2$

§ 2.1. Определение n-поперечников в пространстве $\mathscr{H}_2$

В этой главе мы покажем, что результаты теорем, доказанных нами в первой главе, представляют возможность вычислить точные значения n-поперечников некоторых классов функций, вытекающих естественным образом из утверждения указанных теорем.

Так, например, исходя из утверждения теоремы 1.3.2 в пятом параграфе, мы ввели в рассмотрение классы функций

$$W_r^{(m)}(h) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} : \int\limits_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2} dt \le 1 \right\},$$

$$W_r^{(m)}(\Psi) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} : \left(\int\limits_0^h (h-t)\, \omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2} dt \right)^{r/2} \le \Psi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ и $0 < h \le \pi$, Ψ — заданная мажоранта.

Аналогичным образом определим следующий класс $\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)$ функций: при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $h \in (0, \pi)$ и заданной мажоранте Ψ_1 определим класс функций $\Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)}$, удовлетворяющих условию

$$\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1) := \left\{ \Phi \in \mathscr{H}_2^{(m)} : \int\limits_0^h \omega_r^{2/r}\big(\Phi^{(m)}, t\big)_{\mathscr{H}_2} dt \le \Psi_1(h),\ \forall h > 0 \right\}.$$

Прежде чем излагать дальнейшие результаты, напомним нужные далее предварительные определения.

Пусть $S := \{\varphi : \ \|\varphi\|_{\mathscr{H}_2} \leq 1\}$ — единичный шар в $\mathscr{H}_2$; Q — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathscr{H}_2$; $\Lambda_n \subset \mathscr{H}_2$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset \mathscr{H}_2$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : \mathscr{H}_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $\mathscr{H}_2$ в Λ_n; $\mathscr{L}^{\perp} : \mathscr{H}_2 \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования $\mathscr{H}_2$ на подпространство Λ_n. Величины

$$b_n(Q;\mathscr{H}_2) = \sup\Big\{\sup\Big\{\varepsilon > 0 : \ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset Q\Big\} : \ \Lambda_{n+1} \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$d_n(Q;\mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\Big\{\|\Phi - g\|_{\mathscr{H}_2} : \ g \in \Lambda_n\Big\} : \ \Phi \in Q\Big\} : \Lambda_n \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$\delta_n(Q;\mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|\Phi - \mathscr{L}\Phi\|_{\mathscr{H}_2} : \ \Phi \in Q\Big\} : \ \mathscr{L}\mathscr{H}_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$d^n(Q;\mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\sup\Big\{\|\Phi\|_{\mathscr{H}_2} : \ \Phi \in Q \cap \Lambda^n\Big\} : \ \Lambda^n \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

$$\Pi_n(Q;\mathscr{H}_2) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|\Phi - \mathscr{L}^{\perp}\Phi\|_{\mathscr{H}_2} : \ \Phi \in Q\Big\} : \ \mathscr{L}^{\perp}\mathscr{H}_2 \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset \mathscr{H}_2\Big\},$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным* n-поперечниками. Так как $\mathscr{H}_2$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n-поперечниками (см., например, [30, с.33; 29, с.220]) выполняется соотношение:

$$b_n(Q;\mathscr{H}_2) \leq d^n(Q;\mathscr{H}_2) \leq d_n(Q;\mathscr{H}_2) = \delta_n(Q;\mathscr{H}_2) = \Pi_n(Q;\mathscr{H}_2). \qquad (2.1.1)$$

Отметим, что вычислению точных значений различных n-поперечников классов аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Харди $\mathscr{H}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, посвящено достаточно много работ, из которых отметим следующие работы В.М.Тихомирова [28], Л.В.Тайкова [24–27], Н.Айнуллоева и Л.В.Тайкова [1], М.З.Двейрина [17], Ю.А.Фаркова [31], S.D.Fisher, M.I.Stesin [32], A.Pinkus [30], С.Б.Вакарчука [6–15], М.Ш.Шабозова и О.Ш.Шабозова [37], М.Ш.Шабозова [34, 38], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [35, 39], К.Ю.Осипенко и М.И.Стесина [22] и многие другие.

