Министерство образования и науки

Республики Таджикистан

Таджикский национальный университет

На правах рукописи

Зеваршоев Умар Нуралишоевич

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ БИЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СПЛАЙНАМИ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик НАН Таджикистана,
профессор М.Ш.Шабозов

Д У Ш А Н Б Е — 2 0 2 1

Содержание

В в е д е н и е

Актуальность и степень разработанности темы исследования

В математике и её приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями сложных функций суммами более простых функций. Классическими аппаратами таких представлений являются алгебраические многочлены и рациональные дроби для непериодических функций и тригонометрические многочлены для периодических функций. Теория приближения функций многочленами была разработана в классических трудах П.Л.Чебышева, К.Ф.Вейерштрасса, Ш.Валле-Пуссена, А.Лебега, С.Н.Бернштейна, А.Н.Колмогорова, М.Г.Крейна, Н.И.Ахиезера, С.Б.Стечкина, Н.П.Корнейчука и др.

Многочлены и рациональные дроби обладают рядом недостатков как аппарат приближения для функций с особенностями и для функций с малой гладкостью. Основной недостаток состоит в том, что их поведение в окрестности какой-либо точки определяет их поведение во всей области. В связи с этим в последнее время разрабатываются другие аппараты приближения, свободные от указанного недостатка. Одним из таких аппаратов, зарекомендовавших себя как в теоретических исследованиях, так и в практическом применении, являются так называемые сплайн-функции, составленные из склейки различных кусков многочленов по фиксированной системе точек на заданном отрезке.

В настоящее время теория сплайнов и сплайн-аппроксимаций представляет собой весьма важный и интенсивно развивающийся раздел теории приближения функций. Во многих задачах сплайны являются более естественным аппаратом приближения, чем многочлены. С уклоном в задачах вычислительной математики сплайн-аппроксимации систематически исследовал И. Шенберг, а как промежуточное приближение они появились в глубоких исследованиях Н.П. Корнейчука о приближении дифференцируемых функций. Отметим также работы В.М. Тихомирова и Ю.Н. Субботина по функциональной интерполяции, где также появились сплайны. Дальнейшее развитие теории сплайн-аппроксимации связано с именами Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасова, В.Л. Мирошниченко, В.Ф. Сторчая, В.Л. Великина, А.А. Женсыкбаева, А.А. Лигуна, В.Т. Шевалдина, С.Б. Вакарчука, М.Ш. Шабозова и многих других.

Диссертационная работа посвящена решению ряда экстремальных задач наилучшего совместного приближения функций двух переменных билинейными интерполяционными сплайнами.

В первой главе диссертации изучается экстремальная задача совместного приближения функций двух переменных билинейными интерполяционными сплайнами на классах функций двух действительных переменных, задаваемых модулями непрерывности, зависящими от расстояния между точками в равномерной метрике.

Во второй главе диссертации приводятся точные результаты об оценках погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций и даются их приложения в теории кубатурных формул.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. по теме “Теория приближения функций”.

Цели и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующим:

- найти точные оценки погрешности совместных приближений функций двух переменных и их частных производных билинейными интерполяционными сплайнами в равномерной норме на классах функций, задаваемых модулями непрерывности.

- найти точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на различных классах функций и их приложения в теории кубатурных формул.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы сплайн-аппроксимации и методы решения экстремальных задач теории сплайн-аппроксимации, разработанные Н.П.Корнейчуком и Ю.Н.Субботины.

Научная новизна исследований. В диссертационой работе получены следующие результаты:

- найдены точные верхние грани совместного приближения функций двух переменных и их частных производных билинейными интерполяционными сплайнами и их соответствующими производными на классах функций, задаваемых модулями непрерывности;

- даны приложения точных результатов оценок погрешности интерполяции билинейными сплайнами в теории кубатурных формул.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о точных значениях верхних граней совместных приближений функций двух переменных и их частных производных билинейными сплайнами на классах функций;

- теоремы о применении точных оценок погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классах функций и их применение в теории кубатурных формул.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты о приближении билинейными сплайнами имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты применяются при нахождении точных оценок погрешности приближений сплайнами в многомерном случае на классах функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Математика" и "Прикладная математика".

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, вносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений и кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе 2015-2020 гг.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе,15-25 августа 2016 г.);
- международнойнаучной конференции "Современные проблемы математики и ее приложений "(Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);

- республиканской научной конференции "Математический анализ и его приложения"(Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами"(Душанбе, 30-31 июня 2020 г.);

Публикации. Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 7 печатных работах [1А-7А], из них 4 статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК при Президенте Республики Таджикистана, ВАК Российской Федерации и Journal of Mathematical Sciences, 3 статей в материалах конференций и других изданиях. Из совместных с научным руководителем М.Ш.Шабозовым работ [1А] и [3А], соавтору принадлежит постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы из 48 наименований, занимает 74 страницы машинописного текста, набрана на LATEX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм или формул в данном параграфе.

Глава I. Приближение билинейными сплайнами

§1.1. Определение классов функций двух переменных, задаваемых модулями непрерывности, и билинейных интерполяционных сплайнов

1.1.1. Классы функций

Пусть $Q := \{(x,y), 0 \leq x, y \leq 1\}$ — единичный квадрат, $C(Q)$ — множество непрерывных в квадрате функций двух переменных $f(x,y)$ с равномерной (чебышевской) нормой

$$\|f\|_{C(Q)} := \max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)|.$$

Всюду далее через $C^{(r,s)}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+, C^{(0,0)}(Q) = C(Q))$ обозначим множество функций $f \in C(Q)$, у которых все частные производные

$$f^{(k,l)}(x,y) := \frac{\partial^{k+l} f(x,y)}{\partial x^k \partial y^l},\ k \leq r, l \leq s,\ k,l \in \mathbb{Z}_+$$

непрерывны в квадрате Q. При этом $f^{(0,0)}(x,y) \equiv f(x,y)$.

Равенством

$$\omega(f;\delta,\eta)_{C(Q)} =$$
$$= \sup\Big\{|f(x',y') - f(x'',y'')| :\ |x'-x''| < \delta, |y'-y''| < \eta\Big\}, \qquad (1.1.1)$$

где (x',y') и (x'',y'') — произвольные точки из Q, определим полный модуль непрерывности функции $f \in C(Q)$, а равенствами

$$\omega(f;\delta,0)_{C(Q)} = \sup\Big\{|f(x',y) - f(x'',y)| :\ |x'-x''| \leq \delta, 0 \leq y \leq 1\Big\}, \quad (1.1.2)$$

$$\omega(f;0,\eta)_{C(Q)} = \sup\Big\{|f(x,y') - f(x,y'')| :\ |y'-y''| < \eta, 0 \leq x \leq 1\Big\}, \quad (1.1.3)$$

определим частные модули непрерывности функции $f \in C(Q)$, соответственно по x и y, характеризующие изменение функции $f(x,y)$ вдоль каждой переменной.

Через $W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)\left(r,s\in\mathbb{Z}_+, W^{(0,0)}H^{\omega}(Q)=H^{\omega}(Q)\right)$ обозначим класс функций $f\in C^{(r,s)}(Q)$, каждый из которых удовлетворяет условию

$$\omega(f^{(r,s)};\delta,\eta)\le\omega(\delta,\eta), \tag{1.1.4}$$

где $\omega(\delta,\eta)$ — заданный двумерный полный модуль непрерывности.

Легко заметить, что неравенство (1.1.4) эквивалентно выполнению для любых двух точек $(x',y'),(x'',y'')\in Q$, неравенству

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y'')\right|\le\omega\Big(\left|x'-x''\right|,\left|y'-y''\right|\Big), \tag{1.1.5}$$

где $\omega(t,\tau)$ — тот же заданный полный модуль непрерывности.

Аналогичным образом, через

$$W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\ (r,s\in\mathbb{Z}_+, W^{(0,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)=H^{\omega_1,\omega_2}(Q))$$

обозначим класс функций $f \in C^{(r,s)}(Q)$, у которых старшая частная производная $f^{(r,s)}(x,y)$ удовлетворяет неравенством

$$\omega\left(f^{(r,s)};t,0\right)_{C(Q)}\le\omega_1(t),\ \ \omega\left(f^{(r,s)};0,\tau\right)_{C(Q)}\le\omega_2(\tau), \tag{1.1.6}$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — заданные модули непрерывности, то есть непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям

$$0\le\omega_1(t'')-\omega_1(t')\le\omega_1(t''-t'),0\le t'\le t''\le 1,\ \ \omega_1(0)=0,$$

$$0\le\omega_2(\tau'')-\omega_2(\tau')\le\omega_2(\tau''-\tau'),0\le \tau'\le \tau''\le 1,\ \ \omega_2(0)=0.$$

Очевидно, что если неравенства (1.1.6) выполнены, то выполняется неравенство

$$\left|f^{(r,s)}(x',y')-f^{(r,s)}(x'',y'')\right|\le\omega_1\left(|x'-x''|\right)+\omega_2\left(|y'-y''|\right), \tag{1.1.7}$$

где $(x', y'), (x'', y'') \in Q$. Очевидно, что неравенство (1.1.7) эквивалентно системе неравенств

$$\left|f^{(r,s)}(x', y) - f^{(r,s)}(x'', y)\right| \le \omega_1\Big(|x' - x''|\Big), 0 \le y \le 1,$$

$$\left|f^{(r,s)}(x, y') - f^{(r,s)}(x, y'')\right| \le \omega_2\Big(|y' - y''|\Big), 0 \le x \le 1.$$

Параллельно будем рассматривать класс $W^{(r,s)}H_p^{\omega}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+, W^{(0,0)}$ $H_\rho^{\omega}(Q) = H_\rho^{\omega}(Q))$ $(1 \le p \le \infty)$ — функций $f \in C^{(r,s)}(Q)$, для любых двух точек $M^{'}(x^{'}, y^{'}), M^{''}(x^{''}, y^{''}) \in Q$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|f^{(r,s)}(M') - f^{(r,s)}(M'')\right| \le \omega\Big[\rho_p(M', M'')\Big], \tag{1.1.8}$$

где $\rho_p(M', M'') = \sqrt[p]{|x' - x''|^p + |y' - y''|^p}$, $1 \le p \le \infty$, l_p $(1 \le p \le \infty)$ — расстояние между точками $(M', M'') \in Q$, заданное на отрезке $0 \le t \le \sqrt[p]{2}$ с модулем непрерывности.

В некоторых случаях вместо полного модуля непрерывности (1.1.1) функции $f \in C(Q)$ вводят в рассмотрение следующий модуль непрерывности

$$\omega_*(f; \delta, \eta)_{C(Q)} := \sup\Big\{|f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x'', y'')| :$$

$$: |x' - x''| \le \delta,\ |y' - y''| \le \eta,\ x', x'' \in [0, 1],\ y', y'' \in [0, 1]\Big\}. \tag{1.1.9}$$

Легко проверить, что кроме тех характеристических свойств, которыми обладает полный модуль непрерывности (1.1.1), модуль непрерывности (1.1.9) обладает еще следующими свойствами:

1) если $f(x, y) = \varphi(x) + g(y)$, то $\omega_\star(f; \delta, \eta)_{C(Q)} \equiv 0$;

2) если $f(x, y) = \varphi(x) \cdot g(y)$, то $\omega(f; \delta, \eta) = \omega(\varphi, \delta)\omega(g, \eta)$;

3) $\omega(f; \delta, \eta) \le 2\max\{\omega(f; \delta, 0), \omega(f; 0, \eta)\}$, где $\omega(f, \delta, 0)$, $\omega(f, 0, \eta)$ — частные модули непрерывности, определенные равенствами (1.1.2) и (1.1.3).

Через $W^{(r,s)}H_p^{\omega_*}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+,\ W^{(0,0)}H_\rho^{\omega_*}(Q) = H_\rho^{\omega_*}(Q)),\ (1 \le p \le \infty)$ обозначим класс функций $f \in C^{(r-1,q-1)}(Q)$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$\Big|f(x', y') - f(x'', y') - f(x', y'') + f(x'', y'')\Big| \le$$

$$\le \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{|x' - x''|^p + |y' - y''|^p}\right), (1 \le p < \infty), \\ \omega\left(\max\{|x' - x''|, |y' - y''|\}\right),\ (p = \infty). \end{cases} \tag{1.1.10}$$

Исходя из (1.1.10), класс $W^{(r,s)}H^\omega(Q)$ можно задавать ограничением

$$\omega_*\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_{C(Q)} \le \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right), (1 \le p < \infty), \\ \omega\left(\max\{t, \tau\}\right),\ (p = \infty). \end{cases} \tag{1.1.11}$$

Подобным образом определим класс $W^{(r,s)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ $(r, s \in \mathbb{Z}_+;$ $W^{(0,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q) = H^{\omega_1,\omega_2}(Q))$ функций $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, у которых существует кусочно-непрерывная производная $f^{(r,s)}(x, y)$, удовлетворяющих неравенству

$$\Big|f^{(r,s)}(x'', y'') - f^{(r,s)}(x'', y') - f^{(r,s)}(x', y'') + f^{(r,s)}(x', y')\Big| \le$$

$$\le \omega_1\Big(|x'' - x'|\Big) \cdot \omega_2\Big(|y'' - y'|\Big), \tag{1.1.12}$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — заданные модули непрерывности, такие что $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$. Ясно, что неравенство (1.1.12) эквивалентно неравенству

$$\omega_*\left(f^{(r,s)}, \delta, \tau\right) \le \omega_1(\delta) \cdot \omega_2(\tau).$$

Относительно класса $W^{(r,s)}H_p^\omega(Q),\ 1 \le p \le \infty$ сделаем следующее замечание: так как в силу непрерывности и монотонности $\omega(t)$

$$\lim_{p\to\infty} \omega\Big(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\Big) = \omega\Big[\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{t^p + \tau^p}\Big] =$$

$$= \omega\Big(\max\{t,\tau\}\Big) = \max\Big\{\omega(t), \omega(\tau)\Big\},$$

то неравенство (1.1.11) можно и записать в виде

$$\omega_*\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right)_{C(Q)} \le \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}\right), \ (1 \le p < \infty), \\ \max\Big\{\omega(t), \omega(\tau)\Big\}, \ (p = \infty), \end{cases}$$

где $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности.

1.1.2. Определение билинейных интерполяционных сплайнов

Зададим в квадрате Q решетку узлов

$$\Delta_{m,n} := \Delta_m \times \Delta_n,\ m, n \in N,\ m, n \geq 1,$$

где

$$\Delta_m := \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = 1\},$$

$$\Delta_n := \{0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{n-1} < \tau_n = 1\}$$

— произвольные разбиения квадрата $Q, h_k := t_k - t_{k-1}, k = \overline{0,m}; \eta_i = \tau_i - \tau_{i-1},\ i = \overline{0,n},$ и $|\Delta_m| := \max\limits_{1\leq k\leq m} h_k,\ \ |\Delta_n| := \max\limits_{1\leq i\leq n} \eta_i$. Равномерное разбиение квадрата Q, то есть когда $t_k = k/m,\ k = \overline{0,m},\ \tau = i/n,\ i = \overline{0,n}$, обозначим

$$\bar{\Delta}_{mn} := \bar{\Delta}_m \times \bar{\Delta}_n = \Big\{(k/m, i/n)\Big\}_{k,i=0}^{m,n}.$$

Поставим в соответствие каждой функции $f \in C(Q)$ функцию $S_{1,1}(f; t, \tau) \in C(Q)$, определенную следующим образом:

а) на каждом частичном прямоугольнике

$$Q_{k,i} := [t_{k-1}, t_k] \times [\tau_{i-1}, \tau_i], (k = \overline{1,m}, i = \overline{1,n})$$

функция $S_{1,1}(f; t, \tau)$ является алгебраическим многочленом первой степени по t и τ, то есть если $(t, \tau) \in Q_{k,i},\ (k = \overline{0,m},\ n = \overline{0,n})$, то

$$S_{1,1}(f; t, \tau) = a_{k,i} + b_{k,i}t + c_{k,i}\tau + d_{k,i}t\tau,\ \ a_{k,i}, b_{k,i}, c_{k,i}, d_{k,i} \in \mathbb{R};$$

б) $S_{1,1}(f; t_k, \tau_i) = f(t_k, \tau)\ (k = \overline{0,m},\ i = \overline{0,n})$.

