МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТТУ)
имени академика М.С. Осими

На правах рукописи
УДК 519.8:517

КОДИРОВ ОДИНА КАХХОРОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

(Повторная защита)

Специальность 05.13.18. – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических
наук, профессор Юнуси М.К.,
кандидат физико-математических
наук, доцент Гадозода М.

Душанбе - 2020

Вве ние

Актуальность и необходимость проведения исследований по теме диссертации. Метод математического моделирования был предложен и обоснован академиками А.Н. Тихоновым, А.А. Самарским, Н.Н. Яненко, Г.И. Марчуком, Н.Н. Моисеевым А.Ф. Сидоровым и другими. В работах А.А. Самарского и его соратников С.П. Курдюмова, В.А. Галактионова и А.П. Михайлова отражен яркий пример удачного сочетания аналитических и численных методов моделирования нелинейных процессов теплопроводности и нелинейных объемных энерговыделение. Теории нелинейных волн гидродинамического происхождения были рассмотрены Жозефом Буссинеском, Дидериком Кортевегом и Густавом де Фризом.

Несмотря на многочисленные работы ученых некоторые физические явления, например, волновые процессы, дисперсия и диссипация, диффузия и нелинейные волны гидродинамического происхождения остались недостаточно изученными. Поэтому данная диссертационная работа посвящена исследованиям некоторых волновых процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в экстремальных режимах. Изучение таких физических процессов приводит к необходимости решения дифференциальных уравнений. Это можно объяснить тем, что многие физические законы являются дифференциальными уравнениями относительно некоторых функций, которые характеризуют эти процессы. Физические законы представляют собой теоретическое обобщение многих экспериментов и описывают эволюцию искомых величин, как в пространстве, так и во времени. Кроме того, для исследования этих явлений создается математическая модель, комплексы программ, проводятся численные расчеты и графические иллюстрации.

Функционирование систем с экстремальным свойством было изучено в самых общих предположениях в работах М. Юнуси. Согласно этим работам общее уравнение с экстремальным свойством, характеризирующее состояние некоторого объекта (системы, процесса, субстанции и др.), имеет вид

$$Lu = \max_{\alpha \in A} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (L_j u)^s \right\}^{\frac{1}{s}}, \qquad (1)$$

где L и L_j - некоторые заданные операторы, характеризирующие изменения состояния объекта с неизвестной плотностью распределения $u = u(t, x)$,

$$A = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) : 0 < \alpha_j < 1, \ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{\frac{n}{n-s}} = 1 \right\}, \qquad n > s > 0, \qquad m \geq 2.$$

Параметры α_j могут характеризовать доли наилучшего изменения общего состояния объекта, образовывающиеся из суммы частных изменений. В диссертационной работе изучаются такие физические явления, как тепло - и массообменные, волновые процессы, дисперсия и диссипация, диффузия и нелинейные волны гидродинамического происхождения в экстремальных режимах, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго и третьего порядков. Для исследования этих явлений используется уравнение, предложенное профессором М. Юнуси:

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = \max_{\alpha \in A} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (L_j u)^s \right\}^{\frac{1}{s}}, \quad n = 2,3; \quad t \geq 0, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_m). \qquad (2)$$

Уравнение (2) будем рассматривать в различных случаях: когда коэффициенты α_j являются переменными функциями, и когда коэффициенты α_j нелинейными функциями, т.е. $\alpha_j = \alpha_j(u, x, t)$.

Общая характеристика работы

Связь работы с научными проектами. Данная работа выполнена на основе научного проекта «Моделирование трудовых ресурсов с учетом временных – возрастных и пространственных распределений», выполненное на кафедре ИТиА ДФ НИТУ «МИСиС».

Цель исследования заключается в разработке аналитических и разностных методов моделирования некоторых физических явлений в экстремальных режимах, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие задачи:

- построить и исследовать математические модели процессов теплопроводности и диффузии в экстремальных режимах;

- решить дифференциальные уравнения в экстремальных режимах для процессов теплопроводности и диффузии, и представить их в виде равномерно сходящихся рядов Фурье;

- представить решения дифференциальных уравнений в частных производных в явном виде;

- построить модели и алгоритмы, связанные с разностными аппроксимациями исходных дифференциальных уравнений в экстремальных режимах;

- создать комплексы программ для решения разностных аппроксимирующих задач;

- провести анализ предложенных моделей с помощью компьютерных экспериментов.

Объектом исследования являются нелинейные волны математической физики в экстремальных режимах.

Предметом исследований являются модели волновых процессов в пространстве и процессы гидродинамического происхождения.

Методы исследования. Основными методами исследования являются современные методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и функционального анализа, методы математического моделирования и компьютерных экспериментов на языке С++.

Отраслями исследования являются радиотехнические, энергетические, тепловые, популяционные задачи и процессы гидродинамического происхождения.

Этапы исследования составляют подбор волнового процесса, рассмотрение уравнения, описывающее этот процесс, выбор аналитического метода решения, представление решения в виде равномерно сходящихся рядов Фурье, численные расчеты и графические иллюстрации полученных результатов.

Основной информационной и экспериментальной базой являются волновые процессы, их решения, функционирование систем в экстремальных режимах вида (1) и язык программирования C++.

Достоверность диссертационных результатов подтверждается использованием аналитических методов решения, численных рачетов, графических экспериментов, а также согласованностью с данными независимых методов исследований.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

- разработан аналитический метод решения дифференциальных уравнений в экстремальных режимах;

- для процессов теплопроводности и диффузии в экстремальных режимах были проведены исследования и построены математические модели;

- для указанных выше процессов найдены решения соответствующих уравнений в экстремальных режимах, и они представлены в явном виде и в виде равномерно сходящихся рядах Фурье;

- были построены модели и алгоритмы, связанные с разностными аппроксимациями исходных дифференциальных уравнений в экстремальных режимах;

- создан комплекс программ для решения разностных аппроксимирующих задач;

- для модельных данных проведены компьютерные эксперименты.

Теоретическая ценность исследования. Разработанные методы можно использовать для решения аналитических задач в процессах, имеющих волновую природу. Полученные результаты диссертации представляют собой дальнейшее развитие исследования физических процессов при помощи дифференциальных уравнений и математического моделирования.

Практическая ценность исследования. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании эколого–экономических процессов и других процессов естествознания и обществоведения.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты, полученные автором:

- разработаны аналитические методы исследования волновых процессов;

- составлены математические модели процессов теплопроводности и диффузии в экстремальных режимах;

- решения уравнений, описывающие волновые процессы, представлены в виде равномерно сходящихся рядов Фурье;

- исследованы и обоснованы модели и алгоритмы, связанные с разностными аппроксимациями исходных уравнений в экстремальных режимах;

- проведены компьютерные эксперименты с модельными данными и их анализ.

Личный вклад соискателя заключается в сборе и анализе научной литературы по теме диссертационной работы, постановке задач исследования, непосредственном участии в решении поставленных задач, обработке, анализе и интерпретации полученных результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов. Основные результаты диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры высшей математики Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими, кафедры информатики Таджикского национального университета, кафедры математики Института предпринимательства и сервиса, ежегодных апрельских конференциях ТТУ имени М.С. Осими, на Международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и ее приложений», посвященной 20-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Сафарова Дж. С., Международной научной конференции «Современные проблемы математики и её преподавания», посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан и 60-летию учёных математиков А. Мухсинова, А.Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева (Худжанд, 2014), Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы современной науки», посвященной 70-летию Победы в ВОВ (Душанбе, 2015), Международной научной конференции «Современные проблемы математики и её приложений», посвященной 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан (Душанбе, 2016), XI-международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Юнуси Махмадюсуф Камарзода (Душанбе, 2018), Международной научно-практической конференции «Электроэнергетика Таджикистана: актуальные проблемы и пути их решения», посвященной 80 -летию профессора кафедры электроэнергетики ДФ НИУ МЭИ Иноятова М.Б., 70 – летию доцента кафедры электроэнергетики Шамсиева М.В. и приуроченный ко «Дню энергетики» (Душанбе, 2019).

Публикация результатов диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 44 научных статьях, 1 из которых опубликован в журнале, входящий в научную базу Scopus, 6 статьей в рецензируемых журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при

Президенте Республики Таджикистан и ВАК Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, и 2 в других журналах и изданиях.

Структура и объем диссертационной работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации составляет 161 страниц компьютерного набора, включающих в себя список использованной литературы из 112 наименования и 2 приложений.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы, приведён обзор работ по теме диссертации и кратко изложено содержание глав диссертации.

Первая глава посвящена моделированию волновых процессов в экстремальных режимах. Здесь мы рассматриваем процессы малых продольных и поперечных колебаний струны, масса - и теплообмена, диффузии, тепловые волны с особенностями и распространение звука в одномерной среде. Для рассмотрения таких процессов в основном мы используем метод Фурье или метод разделения переменных, являющиеся одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Эта глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе рассматриваются процессы малых поперечных и продольных колебаний струны, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}+qu\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+q_j u\right)^n, \qquad (1.1)$$

где $m,n\,(m,\,n>1)$- заданные натуральные числа, $t\ge t_0>0$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in R^m;\ p>0,q>0,p_j>0,q_j>0(j=\overline{1,m})$ - заданные действительные числа, $u(t,x)$- искомая функция. Здесь мы составляем модель таких физических процессов, которые характеризуются начальным состоянием явления и процессом его протекания. После этого предлагаем алгоритм решения этой задачи, который в дальнейшем служит в качестве основного метода решения дифференциальных уравнений в частных производных n-го порядка.

Для этого уравнения решения были представлены в следующих видах:

В экспоненциальном классе:

а) При $p^2+4(C-q)>0$, $p_j^2+4(C_j-q_j)>0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\left(\frac{2u_{0,2}+\left(p+\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}\right)\cdot u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}\times\right.$$
$$\times\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}{2}(t-t_0)\right)-$$
$$-\frac{2u_{0,2}+\left(p-\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}\right)\cdot u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}\times$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(\frac{-p_j+\sqrt{p_j^2+4\cdot(C_j-q_j)}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(\frac{-p_j-\sqrt{p_j^2+4\cdot(C_j-q_j)}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right). \tag{1.2}$$

б) При $p^2+4(C-q)=0$, $p_j^2+4(C_j-q_j)=0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\left(u_{0,1}+\left(u_{0,2}+\frac{p}{2}u_{0,1}\right)\cdot(t-t_0)\right)\cdot\exp\left(-\frac{p}{2}(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+x_j-x_{0,j}\right)\cdot\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right). \tag{1.3}$$

в) При $p^2+4(C-q)<0$, $p_j^2+4(C_j-q_j)<0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\exp\left(-\frac{p}{2}(t-t_0)\right)\left(u_{0,1}\cos\frac{\sqrt{p^2+4(C-q)}}{2}(t-t_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{2u_{0,2}+pu_{0,1}}{\sqrt{p^2+4(C-q)}}\sin\frac{\sqrt{p^2+4(C-q)}}{2}(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=2}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4(C_j-q_j)}}{2}(x_j-x_{0,j})+\right. \qquad (1.4)$$
$$\left.+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4(C_j-q_j)}}{2}(x_j-x_{0,j})\right).$$

Также в этом параграфе рассмотрена математическая модель для выше изложенного процесса, описывающаяся уравнением

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (1.5)$$

и решения представлены и в простом классе, и в экспоненциальном.