§ 2.2. Основные теоремы

В этом параграфе приводим точные значения вышеперечисленных n-поперечников для классов функций $W_r^{(m)}(h)$, $W_r^{(m)}(\Psi)$ и $\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)$ в пространстве $\mathscr{H}_2$.

Теорема 2.2.1. *Пусть $r, n, m \in \mathbb{N}$ и для значений числа $h > 0$ выполнено условие $0 < (n-m)h \le \pi$. Тогда справедливы равенства*

$$\gamma_n\big(W_r^{(m)}(h), \mathscr{H}_2\big) = E_{n-1}\big(W_r^{(m)}(h)\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= h^{-r}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}, \qquad (2.2.1)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Доказательство. Учитывая определение класса $W_r^{(m)}(h)$, из неравенства (1.3.7) следующего вида

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le h^{-r}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \times$$

$$\times \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left(\int_0^h (h-t)\omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, t)_{\mathscr{H}_2}\,dt\right)^{r/2}$$

получаем оценку сверху наилучшего приближения всего класса $W_r^{(m)}(h)$ в пространстве $\mathscr{H}_2$:

$$E_{n-1}\big(W_r^{(m)}(h)\big)_{\mathscr{H}_2} := \sup\left\{E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} :\ \Phi \in W_r^{(m)}(h)\right\} \le$$

$$\le h^{-r}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}},$$

из которой сразу вытекает оценка сверху всех n-поперечников

$$\gamma_n\big(W_r^{(m)}(h),\mathscr{H}_2\big)=E_{n-1}\big(W_r^{(m)}(h)\big)_{\mathscr{H}_2}\le$$

$$\le h^{-r}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}\cdot\frac{1}{\alpha_{n,m}}. \qquad (2.2.2)$$

Для получения оценки снизу n-поперечников класса $W_r^{(m)}(h)$ рассмотрим на множестве $\mathscr{P}_n\cap\mathscr{H}_2$ шар

$$\mathbb{S}_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathscr{P}_n:\ \|p_n\|_{\mathscr{H}_2}\le\frac{h^{-r}}{\alpha_{n,m}}\left\{1-\left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2}\right\}.$$

Для произвольного $p_n\in\mathbb{S}_{n+1}$, из неравенства [27], имеем

$$\omega_r^2\big(p_n^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}\le 2^r\alpha_{n,m}^2\big(1-\cos(n-m)t\big)_*^r\cdot\|p_n\|_{\mathscr{H}_2}^2, \qquad (2.2.3)$$

$$\big(1-\cos(n-m)t\big)_*^r:=\begin{cases}\big(1-\cos(n-m)t\big)^r, & \text{если}\ \ 0<(n-m)t\le\pi,\\ 2^r, & \text{если}\ \ t\ge\pi/(n-m).\end{cases}$$

Отсюда при $0<(n-m)t\le\pi$ получаем

$$\int_0^h(h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(p_n^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2}dt\le$$

$$\le 2\alpha_{n,m}^{2/r}\|p_n\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r}\int_0^h(h-t)\big(1-\cos(n-m)t\big)dt\le 1. \qquad (2.2.4)$$

Учитывая определение класса $W_r^{(m)}(h)$ и неравенство (2.2.4), имеем $\mathbb{S}_{n+1} \subset W_r^{(m)}(h)$. Используя соотношение (2.1.1) и определение n-поперечника Бернштейна, запишем оценку снизу для рассматриваемых нами n-поперечников

$$\gamma_n\big(W_r^{(m)}(h), \mathscr{H}_2\big) \geq b_n\big(W_r^{(m)}(h), \mathscr{H}_2\big) \geq b_n\big(\mathbb{S}_{n+1}, \mathscr{H}_2\big) \geq$$

$$\geq h^{-r}\left\{1 - \left(\frac{2\sin((n-m)h/2)}{(n-m)h}\right)^2\right\}^{-r/2} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}. \tag{2.2.5}$$

Сопоставляя оценки сверху (2.2.2) и снизу (2.2.5), получаем требуемое равенство (2.2.1). Теорема 2.2.1 доказана.