Функцию $S_{1,1}(f; t, \tau)$ называют интерполяционым сплайном первой степени двух переменных [9]-[39] или интерполяционными билинейными сплайанами. На множестве точек $(t, \tau) \in Q_{k,l}$ $(k = \overline{1,m}; i = \overline{1,n})$ имеет место представление

$$S_{1,1}(f; t, \tau) = f(t_{k-1}, \tau_{i-1}) \cdot h_k^{-1}(t_k - t) \cdot \eta_i^{-1}(\tau_i - \tau) +$$

$$+f(t_k,\tau_{i-1})h_k^{-1}(t-t_{k-1})\cdot\eta_i^{-1}(\tau_i-\tau)+$$

$$+f(t_{k-1},\tau_i)\cdot h_k^{-1}(t_k-t)\cdot\eta_i^{-1}(\tau-\tau_{i-1})+$$

$$+f(t_k,\tau_i)\cdot h_k^{-1}(t-t_{k-1})\cdot\eta_i^{-1}(\tau-\tau_{i-1})=$$

$$=f(t_{k-1},\tau_{i-1})H_{0,k}(t)H_{0,i}(\tau)+f(t_k,\tau_{i-1})H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)+$$

$$+f(t_{k-1},\tau_i)H_{0,k}(t)H_{1,i}(\tau)+f(t_k,\tau_i)H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau), \tag{1.1.13}$$

где

$$H_{0,k}(t)=h_k^{-1}(t_k-t),\ H_{1,k}(t)=h_k^{-1}(t-t_{k-1}),\ \sum_{\mu=0}^{1}H_{\mu,k}(t)=1, \tag{1.1.14}$$

$$H_{0,i}(\tau)=\eta_i^{-1}(\tau_i-\tau),\ H_{1,i}(\tau)=\eta_i^{-1}(\tau-\tau_{i-1}),\ \sum_{\nu=0}^{1}H_{\nu,i}(\tau)=1. \tag{1.1.15}$$

Очевидно, что при фиксированном значении одной из переменных, например t функция $S_{1,1}(f;t,\tau)$ является сплайном первой степени относительно другой переменной τ и обратно. Известно [31], что для любой функции $f(t,\tau)\in C(Q)$ сплайн $S_{1,1}(f;t,\tau)$ существует и единственно. Далее для изложения последующих наших результатов введем следующие обозначения

$$F(t_k,\tau_i)=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\mu+\nu}f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1}), \tag{1.1.16}$$

$$F_k(t,\tau_i)=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\nu+1}H_{\mu,k}(t)f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1}), \tag{1.1.17}$$

$$F_i(t_k,\tau)=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\mu+1}H_{\nu,i}(\tau)f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1}), \tag{1.1.18}$$

где $k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n};\ (t,\tau)\in Q_{k,i}$.

Отметим, что частные производные билинейного интерполяционого сплайна $S_{1,1}^{(r,s)}(f;t,\tau)$ $(r,s=0,1;\ 1\le r+s\le 2)$ на множестве точек

$$\mathcal{A}_k =: \Big\{(t,\tau) : t=t_k, 0\le\tau\le 1\Big\},\ k=\overline{0,m};$$

$$\mathcal{B}_i =: \Big\{(t,\tau) : \tau=\tau_i, 0\le t\le 1\Big\},\ i=\overline{0,n}$$

теряет разрывы первого рода. Следуя работам [2]-[36], доопределим указанные производные в точках разрыва следующим образом:

1) если $(t,\tau)\in Q'_{k,i} := [t_{k-1},t_k]\times[\tau_{i-1},\tau_i]\,(k=\overline{1,m-1}; i=\overline{1,n})$, то полагаем

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;t,\tau)=mF_i(t_{k-1},\tau);$$

2) если $(t,\tau)\in Q'_{m-1,i} := [\tau_{m-1},\tau_m]\times[\tau_{i-1},\tau_i]\,(i=\overline{1,n})$, то

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;t,\tau)=mF_i(t_{k-1},\tau).$$

Аналогично доопределяется производная $S_{1,1}^{(0,1)}(f;t,\tau)$;

3) смешанную производную $S^{(1,1)}(f;t,\tau)$ доопределим для всех точек $(t,\tau)\in Q''_{k,i} := [t_{k-1},t_k]\times[\tau_{i-1},\tau_i]\,(k=\overline{1,m-1}; i=\overline{1,n-1})$ равенством

$$S_{1,1}^{(1,1)}(f;t,\tau)=mnF(t_{k-1},\tau_{i-1});$$

4) если $(t,\tau)\in Q''_{m-1,i} := [t_{m-1},t_m]\times[\tau_{i-1},\tau_i]\,(i=\overline{1,n-1})$, то

$$S_{1,1}^{(1,1)}(f;t,\tau)=mnF(t_{m-1},\tau_{n-1});$$

5) если $(t,\tau)\in Q''_{k,n-1} := [t_{k-1},t_k]\times[\tau_{n-1},\tau_n]\,(k=\overline{1,m-1})$, то

$$S_{1,1}^{(1,1)}(f;t,\tau)=mnF(t_{k-1},\tau_{n-1});$$

6) если $(t,\tau)\in Q''_{m-1,n-1} := [t_{m-1},t_m]\times[\tau_{n-1},\tau_n]$, то

$$S_{1,1}^{(1,1)}(f;t,\tau)=mnF(t_{m-1},\tau_{n-1}).$$

Легко проверить, что доопределенные таким образом производные $S_{1,1}^{(r,s)}(f;t,\tau)$ $(r,s=0,1;\quad 1\le r+s\le 2)$ совпадают с обычными формулами для соответствующих производных билинейного интерполяционного сплайна там, где они существуют.

1.1.3. Предварительные результаты о приближении функций двух переменных билинейными интерполяционными сплайнами

Общеизвестно, что преимущество сплайнов перед другими аппаратами приближения, в частности перед классическими алгебраическими полиномами, обнаружилось именно в задачах интерполирования функций. Вычислительные аспекты теории сплайн-интерполяции и ее приложений в задачах приближенного вычисления дифференциальных и интегральных уравнений и вычислительной математики хорошо изучены и изложены в специальных монографиях С.Б.Стечкина и Ю.Н.Субботина, [25] Ю.С.Завьялова, Б.И.Квасова и В.Л.Мирошниченко [9], C.De Boor [47], где выяснены также условия сходимости интерполяционных сплайнов и их производных, как для функций одной, так и для функций многих переменных. Теоретические основы и общая теория сплайн-интерполяции, где решены экстремальные задачи теории приближения сплайн-функций с достаточной полнотой изложены в монографии [14] Н.П. Корнейчука "Сплайн в теории приближения".

Из представления (1.1.13) билинейного интерполяционого сплайна очевидно, что значения сплайна $S_{1,1}(f;x,y)$ в фиксированной точке $(x_0,y_0)\in Q$ определяется значениями функции $f(x,y)$ в вершинах соответствующего частичной прямоугольник, поэтому погрешность можно оценить локально на каждой из таких ячеек.

Приведем известные результаты по приближению функций билинейными сплайнами. С этой целью положим для $(t,\tau)\in Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n})$:

$$e_{m,n}(f,t,\tau) := f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau)$$

и для класса функций $\mathfrak{M} \in C(Q)$ равенством

$$\mathcal{E}_{m,n}\Big(\mathfrak{M}\Big) := \sup\Big\{\Big\|e_{m,n}(f;\cdot,\cdot)\Big\|_{C(Q)} : \ f \in \mathfrak{M}\Big\}, \tag{1.1.19}$$

определим точные верхние грани приближения функций билинейными интерполяционными сплайнами на классе $\mathfrak{M}$.

Пусть $\omega(t,\tau)$, $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — произвольные выпуклые вверх модули непрерывности, определяющие классы $H^{\omega}(Q), H_2^{\omega}(Q)$ и $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$. Для указанных классов функций В.Ф.Сторчай [26] доказал следующие равенства

$$\mathcal{E}_{m,n}(H^{\omega}) = \omega\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\right),$$

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(H_2^{\omega}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}}\right),$$

$$\mathcal{E}_{m,n}(H^{\omega_1,\omega_2}) = \omega_1\left(\frac{1}{2m}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{2n}\right).$$

В диссертационной работе мы сконцентрируем наше внимание на экстремальной задаче, связанной с вычислением точной оценки погрешности одновременного приближения функций двух переменных $f(x,y)$ и их частных производных $f^{(1,0)}(x,y)$, $f^{(0,1)}(x,y)$, $f^{(1,1)}(x,y)$ соответствующим билинейным сплайном $S_{1,1}(f;x,y)$ и ее частными производными $S_{1,1}^{(1,0)}(f;x,y)$, $S_{1,1}^{(0,1)}(f;x,y)$, $S^{(1,1)}(f;x,y)$.

В [13] отмечено, что наличие в приближающем подпространстве сплайнов базиса с локальными носителями обусловливает хорошее приближение интерполяционными сплайнами одновременно и производной интерполируемой функции. Этим обстоятельством мы воспользуемся при отыскании точных оценок одновременного приближения функций и их производных билинейными сплайнами на классах $W^{(r,s)}H_p^{\omega}(Q)$ в случая $(r,s)=(0,1),(r,s)=(1,0),(r,s)=(1,1)$ при любых значениях $1\le p\le 3$.

§1.2. Об одновременном приближении функций класса $W^{(r,s)}H_p^\omega\,(r,s\in\mathbb{Z}_+;1\le p\le\infty)$ интерполяционными билинейными сплайнами

В этом параграфе мы дадим точное решение следующей экстремальной задачи: требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(l,j)}\left(W^{(r,s)}H_p^\omega(Q)\right):=$$

$$=\sup\left\{\left\|e_{m,n}^{(l,j)}(f;.,.)\right\|_{C(Q)}:f\in W^{(r,s)}H_p^\omega(Q)\right\},\qquad(1.2.1)$$

для различных значений (l,j) и (r,s), связанные неравенством $0\le l+j\le r+s\le 2,\ l,j=\overline{0,1};\ r,s=\overline{0,1}$, и $1\le p\le\infty$, где

$$e_{m,n}^{(l,j)}(f;t,\tau):=f^{(l,j)}(t,\tau)-S_{1,1}^{(l,j)}(f;t,\tau)$$

— погрешность одновременного приближения функции и ее частных производных билинейным сплайном на ее соответствующими частными производными в точке $(x,y)\in Q$.

При этом условимся, что

$$\mathcal{E}^{(0,0)}\left(W^{(r,s)}H_\rho^\omega(Q)\right):=\mathcal{E}\left(W^{(r,s)}H_\rho^\omega(Q)\right)=$$

$$=\sup\left\{\left\|e_{m,n}(f;.,.)\right\|_{C(Q)}:f\in W^{(r,s)}H_p^\omega(Q)\right\},$$

$$\mathcal{E}^{(0,0)}\left(W^{(0,0)}H_\rho^\omega(Q)\right):=\mathcal{E}\left(H_\rho^\omega(Q)\right)=$$

$$=\sup\left\{\left\|e_{m,n}(f;.,.)\right\|_{C(Q)}:f\in H_p^\omega(Q)\right\}.$$

Приведём известные результаты по решении задачи (1.2.1) для других классов функций.

В работе [37] М.Ш.Шабозова доказано, что для любых выпуклых вверх модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\right)=\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt+\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau. \qquad (1.2.2)$$

В указанной работе, кроме равенства (1.2.1), также доказаны следующие утверждения: если $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ произвольные модули непрерывности, то имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,1)}\left(W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\right)=m\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt+n\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau,$$

а если $\omega_1(t)$ — произвольный модуль непрерывности, а $\omega_2(\tau)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, то

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,0)}\left(W^{(1,0)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\right)=m\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt+\omega_2\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Наоборот, если $\omega_1(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, а $\omega_2(\tau)$ — произвольный модуль непрерывности, то

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(0,1)}\left(W^{(0,1)}H^{\omega_1,\omega_2}\right)=\omega_1\left(\frac{1}{2m}\right)+m\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau.$$

Что же касается класса $W^{(r,s)}H^{\omega}(Q)$, то в работе [2] С.Б.Вакарчука было доказано, что для произвольного модуля непрерывности $\omega(t,\tau)$ справедливо точное равенство

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,1)}\left(W^{(1,1)}H^{\omega}(Q)\right)=mn\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega(t\tau)dtd\tau.$$

Работу С.Б.Вакарчука [3] дополнил М.Ш.Шабозов [38], а именно – в [2] доказана справедливость следующих соотношений:

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,0)}\left(W^{(1,0)}H^{\omega}(Q)\right)=m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(t,\frac{1}{2n}\right)dt,$$

если $\omega(t,\tau)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности по переменной τ,

$$\mathcal{E}^{(0,1)}_{m,n}\left(W^{(0,1)}H^{\omega}(Q)\right)=n\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\frac{1}{2m},\tau\right)d\tau,$$

если $\omega(t,\tau)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности по переменной t.

Отметим, что все вышеприведённые результаты являются обобщениями и распространениями хорошо известных одномерных теорем В.Н.Малазёмова [18] об одновременном приближении функции одной переменной и ее первой производной сплайнами первой степени (ломаными линиями) для случая одновременного приближения функций двух переменных и их частных производных билинейными интерполяционными сплайнами и их соответствующими частными производными на различных классах функций, задаваемых модулями непрерывности.

Во втором параграфе мы изложим некоторые новые результаты, которые продолжают указанную тематику и обобщают результаты, привидённые в работах [3]-[36] на случай, когда модуль непрерывности определяется l_p $(1\le p\le\infty)$ — метрикой (расстоянием) между точками квадрата Q.