Во втором параграфе рассматривается уравнение колебания гибкой струны, которое относится к одномерному волновому уравнению, и составлен алгоритм решения этого уравнения. Этот процесс описывается дифференциальным уравнением вида

$$\left(a^{-1}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{-1}(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)^n, \qquad (1.6)$$

где $m, n\ (m, n\geq 2)$- натуральные числа, $k_j>0\ (j=\overline{1,m})$, $u(t,x)$ - искомая функция, $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$, $t\geq t_0>0$, $a(t)$ и $a_j(x_j)\ (j=\overline{1,m})$ - непрерывные функции своих аргументов.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $a(t)$ и $a_j(x_j)$ $(j=\overline{1,m})$ - непрерывные функции своих аргументов и C и C_j $(j=\overline{1,m})$ - являются решением уравнения согласования

$$\sum_{j=1}^{m} C_j^n = C^n. \qquad (1.7)$$

Тогда решение уравнения (1.6) в соответствии с вспомогательной переопределённой системой уравнений

$$\begin{cases} a^{-1}(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C, \\ a_j^{-1}(x_j)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = C_j, \ (j=\overline{1,m}), \end{cases} \qquad (1.8)$$

представляется в виде

$$u = u_{01} + u_{02}\cdot(t-t_0) + C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} a(z)\,dz\,d\tau + \sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\int_{x_{0j}}^{x_j}\int_{x_{0j}}^{\tau} a_j(z)\,dz\,d\tau. \qquad (1.9)$$

причём это решение с начальными условиями

$$u(t_0; x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0m}) = u_{01}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t_0; x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0m}) = u_{02}. \qquad (1.10)$$

является единственным.

В третьем параграфе представляется модель волн с особенностями. Здесь рассматриваются уравнения, которые описывают процессы распространения звука и электромагнитные волны в одномерной непроводящей среде. Также эти уравнения описывают плотность газа, его давление и потенциал скоростей, составляющие вектора напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

В частности, рассмотрим процесс тепловых волн с особенностями, который описывается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$\left(t^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j x_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \tag{1.11}$$

где $m,n\ (m,\ n>1)$ - заданные натуральные числа, $t\geq t_0>0,\ x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$, $p>0$ и $p_j>0\ (j=\overline{1,m})$ - заданные действительные числа, $u(t,x)$ - искомая функция.

Для этого уравнения были найдены решения и в простом классе, и в экспоненциальном.

В простом классе:

$$u=\left(\frac{(1-p)^2u_{0,1}-(1-p)t_0u_{0,2}-C}{(1-p)^2 2^m}+\frac{(1-p)t_0u_{0,2}+C}{(1-p)^2 2^m}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-p}\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{1-p_j}\right)+\frac{C}{p-1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-1}\ln\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right). \tag{1.12}$$

В экспоненциальном классе:

а) При $(p-1)^2+4C>0,\ (p_j-1)^2+4C_j>0,\ (j=\overline{1,m})$:

$$u=\left(\frac{\left(p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right)u_{01}+2t_0u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p+\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)}+\frac{\left(p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right)u_{01}-2t_0u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p-\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j+\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}+\right. \tag{1.13}$$
$$\left.+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j-\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}\right).$$

б) При $(p-1)^2+4C=0,\ (p_j-1)^2+4C_j=0,\ (j=\overline{1,m})$:

$$u=\left\{u_{0,1}+\frac{(p-1)u_{01}+2t_0u_{02}}{2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right\}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right\}\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}\cdot \quad (1.14)$$

в) При $(p-1)^2+4C<0$, $(p_j-1)^2+4C_j<0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\left[u_{01}\cos\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+\frac{(p-1)u_{01}+2u_{02}t_0}{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right]\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)+\right. \quad (1.15)$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)\right\}.$$

Четвёртый параграф этой главы посвящён представлению модели волновых процессов с вырождениями.

В частности, рассматриваем уравнения колебания струны вида

$$\left(\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial t}+u\right)\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \quad (1.16)$$

где m,n $(m,\ n>1)$ - заданные натуральные числа, $t\ge t_0>0,$ $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$ и $u(t,x)$ - искомая функция.

Для этого дифференциального уравнения найдены решения в простом классе:

а) При $|4C-3|>0$ и $p_j^2+4C_j>0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\left(\frac{\left(\sqrt{4C-3}+1\right)u_{01}+2u_{02}}{\sqrt{4C-3}\cdot 2^{m+1}}\cdot\exp\left(\frac{-1+\sqrt{4C-3}}{2}\cdot(t-t_0)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\sqrt{4C-3}-1\right)u_{01}-2u_{02}}{\sqrt{4C-3}\cdot 2^{m+1}}\cdot\exp\left(\frac{-1-\sqrt{4C-3}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\right)\times \quad (1.17)$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\cdot(x_j-x_{0,j}).$$

б) При $|4C-3|=0$ и $p_j^2+4C_j=0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(u_{01}+\frac{u_{01}+2u_{02}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\Big(1+\exp\big(-p_j\cdot(x_j-x_{0,j})\big)\Big)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\cdot(x_j-x_{0,j}). \qquad (1.18)$$

в) При $|4C-3|<0$ и $p_j^2+4C_j<0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(u_{01}\cos\frac{\sqrt{|4\cdot C-3|}}{2}\cdot(t-t_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{u_{01}+2u_{02}}{\sqrt{|4\cdot C-3|}}\cdot\sin\frac{\sqrt{|4\cdot C-3|}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times \qquad (1.19)$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\Big(1+\exp\big(-p_j\cdot(x_j-x_{0,j})\big)\Big)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\cdot(x_j-x_{0,j}).$$

Также в этом параграфе исследован волновой процесс, описываемый уравнением

$$\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n. \qquad (1.20)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$- являются решением уравнения согласования (1.7). Тогда решения уравнения (1.16), удовлетворяющие начальным условиям (1.10), представляются в видах (1.17) - (1.19).

Вторая глава посвящена волновым процессам, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных более второго порядка. В параграфах 1-3 исследованы теории нелинейных волн, в основном гидродинамического происхождения. В этой области играют важную роль нелинейные уравнения в частных производных третьего порядка. Такие процессы впервые были рассмотрены Жозефом Буссинеском в 1877 году, но подробный анализ был проведен Дидериком Кортевегом и Густавом де Фризом в 1895 году. Для таких уравнений найдено большое количество точных решений, представляющих собой стационарные нелинейные волны. В том числе эти уравнения имеют решения солитонного типа. Особое значение солитонам придает тот факт, что любое начальное возмущение, экспоненциально спадающее на бесконечности, с течением времени эволюцирует в конечный набор солитонов, разнесённые в пространстве.

В параграфах 4-6 рассмотрены процессы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных четвертого, пятого и k-того порядков.

В первом параграфе этой главы рассматриваются нелинейные волны гидродинамического происхождения. Исследуем волновой процесс, описываемый дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+q\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (2.1)$$

где $m,n\ (m,n\geq 2)-$заданные натуральные числа, $t>0$, $(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$,

$p,q,p_j,q_j\,(j=\overline{1,m})$ - действительные числа, $u(t,x)$ - искомая функция.

Для нахождения решений этих уравнений задаём начальные условия вида

$$\frac{\partial^{i-1}u}{\partial t^{i-1}}(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=u_{0i}\,,\quad (i=1,2,3), \qquad (2.2)$$

и составим соответствующие переопределённые системы уравнений и находим их решения.

В простом классе:

а) При $p>0,\mathrm{p}_j>0,q>0,\mathrm{q}_j>0\ \ (j=\overline{1,m})$ и $p^2-4q>0,\mathrm{p}_\mathrm{j}^2-4q_j>0$:

$$u(t,x_1,x_2,...x_m)=$$

$$=\left\{\frac{\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2u_{01}-q\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^4u_{02}}{2^m\cdot\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}-\right.$$

$$-\frac{2\left(\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2-4q\right)u_{03}-4C\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}{2^m\cdot\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}+$$

$$+\frac{q\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)u_{02}+2qu_{03}-C\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)}{2^m\cdot q\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)(t-t_0)\right)-$$

$$\left.-\frac{q\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)u_{02}+8q^2u_{03}+C\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{2^m\cdot q\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)(t-t_0)\right)\right\}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j-\sqrt{p_j^2-4q_j}\right)(x_j-x_{0j}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j+\sqrt{p_j^2-4q_j}\right)(x_j-x_{0j})\right)\right\}+\frac{C}{q}(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}). \qquad (2.3)$$

б) При $p>0, \mathrm{p}_j>0, q>0, \mathrm{q}_j>0 \quad (j=\overline{1,m})$ и $p^2-4q=0, \mathrm{p}_\mathrm{j}^2-4q_j=0$:

$$u(t,x_1,x_2,...x_m)=\left\{\frac{p^2u_{01}-2pu_{02}+8u_{03}}{2^m\cdot p^2}+\right.$$

$$+\frac{2pu_{02}+8u_{03}}{2^m\cdot p^2}\exp\left(-\frac{1}{2}p(t-t_0)\right)+\frac{2pu_{02}+4u_{03}}{2^m\cdot p^2}(t-t_0)\times$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{1}{2}p(t-t_0)\right)\right\}\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{1}{2}p_j(x_j-x_{0j})\right)+\right. \qquad (2.4)$$

$$\left.+(x_j-x_{0j})\exp\left(-\frac{1}{2}p_j(x_j-x_{0j})\right)\right\}+\frac{C}{q}(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}).$$

в) При $p>0, \mathrm{p}_j>0, q>0, \mathrm{q}_j>0 \quad (j=\overline{1,m})$ и $p^2-4q<0, \mathrm{p}_\mathrm{j}^2-4q_j<0$:

$$u(t,x_1,x_2,...x_m)=\left\{\frac{q^2u_{01}+pqu_{02}+qu_{03}-Cp}{2^m\cdot q^2}+\exp\left(-\frac{p}{2}(t-t_0)\right)\times\right.$$

$$\left[\frac{-pqu_{02}-qu_{03}+Cp}{2^m\cdot q^2}\cos\frac{\sqrt{|p^2-4q|}}{2}(t-t_0)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{q(2q-p^2)u_{02}-pqu_{03}-(2q-p^2)C}{2^m\cdot q^2}\sin\frac{\sqrt{|p^2-4q|}}{2}(t-t_0)\right]\right\}\times$$

$$\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{p_j}{2}(x_j-x_{0j})\right)\left[\cos\frac{\sqrt{|p_j^2-4q_j|}}{2}(x_j-x_{0j})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\sqrt{|p_j^2-4q_j|}}{2}(x_j-x_{0j})\right]\right\}+\frac{C}{q}(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}). \qquad (2.5)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$ - являются решением уравнения согласования (1.7). Тогда решения уравнения (2.1), удовлетворяющие начальным условиям (2.2), соответствующих переопределённых систем, представляются в видах (2.3), (2.4) и (2.5).

В этом параграфе также исследованы волновые процессы, описываемые уравнениями

$$\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}+pu\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3u}{\partial x_j^3}+p_ju\right)^n, \qquad (2.6)$$

$$\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}-q\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3u}{\partial x_j^{3}}-q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (2.7)$$

$$\left(\frac{\partial^3u}{\partial t^3}-q\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3u}{\partial x_j^3}-q_j\frac{\partial^2u}{\partial x_j^2}\right)^n. \qquad (2.8)$$

Во втором параграфе этой главы рассматривается дисперсия и диссипация энергии распространения волн и распространение гравитационных волн в мелкой воде. Такие процессы описываются дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка с переменными коэффициентами вида

$$\left(t^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-pt^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^3\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-p_j x_j^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)^n, \qquad (2.9)$$

где $m,n\,(m,\,n>1)$- заданные натуральные числа, $t\ge t_0>0$ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m$; $p>0$ и $p_j>0$ $(j=\overline{1,m})$- заданные действительные числа, $u(t,x)$- искомая функция.