Из доказанной теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1, *при* $h = \pi/(n-m)$, *имеет место равенство*

$$\gamma_n\left(W_r^{(m)}\left(\frac{\pi}{n-m}\right), \mathscr{H}_2\right) = \left\{\frac{n-m}{\sqrt{\pi^2-4}}\right\}^r \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}}.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть мажоранта* $\Psi \in \mathscr{H}_2$ *для всех* $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{\Psi(h)}{\Psi(\pi/(n-m))} \geq \frac{1}{\pi^2-4}\times$$

$$\times\begin{cases} ((n-m)h)^2 - 2\big(1-\cos(n-m)h\big), & \textit{если } \ 0 < (n-m)h \leq \pi, \\ \pi^2 - 4 + (nh-\pi)^2, & \textit{если } \ (n-m)h > \pi. \end{cases} \tag{2.2.6}$$

Тогда для любых чисел $r, n \in \mathbb{N}$ *и* $m \in \mathbb{Z}_+$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n\big(W_r^{(m)}(\Psi), \mathscr{H}_2\big) = E_{n-1}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{(n-m)^2}{\pi^2-4} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \right\}^{r/2}, \tag{2.2.7}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников, перечисленных ранее. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.2.6), не пусто.

Доказательство. Полагая в неравенстве (1.3.7) $h = \pi/(n-m)$ и используя определение класса $W_r^{(m)}(\Psi)$, для произвольной функции $\Phi \in W_r^{(m)}(\Psi)$, получаем

$$E_{n-1}(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\, \Phi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \right\}^{r/2}. \tag{2.2.8}$$

Учитывая равенство (2.2.1) и неравенство (2.2.8), запишем оценку сверху для всех n-поперечников

$$\gamma_n\big(W_r^{(m)}(\Psi), \mathscr{H}_2\big) \le E_{n-1}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{(n-m)^2}{\pi^2-4} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \right\}^{r/2}. \tag{2.2.9}$$

Как и в предыдущей теореме, для получения оценки снизу указанных n-поперечников рассмотрим в $\mathscr{P}_n \cap \mathscr{H}_2$ шар

$$\widetilde{\mathbb{S}}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_{\mathscr{H}_2} \le \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{(n-m)^2}{\pi^2-4} \Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \right\}^{r/2} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_r^{(m)}(\Psi)$.

Пусть сначала $0 < (n-m)h \le \pi$. Используя определение класса $W_r^{(m)}(\Psi)$, первое ограничение из условий (2.2.6) и неравенство (2.2.3), для произвольного полинома $p_n \in \widetilde{\mathbb{S}}_{n+1}$ получаем

$$\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(p_n^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2} dt \le$$

$$\le 2\alpha_{n,m}^{2/r}\big\|p_n\big\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r}\int\limits_0^h (h-t)\big(1-\cos(n-m)t\big)dt \le$$

$$\le \Big\{((n-m)h)^2 - 2\big(1-\cos(n-m)h\big)\Big\}(\pi^2-4)^{-1}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \le \Psi(h). \tag{2.2.10}$$

Пусть теперь $(n-m)h > \pi$. Используя второе неравенство из ограничения (2.2.6) и соотношение (2.2.3), имеем

$$\int\limits_0^h (h-t)\,\omega_r^{2/r}\big(p_n^{(m)},t\big)_{\mathscr{H}_2} dt \le 2\alpha_{n,m}^{2/r}\big\|p_n\big\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\pi/(n-m)}\left(\frac{\pi}{n-m}-t\right)\big(1-\cos(n-m)t\big)dt + 2\int\limits_{\pi/(n-m)}^{h}(h-t)dt\right\} \le$$

$$\le \pi^2 - 4 + \big((n-m)h-\pi\big)^2(\pi^2-4)^{-1}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right) \le \Psi(h). \tag{2.2.11}$$

Включение $\widetilde{\mathbb{S}}_{n+1} \subset W_r^{(m)}(\Psi)$ следует из неравенств (2.2.10) и (2.2.11).