Теорема 1.2.1. *Пусть $\omega(t)$ — произвольный выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любых $m,n\in\mathbb{N}$, $1\le p\le 3$ справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(H^{\omega}_p\right)=\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right). \tag{1.2.3}$$

Доказательство. В самом деле, учитывая равенства (1.1.13)-(1.1.14), для произвольной функции $f\in C(Q)$ и любой точки $(t,\tau)\in Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n})$ запишем

$$e_{m,n}(f;t,\tau)=f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)=$$

$$= f(t,\tau) - \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\cdot f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1}) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\cdot [f(t,\tau) - f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})]\,.$$

Отсюда, оценивая по абсолютной величине, для произвольной функции $f \in H_p^{\omega}(1 \le p \le \infty)$ имеем:

$$\Big|e_{m,n}(f;t,\tau)\Big| = \Big|f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau)\Big| =$$

$$= \left|\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\cdot\Big[f(t,\tau) - f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})\Big]\right| \le$$

$$\le \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\cdot |f(t,\tau) - f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})| \le$$

$$\le \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\omega\left(\sqrt[p]{|t-t_{k+\nu-1}|^p + |\tau+\tau_{i+\nu-1}|^p}\right). \qquad (1.2.4)$$

Пользуясь выпуклостью вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ и функцией $\sqrt[p]{t}$ $(1 \le p \le \infty)$ из правой части неравенства (1.2.5), где в силу равенств (1.1.14) и (1.1.15), для любой точки $(t,\tau) \in Q_{k,i}$ получаем

$$|e_{m,n}(f;t,\tau)| \le$$

$$\le \omega\left(\sqrt[p]{\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)|t-t_{k+\nu-1}|^p + \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)|\tau+\tau_{i+\nu-1}|^p}\right) =$$

$$= \omega\left(\sqrt[p]{\sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)|t-t_{k+\nu-1}|^p + \sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)|\tau+\tau_{\nu+i-1}|^p}\right) =$$

$$\omega\left(\left[\sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)|t-t_{\mu+k-1}|^p+\sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)|\tau+\tau_{\nu+i-1}|^p\right]^{1/p}\right). \qquad (1.2.5)$$

Положим

$$\varphi(x)=\sum_{\mu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)|t-t_{\mu+k-1}|^p=H_{0,k}(t)(t-t_{k-1})^p+H_{1,k}(t)(t_k-t)^p=$$

$$=h_k^{-1}(t_k-t)(t-t_{k-1})^p+h_k^{-1}(t-t_{k-1})(t_k-1),\ t_{k-1}\le t\le t_k;$$

$$\psi(\tau)=\sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)|\tau-\tau_{\nu+i-1}|^p=$$

$$=\eta_i^{-1}(\tau_i-\tau)(\tau-\tau_{i-1})^p+\eta_i^{-1}(\tau-\tau_{i-1})(\tau_i-\tau)^p,\ \tau_{i-1}\le\tau\le\tau_i.$$

В работе [2] доказано, что если для $1\le p\le 3$

$$\max\Big\{\varphi(t):t\in[t_{k-1},t_k]\Big\}=\left(\frac{h_k}{2}\right)^p, \qquad (1.2.6)$$

$$\max\Big\{\psi(\tau):\tau\in[\tau_{i-1},\tau_i]\Big\}=\left(\frac{\eta_i}{2}\right)^p, \qquad (1.2.7)$$

то из (1.2.5) для любой точки $(x,y)\in Q$ получаем

$$\Big|e_{m,n}(f;t,\tau)\Big|=\Big|e_{m,n}(f;t,\tau;\Delta_{m,n})\Big|\le\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{h_k}{2}\right)^p+\left(\frac{\eta_i}{2}\right)^p}\right).$$

Последнее неравенство получает минимальное значение при равномерном разбиении $\bar{\Delta}_{m,n}$, то есть когда $h_k=1/m$ $(k=\overline{1,m}),\eta_i=1/n$ $(i=\overline{1,n})$, а потому запишем

$$\|e_{m,n}(f;t,\tau)\|_{C(Q)}\le\omega\left(\sqrt[p]{\min_{1\le k\le\ m}\left(\frac{h_k}{2}\right)^p+\min_{1\le i\le\ n}\left(\frac{\eta_i}{2}\right)^p}\right)=$$

$$= \omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{2m}\right)^p+\left(\frac{1}{2n}\right)^p}\right) \le \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right). \qquad (1.2.8)$$

Из неравенства (1.2.8) получаем оценку сверху для всего класса функций $H^{\omega}_{\rho}(Q)$, где $1 \le p \le 3$

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(H^{\omega}_{p}(Q)\right) \le \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right). \qquad (1.2.9)$$

Докажем, что существует функция $f_0 \in H^{\omega}_{\rho}$, для которой в (1.2.4) имеет место знак равенства. С этой целью определим множество точек

$$Q^{(1)}_{k,i} := \Big\{t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + 1/(2m),\ \tau_{i-1} \le \tau \le \tau_{i-1} + 1/(2n)\Big\},$$

$$Q^{(2)}_{k,i} := \Big\{t_{k-1} \le t \le t_{k-1} + 1/(2m),\ \tau_{i-1} + 1/(2n) \le \tau \le \tau_i\Big\},$$

$$Q^{(3)}_{k,i} := \Big\{t_{k-1} + 1/(2m) \le t \le t_k,\ \tau_{i-1} \le \tau \le \tau_{i-1} + 1/(2n)\Big\},$$

$$Q^{(4)}_{k,i} := \Big\{t_{k-1} + 1/(2m) \le t \le t_k,\ \tau_{i-1} + 1/(2n) \le \tau \le \tau_i\Big\}$$

и введем в рассмотрение функцию

$$f_0(t,\tau) = \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{(t-t_{k-1})^p + (\tau-\tau_{i-1})^p}\right), & (t,\tau) \in Q^{(1)}_{k,i}; \\ \omega\left(\sqrt[p]{(t-t_{k-1})^p + (\tau_i-\tau)^p}\right), & (t,\tau) \in Q^{(2)}_{k,i}; \\ \omega\left(\sqrt[p]{(t_k-t)^p + (\tau-\tau_{i-1})^p}\right), & (t,\tau) \in Q^{(3)}_{k,i}; \\ \omega\left(\sqrt[p]{(t_k-t)^p + (\tau_i-\tau)^p}\right), & (t,\tau) \in Q^{(4)}_{k,i}. \end{cases}$$

Покажем, что функция $f_0(t,\tau) \in H^{\omega}_{\rho}(Q), 1 \le p \le 3$. Пусть $P(x',y')$ и $Q(x'',y'')$ — две произвольные точки в квадрате Q. Из определения функции $f_0(t,\tau)$ следует, что существуют точки $\tilde{P}(\tilde{x}',\tilde{y}')$ и $\tilde{Q}(\tilde{x}'',\tilde{y}'')$, принадлежащие квадрату

$$Q^{(1)}_{1,1} := \Big\{0 \le x \le 1/(2m), 0 \le y \le 1/(2n)\Big\}$$

такие, что $f_0(P) = f_0(\tilde{P}), f_0(Q) = f_0(\tilde{Q})$ и $\rho_p(\tilde{\rho}, \tilde{Q}) \le \rho_p(\rho_p, Q)$. Но тогда имеем

$$\Big|f_0(P) - f_0(Q)\Big| = \Big|f_0(\tilde{P}) - f_0(\tilde{Q})\Big| =$$

$$= \left|\omega\left(\sqrt[p]{(\tilde{x}')^p + (\tilde{y}')^p}\right) - \omega\left(\sqrt[p]{(\tilde{x}'')^p + (\tilde{y}'')^p}\right)\right| \le$$

$$\le \omega\left(\left|\sqrt[p]{(\tilde{x}')^p + (\tilde{y}')^p} - \sqrt[p]{(\tilde{x}'')^p + (\tilde{y}'')^p}\right)\right| \le$$

$$\le \omega\left(\sqrt[p]{|\tilde{x}' + \tilde{x}''|^p + |\tilde{y}' + \tilde{y}''|^p}\right) = \omega\left(\rho_p(\tilde{P}, \tilde{Q})\right) \le \omega\left(\rho_p(P, Q)\right).$$

Этим доказано, что $f_0 \in H^\omega_\rho$, $(1 \le p \le 3)$ и так как для $(t, \tau) \in Q_{k,i}$, $S_{1,1}(f_0 t, \tau) \equiv 0$, то для $\mathcal{E}_{m,n} \in \left(H^\omega_p\right)$ имеем следующую оценку снизу

$$\mathcal{E}_{m,n} \in \left(H^\omega_p\right) = \sup\Big\{\big\|f - S_{1,1}(f)\big\|_{C(Q)} : f \in H^\omega_p\Big\} \ge$$

$$\ge \Big\|f_0 - S_{1,1}(f_0)\Big\|_{C(Q)} = \|f_0\|_{C(Q)} =$$

$$= f_0\left(t_{k-1} + \frac{1}{2m}, \tau_{i-1} + \frac{1}{2n}\right) = \omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p} + \frac{1}{n^p}}\right). \qquad (1.2.10)$$

Сравнивая неравенства (1.2.9) и (1.2.10), получаем требуемое равенство (1.2.3) и этим теорема 1.2.1 полностью доказана.

Для приближения частных производных $f^{(1,0)}(t, \tau)$, $f^{(0,1)}(t, \tau)$ и $f^{(1,1)}(t, \tau)$ функций класса $f(t, \tau) \in W^{(r,s)} H^\omega_p(Q)$, $(1 \le p \le 3)$ соответствующими произвольными билинейного сплайна $S^{(1,0)}_{1,1}(f; t, \tau)$, $S^{(1,0)}_{1,1}(f; t, \tau)$ и $S^{(1,1)}_{1,1}(f; t, \tau)$ приводим нижеследующие утверждения

Теорема 1.2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Тогда для* $1 \le p \le 3$ *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(0,1)}\left(W^{(1,0)}H_p^{\omega}(Q)\right) = m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\frac{1}{(2n)^p}}\right)dt, \tag{1.2.11}$$

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(0,1)}\left(W^{(0,1)}H_p^{\omega}(Q)\right) = n\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{\frac{1}{(2m)^p}+\tau^p}\right)d\tau. \tag{1.2.12}$$

Доказательство. Равенства (1.2.11) и (1.2.12) доказываются по одной и той же схеме рассуждения, поэтому, не умоляя общности, докажем (1.2.12). Пусть, например, $(t,\tau)\in Q'_{k,i} := [t_{k-1},t)\times[\tau_{k-1},\tau]$ $(k=\overline{1,m-1}; i=\overline{1,n})$. В этом случае, учитывая тождества (1.1.14), (1.1.15) и введённые обозначения (1.1.18) вида

$$F_i(t_{k-1},\tau) = \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\mu+1}H_{\nu,i}(\tau)f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})$$

и того факта, что для $(t,\tau)\in Q'_{k,i}$

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;t,\tau) = mF_i(t_{k-1},\tau),$$

запишем

$$S_{1,1}^{(1,0)}(f;t,\tau) = mF_i(t_{k-1},\tau) =$$
$$= m\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}(-1)^{\mu+1}H_{\nu,i}(\tau)f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1}) =$$
$$= m\sum_{\nu=0}^{1}H_{\nu,i}(\tau)\Big\{f(t_k,\tau_{i+\nu-1})-f(t_{k-1},\tau_{i+\nu-1})\Big\} =$$
$$= m\sum_{\nu=0}^{1}H_{\nu,i}(\tau)\Big\{\Big[f(t_k,\tau_{i+\nu-1})-f(t,\tau_{i+\nu-1})\Big]+\Big[f(t,\tau_{i+\nu-1})-f(t_{k-1},\tau_{i+\nu-1})\Big]\Big\} =$$

$$= m\sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)\Big[(t_k - t)f(t,t_k;y_{i+\nu-1}) + (t-t_{k-1})f(t,t_{k-1};\tau_{i+\nu-1})\Big] =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)f(t,t_{\mu+k-1};\tau_{i+\nu-1}), \qquad (1.2.13)$$

где $f(t,t_{\mu+k-1};\tau_{i+\nu-1})$ $(\mu,\nu = 0,1)$ $(k = \overline{1,m-1}; i = \overline{1,n})$ — частные разделенные разности первого порядка функции $f(t,\tau)$ по переменной t и при значение $\tau = \tau_{i+\nu-1}$. Используя интегральное представление разделенных разностей $f(t,t_{\mu+k-1};\tau_{i+\nu-1})$ (см., например, [20]) для произвольной $f \in C^{(1,0)}(Q)$, учитывая равенство (1.2.13), запишем

$$e_{m,n}^{(1,0)}(f;t,\tau) = f^{(1,0)}(t,\tau) - S_{1,1}^{(1,0)}(f;t,\tau) =$$

$$= f^{(1,0)}(t,\tau) - \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} = H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)f(t,t_{\mu+k-1};\tau_{i+\nu-1}) =$$

$$= f^{(1,0)}(t,\tau) - \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\int\limits_0^1 f^{(1,0)}(t+u(t_{\mu+k-1}-t);\tau_{i+\nu-1})du =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\int\limits_0^1 \Big[f^{(1,0)}(t,\tau) - f^{(1,0)}(t+u(t_{k+\mu-1}-t);\tau_{i+\nu-1})\Big]du,$$

где $(t,\tau) \in Q'_{k,i}$ $(k = \overline{1,m-1}); i = \overline{1,n})$. Отсюда для любой функции $f \in W^{(1,0)}H_p^{\omega}$ $(1 \le p \le 3)$ получаем неравенство

$$\left|e_{m,n}^{(1,0)}(f;t,\tau)\right| \le$$

$$\le \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\int\limits_0^1 \omega\left(\sqrt[p]{|u(t_{k+\mu-1}-t)|^p + |\tau-\tau_{i+\nu-1}|^p}\right)du =$$

$$= m\sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)\int\limits_0^{m^{-1}H_{\mu,i}}(\tau)\omega\left(\sqrt[p]{t^p + |\tau-\tau_{i+\nu-1}|^p}\right)du. \qquad (1.2.14)$$

Учитывая выпуклость вверх модуля непрерывности $\omega(\delta)$ и функции $\sqrt[p]{t}$ $(1 \leq p \leq 3)$, а также неравенства (1.2.14), будем иметь

$$\left|e_{m,n}^{(1,0)}(f;t,\tau)\right| \leq$$

$$\leq m \sum_{\mu=0}^{1} \int\limits_{0}^{m^{-1}H_{\mu,k}(x)} \omega\left(\sqrt[p]{u^p + \sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)|\tau - \tau_{i+\nu-1}|^p}\right) du \leq$$

$$\leq m \sum_{\mu=0}^{1} \int\limits_{0}^{m^{-1}H_{\mu,k}(x)} \omega\left(\sqrt[p]{u^p + \frac{1}{(2n)^p}}\right) du := \Phi_k(t). \tag{1.2.15}$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться в справедливости оценки (1.2.15) и для $(t,\tau) \in Q_{m-1,i} (i = \overline{1,n})$.

Теперь заметим, что функция $\Phi_k(t)$ непрерывна на отрезке $[t_{k-1}, t_k] (k = \overline{1,m})$ и обычными средствами дифференциального исчисления легко установить, что

$$\max\Big\{\Phi_k(t) : t \in [t_{k-1}, t_k]\Big\} = \Phi(t_{k-\mu}) =$$

$$= m \int\limits_{0}^{1/n} \omega\left(\sqrt[p]{u^p + \frac{1}{(2n)^p}}\right) du, \ \ \mu = 0, 1. \tag{1.2.16}$$

В силу (1.2.15) и (1.2.16) для произвольной $(x, y) \in Q$ имеем

$$\left|e_{m,n}^{(1,0)}(f;t,\tau)\right| \leq m \int\limits_{0}^{1/m} \omega\left(\sqrt[p]{u^p + \frac{1}{(2n)^p}}\right) du,$$

откуда

$$\left\|e_{m,n}^{(1,0)}(f;\cdot,\cdot)\right\|_C (Q) \leq m \int\limits_{0}^{1/m} \omega\left(\sqrt[p]{u^p + \frac{1}{(2n)^p}}\right) du.$$

Переходя к верхним граням по всем функциям $f \in W^{(1,0)}H_p$, будем иметь

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,0)}\left(W^{(1,0)}H_p^{\omega}\right) \leq m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\frac{1}{(2n)^p}}\right)dt. \tag{1.2.17}$$

Для получения аналогичной оценки снизу рассмотрим функцию $\varphi(x,y)$, которая на прямоугольнике $[0,2/m]\times[0,1/m]$ определяется следующим образом:

$$\varphi(t,\tau) := \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}-t\right)^p+\left(\frac{1}{2n}-\tau\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[0,\frac{1}{m}\right]\times\left[0,\frac{1}{(2n)}\right], \\ \omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}-t\right)^p+\left(\tau-\frac{1}{2n}\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[0,\frac{1}{m},\right]\times\left[\frac{1}{(2n)},\frac{1}{n}\right], \\ \omega\left(\sqrt[p]{\left(t-\frac{1}{m}\right)^p+\left(\frac{1}{2n}-\tau\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right]\times\left[0,\frac{1}{(2n)},\right], \\ \omega\left(\sqrt[p]{\left(t-\frac{1}{m}\right)^p+\left(\tau-\frac{1}{2n}\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right]\times\left[\frac{1}{(2n)},\frac{1}{n}\right], \end{cases}$$

а затем продолжим функцию $\varphi(t,\tau)$ с периодом $2/m$ по переменной t и с периодом $1/m$ по переменной τ на всей плоскости равенством

$$\varphi\big(t+2/m,\tau\big)=\varphi\big(t,\tau+1/m\big)=\varphi\big(t,\tau\big).$$

Полагая

$$\varphi_0(t,\tau)=\varphi(t,\tau)-m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt[p]{u^p+\frac{1}{(2n)^p}}\right)du,$$

вводим функцию

$$\varphi_1(t,\tau) := \int\limits_0^x \varphi_0(u,y)du,\ (t,\tau)\in(Q).$$

Путем непосредственной проверки можно убедиться в принадлежности функции $\varphi_1(t,\tau)$ классу $W^{(1,0)}H_p^\omega(Q)$ и, кроме того, в силу того, что $\varphi_1(t_k,\tau_i)\equiv 0$ $(k=\overline{0,m}; i=\overline{0,n})$, для любого $(t,\tau)\in Q$ получаем $S_{1,1}(f_1;t,\tau)\equiv 0$. Но тогда имеем

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,0)}\left(W^{(1,0)}H_p^\omega(Q)\right)\geq\left\|e_{m,n}^{(1,0)}(f;\cdot,\cdot)\right\|_{C(Q)}=\|f_1^{1,0}\|_{CQ}=$$

$$=\|\varphi_0\|_C=\left|\varphi_0\left(\frac{1}{m},\frac{1}{2m}\right)\right|=m\int\limits_0^{1/m}\omega\left(\sqrt[p]{u^p+\frac{1}{(2n)^p}}\right)du. \qquad (1.2.18)$$

Доказательство требуемого равенства (1.2.11) завершаем сопоставлением оценки сверху (1.2.17) с оценкой снизу (1.2.18). Аналогичным образом доказывается равенство (1.2.18), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.2.