С учётом начальных условий (2.2) составим соответствующую переопределённую систему и находим решения этого уравнения, которые определяют соответственно класс простых решений уравнения:

$$\begin{gathered}u=\left(u_{0,1}-u_{0,2}t_0+\frac{u_{0,3}t_0^2}{p+2}+\frac{C}{p+1}+\left(u_{0,2}t_0-\frac{u_{0,3}t_0^2}{p+1}-\frac{C}{p+1}\right)\left|\frac{t}{t_0}\right|+\right.\\+\frac{u_{0,3}t_0^2(p+2)+C}{(p+1)(p+2)}\exp\left((p+2)\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\Bigg)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|+\right.\\\left.+\exp\left((p_j+2)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j+2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.\end{gathered}\qquad (2.10)$$

В этом параграфе также исследован процесс, описываемый уравнением

$$\left(t^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-pt\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^3\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-p_j x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n. \qquad (2.11)$$

В третьем параграфе этой главы рассматривается процесс распространения гравитационных волн с вырождениями, которое описывается дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка вида

$$\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (2.12)$$

где $m, n\ (m,\ n>1)$ - заданные натуральные числа, $t \ge t_0 > 0$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m$, $u(t,x)$ - искомая функция.

С учётом начальных условий (2.2) и соответствующей переопределённой системы находим решения этого уравнения, которое определяет, соответственно, класс простых решений уравнения:

а) При $p_j>0, q_j>0\ \ (j=\overline{1,m})$ и $p_j^2-4q_j>0$:

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01}+\sqrt[3]{C}u_{02}+u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right)+\exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times \\
& \times\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01}-\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)+\right. \\
& \left.+\frac{\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times \\
& \times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j-\sqrt{p_j^2-4q_j}\right)\left(x_j-x_{0j}\right)\right)+\right. \\
& \left.+\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j+\sqrt{p_j^2-4q_j}\right)\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}).
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

б) При $p_j>0, q_j>0\ \ (j=\overline{1,m})$ и $p_j^2-4q_j=0$:

$$
\begin{aligned}
u = {} & \frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01}+\sqrt[3]{C}u_{02}+u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cdot\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right)+\exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times \\
& \times\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01}-\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)+\right. \\
& \left.+\frac{\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{1}{2}p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)+\right. \\
& \left.+\left(x_j-x_{0j}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

в) При $p_j>0, q_j>0\ \ (j=\overline{1,m})$ и $p_j^2-4q_j<0$:

$$u=\frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01}+\sqrt[3]{C}u_{02}+u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right)+$$

$$+\exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01}-\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{p_j}{2}(x_j-x_{0j})\right)\times\right. \tag{2.15}$$

$$\left.\times\left[\cos\frac{\sqrt{\left|p_j^2-4q_j\right|}}{2}(x_j-x_{0j})+\sin\frac{\sqrt{\left|p_j^2-4q_j\right|}}{2}(x_j-x_{0j})\right]\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}).$$

В этом параграфе также исследованы волновые процессы, описываемые уравнениями

$$\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \tag{2.16}$$

$$\left(\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+u\right)\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-q_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)^n. \tag{2.17}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$- являются решением уравнения согласования (1.7). Тогда решение уравнения (2.12), удовлетворяющие начальным условиям (2.2), соответственно, переопределённой системе, представляется в видах (2.13), (2.14) и (2.15).

Четвертый параграф посвящен моделям волновых процессов описываемых уравнениями в частных производных четвертого порядка видов

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \tag{2.18}$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+qu\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_j u\right)^n. \tag{2.19}$$

Для этих уравнений решения получены соответственно в простом и экспоненциальном классах, и они представлены в виде равномерно сходящихся рядов Фурье..

В пятом параграфе рассмотрены процессы описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных пятого порядка вида

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\,\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}\right), \qquad (2.20)$$

Шестой параграф посвящен исследованию нелинейным дифференциальным моделям произвольного порядка со специальными коэффициентами вида

$$\left(a^{-1}(t)\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{-1}(x_j)\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k}\right)^n \qquad (2.21)$$

Для этого уравнения получено решение в простом классе:

$$u=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{(i-1)!}(t-t_0)^{i-1`}+C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_k}\ldots\int_{t_0}^{\tau_3}\int_{t_0}^{\tau_2}a(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}C_j\int_{x_{0j}}^{x_j}\int_{x_{0j}}^{z_k}\cdots\int_{x_{0j}}^{z_3}\int_{x_{0j}}^{z_2}a_{j(z_i)dz_1dz_2\cdots dz_k} \qquad (2.22)$$

Для подтверждения полученного результата приведены примеры.

ГЛАВА 1
МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕЖИМАХ

В данной главе рассматриваются волновые процессы в экстремальных режимах. В частности, будем рассматривать такие физические процессы, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. Решения рассматриваемых уравнений будем представлять в виде равномерно сходящего ряда Фурье. Кроме того, эти решения представляются в возможных классах решений, то есть, в простых и экспоненциальных классах, и в явном виде.

1.1. Модель малых поперечных и продольных колебаний струны

В этом параграфе рассматриваем процессы малых поперечных и продольных колебаний струны, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. В настоящем пункте данного параграфа рассматриваем волновой процесс, описываемый уравнением [43-А]

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \tag{1.1.1}$$

где $m, n\ (m,\ n>1)$ - натуральные числа, $t\ge t_0>0$, $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$, $p>0$ и $p_j>0\ (j=\overline{1,m})$ - действительные числа, $u(t,x)$ - искомая функция.

Изучение таких физических процессов приводит к модельному уравнению с экстремальными свойствами

$$Lu=\max_{\alpha\in A}\left\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(L_j u)^s\right\}^{\frac{1}{s}}, \tag{1.1.2}$$

где $A=\left\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m):0<\alpha_j<1,\ \sum_{j=1}^{m}\alpha_j^{\frac{n}{n-s}}=1\right\},\qquad n>s>0$ - натуральные числа.

В работах профессора М. Юнуси доказано, что уравнение (1.1.2) эквивалентно уравнению

$$(Lu)^n = \sum_{j=1}^{m} (L_j u)^n. \tag{1.1.3}$$

Следствием уравнения (1.1.3) при дифференциальных операторах

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + p\frac{\partial}{\partial t};\ L_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + p_j\frac{\partial}{\partial x_j};\ (j = \overline{1,m})$$

является уравнение (1.1.1).

Для данного уравнения (1.1.1) сначала задаём начальные условия вида

$$u = (t_0; x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0m}) = u_{01}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t_0; x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0m}) = u_{02}. \tag{1.1.4}$$

Чтобы найти решения уравнения (1.1.1) в простом классе используем вспомогательную переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\dfrac{\partial u}{\partial t} = C, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + p_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = C_j,\ (j = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{1.1.5}$$

В этой системе C и $C_j\ (j = \overline{1,m})$ действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования

$$\sum_{j=1}^{m} C_j^n = C^n. \tag{1.1.6}$$

Из второго уравнения вспомогательной системы (1.1.5), когда $j = m$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + p_m\frac{\partial u}{\partial x_m} = C_m. \tag{1.1.7}$$

Для однородного уравнения (1.1.7) найдем общее решение:

$$u_{од.} = C_1 + C_2 e^{-p_m(x_m - x_{0,m})}.$$

Далее находим частное решения уравнения (1.1.7):

$$u_{ч.} = \frac{C_m}{p_m}(x_m - x_{0,m}).$$

Следовательно, общее решение уравнения (1.1.7) можно представить в следующем виде:

$$u_{об.} = C_1 + C_2 e^{-p_m(x_m - x_{0,m})} + \frac{C_m}{p_m}(x_m - x_{0,m}). \tag{1.1.8}$$

Затем находим решение второго уравнения системы (1.1.5), когда $j = m-1$. Поскольку полученное уравнение является линейным, то сумма частных решений также является частным решением. Тогда, частные решения полученного однородного уравнения будем искать в виде

$$u = z_0\left(1 + e^{-p_m(x_m - x_{0,m})}\right), \text{ где } z_0 = z_0(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1}).$$

Полученное выражение дважды дифференцируем по x_{m-1}:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} = \frac{\partial z_0}{\partial x_{m-1}}\left(1 + \exp\left(-p_m(x_m - x_{0,m})\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} = \frac{\partial^2 z_0}{\partial x_{m-1}^2}\left(1 + \exp\left(-p_m(x_m - x_{0,m})\right)\right),$$

и подставляем частные производные в уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} + p_{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} = 0$:

$$\left(1 + \exp\left(-p_m(x_m - x_{0,m})\right)\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x_{m-1}^2} + p_{m-1}\frac{\partial z_0}{\partial x_{m-1}}\right) = 0.$$

$$k^2 + p_{m-1}k = 0 \Rightarrow k_1 = 0\,;\, k_2 = -p_{m-1}$$

$$z_{од.m-1} = C_1 + C_2\exp\left(-p_{m-1}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right).$$

$$u_{од.m-1} = \left(C_1 + C_2\exp\left(-p_{m-1}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)\right)\cdot\left(1 + \exp\left(-p_m(x_m - x_{0,m})\right)\right).$$

$$u_{ч.m-1} = \frac{C_{m-1}}{p_{m-1}}(x_{m-1} - x_{0,m-1}).$$

Общее решение m-го и $(m-1)$-го уравнения системы можно представить в виде

$$u=\left(C_1+C_2\exp\left(-p_{m-1}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\right)\cdot\left(1+\exp\left(-p_m(x_m-x_{0,m})\right)\right)+$$
$$+\frac{C_m}{p_m}(x_m-x_{0,m})+\frac{C_{m-1}}{p_{m-1}}(x_{m-1}-x_{0,m-1}).$$

Продолжаем этот процесс и получаем общее решение второго и m-го уравнения системы в виде

$$u=\left(C_1+C_2\exp\left(-p_1(x_1-x_{0,1})\right)\right)\prod_{j=2}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}(x_j-x_{0,j}).$$

Теперь переходим к первому уравнению вспомогательной системы (1.1.5) и находим ее общее решение, то есть решаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}=C\,.$$

Для этого, сначала находим частные решения соответствующего однородного уравнения. Частное решение будем искать в виде

$$u=v(t)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right).$$

Это выражение дважды продифференцируем по t и подставим в первое однородное уравнение вспомогательной системы:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right).$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+p\frac{\partial v}{\partial t}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)=0.$$

Составив характеристическое уравнение, находим решение полученного однородного уравнения:

$$k^2+pk=0\Rightarrow k_1=0\,;\ k_2=-p\Rightarrow\ v_{од.}=C_1+C_2\exp\left(-p(t-t_0)\right)=v(t).$$

Следовательно, решение однородного уравнения можно записать в следующем виде:

$$u=\left(A_0+B_0\exp\left(-p(t-t_0)\right)\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right).$$

Аналогично, как и раньше, частное решение этого уравнения записывается в виде $u_{ч.}=\dfrac{C}{p}(t-t_0)$.

Теперь напишем общее решение системы (1.1.5), которое является общим решением уравнения (1.1.1) в простом классе:

$$u=\left(A_0+B_0\exp\left(-p(t-t_0)\right)\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+$$

$$+\frac{C}{p}(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}(x_j-x_{0,j}), \tag{1.1.9}$$

где A_0 и B_0 - произвольные постоянные.