Пользуясь соотношениями (2.2.1) и определением бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу для рассматриваемых n-поперечников

$$\gamma_n\big(W_r^{(m)}(\Psi),\mathscr{H}_2\big) \ge b_n\big(W_r^{(m)}(\Psi),\mathscr{H}_2\big) \ge b_n\big(\widetilde{\mathbb{S}}_{n+1},\mathscr{H}_2\big) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2}. \tag{2.2.12}$$

Сопоставляя оценки сверху (2.2.9) с оценкой снизу (2.2.12), получаем равенства (2.2.7). Повторяя схему доказательства теоремы 3 работы М.Ш.Шабозова и С.Б.Вакарчука [40], легко доказать, что мажоранта $\Psi_*(h) := h^\alpha$, где $\alpha := 2\pi^2/(\pi^2-4)$, удовлетворяет ограничениям (2.2.6).

В 1910 г. Лебегом [21] введено понятие модуля непрерывности $\omega(f,t)_C$ для непрерывных на $[0,2\pi]$ функций, то есть $f\in C[0,2\pi]$. Им же впервые были получены оценки стремления к нулю коэффициентов Фурье $a_n(f)$ и $b_n(f)$ при $n\to\infty$ в терминах модуля непрерывности. В дальнейшем вопросы вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций рассматривались в работах многих математиков. Для изучаемых в этом параграфе классов функций данный вопрос также представляет определённый интерес. Так, например, из теоремы 2.2.2 в качестве следствия получаем

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.2. Тогда для любых чисел $r,n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $n>m$ имеет место равенство*

$$\sup\left\{\left|c_n(\Phi)\right|:\ \Phi\in W_r^{(m)}(\Psi)\right\}=\frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2}, \quad (2.2.13)$$

где $\left|c_n(\Phi)\right|$ — коэффициенты Тейлора функции Φ.

Доказательство. Пусть

$$T_{n-1}\big(\Phi,z\big)=\sum_{k=0}^{n-1}c_n(\Phi)z^k$$

— частная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Тейлора. Тогда, в силу формулы для коэффициентов Тейлора

$$c_k(\Phi)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\Phi(z)}{z^k}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(e^{it})e^{-i(k-1)t}dt,\quad k=0,1,2,\ldots$$

и ортогональности системы функций $\left\{e^{-ikt}\right\}_{k=0}^{n}$, имеем:

$$c_k(\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\Phi(e^{it}) - \sum_{l=0}^{n-1} c_l(\Phi)e^{-ilt}\right\}e^{-i(k-1)t}dt.$$

Отсюда, используя неравенство Коши – Буняковского и соотношение (2.2.7), получаем

$$\sup\left\{\left|c_n(\Phi)\right| : \ \Phi \in W_r^{(m)}(\Psi)\right\} \le \sup\left\{\left\|\Phi - T_{n-1}(\Phi)\right\|_{\mathscr{H}_2} : \ \Phi \in W_r^{(m)}(\Psi)\right\} =$$

$$= E_{n-1}\big(W_r^{(m)}(\Psi)\big)_{\mathscr{H}_2} = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2}. \qquad (2.2.14)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2} z^n.$$

Из доказательства второй части теоремы 2.2.2 следует, что $\Phi_1(z) \in \widetilde{\mathbb{S}}_{n+1}$. Поэтому функция Φ_1 является элементом класса $W_r^{(m)}(\Psi)$ и справедливо следующее неравенство

$$\sup\left\{\left|c_n(\Phi)\right| : \ \Phi \in W_r^{(m)}(\Psi)\right\} \ge \left|c_n(\Phi_1)\right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,m}}\left\{\frac{(n-m)^2}{\pi^2-4}\Psi\left(\frac{\pi}{n-m}\right)\right\}^{r/2}. \qquad (2.2.15)$$

Требуемое равенство (2.2.13) получаем, сопоставляя неравенства (2.2.14) и (2.2.15), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.3.