Теорема 1.2.3. *Если $\omega(t)$ — произвольный модуль непрерывности, то для любых $m,n\in\mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,1)}\left(W^{(1,1)}H_p^\omega(Q)\right)=mn\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \qquad (1.2.19)$$

Доказательство. Для установления равенства (1.2.19) и последующих результатов нам понадобятся некоторые определения и факты из теории разделённых разностей функции двух переменных (см., например, Ш.Е.Микеладзе [20]). Разделённые разности функций двух переменных $f(x,y)$ мы можем вычислить или по одной из переменных, например x, или по обеим переменным x и y. Пусть даны значения x и y: $x_0,x_1,...,x_m$ и $y_0,y_1,...,y_m$. Когда последовательные разделённые разности функции $f(x,y)$ образуются по x, то символам $f(x_0,x_1,...,x_m;y)$ обозначим m-ю частную разность функции $f(x,y)$ по переменной x. Если же разности

$f(x,y)$ образуются по y, то через $f(x;y_0,y_1,...,y_n)$ обозначим n-ю частную разность по y. Наконец, символом $f(x_0,x_1,...,x_m;y_0,y_1,...,y_n)$ обозначим разность $(m+n)$-го порядка относительно обеих переменных x, равных $x_0,x_1,...,x_m$, и значений y, равных $y_0,y_1,...,y_n$. Как и в случае функций одной переменной, разделённые разности функции $f(x,y)$ по переменным x и y не изменяются при каких угодно перестановках значений $x_k(k=\overline{0,m})$ и $y_i(i=\overline{0,n})$ и справедливы равенства

$$f(x_0,x_1,...,x_m;y)=\big[f(x_1,x_2,...,x_m;y)-f(x_0,x_1,...,x_{m-1};y)\big]/(x_m-x_0);$$

$$f(x;y_0,y_1,...,y_n)=\big[f(x;y_1,y_2,...,y_n)-f(x;y_0,y_1,...,y_{n-1})\big]/(y_n-y_0);$$

$$f(x_0,x_1,...,x_m;y_0,y_1,...,y_n)=\big[f(x_1,x_2,...,x_m;y_1,y_2,...,y_n)-$$

$$-f(x_0,x_1,...,x_{m-1};y_1,y_2...,y_n)+f(x_0,x_1...,x_{m-1};y_0,y_1...,y_{n-1})-$$

$$-f(x_1,x_2,...,x_{m-1};y_0,y_1...,y_{n-1})/(x_m-x_0)(y_n-y_0)\big].$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.2.3. Равенство (1.2.19) достаточно доказать для множеств

$$Q''_{k,i}:=[t_{k-1},t]\times[\tau_{i-1},\tau_i]\ (k=\overline{1,m},i=\overline{1,n}),$$

ибо для множеств

$$Q''_{m,l}:=[t_{m-1},t_m]\times[\tau_{i-1},\tau_i]\ (i=\overline{1,n}),$$

$Q''_{k,n}:=[t_{k-1},t_k]\times[\tau_{n-1},\tau_n]\ (k=\overline{1,m})$ и $Q''_{m,n}:=[t_{m-1},t_m]\times[\tau_{n-1},\tau_m]$, в сущности, ход рассуждений аналогичен. Воспользуемся представлением погрешности интерполяции (или приближения) для произвольной функции $f\in C^{(1,1)}(Q)$, доказанным С.Б.Вакарчуком в работе [2]:

$$e^{(1,0)}_{m,n}(f;t,\tau):=f^{(1,1)}(t,\tau)-S^{(1,1)}_{1,1}(f;t,\tau)=$$

$$= f^{(1,1)}(t,\tau) - mn\left[F(t_k,\tau_i) \pm \sum_{\mu=0}^{1} f(t_{k+\mu-1},\tau)\right] =$$

$$= f^{(1,1)}(t,\tau) - n\sum_{\nu=0}^{1} H_{\nu,i}(\tau)\left[\sum_{\mu=0}^{1}(-1)^{\mu} f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1},\tau) \pm f(t,\tau_{\nu+i-1},\tau)\right] =$$

$$= f^{(1,1)}(t,\tau) - \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau) f(t_{k+\mu-1},t;\tau_{i+\nu-1},\tau),\ (t,\tau)\in Q'',\ \ (1.2.20)$$

где $F(t_k,\tau_1)$ определяется формулой (1.1.16).

Представляя разделенно-разностные отношения в интегральной форме, перепишем (1.2.20) в следующем виде

$$e_{m,n}^{(1,1)}(f;t,\tau) = f^{(1,1)}(t,\tau) - S_{1,1}^{(1,1)}(f;t,\tau) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\int_0^1\int_0^1 \Big[f^{(1,1)}(t,\tau) -$$

$$- f^{(1,1)}(t+u(t_{\mu+k-1}-t),\tau+\vartheta(\tau_{i+\nu-1}-\tau))\Big]dud\vartheta,$$

где $(t,\tau)\in Q''_{k,i}$, $(k=\overline{1,m}, i=\overline{1,n})$. Из определения модуля непрерывности и принадлежности функции $f\in W^{(1,1)}H_p^{\omega}$ $(1\le p\le 3)$ и $(t,\tau)\in Q''_{k,i}$ запишем

$$\left|e_{m,n}^{(1,1)}(f;t,\tau)\right| \le$$

$$\le \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)\int_0^1\int_0^1 \omega\left(\sqrt[p]{\left|u(t_{k+\mu-1}-t)\right|^p + \left|\vartheta(\tau_{i+\nu-1}-\tau)\right|^p}\right)dud\vartheta =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} \int_0^{m^{-1}H_{\mu,i}(t)} \int_0^{n^{-1}H_{\nu,i}(\tau)} \omega\left(\sqrt[p]{u^p+\vartheta^p}\right)dud\vartheta.$$

Ради краткости, введем обозначение

$$\Phi_{k,i}(t,\tau) := \sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}\int\limits_{0}^{m^{-1}H_{\mu,i}(t)}\int\limits_{0}^{n^{-1}H_{\nu,i}(\tau)} \omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau.$$

Таким образом, мы доказали, что для любой функции $f \in W^{(1,1)}H_p^{\omega}$ $(1 \le p \le 3)$ и любой точки $(t,\tau) \in Q''_{k,i}(k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n})$ имеет место неравенство

$$\left|e_{m,n}^{(1,1)}(f;t,\tau)\right| \le \Phi_{k,i}(t,\tau). \tag{1.2.21}$$

Исследуя функцию $\Phi_{k,i}(t,\tau)$ на экстремум на множествах $\bar{Q}''_{k,i}$, где $\bar{Q}''_{k,i}$ — замыкание $Q''_{k,i}$, получаем

$$\max\Big\{\Phi_{k,i}(t,\tau):(t,\tau)\in Q''_{k,i}\Big\} = \Phi_{k,i}(t_{k-\mu},\tau_{i-\nu}) =$$

$$= mn\int\limits_{0}^{1/m}\int\limits_{0}^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau,\ \mu,\nu=\overline{0,1}. \tag{1.2.22}$$

Нетрудно проверить, что равенства (1.2.22) также верны на множествах $\bar{Q}''_{m-1,i}$ $(i=\overline{1,n-1})$, $\bar{Q}''_{k,n-1}$ $(k=\overline{1,m-1})$ и $\bar{Q}''_{m-1,n-1}$, а потому мы можем записать оценку сверху

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,1)}\left(W^{(1,1)}H_p^{\omega}\right) = mn\int\limits_{0}^{1/m}\int\limits_{0}^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \tag{1.2.23}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$\varphi(t,\tau) := \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}-t\right)^p+\left(\frac{1}{n}-\tau\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[0,\frac{1}{m}\right]\times\left[0,\frac{1}{n}\right], \\ \omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}-t\right)^p+\left(\tau-\frac{1}{n},\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[0,\frac{1}{m},\right]\times\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], \\ \omega\left(\sqrt[p]{\left(t-\frac{1}{m}\right)^p+\left(\frac{1}{n}-\tau\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right]\times\left[0,\frac{1}{n},\right], \\ \omega\left(\sqrt[p]{\left(t-\frac{1}{m}\right)^p+\left(\tau-\frac{1}{n}\right)^p}\right), & (t,\tau)\in\left[\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right]\times\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \end{cases}$$

и равенствами

$$\varphi_1\left(t+\frac{2}{m},\tau+\frac{2}{n}\right)=\varphi_1\left(t,\tau+\frac{2}{n}\right)=\varphi_1\left(\tau+\frac{2}{m},y\right)=\varphi_1(t,\tau)$$

продолжим функцию $\varphi_1(t,\tau)$ с периодом $2/m$ по переменному x и с периодом $2/n$ по переменному y на всей плоскости.

Полагая

$$\varphi_2(t,\tau) := \varphi_1(t,\tau) - nm\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{u^p+\vartheta^p}\right)dud\vartheta,\ (t,\tau)\in Q,$$

вводим в рассмотрение функцию

$$\varphi_2(t,\tau) = \int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \varphi_2(u,\vartheta)dud\vartheta,\ (t,\tau)\in Q.$$

Очевидно, что $f_2(t,\tau)\in W^{(1,1)}H_p^{\omega}(Q)$ $(1\le p\le 3)$ и, учитывая, что $f_2(t_k,\tau_i)\equiv 0,\ k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n}$, в силу которого $S_{1,1}(f_2;t,\tau)\equiv 0$, запишем

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,1)}\left(W^{(1,1)}H_p^{\omega}\right)\ge\left\|e_{m,n}^{(1,1)}(f_2)\right\|_{C(Q)}=$$

$$= \left| f_2^{(1,1)}\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\varphi_2\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right| =$$

$$= mn\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{u^p+\vartheta^p}\right)dud\vartheta.$$

Сопоставляя полученную оценку снизу с оценкой сверху (1.2.23), получаем равенство (1.2.19), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.3.

Из доказанной теоремы, в частности при $p = 1$, вытекает в качестве следствия результат С.Б.Вакарчука и К.Ю.Мыскина [3].

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы 1.2.3 при* $p = 1$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{m,n}^{(1,1)}\left(W^{(1,1)}H_1^{\omega}(Q)\right) = mn\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega\left(t+\tau\right)dtd\tau =$$

$$= mn\begin{cases} \int\limits_0^{1/m} t\omega(t)dt + \dfrac{1}{m}\int\limits_{1/m}^{1/n}\omega(t)dt + \int\limits_{1/n}^{1/n+1/m}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-t\right)\omega(t)dtd\tau, & \textit{если } m<n, \\ \int\limits_0^{1/n} t\omega(t)dt + \dfrac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{1/m}\omega(t)dt + \int\limits_{1/m}^{1/m+1/m}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}-t\right)\omega(t)dt, & \textit{если } m>n \\ \int\limits_0^{1/m} t\omega(t)dt + \int\limits_{1/m}^{2/m}\left(\dfrac{2}{m}-t\right)\omega(t)dt, & \textit{если } m=n \end{cases}.$$

Отметим, что для других классов функций вопросы одновременного приближения функций и их последовательных производных рассмотрены в работе М.Ш.Шабозова [36], а порядковые оценки ранее получены в монографиях [13].

§1.3. Приближение непрерывных функций двух переменных интерполяционными сплайнами нечетного порядка в метрике $C(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 1\}$.

Пусть $Q := \{0 \le x, y \le 1\}$, — единичный квадрат в плоскости переменных x и y, на котором задана непрерывная функция $f(x, y)$ и система точек $M_{k,i} := M(k/m, i/n)$, $k = \overline{0, m}$; $i = \overline{0, n}$ фиксированные числа. Прямоугольники с вершинами в точках $M_{k,i}, M_{k,i+1}, M_{k+1,\ i}, M_{k+1,i+1}$ $k = \overline{0, m-1}$; $i = \overline{0, n-1}$ обозначим через Q_{ki}. Обозначим через $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ совокупность $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

$$\Big|f(x'', y) - f(x', y)\Big| \le \omega_1\Big(|x'' - x'|\Big),\ x', x'' \in [0, 1],\ y \in [0, 1], \tag{1.3.1}$$

$$\Big|f(x, y'') - f(x, y')\Big| \le \omega_2\Big(|y'' - y'|\Big),\ y', y'' \in [0, 1],\ x \in [0, 1], \tag{1.3.2}$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — некоторые заданные модули непрерывности. Легко доказать, что если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условия (1.3.1) и (1.3.2), то она удовлетворяет условию

$$\Big|f(x'', y'') - f(x', y')\Big| \le \omega_1\Big(|x'' - x'|\Big) + \omega_2\Big(|y'' - y'|\Big) \tag{1.3.3}$$

и наоборот. В самом деле, покажем, что если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условия (1.3.1) и (1.3.2), то она удовлетворяет (1.3.3).

Имеем:

$$\Big|f(x'', y'') - f(x', y')\Big| =$$

$$= \bigg|\Big[f(x'', y'') - f(x', y'')\Big] + \Big[f(x', y'') - f(x', y')\Big]\bigg| \le$$

$$\le \bigg|f(x'', y'') - f(x', y'')\bigg| + \bigg|f(x', y'') - f(x', y')\bigg| \le$$

$$\le \omega_1\Big(|x'' - x'|\Big) + \omega_2\Big(|y'' - y'|\Big),$$

и имеет место условие (1.3.3).

Пусть теперь имеет место неравенство (1.3.3). Полагая в (1.3.3) $y'' = y' = y,\ y \in [0,1]$ и имея в виду, что $\omega_2(0) = 0$, будем иметь

$$\Big|f(x'',y) - f(x',y)\Big| \le \omega_1\Big(|x''-x'|\Big),\ x'',x' \in [0,1],\ y \in [0,1].$$

Аналогичным образом, полагая что если в (1.3.3) $x'' = x' = x, x \in [0,1], y', y'' \in [0,1]$, то имеем:

$$\Big|f(x,y'') - f(x,y')\Big| \le \omega_2\Big(|y''-y'|\Big),\ x \in [0,1], y', y'' \in [0,1].$$

Таким образам мы показали, что любой функции $f \in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ удовлетворяет, наряду с неравенствами (1.3.1) и (1.3.2), также и неравенство (1.3.3) и, наоборот, наряду с неравенством (1.3.3), удовлетворяет также и неравенства (1.3.1) и (1.3.2).