Потребуем выполнение начальных условий (1.1.4) в виде

$$u(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=(A_0+B_0)\cdot 2^m=u_{01},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(-B_0 p\exp\left(-p(t-t_0)\right)\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\frac{C}{p}=u_{02},$$

$$-B_0p2^m+\frac{C}{p}=u_{0,2}\Rightarrow B_0=\frac{C-pu_{0,2}}{p^2 2^m}.$$

$$A_0=\frac{u_{01}}{2^m}-\frac{C-pu_{0,2}}{p^2 2^m}=\frac{p^2u_{0,1}+pu_{0,2}-C}{p^2 2^m}.$$

Подставляя значения A_0 и B_0 в (1.1.9), получаем:

$$u=\left(\frac{p^2u_{0,1}+pu_{0,2}-C}{p^2 2^m}+\frac{C-pu_{0,2}}{p^2 2^m}\exp\left(-p(t-t_0)\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\frac{C}{p}(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}(x_j-x_{0,j}). \tag{1.1.10}$$

Теперь решения данного уравнения рассмотрим в экспоненциальном классе. Для этого составим вспомогательную переопределённую систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\dfrac{\partial u}{\partial t} = Cu, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + p_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = C_j u, \ \ (j = \overline{1,m}). \end{cases} \qquad (1.1.11)$$

а) Пусть $p^2 + 4C > 0$, $p_j^2 + 4C_j > 0$, $(j = \overline{1,m})$. Из второго уравнения вспомогательной системы, когда $j = m$, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + p_m\frac{\partial u}{\partial x_m} = C_m u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + p_m\frac{\partial u}{\partial x_m} - C_m u = 0. \qquad (1.1.12)$$

Теперь находим корни соответствующего характеристического уравнения (1.1.12) в виде

$$k^2 + p_m k - C_m = 0 \Rightarrow D = p_m^2 + 4C_m > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-p_m \pm \sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2},$$

и получаем общее решение данного уравнения:

$$u = C_1 \exp\left(\frac{-p_m + \sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right) + \\ + C_2 \exp\left(\frac{-p_m - \sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right). \qquad (1.1.13)$$

Затем находим решение второго уравнения системы (1.1.11), когда $j = m-1$. За счет того, что полученное уравнение является линейным, сумма частных решений также является частным решением. Тогда, частное решение полученного однородного уравнения будем искать в виде

$$u = z_{од.}\left(\exp\left(\frac{-p_m+\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+\exp\left(\frac{-p_m-\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\right)$$

где $z_{од.} = z_{од.}(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1})$.

Полученного выражения дважды продифференцируем по x_{m-1}:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} = \frac{\partial z_{од.}}{\partial x_{m-1}}\left(\exp\left(\frac{-p_m+\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+\exp\left(\frac{-p_m-\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} = \frac{\partial^2 z_{од.}}{\partial x_{m-1}^2}\left(\exp\left(\frac{-p_m+\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+\exp\left(\frac{-p_m-\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\right).$$

Полученные выражения подставим в уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} + p_{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} - C_{m-1}u = 0$:

$$\left(\exp\left(\frac{-p_m+\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+\exp\left(\frac{-p_m-\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 z_{од.}}{\partial x_{m-1}^2} + p_{m-1}\frac{\partial z_{од.}}{\partial x_{m-1}} - C_{m-1}z_{од.}\right) = 0$$

$$k^2 + p_{m-1}k - C_{m-1} = 0 \Rightarrow D = p_{m-1}^2 + 4C_{m-1} > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-p_{m-1} \pm \sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}$$

$$v_{од.m-1} = C_1\exp\left(\frac{-p_{m-1}+\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)+$$

$$+C_2\exp\left(\frac{-p_{m-1}-\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)$$

$$u_{од.m-1} = \left(C_1\exp\left(\frac{-p_{m-1}+\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)+\right.$$

$$\left.+C_2\exp\left(\frac{-p_{m-1}-\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\right)\times$$

$$\times\left(\exp\left(\frac{-p_m+\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+\exp\left(\frac{-p_m-\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\right).$$

Продолжая этот процесс, общее решение второго и m-го уравнений представляем в виде

$$u_{од.m-1} = \left(C_1 \exp\left(\frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4C_1}}{2} (x_1 - x_{0,1}) \right) + C_2 \exp\left(\frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 + 4C_1}}{2} (x_1 - x_{0,1}) \right) \right) \times$$

$$\times \prod_{j=2}^{m} \left(\exp\left(\frac{-p_j + \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) + \exp\left(\frac{-p_j - \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) \right).$$

Теперь находим общее решение первого уравнения вспомогательной системы, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\frac{\partial u}{\partial t} = Cu \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\frac{\partial u}{\partial t} - Cu = 0.$$

Сначала находим частные решения однородного уравнения. Здесь, как и раньше, частное решение будем искать в следующем виде:

$$u = v(t) \prod_{j=1}^{m} \left(\exp\left(\frac{-p_j + \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) + \exp\left(\frac{-p_j - \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) \right).$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} \prod_{j=1}^{m} \left(\exp\left(\frac{-p_j + \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) + \exp\left(\frac{-p_j - \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) \right).$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 v}{dt^2} \prod_{j=1}^{m} \left(\exp\left(\frac{-p_j + \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) + \exp\left(\frac{-p_j - \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) \right).$$

Эти выражения подставляем в первом уравнение вспомогательной системы (1.1.11):

$$\left(\frac{d^2 v}{dt^2} + p\frac{dv}{dt} - Cv \right) \prod_{j=1}^{m} \left(\exp\left(\frac{-p_j + \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) + \exp\left(\frac{-p_j - \sqrt{p_j^2 + 4C_j}}{2} (x_j - x_{0,j}) \right) \right) = 0.$$

$$k^2 + pk - C = 0 \Rightarrow D = p^2 + 4C > 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4C}}{2}.$$

$$v = C_1 \exp\left(\frac{-p + \sqrt{p^2 + 4C}}{2} (t - t_0) \right) + C_2 \exp\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 + 4C}}{2} (t - t_0) \right).$$

Полученное выражение для рассмотренного однородного уравнения является решением. Используя полученные результаты, запишем общее решение вспомогательной системы уравнений (1.1.11), которое так же является общим решением дифференциального уравнения (1.1.1) в экспоненциальном классе:

$$u=\left(D_1\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)+D_2\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(\frac{-p_j+\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{-p_j-\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\right), \qquad (1.1.14)$$

где D_1 и D_2 - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий(1.1.4) в виде

$$u(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=(D_1+D_2)\cdot 2^m=u_{01},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=\left\{D_1\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)(+)\right.$$
$$\left.+D_2\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\right\}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(\frac{-p_j+\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{-p_j-\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\right)=u_{02}.$$

$$\left\{D_1\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)+\right.$$
$$\left.+D_2\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\right\}\cdot 2^m=u_{0,2}$$

$$\begin{cases}(D_1+D_2)\cdot 2^m=u_{01}\\ \left(D_1\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)+D_2\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\right)\cdot 2^m=u_{0,2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}D_1=\dfrac{2u_{0,2}+\left(p+\sqrt{p^2+4C}\right)\cdot u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4C}},\\ D_2=-\dfrac{2u_{0,2}+\left(p-\sqrt{p^2+4C}\right)\cdot u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4C}}.\end{cases}$$

Найденные значения D_1 и D_2 подставляем в (1.1.14) и получаем:

$$u=\left(\frac{2u_{0,2}+\left(p+\sqrt{p^2+4C}\right)u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4C}}\cdot\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{2u_{0,2}+\left(p-\sqrt{p^2+4C}\right)u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4C}}\cdot\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\right)\times \tag{1.1.15}$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(\frac{-p_j+\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{-p_j-\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\right).$$

б) Пусть $p^2+4C=0$, $p_j^2+4C_j=0$, $(j=\overline{1,m})$. Из второго уравнения вспомогательной системы при $j=m$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}+p_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=C_m u\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}+p_m\frac{\partial u}{\partial x_m}-C_m u=0. \tag{1.1.16}$$

Для однородного уравнения (1.1.16) находим корни соответствующего характеристического уравнения в виде

$$k_{1,2}=\frac{-p_m}{2}$$

и напишем общее решение этого уравнения:

$$u=C_1\exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+C_2(x_m-x_{0,m})\exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m-x_{0,m})\right) \tag{1.1.17}$$

Затем находим решение второго уравнения системы (1.1.11), когда $j=m-1$. За счет того, что полученное уравнение является линейным, сумма частных решений также является частным решением. Тогда, частное решение полученного однородного уравнения будем искать в виде

$$u=z\cdot\left(\exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m-x_{0,m})\right)+(x_m-x_{0,m})\cdot\exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\right),$$

$$u = z \cdot \left(1 + x_m - x_{0,m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right),$$

где $z = z(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1})$. Функцию u дважды продифференцируем по x_{m-1}:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} = \frac{\partial z}{\partial x_{m-1}} \cdot \left(1 + x_m - x_{0,m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_{m-1}^2} \cdot \left(1 + x_m - x_{0,m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right)$$

Полученную функцию u и ее частные производные подставляем в уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} + p_{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} - C_{m-1}u = 0$:

$$\left(1 + x_m - x_{0,m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_{m-1}^2} + p_{m-1}\frac{\partial z}{\partial x_{m-1}} - C_{m-1}z\right) = 0$$

$$k^2 + p_{m-1}k - C_{m-1} = 0 \Rightarrow D = p_{m-1}^2 + 4C_{m-1} = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -\frac{p_{m-1}}{2}$$

$$z = C_1 \exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) + C_2(x_{m-1} - x_{0,m-1}) \cdot \exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)$$

$$u = \left\{C_1 \exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) + \right.$$

$$\left. + C_2(x_{m-1} - x_{0,m-1}) \cdot \exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)\right\} \times$$

$$\times \left(1 + x_m - x_{0,m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right).$$

$$u = \left(C_1 + C_2(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) \times$$

$$\times \left(1 + x_m - x_{0,m}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right).$$

Продолжая этот процесс, для первого уравнения системы при j=2 и j=m получаем общее решение:

$$u = \left(C_1 + C_2(x_1 - x_{0,1})\right)\cdot \exp\left(-\frac{p_1}{2}\cdot(x_1 - x_{0,1})\right)\times$$

$$\times\prod_{j=2}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j}\right)\cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j - x_{0,j})\right).$$

Теперь переходим к первому уравнению вспомогательной системы (1.1.11) и находим ее общее решение, то есть решаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\frac{\partial u}{\partial t} = Cu \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p\frac{\partial u}{\partial t} - Cu = 0.$$

Сначала для этого однородного уравнения находим частные решения. Частных решений будем искать в виде

$$u = v(t)\prod_{j=2}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j}\right)\cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j - x_{0,j})\right).$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt}\prod_{j=2}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j}\right)\cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j - x_{0,j})\right).$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2v}{dt^2}\prod_{j=2}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j}\right)\cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j - x_{0,j})\right).$$

Подставляем полученные выражения в первое уравнение вспомогательной системы (1.1.11):

$$\left(\frac{d^2v}{dt^2} + p\frac{dv}{dt} - Cv\right)\prod_{j=2}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j}\right)\cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j - x_{0,j})\right) = 0.$$

$$k^2 + pk - C = 0 \Rightarrow D = p^2 + 4C = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -\frac{p}{2}.$$

$$v = C_1\exp\left(-\frac{p}{2}(t - t_0)\right) + C_2(t - t_0)\cdot\exp\left(-\frac{p}{2}(t - t_0)\right) =$$

$$= \left(C_1 + C_2(t - t_0)\right)\cdot \exp\left(-\frac{p}{2}(t - t_0)\right).$$

Полученное выражение для рассмотренного однородного уравнения является решением. Используя полученные результаты, напишем общее решение вспомогательной системы уравнений (1.1.11), которое также является общим решением дифференциального уравнения (1.1.1) в экспоненциальном классе:

$$u = \left(A_0 + B_0(t - t_0)\right) \cdot \exp\left(-\frac{p}{2} \cdot (t - t_0)\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + x_j - x_{0,j}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2} \cdot (x_j - x_{0,j})\right), \qquad (1.1.18)$$

где A_0 и B_0 - произвольные постоянные.