Теорема 2.2.4. *Пусть мажоранта $\Psi_1(t)$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ удовлетворяет ограничениям*

$$\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/2(n-m))} \ge$$

$$\ge \frac{2}{\pi-2}\begin{cases} (n-m)t - \sin(n-m)t, & \textit{если} \ \ 0 < (n-m)t \le \pi, \\ 2(n-m)t - \pi, & \textit{если} \ \ (n-m)t > \pi. \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

Тогда для любых чисел $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место следующие равенства

$$\gamma_n\big(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\big) = E_{n-1}\big(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)\big)_{\mathscr{H}_2} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{\pi-2} \Psi_1 \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \right\}^{r/2}, \tag{2.2.17}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Доказательство. Из неравенства (1.3.17) вида

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \big|c_k(\Phi)\big|^2 \cdot \frac{\sin{(k-m)t}}{(k-m)t} +$$

$$+ \Big(E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2}\Big)^{1-1/r} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,m}^{2/r}\, t} \int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau$$

получаем

$$E_{n-1}^2(\Phi)_{\mathscr{H}_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{2(n-m)t - \sin{(n-m)t}} \right\}^r \left(\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}(\Phi^{(m)}, \tau)_{\mathscr{H}_2}\, d\tau \right)^r. \tag{2.2.18}$$

Полагая в (2.2.18) $t = \pi/2(n-m),\ n > m$, для произвольной функции $\Phi \in \mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)$ запишем

$$E_{n-1}\big(\Phi\big)_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{\pi-2} \Psi_1 \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \right\}^{r/2}. \tag{2.2.19}$$

Пользуясь соотношениями (2.1.1) между n-поперечниками и неравенством (2.2.18), получим оценку сверху для всех аппроксимационных величин

$$\gamma_n\big(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\big) \leq E_{n-1}\big(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)\big)_{\mathscr{H}_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{\pi-2} \Psi_1 \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \right\}^{r/2}. \tag{2.2.20}$$

Для получения оценки снизу вышеперечисленных n-поперечников рассмотрим во множестве $\mathscr{P}_n \cap \mathscr{H}_2$ шар

$$\mathscr{B}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathscr{P}_n : \ \|p_n\|_{\mathscr{H}_2} \leq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{\pi-2} \Psi_1 \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \right\}^{r/2} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)$. Воспользуемся по-прежнему неравенством (2.2.3).

Пусть сначала $0 < (n-m)t \leq \pi$. Тогда, используя определение класса $\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)$, первое из ограничений (2.2.16) и неравенство (2.2.3), для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{B}_{n+1}$ получим

$$\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}\big(p_n^{(m)}, \tau\big)_{\mathscr{H}_2} d\tau \leq$$

$$\leq 2\alpha_{n,m}^{2/r} \|p_n\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r} \int\limits_0^t \big(1 - \cos(n-m)\tau\big) d\tau \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi-2} \Big((n-m)t - \sin(n-m)t\Big) \Psi_1 \left(\frac{\pi}{2(n-m)} \right) \leq \Psi_1(t). \tag{2.2.21}$$

Пусть теперь $(n-m)t > \pi$. В этом случае, на основании аналогичных соображений и второго неравенства из ограничения (2.2.16) для произвольного полинома $p_n \in \mathscr{B}_{n+1}$ запишем

$$\int\limits_0^t \omega_r^{2/r}\big(p_n^{(m)}, \tau\big)_{\mathscr{H}_2} d\tau \leq 2\alpha_{n,m}^{2/r} \|p_n\|_{\mathscr{H}_2}^{2/r} \big(2t - \pi/(n-m)\big) \leq$$

$$\leq 2/(\pi-2)\big(2(n-m)t - \pi\big) \Psi_1 \left(\pi/2(n-m)\right) \leq \Psi_1(t). \tag{2.2.22}$$

Включение $\mathscr{B}_{n+1} \subset \mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)$ следует из сопоставления неравенств (2.2.21) и (2.2.22). Теперь воспользовавшись соотношениями (2.2.1) и определением бернштейновского n-поперечника, запишем оценку снизу для рассматриваемых n-поперечников

$$\gamma_n\big(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\big) \geq b_n\big(\mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1), \mathscr{H}_2\big) \geq b_n\big(\mathscr{B}_{n+1}, \mathscr{H}_2\big) \geq$$

$$\geq \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{\pi-2} \Psi_1\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right)\right\}^{r/2}. \qquad (2.2.23)$$

Сопоставляя неравенства (2.2.20) и (2.2.23), получим равенства (2.2.17). Теорема 2.2.4 доказана.