Через $H^{\omega,p}(Q)(0 < p \le \infty)$ обозначим множество функций $f(x,y)$, определенных на Q, и таких, что для любых двух точек $M' := M(x',y'), M'' := M(x'',y'')$ из Q выполняется неравенство

$$\Big|f(M') - f(M'')\Big| \le \omega\Big[\rho_p(M',M'')\Big],$$

где

$$\rho_p(M',M'') = \sqrt[p]{|x''-x'|^p + |y'-y''|^p},\ \ 0 < p \le \infty,$$

а $\omega(t)$ — заданный на отрезке $0 \le t \le \sqrt[p]{2}$ $(0 < p \le \infty)$ модуль непрерывности. Очевидно, что при $p = \infty$ расстояние

$$\rho_\infty(M',M'') = \max\Big\{|x''-x'|, |y''-y'|\Big\}.$$

Поставим в соответствие каждой функции $f(x,y) \in C(Q)$ функцию $\sigma_{m,n}(f;x,y) \in C^{(r,s)}(Q),\ r,s \in \mathbb{N}$, определенную следующими условиями:

1) на каждом частичном прямоугольнике $Q_{k,i} := [x_k \leq x \leq x_{k+1},\ y_i \leq \leq x \leq y_{i+1},]$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1; i = 0, 1, \ldots, n-1)$ функция $\sigma_{m,n}(f; x, y)$ есть алгебраический многочлен $2r + 1$-й степени по x и $2s + 1$-й степени по y;

2) $\sigma_{m,n}(f; x_k, y_i) = f(x_k, y_i)$ $k = \overline{0, m};\ i = \overline{0, n}$;

3) $\sigma_{m,n}^{(l,j)}(f; x_k, y_i) \equiv 0, \quad l = \overline{1, r};\ j = \overline{1, s}$.

Фунции $\sigma_{m,n}(f; x, y)$ (см., например, [25]) называют сплайн-функциями порядка $2r+1$ по x и $2s+1$ по y или просто сплайн-функциями дефекта $r+1$ по x и $s+1$ по y. Очевидно, что для $(x, y) \in Q$ имеет место легко проверяемое представление

$$\sigma_{m,n}(f; x, y) = f(x_{k-1}, y_{i-1}) H_r(x - x_{k-1}) \cdot H_s(y - y_{i-1}) +$$

$$+ f(x_k, y_{i-1}) H_r(x_k - x) \cdot H_s(y - y_{i-1}) + f(x_{k-1}, y_i) \cdot H_r(x - x_{k-1}) \times$$

$$\times H_s(y_i - y) + f(x_k, y_i) \cdot H_r(x_k - x) \cdot H_s(y_i - y), \tag{1.3.4}$$

где $H_q(h, t)$ — алгебраический многочлен степени $2q + 1$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $H_q(\delta; u)$ строго убывает на промежутке $[0, \delta]$ от $1 = H_q(\delta; 0)$ до $0 = H_q(\delta; \delta)$;

2. $H_q^{(l)}(\delta; 0) = H_q^{(l)}(\delta; \delta) = 0 \ \ (l = 1, 2, \ldots, q)$;

3. $H_q(\delta; u)$ для $0 \leq u \leq \delta/2$ выпукла вверх, а для $\delta/2 \leq u \leq \delta$ выпукла вниз;

4. $H_q(\delta; u) + H_q(\delta; \delta - u) \equiv 1$.

В этом параграфе найдены точные верхние грани уклонений сплайн–функций $\sigma_{m,n}(f; x, y)$ от функций $f(x, y) \in \mathfrak{M}(Q)$, где $\mathfrak{M}(Q)$ есть один из введенных классов функций $H^{\omega_1, \omega_2}(Q)$ или $H_p^{\omega}(Q), 0 < p \leq 3$.

Сформулируем основные результаты данного параграфа.

Теорема 1.3.1. *Каковы бы ни были выпуклые модули непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$, справедливо равенство*

$$\sup\left\{\left\|f-\sigma_{m,n}(f)\right\|_C : f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\right\} =$$

$$=\omega_1\left(\frac{1}{2m}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right).$$

Теорема 1.3.2. *Если $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ — произвольные модули непрерывности, то для любых $m,n\in\mathbb{N}$ справедливы соотношения:*

$$\sup\left\{\left\|f-\sigma_{m,n}(f)\right\|_C : f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)\right\} \le$$

$$\le\frac{3}{2}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2m}\right)+\omega_1\left(\frac{1}{2n}\right)\right].$$

$$\sup_{\omega_1,\omega_2}\sup_{f\in H^{\omega_1,\omega_2}(Q)}\frac{\left\|f-\sigma_{m,n}(f)\right\|_C}{\omega_1\big(1/2m\big)+\omega_1\big(1/2n\big)}=\frac{3}{2}.$$

Теорема 1.3.3. *Если $\omega(t)$ — выпуклый модуль непрерывности, то для любых $m,n\in\mathbb{N}$ и любого $p\in(0,3]$ справедливо равенство*

$$\sup\left\{\left\|f-\sigma_{m,n}(f)\right\|_C : f\in H_p^{\omega}(Q)\right\}=\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right). \qquad (1.3.5)$$

При $p>3$ существует функция $f_0\in H_p^{\omega}(Q)$, для которой соотношения (1.3.4) не имеет место, а именно

$$\left\|f_0-\sigma_{m,n}(f_0)\right\|_C>\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right).$$

Доказательства теорем 1.3.1 и 1.3.2 повторяют схему доказательств аналогичных теорем для обычных билинейных сплайнов, приведенных в работах В.Ф.Сторчая [26], а потому мы здесь не приводим их доказательства.

Приводим доказательство теоремы 1.3.3: Пусть $(x, y) \in Q_{k,i}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1;\ i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Положим $t = x - x_k$; $\tau = y - y_i$; $h = 1/m$; $\eta = 1/n$. Тогда из представления (1.3.4) и явного полинома $H_q(\delta, u)$ получим

$$\sigma_{m,n}(f; x, y) = f(x_k, y_i) H_r(h, t) H_s(\eta, \tau) +$$

$$+ f(x_{k+1}, y_i) H_r(h, h-t) H_s(\eta, \tau) +$$

$$+ f(x_k, y_{i+1}) \cdot H_r(h, t) \cdot H_s(\eta, \eta - \tau) +$$

$$+ f(x_{k+1}, y_{i+1}) \cdot H_r(h, h-t) H_s(\eta, \eta - \tau). \tag{1.3.6}$$

Используя третье свойство функции $H_q(\delta, u)$, запишем функцию $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y) = f(x, y) \cdot \Big[H_r(h, t) + H_r(h, h-t) \Big] \cdot \Big[H_s(\eta, \tau) + H_s(\eta, \eta - \tau) \Big] =$$

$$= f(x, y) H_r(h, t) \cdot H_s(\eta, \tau) + f(x, y) H_r(h, t) H_s(\eta, \eta - \tau) +$$

$$+ f(x, y) H_r(h, h-t) H_s(\eta, \tau) + f(x, y) H_r(h, h-t) H_s(\eta, \eta - \tau). \tag{1.3.7}$$

Вычитая равенство (1.3.6) почленно из (1.3.7), запишем разность

$$f(x, y) - \sigma_{m,n}(f; x, y) =$$

$$= \Big[f(x, y) - f(x_k, y_i) \Big] \cdot H_r(h, t) H_s(\eta, \tau) +$$

$$+ \Big[f(x, y) - f(x_{k+1}, y_i) \Big] \cdot H_r(h, h-t) H_s(\eta, \tau) +$$

$$+ \Big[f(x, y) - f(x_k, y_i) \Big] \cdot H_r(h, t) H_s(\eta, \tau) +$$

$$+\Big[f(x,y)-f(x_{k+1},y_{i+1})\Big]\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau). \qquad (1.3.8)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (1.3.8) и учитывая выпуклость модуля непрерывности $\omega(u)$, получаем

$$\Big|f(x,y)-\sigma_{m,n}(f;x,y)\Big|\le$$

$$\le\Big|f(x,y)-f(x_k,y_i)\Big|\cdot H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)+$$

$$+\Big|f(x,y)-f(x_{k+1},y_i)\Big|\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)+$$

$$+\Big|f(x,y)-f(x_k,y_{i+1})\Big|\cdot H_r(h,t)H_s(\eta,\eta-\tau)+$$

$$+\Big|f(x,y)-f(x_{k+1},y_{i+1})\Big|\cdot H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau)\le$$

$$+H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)\omega\Big(\sqrt[p]{|x-x_k|^p+|y-y_i|^p}\Big)+$$

$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)\omega\Big(\sqrt[p]{|x_{k+1}-x_k|^p+|y-y_i|^p}\Big)+$$

$$+H_r(h,t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\Big(\sqrt[p]{|x-x_k|^p+|y_{i+1}-y_i|^p}\Big)+$$

$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\Big(\sqrt[p]{|x_{k+1}-x_k|^p+|y_{i+1}-y_i|^p}\Big)=$$

$$=H_r(h,t)H_s(\eta,\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{t}{m^p}\right)^p+\left(\frac{\tau}{n^p}\right)^p}\right)+$$

$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1-t}{m}\right)^p+\left(\frac{\tau}{n}\right)^p}\right)+$$

$$+H_r(h,t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{t}{m}\right)^p+\left(\frac{1-\tau}{n}\right)^p}\right)+$$

$$+H_r(h,h-t)H_s(\eta,\eta-\tau)\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1-t}{m}\right)^p+\left(\frac{1-\tau}{n}\right)^p}\right)\leq$$

$$\leq\omega\left(\sqrt[p]{\Big[tH_r(h,t)+(h-t)H_r(h,h-t)\Big]^p+\Big[\tau H_s(\eta,\tau)+(\eta-\tau)H_s(\eta,\eta-\tau)\Big]^p}\right). \tag{1.3.9}$$

В работе [48] доказано, что функции

$$\varphi_1(h,t)=tH_r(h,t)+(h-t)H_r(h,h-t),$$

$$\varphi_2(\eta,\tau)=\tau H_s(\eta,\tau)+(\eta-\tau)H_s(\eta,\eta-\tau)$$

соответственно на отрезках $[0,h]$ и $[0,\eta]$ максимальные значения принимают в точках $t=h/2$ и $\tau=\eta/2$ для $0<p\leq 3$, а при $p>3$ на указанных отрезках существуют точки, в которых соответствующий максимум не достигается, а потому из неравенства (1.3.9) получаем

$$\sup_{f\in H^{\omega,p}}\Big\|f-\sigma_{m,n}(f)\Big\|_C\leq\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right), \tag{1.3.10}$$

где $0<p\leq 3$.

Теперь при любых $k=0,1,\dots,m-1$ и $i=0,1,\dots,n-1$ введем в рассмотрение функцию

$$f_0(x,y)=$$

$$= \begin{cases} \omega\left(\sqrt[p]{(x-x_k)^p+(y-y_i)^p}\right), (x,y)\in[x_k,x_k+\frac{1}{2m}]\times[y_i,y_i+\frac{1}{2n}];\\ \omega\left(\sqrt[p]{(x-x_k)^p+(y_{i+1}-y)^p}\right), (x,y)\in[x_k,x_k+\frac{1}{2m}]\times[y_i,y_i+\frac{1}{2n},y_{i+1}];\\ \omega\left(\sqrt[p]{(x_{k+1}-x)^p+(y-y_i)^p}\right), (x,y)\in[x_k+\frac{1}{2m},x_{k+1}]\times[y_i+\frac{1}{2n}];\\ \omega\left(\sqrt[p]{(x_{k+1}-x)^p+(y_{i+1}-y)^p}\right), (x,y)\in[x_k+\frac{1}{2m},x_{k+1}]\times[y_i+\frac{1}{2n},y_{i+1}]. \end{cases}$$

Применяя лемму 2 (см., например, монографию [23] с.177-178.), убедимся, что функция $f_0\in H^{\omega,p}(Q)(0<p\leq 3)$ и так как для этой функции $\sigma_{m,n}(f_0;x,y)\equiv 0$, то мы имеем оценку снизу

$$\sup_{f\in H^{\omega},p}\Big\|f-\sigma_{m,n}(f)\Big\|_C\geq\Big\|f_0(x,y)-\sigma_{m,n}(f)\Big\|_C=$$

$$=\max_{(x,y)\in Q_{k,i}}\Big|f_0(x,y)\Big|=\max_{(x,y)\in Q_{k,i}}\omega\Big(\sqrt[p]{(x-x_k)^p+(y-y_i)^p}\Big)=$$

$$=\omega\left(\sqrt[p]{\left(x_k+\frac{1}{2m}-x_k\right)^p+\left(y_i+\frac{1}{2n}-y_i\right)^p}\right)=$$

$$=\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt[p]{\frac{1}{m^p}+\frac{1}{n^p}}\right). \tag{1.3.11}$$

Требуемое равенство (1.3.5) получаем из сопоставления неравенств (1.3.10) и (1.3.11), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.3.

Замечание. Теоремы 1.3.1-1.3.3 показывают, что несмотря на то, что гладкость сплайнов $\sigma_{m,n}(f;x,y)$ гораздо выше (ввиду того, что $\sigma_{m,n}(f;x,y)\in C^{(r,s)}(Q)$) по сравнению с гладкостью билинейных сплайнов $S_{1,1}(f;x,y)$ (поскольку $S_{1,1}(f;x,y)\in C^{(1,1)}(Q)$), тем не менее погрешность, доставляемая ими на классах функций $H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и $H^{\omega,p}(Q)$ $0 < p \leq 3$, не больше, чем погрешность, доставляемая билинейным интерполяционным сплайном $S_{1,1}(f;x,y)$. Это следует из сравнение результатов теорем 1.3.1-1.3.3 с соответствующими результатами В.Ф. Сторчая [26], приведенными в §1.3.

Глава II. Точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классах функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$ и $W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$ и некоторые приложения в теории кубатур

§2.1. О точной оценке погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классах $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$ и $W^{(1,1)}H^{\omega_1,\omega_2}(Q)$

Напомним, что в первом параграфе первой главы наравне с полным модулем непрерывности

$$\omega(f;t,\tau)_{C(Q)} :=$$
$$= \sup\Big\{\big|f(x',y') - f(x'',y'')\big| : \ |x'-x''| \le t, |y'-y''| \le \tau\Big\},$$

функции $f \in C(Q)$, $Q := \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$ мы ввели в рассмотрение также следующий модуль непрерывности

$$\omega_*(f;t,\tau)_{C(Q)} = \sup\Big\{\big|f(x',y') - f(x'',y') - f(x',y'') - f(x'',y'')\big| :$$
$$: |x'-x''| \le t, |y'-y''| \le \tau \ x', x'' \in [0,1], \ y', y'' \in [0,1]\Big\}, \qquad (2.1.1)$$

и на основе этих двух модулей непрерывности ввели в рассмотрение классы функции $H^\omega(Q)$ и, $H^{\omega_*}(Q)$, где $\omega(t,\tau)$ и $\omega_*(t,\tau)$ — два заданных модуля непрерывности. Для классов $H^\omega(Q)$ и $W^{(1,1)}H^\omega(Q)$ аппроксимационные теоремы доказаны в работе [41] а для класса $W_p^{(r,s)}H^\omega(Q), 1 \le p \le 3$ и $(r,s) = (1,0), (0,1)$ и $(1,1)$ в первой главе настоящей диссертационной работы.

Техника, применяемая в первой главе диссертации при получении точных оценок на классах $H^{\omega_*}(Q)$ и $W^{(r,s)}H_p^{\omega_*}(Q)$, $1 \le p \le 3$, $(r,s) = (1,0), (0,1)$ и $(1,1)$ не срабатывает, а потому здесь мы применяем метод получения точной оценки приближения, разработанный Н.П.Корнейчуком при приближении гладких функций кусочно-постоянными функциями (сплайнами нулевого порядка) и линейными функциями для классов $H^{\omega}[a,b]$ и $W^{(1)}H^{\omega}[a,b]$ (см., например, [13]), предварительно обобщая результаты Н.П.Корнейчука для функций $H^{\omega_*}(Q)$ и $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$. Таким образом, целью данной главы является получение результатов окончательного характера, связанных с отысканием точной оценки верхней грани погрешности приближения билинейными интерполяционными сплайнами на классах функций $W^{(r,s)}H_p^{\omega_*}(Q)$ и $W^{(r,s)}H^{\omega_1\omega_2}(Q)$ для $(r,s)=(1,1)$ и $1 \le p \le 3$ для заданных модулей непрерывности $\omega_*(t,\tau)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$.