Теперь требуем выполнение начальных условий (1.1.4) в виде

$$u\ (t_0; x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}) = A_0 = u_{01},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0; x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}) = \left(B_0 - \frac{p}{2} \cdot \left(A_0 + B_0 \cdot (t - t_0)\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{p}{2} \cdot (t - t_0)\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + x_j - x_{0,j}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2} \cdot (x_j - x_{0,j})\right) = u_{02}.$$

и находим:

$$\begin{cases} A_0 = u_{01} \\ B_0 - \dfrac{p}{2} \cdot A_0 = u_{0,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = u_{0,1}, \\ B_0 = u_{0,2} + \dfrac{p}{2} \cdot A_0. \end{cases}$$

Подставляя значения A_0 и B_0 в (1.1.18) получаем:

$$u = \left(u_{0,1} + \left(u_{0,2} + \frac{p}{2} \cdot u_{0,1}\right) \cdot \left(t - t_0\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{p}{2} \cdot (t - t_0)\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + x_j - x_{0,j}\right) \cdot \exp\left(-\frac{p_j}{2} \cdot (x_j - x_{0,j})\right). \qquad (1.1.19)$$

в) Пусть $p^2 + 4C < 0$, $p_j^2 + 4C_j < 0$, $(j = \overline{1,m})$. Из второго уравнения вспомогательной системы, при $j = m$ получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + p_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x_m} = C_m u ,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + p_m \cdot \frac{\partial u}{\partial x_m} - C_m u = 0. \qquad (1.1.20)$$

Для этого однородного уравнения составим характеристическое уравнение и найдем соответствующие корни:

$$k^2 + p_m k - C_m = 0 \Rightarrow D = p_m^2 + 4C_m < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-p_m}{2} \pm \frac{\sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}.$$

Тогда, общее решение уравнения (1.1.20) можно представить в следующем виде:

$$u = \exp\left(-\frac{p_m}{2}(x_m - x_{0,m})\right) \times$$
$$\times\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}(x_m - x_{0,m}) + C_2 \sin\frac{\sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right). \qquad (1.1.21)$$

Теперь находим решение $(m-1)$ - го уравнения. Так как уравнение является линейным, то сумма частных решений также является частным решением. Поэтому частные решения этого однородного уравнения будем искать в следующем виде:

$$u = v \cdot \exp\left(-\frac{p_m}{2} \cdot (x_m - x_{0,m})\right) \times$$
$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}(x_m - x_{0,m}) + \sin\frac{\sqrt{p_m^2 + 4C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right),$$

где $v = v(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1})$. Полученного выражения дважды продифференцируем по x_{m-1}:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}}=\frac{\partial v}{\partial x_{m-1}}\cdot\exp\left(-\frac{p_m}{2}\cdot(x_m-x_{0,m})\right)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})+\sin\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x_{m-1}^2}\cdot\exp\left(-\frac{p_m}{2}\cdot(x_m-x_{0,m})\right)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})+\sin\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right).$$

Полученное выражение подставим в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2}+p_{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}}-C_{m-1}u=0.$$

$$\exp\left(-\frac{p_m}{2}\cdot(x_m-x_{0,m})\right)\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})+\right.$$
$$\left.+\sin\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 v_{од.}}{\partial x_{m-1}^2}+p_{m-1}\frac{\partial v_{од.}}{\partial x_{m-1}}-C_{m-1}v_{од.}\right)=0.$$

$$k^2+p_{m-1}k-C_{m-1}=0\Rightarrow D=p_{m-1}^2+4C_{m-1}<0\Rightarrow k_{1,2}=\frac{-p_{m-1}}{2}\pm\frac{\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}.$$

$$v=\exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}\cdot(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\times$$
$$\times\left(C_1\cos\frac{\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})+C_2\sin\frac{\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)$$

$$u=\exp\left(-\frac{p_{m-1}}{2}\cdot(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\times$$
$$\times\left(C_1\cos\frac{\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})+C_2\sin\frac{\sqrt{p_{m-1}^2+4C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{p_m}{2}\cdot(x_m-x_{0,m})\right)\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})+\sin\frac{\sqrt{p_m^2+4C_m}}{2}(x_m-x_{0,m})\right).$$

Продолжая этот процесс и для первого уравнения (1.1.11), напишем решение при j=2 и j= m:

$$u=\exp\left(-\frac{p_1}{2}\cdot(x_1-x_{0,1})\right)\cdot\left(C_1\cos\frac{\sqrt{p_1^2+4C_1}}{2}(x_1-x_{0,1})+C_2\sin\frac{\sqrt{p_1^2+4C_1}}{2}(x_1-x_{0,1})\right)$$

$$\prod_{j=2}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right).$$

Теперь находим общее решение первого уравнения вспомогательной системы, то есть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}=Cu \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}-Cu=0.$$

Сначала находим частные решения однородного уравнения. Здесь, как и раньше, частные решения будем искать в следующем виде:

$$u=v(t)\prod_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right).$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}\prod_{j=2}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right).$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2v}{dt^2}\prod_{j=2}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right).$$

Полученных выражений подставим в первое уравнение вспомогательной системы (1.1.11):

$$\left(\frac{d^2 v}{d t^2}+p\cdot\frac{d v}{d t}-C v\right)\prod_{j=2}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)=0.$$

$$k^2+pk-C=0\Rightarrow D=p^2+4C<0\Rightarrow k_{1,2}=\frac{-p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}.$$

$$v=\exp\left(-\frac{p}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(C_1\cos\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)+C_2\sin\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right).$$

Полученное выражение для рассмотренного однородного уравнения является решением. Используя полученные результаты, напишем общее решение вспомогательной системы уравнений (1.1.11), которое также является общим решением дифференциального уравнения (1.1.1) в классе экспоненциальных функций:

$$u=\exp\left(-\frac{p}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(A_0\cdot\cos\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)+B_0\cdot\sin\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=2}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right), \quad (1.1.22)$$

где A_0 и B_0 - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (1.1.4):

$$u\,(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=A_0=u_{01},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=\left(-\frac{p}{2}\cdot\exp\left(-\frac{p}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(A_0\cdot\cos\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)+\right.\right.$$

$$\left.+B_0\cdot\sin\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)+\exp\left(-\frac{p}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}A_0\cdot\sin\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}B_0\cdot\cos\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}(t-t_0)\right)\prod_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)=u_{0,2}\right.$$

$$\begin{cases}A_0=u_{01}\\ -\frac{p}{2}\cdot A_0+\frac{\sqrt{p^2+4C}}{2}\cdot B_0=u_{0,2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_0=u_{01},\\ B_0=\frac{2\cdot u_{0,2}+p\cdot u_{0,1}}{\sqrt{p^2+4\cdot C}}.\end{cases}$$

Подставляя значения A_0 и B_0 в (1.1.22) получаем:

$$u=\exp\left(-\frac{p}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(u_{0,1}\cdot\cos\frac{\sqrt{p^2+4\cdot C}}{2}\cdot(t-t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\cdot u_{0,2}+p\cdot u_{0,1}}{\sqrt{p^2+4\cdot C}}\cdot\sin\frac{\sqrt{p^2+4\cdot C}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\prod_{j=1}^{m}\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right). \qquad (1.1.23)$$

2. В этой главе рассматриваются процессы малых продольных колебаний струны, описываемые дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка [14-А], [36-А]

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+qu\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}+q_j u\right)^n, \qquad (1.1.24)$$

где $m, n\ (m,\ n > 1)$ - натуральные числа, $t \ge t_0 > 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$; $p > 0, q > 0, p_j > 0, q_j > 0 (j = \overline{1, m})$ - действительные числа, $u(t, x)$ - искомая функция.

Уравнение (1.1.24) является следствием уравнение (1.1.3), когда

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + p \cdot \frac{\partial}{\partial t} + q, \quad L_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + p_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} + q_j \quad (j = \overline{1, m}).$$

Для решения задачи Коши для данного уравнения используем начальные условия (1.1.4) и вспомогательную переопределенную систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} + q u = C\ u, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + p_j \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + q_j\ u = C_j\ u, \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases} \tag{1.1.25}$$

которые определяют решения рассмотренного уравнения в экспоненциальном классе. В системе (1.1.25) C и $C_j\ (j = \overline{1, m})$ - произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования (1.1.6).

Для решения поставленной задачи существует три случая. Рассмотрим каждый случай в отдельности и получим соответствующие решения:

а) Сначала рассмотрим случай

$p^2 + 4 \cdot (C - q) > 0,\ p_j^2 + 4 \cdot (C_j - q_j) > 0,\ (j = \overline{1, m})$.

В этом случае получаем решение, которое имеет вид

$$u=\left(\frac{2u_{0,2}+\left(p+\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}\right)\cdot u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}\times\right.$$

$$\times\exp\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}{2}(t-t_0)\right)-$$

$$-\frac{2u_{0,2}+\left(p-\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}\right)\cdot u_{0,1}}{2^{m+1}\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}\times$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+4\cdot(C-q)}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(\frac{-p_j+\sqrt{p_j^2+4\cdot(C_j-q_j)}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(\frac{-p_j-\sqrt{p_j^2+4\cdot(C_j-q_j)}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right) \qquad (1.1.26)$$

б) На следующем этапе рассмотрим случай

$p^2+4\cdot(C-q)=0$, $p_j^2+4\cdot(C_j-q_j)=0$, $(j=\overline{1,m})$.

Тогда решение принимает вид

$$u=\left(u_{0,1}+\left(u_{0,2}+\frac{p}{2}u_{0,1}\right)\cdot(t-t_0)\right)\cdot\exp\left(-\frac{p}{2}(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+x_j-x_{0,j}\right)\cdot\exp\left(-\frac{p_j}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right). \qquad (1.1.27)$$

в) Далее, рассмотрим случай

$p^2+4\cdot(C-q)<0$, $p_j^2+4\cdot(C_j-q_j)<0$, $(j=\overline{1,m})$.

Тогда решение принимает вид

$$u=\exp\left(-\frac{p}{2}(t-t_0)\right)\cdot\left(u_{0,1}\cos\frac{\sqrt{p^2+4(C-q)}}{2}(t-t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{2u_{0,2}+pu_{0,1}}{\sqrt{p^2+4(C-q)}}\cdot\sin\frac{\sqrt{p^2+4(C-q)}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left[\exp\left(-\frac{p_j}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{p_j^2+4(C_j-q_j)}}{2}(x_j-x_{0,j})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\sqrt{p_j^2+4(C_j-q_j)}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\right]. \tag{1.1.28}$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C и $C_j\ (j=\overline{1,m})$ - являются решением уравнения согласования (1.1.6). Тогда решения уравнения (1.1.1) и (1.1.24) в возможных классах, удовлетворяющие начальным условиям (1.1.4), соответственно переопределенных систем (1.1.5), (1.1.11) и (1.1.25) представляются в видах (1.1.10), (1.1.15), (1.1.19), (1.1.23), (1.1.26), (1.1.27), и (1.1.28).