Пользуясь утверждением теоремы 2.2.4, в качестве следствия получаем

Теорема 2.2.5. *Если выполнены условия теоремы 2.2.4, то при всех $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$ имеют место следующее равенство*

$$\sup\left\{\big|c_n(\Phi)\big| : \ \Phi \in \mathscr{F}_r^{(m)}(\Psi_1)\right\} = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \left\{ \frac{n-m}{\pi-2} \Psi_1\left(\frac{\pi}{2(n-m)}\right)\right\}^{r/2}.$$

Доказательство данного утверждения не приводится, поскольку повторяет рассуждения, имевшие место при получении теоремы 2.2.3.

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- вычислены точные значения верхних граней наилучших совместных приближений функций и её последовательных производных полиномами и их соответствующими производными на некоторых классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди;
- найдены новые точные неравенства между величинами наилучшего среднеквадратического приближения аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённые значения модулей непрерывности r-го порядка от граничных значений;
- вычислены значения бернштейновских, колмогоровских, гельфандовских, линейных и проекционных n-поперечников определённых классов функций, задаваемых модулями непрерывности высшего порядка.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации для аналитических функций многих переменных. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика».

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Айнуллоев Н., Тайков Л.В. Наилучшие приближения в смысле А.Н.Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // Матем. заметки. – 1986. – Т.40. – №3. С.341-351.

[2] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Сборник научных трудов: Калининский госуниверситет. – 1986. – С.91-101.

[3] Бабенко К.И. О наилучших приближения одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. – 1958. – Т.22. – №5. С.631-640.

[4] Белый В.И. К вопросу о наилучших линейных методах приближения функций, аналитических в единичном круге // Укр. мат. журнал. – 1967. – Т.19. – №2. – С.104-108.

[5] Белый В.И., Двейрин М.З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами // В кн: Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев "Наукова думка". – 1971. – №4. – С.37-54.

[6] Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. матем. журнал. – 1989. – Т.41. – №26. – С.799-802.

[7] Вакарчук С.Б. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // Укр. матем. журнал. – 1990. – Т.42. – №7. – С.873-881.

[8] Вакарчук С.Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. – 1995. – Т.57. – №1. – С.30-39.

[9] Вакарчук С.Б. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из L_2 // Матем. заметки. – 1999. – Т.66. – №4. – С.494-499.

[10] Вакарчук С.Б. О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Матем. заметки. – 2001. – Т.70. – №3. – С.334-345.

[11] Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78. – №5. – С.792-796.

[12] Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80. – №1. – С.11-19.

[13] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. О наилучших линейных методах приближения функций классов Л.В.Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho},\ q \geq 1$, $0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. – 2009. – Т.85. – №3. – С.323-329.

[14] Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб., – 2010. – Т.201. – №8. – С.3-22.

[15] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки. – 2012. – Т.92. – №4. – С.497-514.

[16] Двейрин М.З. О приближении функций, аналитических в единичном круге // Метрические вопросы теории функций и отображений. – Киев: Наукова думка. – 1975. – Вып. 6. – С.41-54.

[17] Двейрин М.З. Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге функций // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1975. – Вып. 23. – С.32-46.

[18] Двейрин М.З., Чебаненко И.В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. – Киев: Наукова думка. – 1983. – С.62-73.

[19] Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука. – 1977. – 511 с.

[20] Кусис П. Введение в теорию пространств H_p. – М.: Мир. – 1984. – 256 с.

[21] Lebesgue H. Sur la representation trigonometrique approchŕee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz // Bull. Soc. math. de France. – 1910. – V.38. – P.184-210.

[22] Осипенко К.Ю., Стесин М.И. О задачах восстановления в пространствах Харди и Бергмана // Матем. заметки. – 1991. – Т.49. – №4. – С.95-104.