Так как билинейный интерполяционный сплайн $S_{(1,1)}(f;t,\tau)$ на каждой из ячеек $Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m}; i=\overline{1,n})$ определяется локально в виде (1.1.10):

$$S_{(1,1)}(f;t,\tau)=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})H_{\mu,k}(t)\cdot H_{\nu,i}(\tau), \tag{2.1.2}$$

где $H_{\mu,k}(t), (\mu=0,1)$ и $H_{\nu,i}(\tau)(\nu=0,1)$ определены равенствами (1.1.14) и (1.1.15), то достаточно рассматривать разность

$$e_{m,n}(f;t,\tau)=f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau) \tag{2.1.3}$$

на ячейке $Q_{k,i}$, где $S_{1,1}(f;t,\tau)$ имеет вид (1.2.3). Учитывая, что в вершинах этой ячейки функция $e(f;t,\tau)$ обращается в нуль, мы можем оценить погрешность (1.2.4) через модуль непрерывности (1.2.1) или через произведение $\omega_1(t)\cdot\omega_2(\tau)$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\mathfrak{M}^{(1,1)}(Q)$ — один из вышеприведенных классов функций $W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$ или $W^{(1,1)}H^{\omega_1\omega_2}(Q)$. Требуется найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M}^{(1,1)}(Q)) := \sup\left\{\|e_{m,n}(f;\cdot,\cdot)\|_{C(Q)} :\ f\in\mathfrak{M}^{(1,1)}(Q)\right\}. \tag{2.1.4}$$

Следующее утверждение позволяет получить оценку погрешности (1.2.3) в каждой точке $(t,\tau)\in Q$. Имеет место следующая

Лемма 2.1.1. *Пусть $f(t,\tau)\in C^{(1,1)}(Q)$ и $S_{1,1}(f;t,\tau)$ – билинейный интерполяционный сплайн, интерполирующий функцию $f(t,\tau)$ в узлах (t_k,τ_i) произвольного разбиения $\Delta_{m,n}$ на частичных прямоугольниках $Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n})$ квадрата Q. Тогда в каждой точке $(t,\tau)\in Q_{k,i}$ имеют место неравенства*

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)\cdot$$

$$\cdot H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\int\limits_0^{h_k}\int\limits_0^{\eta_i}\omega\left(f^{(1,1)};Q_{k,i};\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau; \tag{2.1.5}$$

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le$$

$$\le H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)\cdot\int\limits_0^{h_k}\omega\left(f^{(1,0)};[t_{k-1},t_k],t\right)dt\cdot$$

$$\cdot H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\int\limits_0^{\eta_i}\omega\left(f^{(0,1)};[\tau_{i-1},\tau_i]\tau\right)d\tau. \tag{2.1.6}$$

Из (2.1.5) и (2.1.6) для $(t,\tau)\in Q_{k,i}$ сразу вытекают следующие неравенства

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)\times$$

$$\times H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\omega\left(f^{(1,1)};Q_{k,i};\sqrt[p]{h_k^p+\eta_i^p}\right)\cdot h_k\eta_i; \tag{2.1.7}$$

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le$$

$$\le H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)\cdot\omega\left(f^{(1,0)};[t_{k-1},t_k],h_i\right)h_k\times$$

$$\times H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\omega\left(f^{(0,1)};[\tau_{i-1},\tau_i]\eta_i\right)\eta_i. \tag{2.1.8}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу локальности билинейного интерполяционного сплайна $S_{1,1}(f;t,\tau)$ в правых частях неравенств (2.1.5), (2.1.6) и (2.1.7), (2.1.8) в правых частях через $\omega\left(f^{(1,1)};Q_{k,i};\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)$, $\omega\left(f^{(1,0)};[t_{k-1},t_k]t\right)$ и $\omega\left(f^{(0,1)};[\tau_{i-1},\tau_i]\tau\right)$ обозначены соответственно модуль непрерывности функции $f^{(1,1)}(t,\tau)$ на частичном прямоугольнике $Q_{k,i}$, частных производных $f^{(1,0)}(t,\tau)$ только на отрезке $[t_{k-1},t_k]$ и $f^{(0,1)}(t,\tau)$ только на отрезке $[\tau_{i-1},\tau_i]$. Отметим ещё следующий немаловажный факт. При равномерном разбиении $\overline{\Delta}_{m,n} := \left\{\left(\frac{k}{m},\frac{i}{n}\right)\right\}_{k,i=0}^{m,n}$ в силу неравенств (2.1.5), (2.1.6) и (2.1.7), (2.1.8) для функции $f\in W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$ в точке $(t,\tau)\in\left(\frac{k-1}{m}<t<\frac{k}{m},\frac{i-1}{n}<\tau<\frac{i}{n}\right) := \overline{Q}_{k,l}$ справедливы неулучшаемые на всем множестве $C^{(1,1)}(Q)$ оценки

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le$$

$$\le\left(\bar{t}_i-t\right)\left(t-\bar{t}_{i-1}\right)\left(\overline{\tau}_i-\tau\right)\left(\tau-\overline{\tau}_{i-1}\right)\cdot m^2n^2\iint\limits_{(\overline{Q}_{k,i})}\omega\left(t,\tau\right)dt=$$

$$=m^2n^2\left(\frac{k}{m}-t\right)\left(t-\frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{i}{n}-\tau\right)\left(\tau-\frac{i-1}{n}\right)\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau; \tag{2.1.9}$$

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le$$

$$\le m^2\left(\frac{k}{m}-t\right)\left(t-\frac{k-1}{m}\right)\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt\times$$

$$\times n^2\left(\frac{i}{n}-\tau\right)\left(\tau-\frac{i-1}{n}\right)\int\limits_0^{1}\omega_2(\tau)d\tau, \tag{2.1.10}$$

которые, конечно, сильнее соответственно, оценок (2.1.5) и (2.1.6), однако оценки (2.1.9) и (2.1.10) не являются, вообще говоря, неулучшаемыми (в точках) на классах $W^{(1,1)}H_p^{\omega_\star}(Q)$ и $W^{(1,1)}H_p^{\omega_1\cdot\omega_2}(Q)$.

Приводим доказательство леммы 2.1.1. Не ограничивая общности, проведём все рассуждения для произвольной ячейки $Q_{k,i}(k=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n})$. Используя свойства разделёных разностей функции $f(t,\tau)$ для произвольной $(t,\tau)\in Q_{k,i}$ $(k=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n})$, погрешность интерполяции после выполнения ряда арифметических действий представим в виде

$$f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1}H_{\mu,k}(t)\cdot H_{\nu,i}(\tau)\Big[f(t,\tau)-f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})\Big]=$$

$$=H_{0,k}(t)H_{0,i}(\tau)\Big[f(t,\tau)-f(t_{k-1},\tau_{i-1})\Big]+H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)\Big[f(t,\tau)-$$

$$-f(t_k,\tau_{i-1})\Big]+H_{0,k}(t)H_{1,i}(\tau)\Big[f(t,\tau)-f(t_{k-1},\tau_i)\Big]+H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)\Big[f(t,\tau)-$$

$$-f(t_k,\tau_i)\Big]=H_{0,k}(t)H_{0,i}(\tau)\Bigg[(t-t_{k-1})\frac{f(t,\tau_{i-1})f(t_{k-1},\tau_{i-1})}{t-t_{k-1}}+$$

$$+\frac{f(t,\tau)-f(t,\tau_{i-1})}{\tau-\tau_{i-1}}\cdot(\tau-\tau_{i-1})\Bigg]+H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)\cdot$$

$$\cdot\Bigg[(\tau-\tau_{i-1})\cdot\frac{f(t,\tau)-f(t,\tau_{i-1})}{\tau-\tau_{i-1}}-(t_k-t)\cdot\frac{f(t_k,\tau_{i-1})-f(t,\tau_{i-1})}{t_k-t}\Bigg]+$$

$$+H_{0,k}(t)H_{1,i}(\tau)\Bigg[\frac{f(t,\tau)-f(t,\tau_i)}{\tau-\tau_i}(\tau-\tau_i)+(t-t_{k-1})\frac{f(t,\tau)-f(t_{k-1},\tau)}{t-t_{k-1}}\Bigg]=$$

$$+H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)\Bigg[(\tau-\tau_i)\frac{f(t,\tau)-f(t,\tau_i)}{\tau-\tau_i}+(t-t_{k-1})\frac{f(t,\tau_i)-f(t_{k-1},\tau_i)}{t-t_{k-1}}\Bigg]=$$

$$=H_{0,k}(t)H_{1,i}(\tau)\left[h_kH_{1,k}(t)f(t,t_{k-1};\tau_{i-1})+\eta_iH_{1,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_{i-1})\right]+$$

$$+H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)\left[\eta_i H_{1,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_{i-1}) - h_k H_{0,k}(t)f(t,t_k;\tau_{i-1})\right]+$$

$$+H_{0,k}(t)H_{1,i}(\tau)\left[-\eta_i H_{0,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_i) + h_k H_{1,k}(t)f(t,t_{k-1};\tau_i)\right]+$$

$$+H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)\left[-\eta_i H_{1,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_i) - h_k H_{1,k}(t)f(t,t_k;\tau_i)\right]=$$

$$=\eta_i\Big[H_{0,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_{i-1}) + H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)f(t,\tau;\tau_{i-1})-$$

$$-H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)H_{0,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_{i-1}) - H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)f(t;\tau,\tau_i)\Big]+$$

$$+h_k\Big[H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)f(t,t_{k-1},\tau_{i-1}) - H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)f(t,t_k,\tau_{i-1})+$$

$$+H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)f(t,t_{k-1};\tau_i) - H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)f(t,t_k;\tau_i)\Big]=$$

$$=\eta_i\Big\{H_{0,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\Big[f(t;\tau,\tau_{i-1}) - f(t;\tau,\tau_i)\Big]+$$

$$+H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\Big[f(t;\tau,\tau_{i-1}) - f(t;\tau,\tau_i)\Big]\Big\}+$$

$$+h_k\Big\{H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)\Big[f(t,t_{k-1},\tau_{i-1}) - f(t,t_k,\tau_{i-1})\Big]+$$

$$+H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{1,i}(\tau)\Big[f(t,t_{k-1};\tau_i) - f(t,t_k;\tau_i)\Big]\Big\}=$$

$$=h_k\eta_i H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,k}(\tau)\cdot\Big[f(t;t_k;\tau,\tau_i)-$$

$$-f(t;t_{k-1};\tau,\tau_i)-f(t,t_{k-1};\tau,\tau_{i-1})+f(t,t_{k-1};\tau,\tau_{i-1})\Big]. \qquad (2.1.11)$$

Воспользуемся представлением разделённого разностного отношения вида $f(t,a;\tau,b)$ в интегральной форме следующего вида [2]:

$$f(t,a_1;\tau,b_1)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f^{(1,1)}(t+u(a_1-t),\tau+\vartheta(b_1-\tau))dud\vartheta.$$

Полученное равенство (2.1.11) запишем в виде

$$f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)=$$

$$=h_k\eta_i H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\cdot\Big[f(t,t_k;\tau,\tau_i)-$$

$$-f(t,t_{k-1};\tau,\tau_i)-f(t,t_k;\tau,\tau_{i-1})+f(t,t_{k-1};\tau,\tau_{i-1})\Big]=$$

$$=h_k\eta_i H_{0,k}(t)H_{1,k}(\tau)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big[f^{(1,1)}(t+u(t_k-t),\tau+\vartheta(\tau_i-\tau))-$$

$$-f^{(1,1)}(t+u(t_{k-1}-t),\tau+\vartheta(\tau_i-\tau))-f^{(1,1)}(t+u(t_k-t),\tau+\vartheta(\tau_{i-1}-\tau))-$$

$$-f^{(1,1)}(t+u(t_{k-1}-t),\tau+\vartheta(\tau_{i-1}-\tau))\Big]dud\vartheta. \qquad (2.1.12)$$

Оценивая по абсолютной величине равенство (2.1.12) и учитывая, что функция $f(t,\tau)\in W^{(1,1)}H_p^{\omega_\star}(Q)$, или, что то же, функция $f^{(1,1)}(t,\tau)\in H_p^{\omega_\star}(Q)$ $(1\le p\le 3)$, согласно определению указанных классов функций имеем:

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le$$

$$\le h_k\eta_i H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\int\limits_0^1\int\limits_0^1\Big|f^{(1,1)}(t+u(t_k-t),\tau+\vartheta(\tau_i-\tau))-$$

$$-f^{(1,1)}(t+u(t_{k-1}-t),\tau+\vartheta(\tau_i-\tau))-f^{(1,1)}(t+u(t_k-t),\tau+\vartheta(\tau_{i-1}-\tau))-$$

$$-f^{(1,1)}(t+u(t_{k-1}-t),\tau+\vartheta(\tau_{i-1}-\tau))\Big|dud\vartheta\le$$

$$\le h_k\eta_i H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^1\int\limits_0^1\omega\Big(f^{(1,1)};Q_{k,i};\sqrt[p]{\Big[u(t_k-t_{k-1})\Big]^p+\Big[\vartheta(\tau_i-\tau_{i-1})\Big]^p}\Big)dud\vartheta=$$

$$=H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\times$$

$$\times\int\limits_0^{h_k}\int\limits_0^{\eta_i}\omega\Big(f^{(1,1)};Q_{k,i};\sqrt[p]{u^p+\vartheta^p}\Big)dud\vartheta, \qquad (2.1.13)$$

откуда и следует неравенство (2.1.5).