1.2. Модель волнового процесса с переменными коэффициентами

В этом параграфе будем рассматривать процесс колебания гибкой струны, относящийся к одномерному волновому уравнению, и составляем модель решения уравнения этого процесса. Этот процесс описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами вида [10-А]

$$\left(a^{-1}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{-1}(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)^n, \tag{1.2.1}$$

где $m, n\ (m, n\ge 2)$- натуральные числа, $k_j>0\ (j=\overline{1,m})$, $u(t,x)$ - искомая функция, $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$, $t\ge t_0>0,$ $a(t)$ и $a_j(x_j)\ (j=\overline{1,m})$ - непрерывные функции своих аргументов.

Предположим, что функция $u(t,x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке x в момент времени t, а $L = a^{-1}(t)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ и $L_j = a_j^{-1}(x_j)\dfrac{\partial}{\partial x_j}(k_j \dfrac{\partial}{\partial x_j})(j=\overline{1,m})$ - дифференциальные операторы, которые осуществляют изменение состояния этого объекта (или процесса). Изучение таких физических процессов приводит к модельному уравнению с экстремальными свойствами вида

$$Lu = \max_{\alpha \in A}\left\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j (L_j u)^s\right\}^{\frac{1}{s}}, \qquad (1.2.2)$$

где $A = \left\{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m): 0 < \alpha_j < 1,\ \sum_{j=1}^{m}\alpha_j^{\frac{n}{n-s}} = 1\right\}, \quad n > s > 0$ - натуральные числа.

В работах профессора М. Юнуси доказано, что уравнение (1.2.2) эквивалентно уравнению (1.1.3).

Чтобы решить уравнение (1.2.1) введем вспомогательную переопределенную систему уравнений вида

$$\begin{cases} a^{-1}(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C, \\ a_j^{-1}(x_j)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = C_j, \ (j = \overline{1,m}), \end{cases} \qquad (1.2.3)$$

где C и C_j $(j=\overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6).

Из второго уравнения переопределенной системы (1.2.3), методом интегрирования, когда $j = m$ находим u:

$$a_m^{-1}(x_m)\frac{\partial}{\partial x_m}\left(k_m \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = C_m,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\left(k_m \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = C_m a_m(x_m),$$

$$k_m \frac{\partial u}{\partial x_m} = C_m \int_{x_{0,m}}^{x_m} a_m(z_m)dz_m + v_0(t, x_1, x_{2,}..., x_{m-1}),$$

$$u = \frac{C_m}{k_m}\int_{x_{0,m}}^{x_m}\int_{x_{0,m}}^{\tau} a_m(z_m)dz_m d\tau + \frac{\vartheta_0}{k_m}\left(x_m - x_{0,m}\right) + \omega_0(t, x_1, x_{2,}..., x_{m-1}). \qquad (1.2.4)$$

Выражение (1.2.4) является общим решением последнего уравнения переопределенной системы при $j = m$. Теперь второе уравнение системы продифференцируем по x_{m-1} и получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} = \frac{1}{k_m}\cdot\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x_{m-1}}\cdot(x_m - x_{0,m}) + \frac{\partial \omega_0}{\partial x_{m-1}}. \qquad (1.2.5)$$

Полученное выражение (1.2.5) подставляем в (m-1) -е уравнение переопределенной системы (1.2.3) и находим u:

$$a_{m-1}^{-1}(x_{m-1})\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\left(k_{m-1}\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}}\right) = C_{m-1},$$

$$a_{m-1}^{-1}(x_{m-1})\frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\left(k_{m-1}\left(\frac{1}{k_m}\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x_{m-1}}(x_m - x_{0,m}) + \frac{\partial \omega_0}{\partial x_{m-1}}\right)\right) = C_{m-1},$$

$$k_{m-1}\left(\frac{1}{k_m}\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x_{m-1}}(x_m - x_{0,m}) + \frac{\partial \omega_0}{\partial x_{m-1}}\right) = C_{m-1}\int_{x_{0,m-1}}^{x_{m-1}} a_{m-1}(z)dz + v_1(t, x_1, x_{2,}..., x_{m-2}),$$

$$\frac{1}{k_m}\frac{\partial \vartheta_0}{\partial x_{m-1}}(x_m - x_{0,m}) + \frac{\partial \omega_0}{\partial x_{m-1}} = \frac{C_{m-1}}{k_{m-1}}\int_{x_{0,m-1}}^{x_{m-1}} a_{m-1}(z)dz + \frac{1}{k_{m-1}}v_1,$$

$$\frac{1}{k_m}\vartheta_0(x_m - x_{0,m}) + \omega_0 = \frac{C_{m-1}}{k_{m-1}}\int_{x_{0,m-1}}^{x_{m-1}}\int_{x_{0,m-1}}^{\tau} a_{m-1}(z)dzd\tau + \frac{1}{k_{m-1}}v_1(x_{m-1} - x_{0,m-1}) + w_1,$$

$$u = \frac{C_m}{k_m}\int_{x_{0,m}}^{x_m}\int_{x_{0,m}}^{\tau} a_m(z)dzd\tau + \frac{C_{m-1}}{k_{m-1}}\int_{x_{0,m-1}}^{x_{m-1}}\int_{x_{0,m-1}}^{\tau} a_{m-1}(z)dzd\tau + \frac{1}{k_{m-1}}v_1(x_{m-1} - x_{0,m-1}) + w_1.$$

Следовательно,

$$u = \sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\int_{x_{0,j}}^{x_j}\int_{x_{0,j}}^{\tau} a_j(z)dzd\tau + \frac{1}{k_1}v_{m-1}(t) + w_{m-1}. \qquad (1.2.6)$$

Теперь, полученное выражение (1.2.6) дважды продифференцируем по t и получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{k_1}\frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial t^2} = C \cdot a(t)$$

$$\frac{1}{k_1}\frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial t^2} = C\int_{t_0}^{t} a(z)dz + A_0$$

$$\frac{1}{k_1}v_{m-1} + w_{m-1} = C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} a(z)dzd\tau + A_0(t-t_0) + B_0.$$

Полученные выражения подставляем в уравнение (1.2.6):

$$u = \sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\int_{x_{0,j}}^{x_j}\int_{x_{0,j}}^{\tau} a_j(z)dzd\tau + C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} a(z)dzd\tau + A_0(t-t_0) + B_0 \qquad (1.2.7)$$

Это выражение является общим решением уравнения (1.2.1) в простом классе, где A_0 и B_0 - произвольные постоянные.

Используя начальные условия (1.1.4), находим коэффициенты A_0, B_0 и, подставляя в (1.2.7), получаем решение данного уравнения (1.2.1):

$$u(t;x_1,x_2,...,x_m) = u_{01} + u_{02}\cdot(t-t_0) + C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau} a(z)\,dz\,d\tau + \sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\int_{x_{0j}}^{x_j}\int_{x_{0j}}^{\tau} a_j(z)\,dz\,d\tau. \qquad (1.2.8)$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть $a(t)$ и $a_j(x_j)$, $(j=\overline{1,m})$ - непрерывные функции своих аргументов и пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$ - являются решением уравнения согласования (1.1.6). Тогда решение уравнения (1.2.1), соответственно переопределенной системы (1.2.3), представляется в виде (1.2.8), причем это решение с начальными условиями (1.1.4) является единственным.

Теперь наши рассуждения подкрепим примерами.

Пример 1. Пусть

$$\left(\frac{1}{cht}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{chx_j}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)^n, \qquad (1.2.9)$$

где $k_j>0\ (j=\overline{1,m})$, $t\ge t_0>0$; $x_j\ge x_{0j}>0\ \ (j=\overline{1,m})$.

Для нахождения решения этого уравнения введём следующую вспомогательную переопределённую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{ch\,t}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C,\\[2mm] \dfrac{1}{ch\,x_j}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_j}\cdot\left(k_j\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)=C_j,\ \ (j=\overline{1,m}),\end{cases} \qquad (1.2.10)$$

Тогда решение задачи Коши для данного уравнения (1.2.9) представляется в виде

$$\begin{gathered}u=\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\cdot\left(ch\,x_j-ch\,x_{0,j}\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\cdot sh\,x_{0,j}\cdot(x_j-x_{0,j})+\\ +C\cdot(ch\,t-ch\,t_0-sh\,t_0\cdot(t-t_0))+u_{0,1}\cdot(t-t_0)+u_{0,2}.\end{gathered} \qquad (1.2.11)$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\left(sh^2t\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(sh^2x_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)^n, \qquad (1.2.12)$$

где $k_j>0\ (j=\overline{1,m})$; $t\ge t_0\ge 0,\ \ x_j\ge x_{0j}\ge 0\ \ (j=\overline{1,m})$.

Будем использовать переопределенную систему

$$\begin{cases}sh^2t\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C,\\[2mm] sh^2x_j\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_j}\cdot(k_j\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_j})=C_j,\quad (j=\overline{1,m}),\end{cases} \qquad (1.2.13)$$

где C и C_j $(j=\overline{1,m})$, как и раньше, являются решением уравнения согласования (1.1.6), с учетом начальных условий (1.1.4), и соответственно получаем:

$$u(t;x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\cdot\ln\left|\frac{sh\,x_{0,j}}{sh\,x_j}\right|+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j}\cdot cth\,x_{0j}(x_j-x_{0j})+C\cdot\ln\left|\frac{sh\,t_0}{sh\,t}\right|+u_{01}(t-t_0)+u_{0,2}. \qquad (1.2.14)$$

Пример 3. Теперь рассмотрим следующий пример:

$$\left(a^{-t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{-x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right)^n, \qquad (1.2.15)$$

где $k_j>0$ $(j=\overline{1,m})$; $a>0,\ a\neq 1;\ a_j>0,\ a_j\neq 1(j=\overline{1,m})$.

Используем переопределенную систему

$$\begin{cases} a^{-t}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C, \\ a_j^{-x_j}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_j}\cdot(k_j\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_j})=C_j,\ \ (j=\overline{1,m}). \end{cases} \qquad (1.2.16)$$

Здесь C и C_j $(j=\overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6). С учетом начальных условий (1.1.4), соответственно получаем:

$$u(t;x_1,x_2,...,x_m)=\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j\ln^2 a_j}\cdot\left(a_j^{x_j}-a_j^{x_{0,j}}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{k_j\ln a_j}\cdot a_j^{x_{0,j}}(x_j-x_{0j})+ \qquad (1.2.17)$$

$$+\frac{C}{\ln a}\cdot\left[\frac{a^t-a^{t_0}}{\ln a}-a^{t_0}\left(t-t_0\right)\right]+u_{01}(t-t_0)+u_{0,2}.$$

1.3. Представление модели тепловых волн с особенностями и переменными коэффициентами

В этом параграфе представляем модель тепловых волн с особенностями, описываемую дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Рассматриваем n-мерное уравнение, которое определяет процессы распространения звука в одномерной среде и электромагнитных волн в одномерной непроводящей среде. К этому уравнению относятся плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие вектора напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы. В частности, рассматриваем процесс тепловых волн с особенностями, который задается дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка вида [23-А]

$$\left(t^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j x_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (1.3.1)$$

где $m,n\ (m,\ n>1)$ - натуральные числа, $t\ge t_0>0\ x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in R^m$; $p>0$ и $p_j>0\ (j=\overline{1,m})$ - действительные числа, $u(t,x)$ - искомая функция.