[23] Смирнов В.И., Лебедев Н.А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.: Наука. – 1964. – 440 с.

[24] Тайков Л.В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1967. – Т.1. – №2. – С.155-162.

[25] Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20. – №3. – С.433-438.

[26] Тайков Л.В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. – 1977. – Т.22. – №2. – С.285-295.

[27] Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки. – 1979. – Т.25. – №2. – С.217-223.

[28] Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи матем. наук. – 1960. – Т.15. – №3(93). – С.81-120.

[29] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ. – 1976. – 325 с.

[30] Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. – 1985. – 252 p.

[31] Фарков Ю.А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // Успех. мат. наук. – 1990. – Т.45. – №5. – С.197-198.

[32] Fisher S.D., Stessin M.I. The n-widths of the unit ball of H^q // Journ. Approx. Theory. – 1991. – V.67. – №3. – P.347-356.

[33] Hardy G.G., Littlewood J.E., Polya G. Inequality. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press. – 1952. – 346 p.

[34] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // ДАН России. – 2002. – Т.383. – №2. – С.171-174.

[35] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // ДАН России. – 2002. – Т.382. – №6. – С.747-749.

[36] Шабозов М.Ш., Пиров Х.Х. Точные константы в неравенствах типа Джексона для приближения аналитических функций из H_p^r, $1 \le p \le 2$ // ДАН России. – 2003. – Т.394. – №4. – С.399-401.

[37] Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // ДАН России. – 2007. – Т.412. – №4. – С.466-469.

[38] Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87. – №4. – С.616-623.

[39] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90. – №5. – С.764-775.

[40] Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. – 2012. – Tomus 38. – №2. – PP.154-165.

[41] Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки. – 2013. – Т.94. – №6. – С.905-914.

[42] Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol.17. – PP.1238-1243.

Б) Список публикаций соискателя учёной степени

[43-А] Заргаров Дж.Дж. Наилучшие приближения аналитических функций и значения поперечников классов функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности, в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Вестник Хорогского университета. – 2012. – Серия 1. – №9. – С.9-16.

[44-А] Заргаров Дж.Дж. Точные значения n-поперечников некоторых классов аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2012. – Т.55. – №4. – С.286-290.

[45-А] Заргаров Дж.Дж. О точных значениях n-поперечников классов аналитических в круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. – 2012. – №2(147). – С.16-21.

[46-А] Заргаров Дж.Дж. О значении поперечников классов аналитических функций, определяемых обобщенными модулями непрерывности в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций", посвященной 60–летию академика АН Республики Таджикистан Шабозова Мирганда Шабозовича (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.). – С.55-56.

[47-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем приближении аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы теории функций и дифференциальных уравнений", посвященной 85-летию академика АН Республики Таджикистан, Михайлова Леонида Григорьевича (Душанбе, 17-18 июня 2013 г.). – С.60-62.

[48-А] Заргаров Дж.Дж., Давлатбеков Ф.Д. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания" – посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан, 28-29 июня 2014 г. – Худжанд: Изд-во „Меъроч", 2014. – С.46-48.

[49-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем приближении аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Материалы международной научной конференции „Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений" – посвященной 80–летию члена-корреспондент АН Республики Таджикистан Стеценко Владислава Яковлевича (27-28 апреля 2015 г.). – С.22-24.

[50-А] Заргаров Дж.Дж. Значения n-поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // Труды международной летней математической Школы-Конференции

С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016). – С.113-115.

[51-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем полиномиальном приближении функций $f \in H_p$, структурные свойства которых определяются обобщенными модулями непрерывности m-го порядка [Текст] / Дж.Дж. Заргаров // „Математический анализ и его приложения" — Материалы республиканской научной конференции, посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Бекназара Имомназарова. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.) – С.72-74.

[52-А] Заргаров Дж.Дж. О наилучшем совместном приближение аналитических функций в пространстве Харди [Текст] / М.Ш. Шабозов, Г.А. Юсупов, Дж.Дж. Заргаров // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2020. – Т.63. – №3. – С.132-141.