Совершенно аналогичным образом получаем (2.1.6). Из (2.1.13) при равномерном разбиении ячейки $Q_{k,i}$, когда $\Delta_{m,n}\equiv\overline{\Delta}_{m,n},\ h_k=1/m$ $(k=\overline{1,m}),\ \eta_i=1/n\ (i=\overline{1,n})$, получаем соотношения (2.1.19) и (2.1.20), чем и завершаем доказательство леммы 2.1.1. Одним из основных результатов данного параграфа является следующее утверждение

Теорема 2.1.1. *Для любых $m,n\in\mathbb{N},\ 1\le p\le 3$ и выпуклых модулей непрерывности $\omega(t,\tau),\ \omega_1(t)$ и $\omega_2(\tau)$ имеют место равенства*

$$\mathcal{E}_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)\Big)=\frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega_*\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau, \qquad (2.1.14)$$

$$\mathcal{E}_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H^{\omega_1\omega_2}(Q)\Big)=\left(\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)d\tau\right). \qquad (2.1.15)$$

Доказательство. Приводим доказательство равенства (2.1.14), так как доказательство равенства (2.1.15) приводится по аналогичной схеме. В самом деле, из неравенства (2.1.13) с учётом того, что

$$\max\Big\{H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau):(t,\tau)\in Q_{k,i}\Big\}=$$

$$=\max\Big\{h_k^{-2}\eta_i^{-2}(t-t_{k-1})(t_k-t)(\tau_i-\tau)(\tau-\tau_{i-1}):(t,\tau)\in Q_{k,i}\Big\}=$$

$$=\max\Big\{h_k^{-2}\eta_i^{-2}\cdot h_k t\cdot h_k(1-t)\cdot\eta_i\tau\cdot\tau_i(1-\tau):0\le t,\tau\le 1\Big\}=$$

$$=\max\Big\{t(1-t)\cdot\tau(1-\tau):0\le t,\tau\le 1\Big\}=\frac{1}{16},$$

получаем оценку сверху

$$\Big|f(t,\tau)-S_{1,1}(f;t,\tau)\Big|\le$$

$$\le H_{0,k}(t)H_{1,k}(t)H_{0,i}(\tau)H_{1,i}(\tau)\int\limits_0^{h_k}\int\limits_0^{\eta_i}\omega\Big(f^{(1,1)};Q_{k,i,j}\sqrt[p]{u^p+\vartheta^p}\Big)dud\vartheta\le$$

$$\le\frac{1}{16}\int\limits_0^{h_k}\int\limits_0^{\eta_i}\omega\Big(\sqrt[p]{u^p+\vartheta^p}\Big)dud\vartheta,$$

откуда сразу вытекает общая оценка для класса функций

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)\right)\le\frac{1}{16}\int\limits_0^{h_k}\int\limits_0^{\eta_i}\omega\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau \qquad (2.1.16)$$

и, в частности, для равномерного разбиения $Q_{k,i}$ из (2.1.16) следует, что

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)\right)\le\frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega_*\left(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\right)dtd\tau. \qquad (2.1.17)$$

Покажем, что в (2.1.17) на самом деле имеет место равенство. Заметим, что соотношение (2.1.17) доказано без каких-либо условий на модуль непрерывности ω_*. Считая теперь, что ω_* – выпуклый по обеим переменным модуль непрерывности, легко доказать, что в (2.1.17) имеет место знак равенства. С этой целью на прямоугольнике

$$\overline{Q}_{1,1} := \left\{0 \le t \le 1/m;\ 0 \le \tau \le 1/n\right\}$$

определим функцию

$$\varphi(t,\tau) := \begin{cases} \frac{1}{4}\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}-2t\right)^p + \left(\frac{1}{n}-2\tau\right)^p}\right), & (t,\tau) \in \left[0,\frac{1}{2m}\right] \times \left[0,\frac{1}{2n}\right], \\ -\frac{1}{4}\omega\left(\sqrt[p]{\left(2t-\frac{1}{m}\right)^p + \left(\frac{1}{n}-2\tau\right)^p}\right), & (t,\tau) \in \left[\frac{1}{2m},\frac{1}{m}\right] \times \left[0,\frac{1}{2n}\right], \\ -\frac{1}{4}\omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m}-2t\right)^p + \left(2\tau-\frac{1}{n}\right)^p}\right), & (t,\tau) \in \left[0,\frac{1}{2m}\right] \times \left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right], \\ \frac{1}{4}\omega\left(\sqrt[p]{\left(2t-\frac{1}{m}\right)^p + \left(2\tau-\frac{1}{n}\right)^p}\right), & (t,\tau) \in \left[\frac{1}{2m},\frac{1}{m}\right] \times \left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right], \end{cases}$$

и, полагая

$$\varphi\left(t+\frac{2}{m},\tau\right) = \varphi\left(t,\tau+\frac{2}{n}\right) = \varphi\left(t+\frac{2}{m},\tau+\frac{2}{n}\right) = \varphi(t,\tau),$$

продолжим функцию $\varphi(t,\tau)$ с периодом $2/m$ по t и с периодом $2/n$ по τ на всю плоскость. Нетрудно убедиться, что функция

$$f_0(t,\tau) = \int_0^t \int_0^\tau \varphi(u,\vartheta)du d\vartheta,\ (t,\tau) \in Q$$

принадлежит классу $W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$ и поскольку $S_{1,1}(f_0;x,y) \equiv 0$, то мы сразу получаем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)\right) \ge \left\|f_0 - S_{1,1}(f_0)\right\|_{C(Q)} =$$

$$= \|f_0\|_{C(Q)} = \left| f_0\left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2n}\right) \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_0^{1/(2m)} \int\limits_0^{1/(2n)} \omega\left(\sqrt[p]{\left(\frac{1}{m} - 2t\right)^p + \left(\frac{1}{n} - 2\tau\right)^p} \right) dt d\tau =$$

$$= \frac{1}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega(\sqrt[p]{t^p + \tau^p}) dt d\tau. \qquad (2.1.18)$$

Нужное нам равенство (2.1.14) получаем из сопоставления оценки сверху (2.1.17) с оценкой снизу (2.1.18), и тем же методам получаем (2.1.15). Впрочем, так как в силу равенства

$$\omega_*(f; t, \tau)_{C(Q)} = \omega_1(\varphi; t,)_{C[0,1]} \cdot \omega_2(\psi, \tau)_{C[0,1]},$$

верного для любой функции $f(t, \tau) = \varphi(t) \cdot \psi(\tau)$, в данном случае класс $W^{(1,1)} H^{\omega_1 \cdot \omega_2}(Q)$ является подклассом класса $W^{(1,1)} H_p^{\omega_*}(Q)$, то равенство (2.1.15) является следствием равенства (2.1.14). Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий

Следствие 2.1.1. *В условиях теоремы 2.1.1 при $p = \infty$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(W^{(1,1)} H_\infty^{\omega_*}(Q)\right) = \frac{1}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \max\Big\{\omega_*(t), \omega_*(\tau)\Big\} dt d\tau, \qquad (2.1.19)$$

где $\omega_*(\delta)$- заданный выпуклый вверх модуль непрерывности.

Доказательство. В самом деле, верхняя грань в (2.1.19) реализуется функцией

$$f_1(t, \tau) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \varphi_1(u, \vartheta) du d\vartheta, \ (t, \tau) \in Q,$$

где $\varphi_1(t,\tau) = \max\Big\{\varphi(t),\psi(\tau)\Big\}$, а $\varphi(t)$ и $\psi(\tau)$ определены соответственно равенствами

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega\left(\dfrac{1}{m}-2t\right), & t\in\left[0,\dfrac{1}{2m}\right], \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\omega\left(2t-\dfrac{1}{m}\right), & t\in\left[\dfrac{1}{2m},\dfrac{1}{m}\right]; \end{cases} \tag{2.1.20}$$

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\omega\left(\dfrac{1}{n}-2\tau\right), & \tau\in\left[0,\dfrac{1}{2n}\right], \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\omega\left(2\tau-\dfrac{1}{n}\right), & \tau\in\left[\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{n}\right]. \end{cases} \tag{2.1.21}$$

Далее соотношениями

$$\varphi_1\left(t+\frac{2}{m}\right)=\varphi_1(t),\ \varphi_2\left(\tau+\frac{2}{n}\right)=\varphi_2(\tau)$$

соответственно с периодами $2/m$ и $2/n$ продолжим указанные функции на всей оси.

Следствие 2.1.2. *В условиях теоремы 2.1.1 при $p=1$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{m,n}\left(W^{(1,1)}H_1^{\omega}(Q)\right)=\frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega(t+\tau)dtd\tau=$$

$$
= \frac{1}{16} \begin{cases} \int\limits_0^{1/n} t\omega(t)dt + \frac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{1/m} \omega(t)dt + \int\limits_{1/m}^{1/m+1/n} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - t\right)\omega(t)dt, & m < n, \\ \int\limits_0^{1/m} t\omega(t)dt + \frac{1}{m}\int\limits_{1/m}^{1/n} \omega(t)dt + \int\limits_{1/n}^{1/n+1/m} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} - t\right)\omega(t)dt, & m > n, \\ \int\limits_0^{1/n} t\omega(t)dt + \int\limits_{1/n}^{2/n} \left(\frac{2}{n} - t\right)\omega(t)dt, & m = n. \end{cases} \tag{2.1.22}
$$

Заметим, что выражение, стоящее в правой части равенства (2.1.22), получаем с применением стандартных методов математического анализа для вычисления двукратного интеграла, стоящего в левой части равенства (2.1.22). Отметим, что верхнюю грань в равенстве (2.1.19) реализует функция

$$
f_2(t,\tau) = \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \max\Big\{\varphi(u), \psi(\vartheta)\Big\} du d\vartheta
$$

очевидно принадлежащая классу $W^{(1,1)}H^{\omega_1\omega_2}(Q)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(\tau)$ определены равенствами (2.1.20) и (2.1.21).

В заключение отметим, что при доказательстве приведенных выше результатов мы пользовались схемой рассуждении и методами доказательства работ С.Б.Вакарчука [2], М.Ш.Шабозова [36] и М.Ш.Шабозова и С.Н.Мехмонзода [38].

§2.2. Применение билинейных интерполяционных сплайнов в теории кубатурных формул для определенных двойных интегралов

Рассмотрим для функций $f(x, y)$, заданных на квадрате $Q := \Big\{(t, \tau) : 0 \le t, \tau \le 1\Big\}$, кубатурную формулу

$$\iint\limits_{(Q)} f(t, \tau) dt d\tau = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} f(t_k, \tau_i) + R_{m,n}(f), \tag{2.2.1}$$

определяемую вектором $(\mathrm{T}, \mathcal{T}; A)$ узлов

$$T := \Big\{t_k : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{m-1} < t_m = 1\Big\},$$

$$\mathcal{T} := \Big\{\tau_i : 0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_{n-1} < \tau_n = 1\Big\},$$

коэффициентов $A := \Big\{a_{ki}\Big\}_{k,i=0}^{m,n}$, $R_{m,n}(f)$ — погрешность формулы на функции f.

Если $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $\{f(x, y)\}$, то задача состоит в том, чтобы при фиксированном векторе узлов и коэффициентов $(T^0, \mathcal{T}^0; A^0)$ определить погрешность на всем классе $\mathfrak{M}$, то есть найти верхнюю грань ошибки

$$R_{m,n}(\mathfrak{M}) = \sup\Big\{\Big|R_{m,n}(f)\Big| : f \in \mathfrak{M}\Big\} =$$

$$= \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(t, \tau) dt d\tau - \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a^0_{k,i} f\big(t^0_k, \tau^0_i\big) \right|. \tag{2.2.2}$$

Предположим, что кубатурная формула (2.2.1) точна на билинейных интерполяционных сплайнах, интерполирующих функцию $f(t, \tau) \in W^{(1,1)} H^\omega_p(Q)$ на решётке узлов

$$M_{k-1,i-1} := M(t^0_{k-1}, \tau^0_{i-1}) = M\left(\frac{k-1}{m}, \frac{i-1}{n}\right),$$

$$M_{k-1,i} := M(t_{k-1}^0, \tau_i^0) = M\left(\frac{k-1}{m}, \frac{i}{n}\right),$$

$$M_{k,i-1} := M(t_k^0, \tau_{i-1}^0) = M\left(\frac{k}{m}, \frac{i-1}{n}\right),$$

$$M_{k,i} := M(t_k^0, \tau_i^0) = M\left(\frac{k}{m}, \frac{i}{n}\right)$$

являющихся вершинами частичного прямоугольника

$$Q_{k,i}^0 := \left[t_{k-1}^0, t_k^0\right] \times \left[\tau_{i-1}^0, \tau_i^0\right] \ (k = \overline{1,m};\ i = \overline{1,n}).$$

Теорема 2.2.1. *Если кубатурная формула (2.2.1) точна на билинейных интерполяционных сплайнах по равномерному разбиению* $\overline{\Delta}_{m,n} := \overline{\Delta}_m \times \overline{\Delta}_n = \left\{\left(\frac{k}{m}, \frac{i}{n}\right)\right\}_{k,i=0}^{m,n}$ *квадрата* Q*, то кубатурная формула (2.2.1) является классической кубатурной формулой трапеций вида*

$$\iint\limits_{(Q)} f(t,\tau)dtd\tau = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \overline{a}_{ki} f\left(\frac{k}{m}, \frac{i}{n}\right) + \overline{R}_{m,n}(f), \tag{2.2.3}$$

где вектор коэффициентов $\overline{A} = \{\overline{a}_{k,i}\}_{k,i=0}^{m,n}$ *определён равенствами*

$$\overline{a}_{00} = \overline{a}_{01} = \overline{a}_{10} = \overline{a}_{11} = \frac{1}{4mn};$$

$$\overline{a}_{k0} = \overline{a}_{k1} = \frac{1}{2mn}; k = \overline{1, m-1};$$

$$\overline{a}_{0i} = \overline{a}_{1i} = \frac{1}{2mn}; i = \overline{1, n-1};$$

$$\overline{a}_{ki} = \frac{1}{mn};\ k = \overline{1, m-1}; i = \overline{1, n-1}.$$

Погрешность кубатурной формулы (2.2.3) на всём классе $W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$ *равна*

$$\overline{R}_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q)\Big) = \frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n} \omega^*(\sqrt[p]{t^p + \tau^p})dtd\tau. \tag{2.2.4}$$

Доказательство. Вычислим интеграл, пользуясь представлением (2.1.2):

$$\iint\limits_{(Q)} S_{1,1}(f;t,\tau)dtd\tau = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{(Q_{k,i}^0)} S_{1,1}(f;t,\tau)dtd\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{(Q_{k,i}^0)}\left[\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})\right]dtd\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left\{\iint\limits_{(Q_{k,i}^0)}\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)dtd\tau\cdot f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})\right\}. \qquad (2.2.5)$$

Так как,

$$\iint\limits_{(Q_{k,i}^0)} H_{\mu,k}(t)H_{\nu,i}(\tau)dtd\tau =$$

$$= h_k^{-1}\eta_i^{-1}\int\limits_{t_{k-1}^0}^{t_k^0}(t_k^0-t)dt\cdot\int\limits_{\tau_{i-1}^0}^{\tau_i^0}(\tau_i^0-\tau)d\tau = \frac{h_k}{2}\cdot\frac{\eta_i}{2} = \frac{1}{4mn},$$

то из (2.2.3) получаем

$$\iint\limits_{(Q)} S_{1,1}(f;t,\tau)dtd\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{4mn}\cdot\sum_{\mu=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{1} f(t_{k+\mu-1},\tau_{i+\nu-1})\right\} =$$

$$= \frac{1}{4mn}\cdot\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\Big\{f(t_{k-1},\tau_{i-1}) + f(t_k,\tau_{i-1}) +$$

$$+ f(t_{k-1},\tau_i) + f(t_k,\tau_i)\Big\}. \qquad (2.2.6)$$

После некоторых арифметических преобразований и операций равенство (2.2.6) преобретает следующий вид

$$\iint\limits_{(Q)} S_{1,1}(f;t,\tau)dtd\tau =$$

$$= \frac{1}{4mn} \cdot \Bigg\{ f(0,0) + f(0,1) + f(1,0) + f(1,1) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{m-1}\left[f\left(\frac{k}{m},0\right) + \left(\frac{k}{m},1\right)\right] + 4\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{m},\frac{i}{n}\right) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f\left(0,\frac{i}{n}\right) + f\left(1,\frac{i}{n}\right)\right]\Bigg\}. \tag{2.2.7}$$

Заметим, что полученная кубатурная сумма, стоящая в правой части формулы (2.2.7), является кубатурной суммой классической формулы трапеций для приближённого вычисления двукратного интеграла

$$\iint\limits_{(Q)} f(t,\tau)dtd\tau,\ Q := [0,1]\times[0,1],$$

а потому запишем формулу (2.2.7) в виде обычного кубатурного равенства

$$\iint\limits_{(Q)} S_{1,1}(f;t,\tau)dtd\tau = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} \overline{a}_{ik} f\left(\frac{k}{m},\frac{i}{n}\right), \tag{2.2.8}$$

где в (2.2.8) ради краткости положено

$$\overline{a}_{00} = \overline{a}_{01} = \overline{a}_{10} = \overline{a}_{11} = \frac{1}{4mn};$$

$$\overline{a}_{k0} = \overline{a}_{k1} = \frac{1}{2mn};\ k = \overline{1, m-1};$$

$$\overline{a}_{0i} = \overline{a}_{1i} = \frac{1}{2mn};\ i = \overline{1, n-1};$$

$$\overline{a}_{ki} = \frac{1}{mn};\ k = \overline{1, m-1};\ i = \overline{1, n-1}.$$

Теперь заметим, что из неравенства (2.1.17), верного для произвольной функции $f(t,\tau) \in W^{(1,1)}H_p^{\omega^*}(Q)$ $(1 \le p \le 3)$ и равномерного разбиения $\overline{\Delta}_{m,n} := \overline{\Delta}_m \times \overline{\Delta}_n = \left\{ \left(\frac{k}{m}, \frac{i}{n} \right) \right\}_{k,i=0}^{m,n}$, вытекает, в частности, поточечное неравенство для любой точки $(t,\tau) \in Q$:

$$\Big| f(t,\tau) - S_{1,1}(f;t,\tau) \Big| \le \frac{1}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega^* \Big(\sqrt[p]{u^p + \vartheta^p} \Big) dt d\tau,$$