Чтобы решить задачу Коши [1-2] для рассматриваемого уравнения (1.3.1), зададим начальные условия (1.1.4) и составим вспомогательную переопределенную систему

$$\begin{cases} t^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t}=C, \\ x_j^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j x_j\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_j,\ (j=\overline{1,m}). \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

Эта система определяет класс простых решений уравнения (1.3.1). Произвольные действительные числа C и $C_j\ (j=\overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6).

Из второго уравнения вспомогательной системы (1.3.2), при $j=m$ получаем:

$$x_m^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}+p_m x_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=C_m \tag{1.3.3}$$

Для однородного уравнения (1.3.3) находим решение:

$$u_{од.}=C_1+C_2\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{1-p_m} \tag{1.3.4}$$

Теперь находим частное решение уравнения (1.3.3):

$$u_{ч.}=\frac{C_m}{p_m-1}\ln\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right) \tag{1.3.5}$$

Складывая общее решение однородного уравнения (1.3.4) и частное решение (1.3.5) m-го уравнения (1.3.3) получаем общее решение второго уравнения переопределенной системы (1.3.2), когда $j=m$:

$$u_{об.m}=C_1+C_2\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{1-p_m}+\frac{C_m}{p_m-1}\ln\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right). \tag{1.3.6}$$

Теперь найдем общее решение второго уравнения переопределенной системы (1.3.2), когда $j=m-1$.

$$\begin{aligned}u_{об.m-1}=&\left(C_1+C_2\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{1-p_{m-1}}\right)\cdot\left(1+\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{1-p_m}\right)+\\&+\frac{C_m}{p_m-1}\ln\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)+\frac{C_{m-1}}{p_{m-1}-1}\ln\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Аналогично продолжаем этот процесс и для второго и m-го уравнения переопределенной системы (1.3.2) получаем решения в виде

$$u=\left(C_1+C_2\left(\frac{x_1}{x_{0,1}}\right)^{1-p_1}\right)\prod_{j=2}^{m}\left(1+\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{1-p_m}\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-1}\ln\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right) \tag{1.3.8}$$

Следовательно, общее решение системы (1.3.2) представляется в виде

$$u=\left(A_0+B_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-p}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{1-p_j}\right)+\frac{C}{p-1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-1}\ln\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right), \tag{1.3.9}$$

где A_0 и B_0 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (1.1.4) в виде

$$u(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=(A_0+B_0)\cdot 2^m=u_{0,1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_0;x_{01},x_{02},...,x_{0m})=(1-p)B_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-p}\cdot\frac{1}{t_0}\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{1-p_j}\right)+\frac{C}{p-1}\cdot\frac{1}{t}=u_{0,2}$$

и находим значения A_0 и B_0:

$$A_0=\frac{(1-p)^2u_{0,1}-(1-p)t_0u_{0,2}-C}{(1-p)^2 2^m},\ B_0=\frac{(1-p)t_0u_{0,2}+C}{(1-p)^2 2^m}.$$

Подставляя значения A_0 и B_0 в (1.3.9) получим:

$$u=\left(\frac{(1-p)^2u_{0,1}-(1-p)t_0u_{0,2}-C}{(1-p)^2 2^m}+\frac{(1-p)t_0u_{0,2}+C}{(1-p)^2 2^m}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{1-p}\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{1-p_j}\right)+\frac{C}{p-1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-1}\ln\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right).$$

Теперь решения данного уравнения (1.3.1) рассмотрим в экспоненциальном классе. Для этого составим следующую переопределённую вспомогательную систему уравнений:

$$\begin{cases} t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\dfrac{\partial u}{\partial t}=Cu, \\ x_j^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_jx_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_ju,\quad (j=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{1.3.11}$$

Произвольные действительные числа C и $C_j\ (j=\overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6). Из второго уравнения вспомогательной системы (1.3.11), при $j=m$, получаем:

$$x_m^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}+p_mx_m\frac{\partial u}{\partial x_m}-C_mu=0 \tag{1.3.12}$$

Рассмотрим полученное уравнение в каждом отдельном случае.

а) Случай когда $(p-1)^2+4C>0$, $(p_j-1)^2+4C_j>0$, $(j=\overline{1,m})$. В этом случае для m-го однородного уравнения (1.3.12) находим решение:

$$u=C_1\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_m+\sqrt{(p_m-1)^2+4C_m}\right)}+C_2\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_m-\sqrt{(p_m-1)^2+4C_m}\right)} \tag{1.3.13}$$

Аналогично находится решение (m-1)-го уравнения, который имеет вид

$$u=C_1\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_{m-1}+\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4C_{m-1}}\right)}+C_2\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_{m-1}-\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4C_{m-1}}\right)} \tag{1.3.14}$$

Тогда, общего решения m -го и (m-1) -го уравнения можно записать в следующем виде:

$$u=\left(C_1\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_{m-1}+\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4C_{m-1}}\right)}+C_2\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_{m-1}-\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4C_{m-1}}\right)}\right)\times$$

$$\times\left(\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_m+\sqrt{(p_m-1)^2+4C_m}\right)}+\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_m-\sqrt{(p_m-1)^2+4C_m}\right)}\right) \tag{1.3.15}$$

Следовательно, общее решение второго и m -го уравнения (1.3.12) принимает вид

$$u=\left(C_1\left(\frac{x_1}{x_{0,1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_1+\sqrt{(p_1-1)^2+4C_1}\right)}+C_2\left(\frac{x_1}{x_{0,1}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_1-\sqrt{(p_1-1)^2+4C_1}\right)}\right)\times$$

$$\prod_{j=2}^{m}\left(\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j+\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j-\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}\right) \tag{1.3.16}$$

Теперь найдем общее решение первого уравнения вспомогательной системы (1.3.11), то есть

$$t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}=Cu \quad \text{или} \quad t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}-Cu=0 \tag{1.3.17}$$

Находим решение этого однородного уравнения:

$$u = C_1\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p+\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)} + C_2\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p-\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)} \qquad (1.3.18)$$

Теперь напишем общее решение вспомогательной системы (1.3.11):

$$u = \left(A_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p+\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)} + B_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p-\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)}\right)\times$$

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j+\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)} + \left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j-\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}\right), \qquad (1.3.19)$$

где A_0 и B_0 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (1.1.4) и находим значения этих постоянных:

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{\left(p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right)u_{01}+2t_0u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}}, \\ B_0 = \dfrac{\left(p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right)u_{01}-2t_0u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}}. \end{cases}$$

Найденные значения A_0 и B_0 подставляем в (1.3.19):

$$u = \left(\frac{\left(p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right)u_{01}+2t_0u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p+\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)} + \frac{\left(p-1+\sqrt{(1-p)^2+4C}\right)u_{01}-2t_0u_{02}}{2^{m+1}\sqrt{(1-p)^2+4C}}\times$$

$$\left.\times\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p-\sqrt{(p-1)^2+4C}\right)}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j+\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1}{2}\left(1-p_j-\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}\right)}\right). \qquad (1.3.20)$$

б) Рассмотрим случай, когда

$(p-1)^2+4C=0$, $(p_j-1)^2+4C_j=0$, $(j=\overline{1,m})$. Тогда для однородного уравнения (1.3.12), при $j=m$ находим решение:

$$u=\left(C_1+C_2\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1-p_m}{2}} \tag{1.3.21}$$

Аналогично находится решение (m-1) -го уравнения, которое имеет вид

$$u=\left(C_1+C_2\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1-p_{m-1}}{2}} \tag{1.3.22}$$

Для m-го и (m-1)-го уравнения системы общее решение получаем в виде

$$u=\left(C_1+C_2\cdot\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1-p_{m-1}}{2}}\cdot\left(1+\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1-p_m}{2}}$$

Тогда общее решение второго и m-го уравнения (1.3.12) принимает вид

$$u=\left(C_1+C_2\ln\left|\frac{x_1}{x_{0,1}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_1}{x_{0,1}}\right)^{\frac{1-p_1}{2}}\prod_{j=2}^{m}\left(1+\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}} \tag{1.3.23}$$

Переходя к первому уравнению вспомогательной системы (1.3.11) находим ее общее решение:

$$t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}=Cu \quad \text{или} \quad t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}-Cu=0 \tag{1.3.24}$$

Сначала находим решение однородного уравнения (1.3.24):

$$u=\left(C_1+C_2\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\cdot\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}} \tag{1.3.25}$$

Объединяя решения первого и второго уравнений вспомогательной системы (1.3.11), находим ее общее решение:

$$u=\left(A_0+B_0\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\cdot\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\prod_{j=1}^{m}\left(1+\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)\cdot\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}} \qquad (1.3.26)$$

где A_0 и B_0 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (1.1.10) и найдем значения этих постоянных:

$$\begin{cases} A_0=u_{01}, \\ B_0=\dfrac{(p-1)u_{01}+2t_0u_{02}}{2}. \end{cases}$$

Найденные значения A_0 и B_0 подставим в (1.3.26):

$$u=\left\{u_{0,1}+\frac{(p-1)u_{01}+2t_0u_{02}}{2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right\}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right\}\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}\cdot \qquad (1.3.27)$$

в) Рассмотрим случай $(p-1)^2+4C<0$, $(p_j-1)^2+4C_j<0$, $(j=\overline{1,m})$. Для m-го однородного уравнения (1.3.12) при j=m решение принимает вид

$$u=\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1-p_m}{2}}\cdot\left\{C_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{(p_m-1)^2+4\cdot C_m}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\right)+\right.$$
$$\left.+C_2\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{(p_m-1)^2+4\cdot C_m}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\right)\right\} \qquad (1.3.28)$$

Аналогично находится решение (m-1)-го уравнения, которое имеет вид

$$u=\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1-p_{m-1}}{2}}\left\{C_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4\cdot C_{m-1}}}{2}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)+C_2\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4\cdot C_{m-1}}}{2}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)\right\} \qquad (1.3.29)$$

Тогда, общие решения m -го и (m-1) -го уравнений можно записать в следующем виде:

$$u=\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{1-p_{m-1}}{2}}\left\{C_1\cos\left(\frac{\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4\cdot C_{m-1}}}{2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{(p_{m-1}-1)^2+4\cdot C_{m-1}}}{2}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{x_m}{x_{0,m}}\right)^{\frac{1-p_m}{2}}\left\{C_1\cos\left(\frac{\sqrt{(p_m-1)^2+4\cdot C_m}}{2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\right)+\right.$$

$$\left.+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{(p_m-1)^2+4\cdot C_m}}{2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\right)\right\}. \qquad (1.3.30)$$

Следовательно, общее решение второго и m-го уравнения (1.3.12) принимает вид

$$u=\left(\frac{x_1}{x_{0,1}}\right)^{\frac{1-p_1}{2}}\left(C_1\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{(p_1-1)^2+4\cdot C_1}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_1}{x_{0,1}}\right|\right)+\right.$$

$$\left.+C_2\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{(p_1-1)^2+4C_1}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_1}{x_{0,1}}\right|\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=2}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)+\right. \qquad (1.3.31)$$

$$\left.+\sin\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)\right).$$

Перейдем к первому уравнению вспомогательной системы (1.3.11), т.е.

$$t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}=Cu \quad \text{или} \quad t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+pt\frac{\partial u}{\partial t}-Cu=0, \qquad (1.3.32)$$

найдем его общее решение:

$$u=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\left\{C_1\cos\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+\right. \qquad (1.3.33)$$

$$\left.+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right\}.$$

Теперь напишем общее решение вспомогательной системы (1.3.11):

$$u=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\left\{M_0\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+\right.$$
$$\left.+N_0\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right\}\times \tag{1.3.34}$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)\right\},$$

где M_0 и N_0 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (1.1.4) и найдем значения этих постоянных:

$$\begin{cases}M_0=u_{01},\\ N_0=\dfrac{(p-1)\cdot u_{01}+2t_0\cdot u_{02}}{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}.\end{cases}$$

Найденные значения M_0 и N_0 подставим в (1.3.26):

$$u=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1-p}{2}}\left[u_{01}\cos\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+\frac{(p-1)u_{01}+2u_{02}t_0}{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left(\frac{\sqrt{(p-1)^2+4\cdot C}}{2}\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right]\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{x_j}{x_{0,j}}\right)^{\frac{1-p_j}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)+\right. \tag{1.3.35}$$
$$\left.+\sin\left(\frac{\sqrt{(p_j-1)^2+4\cdot C_j}}{2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|\right)\right\},$$

Имеет место теорема:

Теорема. Пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$ - являются решением уравнения согласования (1.1.6). Тогда решения уравнения (1.3.1) в экспоненциальном классе, удовлетворяющие начальным условиям (1.1.4), соответственно переопределенной системы (1.3.11) представляются в видах (1.3.20), (1.3.27) и (1.3.35).