пользуясь которой оценим по абсолютной величине погрешность кубатурной формулы, точной на билинейных интерполяционных сплайнах. Имеем:

$$\Big| R_{m,n}(f) \Big| := \Big| R_{m,n}(f; T, \mathcal{T}; A) \Big| =$$

$$= \left| \iint\limits_{(Q)} f(t,\tau) dt d\tau - \iint\limits_{(Q)} S_{(1,1)}(f;t,\tau) dt d\tau \right| =$$

$$= \left| \iint\limits_{(Q)} \Big[f(t,\tau) - S_{(1,1)}(f;t,\tau) \Big] dt d\tau \right| \le$$

$$\le \iint\limits_{(Q)} \Big| f(t,\tau) - S_{(1,1)}(f;t,\tau) \Big| dt d\tau \le$$

$$\le \iint\limits_{(Q)} \Big| \frac{1}{16} \iint\limits_{(Q)} \omega^* \Big(\sqrt[p]{u^p + \vartheta^q} \Big) du d\vartheta \Big| dt d\tau =$$

$$= \frac{mesQ}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega^* \Big(\sqrt[p]{u^p + \vartheta^p} \Big) du d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega^* \Big(\sqrt[p]{u^p + \vartheta^p} \Big) du d\vartheta = |u = t, \vartheta = \tau| =$$

$$= \frac{1}{16} \int\limits_0^{1/m} \int\limits_0^{1/n} \omega^* \Big(\sqrt[p]{t^p + \tau^p} \Big) dt d\tau. \qquad (2.2.9)$$

При выводе неравенства (2.2.9) мы приняли во внимание, что $mesQ$ — площадь квадрата $Q = |Q| = 1$. Из (2.2.9) сразу вытекает оценка сверху для погрешности кубатурной формулы (2.2.1), точной на билинейных интерполяционных сплайнах, удовлетворяющих равенство (2.2.4) на всём классе функций $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q),\ 1 \le p \le 3:$

$$R_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\Big) \le \frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega^*\Big(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\Big)dtd\tau. \qquad (2.2.10)$$

Для функции $f_0(t,\tau) \in W^{(1,1)}H_p^{\omega_*}(Q),\ 1 \le p \le 3$ рассмотренной нами при доказательстве теоремы 2.1.2, для которой в силу теоремы о среднем для двукратных интегралов и выпуклости модуль непрерывности ω^* запишем равенство

$$\iint\limits_{(Q)}\Big[f_0(t,\tau) - S_{(1,1)}(f_0;t,\tau)\Big]dtd\tau =$$

$$= mesQ \cdot \Big\|f_0 - S_{1,1}(f_0)\Big\|_{C(Q)} = \Big\|f_0\Big\|_{C(Q)} =$$

$$= \Big\|f_0\Big(\frac{1}{2m},\frac{1}{2n}\Big)\Big\| = \frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega^*\Big(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\Big)dtd\tau,$$

пользуясь которым получаем оценку снизу кубатурной формулы

$$R_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)\Big) \ge \Big|R_{m,n}(f_0)\Big| =$$

$$= \Bigg|\iint\limits_{(Q)}\Big[f_0(t,\tau) - S_{(1,1)}(f_0;t,\tau)\Big]dtd\tau\Bigg| =$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^{1/m}\int\limits_0^{1/n}\omega^*\Big(\sqrt[p]{t^p+\tau^p}\Big)dtd\tau. \qquad (2.2.11)$$

Требуемое равенство (2.2.4) получаем из сравнения оценок сверху (2.2.10) и снизу (2.2.11), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1. Из доказанной теоремы 2.2.1 в качестве следствия в случае $p = 1$ для погрешности кубатурной формулы (2.2.3) на всем классе $W^{(1,1)}H_1^{\omega^*}(Q)$ получаем точную оценку погрешности кубатурной формулы (2.2.3)

$$R_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H_1^{\omega_*}(Q)\Big) =$$

$$= \frac{1}{16}\begin{cases} \int\limits_0^{1/n} t\omega(t)dt + \frac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{1/m}\omega(t)dt + \int\limits_{1/m}^{1/m+1/n}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-t\right)\omega(t)dt, & m < n, \\ \int\limits_0^{1/m} t\omega(t)dt + \frac{1}{m}\int\limits_{1/m}^{1/n}\omega(t)dt + \int\limits_{1/n}^{1/n+1/m}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-t\right)\omega(t)dt, & m > n, \\ \int\limits_0^{1/n} t\omega(t)dt + \int\limits_{1/n}^{2/n}\left(\frac{2}{n}-t\right)\omega(t)dt, & m = n. \end{cases} \tag{2.2.12}$$

По схеме рассуждений теоремы 2.2.1 доказывается следующая

Теорема 2.2.2. *Если кубатурная формула (2.2.1) точна на билинейных интерполяционных сплайнах, то для погрешности кубатурной формулы (2.2.3) на всём классе* $W^{(1,1)}H^{\omega_1\omega_2}$, *где* $\omega_1(t)$ *и* $\omega_2(\tau)$ *— произвольные выпуклые модули непрерывности, справедливо равенство*

$$R_{m,n}\Big(W^{(1,1)}H^{\omega_1\cdot\omega_2}(Q)\Big) = \left(\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/m}\omega_1(t)dt\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\int\limits_0^{1/n}\omega_2(\tau)\right)d\tau.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- вычислены экстремальные задачи совместного приближения функций двух переменных билинейными интерполяционными сплайнами на классах функций двух действительных переменных, задаваемых модулями непрерывности зависящими от расстояния между точками в равномерном метрике;

- найдены точные верхние грани совместного приближения функций двух переменных и их частных производных билинейными интерполяционными сплайнами и их соответствующими производными на классах функций, задаваемых модулями непрерывности;

- вычислены точные результаты об оценках погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций и даются их приложения в теории кубатурных формул.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты о приближении билинейными сплайнами имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты применяются при нахождении точных оценок погрешности приближений сплайнами в многомерном случае на различных классах функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения // М.: Мир. – 1972. – 316 с.

[2] Вакарчук С.Б. К интерполяции билинейными сплайнами // Мат. заметки. – 1990. – №47, – вып. 5. – С.26–29.

[3] Вакарчук С.Б., Мыскин К.Ю. Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интерполяционными билинейными сплайнами // Укр. матем. журнал. – Т.57. – №2. – 2005. – С.147–157.

[4] Великин В.Л. Эрмитовы сплайны и связанные с ними квадратурные формулы для некоторых классов дифференцируемых функции // Изв. вузов, Математика. – 1976. – №5. – С.15-28.

[5] Великин В.Л., Корнейчук Н.П. Точные оценки приближения сплайн-функциями на классах дифференцируемых функций // Мат. заметки. – 1971. – Т.9. – №(5) – С.483-494.

[6] Великин В.Л. О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций // Мат. заметки. – 1970. – Т.8. – №1 – С.41-46.

[7] Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л. О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Мат. заметки. – 2011. – Т.89. – №1. – С.127-130.

[8] Женсыкбаев А.А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r-го порядка // Мат. заметки. –

1973. – Т.13. – №5. – С.217–228.

[9] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций // М.:Наука. – 1980. – 352 с.

[10] Завьялов Ю.С. Интерполирование мультикубическими сплайнами // Новосибирский: СО АН СССР. – 1968.

[11] Квасов Б.И. Об интерполяционных сплайнах первой степени // Новосибирский: СО АН СССР. – 1968. – С.50-59.

[12] Костоусов К.В. Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. – 2005. –Т.77. – №3. – С.354-363.

[13] Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения // М.:Наука. – 1984. – 356 с.

[14] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. // М.: Наука. – 1976. – 320 с.

[15] Корнейчук Н.П. О приближении локальными сплайнами минимального дефекта [Текст] / Н.П. Корнейчук // Укр. мат. журнал. – 1982. – Т.34. – №5 – С.617-621.

[16] Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов [Текст]/Н.П.Корнейчук, В.Ф.Бабенко, А.А.Лигун//Киев: Наукова думка.–1992. – 304с.

[17] Лигун А.А. Об одном неравенстве для сплайн-функции минимального дефекта [Текст]/ А.А. Лигун // Мат. заметки. – 1978. – Т.24. – №4.– С.547-552.

[18] Малоземов В.Н. Об отклонении ломаных [Текст] / В.Н.Малоземов // Вестник ЛГУ.–1966. – Т.2. – №7. – С.150–153.

[19] Малоземов В.Н. К полигональной интерполяции [Текст]/ В.Н.Малоземов //Мат. заметки. – 1967. – Т1. – №5. – С. 537–540.

[20] Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа // Гостехиздат, М.: –1953. – 528с.

[21] Мирошниченко В.Л. Некоторые свойства трехдиагональных матриц и их применение к теории кубической сплайн-интерполяции [Текст]/ В.Л.Мирошниченко//М.:МГУ – 1976. – С.87–95.

[22] Мирошниченко В.Л. Достаточные условия монотонности и выпуклости для интерполяционных параболических сплайнов [Текст] / В.Л.Мирошниченко//Вычислительные системы.– 1991. Вып. 142. Сплайны и их приложения. – С.3-14.

[23] Никольский С.М. Квадратурные формулы //М.:Наука. –1988. – 254 с.

[24] Рябенький В.С. Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции функций по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки. // ИПМ, Препринт —№21. М.–1974.

[25] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике // М.:Наука. – 1976. – 248 с.

[26] Сторчай В.Ф. Приближение непрерывных функций двух переменных и сплайн–функциями в равномерной метрике. В сб: Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их

приложениям [Текст] / В.Ф.Сторчай// Днепропетровск: ДГУ. – 1975. – С. 82–89.

[27] Сторчай В.Ф. Приближение непрерывных функций двух переменных многомерных функциями в метрике $\mathbb{C}$. Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям [Текст] / В.Ф.Сторчай // Днепропетровск: ДГУ. – 1972. – С.66–68.

[28] Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Порядок наилучшей сплайн-аппроксимации некоторых классов функций [Текст] / Ю.Н.Субботин, Н.И.Черных Н.И. // Мат. заметки.– 1970. – Т.7. – №1. – С.24-42.

[29] Субботин Ю.Н. Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами [Текст]/Ю.Н.Субботин // Мат. заметки. – Т.16. –№5. – 1974. – С.843-854.

[30] Субботин Ю.Н. О кусочно полиномиальной интерполяции [Текст] / Ю.Н.Субботин // Мат. заметки. – 1967. – Т.1. — №2. – С. 63-70.

[31] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного //М.: Физматгиз. – 1960. – 624 с.

[32] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М.: МГУ. – 1976. – 325 с.

[33] Тихомиров В.М. Наилучшие методы приближения и интерполяции дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$ [Текст] / В.М.Тихомиров // Матем. сб.– 1969. – Т.80(122). – №2(10). – С. 290 - 304.

[34] Хамдамов Ш.Дж. О погрешности квадратурных формул, точных на

сплайнах первой степени [Текст] / Ш.Дж.Хамдамов//ДАН РТ. 2007. – Т.50. – №3.– С. 213 - 217.

[35] Хамдамов Ш.Дж. О погрешности кубатурных формул, точных на билинейных сплайнах [Текст] / Ш.Дж.Хамдамов//ДАН РТ. –2009. – Т.52. – №2, – С. 93 - 100.

[36] Шабозов М.Ш. О погрешности интерполяции билинейными сплайнами [Текст]/М.Ш.Шабозов //Укр.матем.журнал. – 1994. – Т.46. – №11. – С.1554–1560.

[37] Шабозов М.Ш. Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами [Текст] / М.Ш.Шабозов//Мат.заметки. – 1996. – Т.59. – №1. – С.142–152.

[38] Шабозов М.Ш., Мехмонзода С.Н. Точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций [Текст] / М.Ш.Шабозов, С.Н.Мехмонзода // Матем. заметки. – 2017.– Т.102, вып.3.– С.462-469.

[39] Шумилов Б.М. О локальной аппроксимации билинейными сплайнами [Текст] / Б.М.Шумилов // Методы сплайн-функций(вычислительные системы). –1979. вып.81. – С.42-47.

[40] Шумилов Б.М. О сплайн-аппроксимации функций многих переменных. [Текст] / Б.М.Шумилов// М.:Мир.– 1975. –С.83 - 88.

[41] Шевалдин В.Т. Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов [Текст]/ В.Т.Шевалдин // Сиб. журн. вычисл. математики - 2005 . – Т. 8. – №1. – С.77- 88.

[42] Имамов А. Метод сплайнов для решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве [Текст] / А.Имамов // Новосибирск: СО АН СССР. –1968. Вып. 65 – С.89-95.

[43] Швалдин В.Т. Аппроксимация локальными сплайнами // Екатеринбург: УРО РАН.– 2014. – 196 с.

[44] Nord S. Approximation properties of spline [Text] / S.Nord// Fit.BIT. – 1976. – 132-144 pp.

[45] Schoenberg I.J. Spline interpolation and the higher derivatives[Text] / I.J.Schoenberg // Number theory and analysis. New York. – 1968. – 279-295 pp.

[46] Schumaker L.L. Approximation by spline function[Text] / L.L.Schumaker // под редакцией Grevielle T.N.E. Academic Press, New York. – 1969. – 65-85 pp.

[47] De Boor C. Practical Guide of Splines // 1st. ed. – 1978. – 348 pp.

[48] Berdysheva E.E., Mehmonzoda S.N., Shabozov M.Sh. Approximation of functions of several variables by continuous linear splines an rectilinear grids[Text] / E.E. Berdysheva, S.N.Mehmonzoda, M.Sh.Shabozov // Jean Journal on Approximation: – 2021. – №.1.– p.1-23.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[1-А] Заваршоев У.Н ОБ одновременном приближении функций двух переменных и их производных билинейными интерполяционными сплайнами [Текст] / Шабозов М.Ш., Заваршоев У.Н // Сибирский журнал чистой и прикладной математики, – 2018, – Т.18, вып. 2. – С. 60–72.

[2-А] Заваршоев У.Н. О погрешности интерполяции билинейными сплайнами для классов функций малой гладкости [Текст] / Заваршоев У.Н // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук – 2019. –Т.2 – №62. – С. 384-393 .

[3-А] Zevarshoev U.N. Simultaneous Approximation of Functions of Two Variables and Their Derivatives by Bilinear Interpolation Splines [Text] / M.Sh. Shabozov, U.N. Zevarshoev // Journal of Mathematical Sciences, New York, –2020. – Vol. 246. –№6. – 788-800 pp.

[4-А] Приближение непрерывных функций двух переменных интерполяционными сплайнами нечетного порядка в метрике $C(Q), Q := 0 \leq x, y \leq 1$ [Текст] / Заваршоев У.Н. // Ученые записки ХГУ им Б.Гафурова / Серия естественные и экономические науки. 20121. – №2. – С.40–48.

2. В других изданиях:

[5-А] Заваршоев У.Н. Точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / У.Н.Зеваршоев // “Современные проблемы математики и ее приложений” – Материалы международной научной конференции (г. Душанбе, 14-15 марта 2018). – С. 34-36.

[6-А] Зеваршоев У.Н. О точной оценке погрешности интерполяции билинейными сплайнами на некоторых классах функций [Текст] / У.Н.Зеваршоев // “Математический анализ и его приложения” – Материалы республиканской научной конференции (г. Душанбе, 10-11 июня 2019). – С. 79-86.

[7-А] Зеваршоев У.Н. О точной погрешности интерполяции билинейными интерполяционными сплайнами [Текст] / У.Н.Зеваршоев // “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” – Материалы международной научной конференции (г. Душанбе, 30-31 января 2020). – С. 128-130.