1.4. Представление модели волновых процессов с вырождениями

Этот параграф главы посвящён представлению модели волновых процессов с вырождениями. В частности, рассмотрим колебание струны, описываемое дифференциальным уравнением.

1. Рассмотрим уравнение [32-А]

$$\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + p_j\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \tag{1.4.1}$$

где $m, n\ (m,\ n > 1)$ - натуральные числа, $t \geq t_0 > 0,$ $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ и $u(t, x)$ - искомая функция.

Следствием уравнения (1.1.3), при

$$L = \frac{1}{u}\frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad L_j = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + p_j\,\frac{\partial}{\partial x_j}; \quad (j = \overline{1, m}) \tag{1.4.2}$$

является уравнение (1.4.1).

Для уравнения (1.4.1) составим вспомогательную переопределенную систему уравнений, чтобы найти его решения в простом классе:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + p_j\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = C_j, \quad (j = \overline{1, m}). \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Действительные числа C и $C_j\ (j = \overline{1, m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6).

В зависимости от значения действительных чисел C и $C_j\ (j = \overline{1, m})$ существует три случая:

а) Пусть $C > 0$ и $C_j > 0$. В этом случае решение данного уравнения можно представить в виде

$$u=\left(\frac{\sqrt{C}u_{01}+u_{02}}{\sqrt{C}\cdot 2^{m+1}}e^{\sqrt{C}(t-t_0)}+\frac{\sqrt{C}u_{01}-u_{02}}{\sqrt{C}\cdot 2^{m+1}}e^{-\sqrt{C}(t-t_0)}\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(e^{\sqrt{C_j}(x_j-x_{0,j})}+e^{-\sqrt{C_j}(x_j-x_{0,j})}\right) \qquad (1.4.4)$$

б) Случай, когда $C=0$ и $C_j=0$. В этом случае получаем решение в виде

$$u=\left(u_{01}+u_{02}(t-t_0)\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+x_j-x_{0,j}\right) \quad . \qquad (1.4.5)$$

в) Случай, когда $C<0$ и $C_j<0$. В этом случае решение принимает вид

$$u=\left(u_{01}\cdot\cos\sqrt{|C|}(t-t_0)+\frac{u_{02}}{\sqrt{|C|}}\cdot\sin\sqrt{|C|}(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\cos\sqrt{|C_j|}(x_j-x_{0,j})+\sin\sqrt{|C_j|}(x_j-x_{0,j})\right). \qquad (1.4.6)$$

2. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{1}{u}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u\right)\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (1.4.7)$$

где m,n $(m,\ n>1)$ - натуральные числа, $t\ge t_0>0,\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in R^m$ и $u(t,x)$ - искомая функция.

Следствием уравнения (1.1.3), при

$$L=\frac{1}{u}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1\right),\quad L_j=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+p_j,\quad (j=\overline{1,m}) \qquad (1.4.8)$$

является уравнение (1.4.7).

Чтобы решить уравнение (1.4.7), составим вспомогательную переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u}\cdot\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+u\right)=C, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_j,\ \ (j=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{1.4.9}$$

которые удовлетворяют начальным условиям (1.1.4) и определяют решения рассмотренного уравнения в простом классе. Действительные числа C и C_j $(j=\overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6).

Аналогично предыдущим действиям, находим решения этого уравнения:

а) При $|4\cdot C-3|>0$ и $p_j^2+4\cdot C_j>0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\left(\frac{\left(\sqrt{4C-3}+1\right)u_{01}+2u_{02}}{\sqrt{4C-3}\cdot 2^{m+1}}\cdot\exp\left(\frac{-1+\sqrt{4C-3}}{2}\cdot(t-t_0)\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(\sqrt{4C-3}-1\right)u_{01}-2u_{02}}{\sqrt{4C-3}\cdot 2^{m+1}}\cdot\exp\left(\frac{-1-\sqrt{4C-3}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\right)\times \tag{1.4.10}$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\cdot(x_j-x_{0,j}).$$

б) При $|4\cdot C-3|=0$ и $p_j^2+4\cdot C_j=0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(u_{01}+\frac{u_{01}+2u_{02}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(-p_j\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\cdot(x_j-x_{0,j}). \tag{1.4.11}$$

в) При $|4\cdot C-3|<0$ и $p_j^2+4\cdot C_j<0$, $(j=\overline{1,m})$:

$$u=\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(u_{01}\cos\frac{\sqrt{|4\cdot C-3|}}{2}\cdot(t-t_0)+\right.$$

$$+\frac{u_{01}+2u_{02}}{\sqrt{|4\cdot C-3|}}\cdot\sin\frac{\sqrt{|4\cdot C-3|}}{2}\cdot(t-t_0)\times \tag{1.4.12}$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\Bigl(1+\exp\bigl(-p_j\cdot(x_j-x_{0,j})\bigr)\Bigr)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\cdot(x_j-x_{0,j}).$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C *и* C_j $(j=\overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6). Тогда решения уравнения (1.4.1) и (1.4.7) в простом классе, удовлетворяющие начальным условиям (1.1.4), соответственно переопределенным системам (1.4.3) и (1.4.9) представляются в видах (1.4.4), (1.4.5), (1.4.6) и (1.4.10), (1.4.11), (1.4.12).

Глава 2

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Это глава посвящена теории нелинейных волн, в основном гидродинамического происхождения. В этой области играют важную роль нелинейные уравнения в частных производных третьего порядка. Такие процессы впервые были рассмотрены Жозефом Буссинеском в 1877 году, но подробный анализ был проведен уже Дидериком Кортевегом и Густавом де Фризом в 1895 году. Для таких уравнений найдено большое количество точных решений, представляющих собой стационарные нелинейные волны. В том числе, эти уравнения имеют решения солитонного типа. Особое значение солитонам придает тот факт, что любое начальное возмущение, экспоненциально спадающее на бесконечности, с течением времени эволюционирует в конечный набор солитонов, разнесенных в пространстве.

2.1. Нелинейные волны

В первом параграфе этой главы рассматриваются нелинейные волны гидродинамического происхождения, которые описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами.

1. В этом пункте параграфа рассматривается нелинейная волна, *описываемая* дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами в частных производных третьего порядка вида [24-А]

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+p\cdot u\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_j\cdot u\right)^n, \tag{2.1.1}$$

где $m,n\ (m,\ n>1)$- заданные натуральные числа, $t\geq t_0>0$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m$; $p>0$ и $p_j>0$ $(j=\overline{1,m})$- заданные действительные числа, $u(t,x)$ - неизвестная функция.

Следствием уравнения (1.1.3), при

$$L=\frac{\partial^3}{\partial t^3}+p;\ L_j=\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}+p_j;\ (j=\overline{1,m}) \tag{2.1.2}$$

является уравнение (2.1.1).

Для нахождения решений уравнения (2.1.1) сначала за начальные условия вида

$$\frac{\partial^{i-1}u}{\partial t^{i-1}}(t_0; x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0m}) = u_{0i} \quad (i = 1,2,3) \tag{2.1.3}$$

и составим вспомогательную переопределенную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} + p \cdot u = C \cdot u, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} + p_j \cdot u = C_j \cdot u, \ (j = \overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.1.4}$$

которая определяет соответственно класс экспоненциальных решений уравнения (2.1.1). Действительные числа C и $C_j \ (j = \overline{1,m})$ являются решением уравнения согласования (1.1.6).

Из второго уравнения вспомогательной системы (2.1.4), при $j = m$ получаем:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_m^3} + p_m u = C_m u \text{ или } \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_m^3} + (p_m - C_m)u = 0 \tag{2.1.5}$$

Для однородного уравнения (2.1.5) составляем характеристическое уравнение и находим его решение:

$$k^3 + p_m - C_m = 0$$

$$k^3 + \left(\sqrt[3]{p_m - C_m}\right)^3 = 0$$

$$\left(k + \sqrt[3]{p_m - C_m}\right)\left(k^2 + k\sqrt[3]{p_m - C_m} + \left(\sqrt[3]{p_m - C_m}\right)^2\right) = 0$$

$$k_1 = -\sqrt[3]{p_m - C_m} \ ; \ k_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{p_m - C_m}}{2} i.$$

Следовательно, решения уравнения (2.1.5) можно представить в следующем виде:

$$u_m = K_1 \exp\left(-\sqrt[3]{p_m - C_m}\cdot(x_m - x_{0,m})\right) + \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}\cdot(x_m - x_{0,m})\right)\times$$

$$\times\left(K_2 \cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m}) + K_3 \sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right) \quad (2.1.6)$$

Находим решение $(m-1)$-го уравнения системы (2.1.4). Так как это уравнение является линейным, то сумма частных решений так же является частным решением. Поэтому частное решение этого однородного уравнения будем искать в следующем виде:

$$u = v_{од.}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_m - C_m}(x_m - x_{0,m})\right) + \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m}) + \sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right)\right)$$

где $v_{од.} = v_{од.}(t, x_1, x_2, ..., x_{m-1})$. Полученного выражения трижды продифференцируем по x_{m-1}:

$$\frac{\partial u}{\partial x_{m-1}} = \frac{\partial v_{од.}}{\partial x_{m-1}}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) +\right.$$

$$\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1}) +\right.$$

$$\left.\left. + \sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1}^2} = \frac{\partial^2 v_{од.}}{\partial x_{m-1}^2}\Big(\exp\Big(-\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\Big)+$$

$$+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\right);$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_{m-1}^3} = \frac{\partial^3 v_{од.}}{\partial x_{m-1}^3}\Big(\exp\Big(-\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\Big)+$$

$$+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\right).$$

Подставим в уравнение $\frac{\partial^3 u}{\partial x_m^3}+(p_m-C_m)u=0$:

$$\Big(\exp\Big(-\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\Big)+$$

$$+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})+\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_{m-1}-C_{m-1}}}{2}(x_{m-1}-x_{0,m-1})\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^3 v_{од.}}{\partial x_{m-1}^3}+\left(p_{m-1}-C_{m-1}\right)v_{од.}\right)=0$$

$$k^3 + p_{m-1} - C_{m-1} = 0$$

$$k^3 + \left(\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}\right)^3 = 0$$

$$\left(k + \sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}\right)\left(k^2 + k\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}} + \left(\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}\right)^2\right) = 0$$

$$k_1 = -\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}} \; ; \; k_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2} \pm \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2} i .$$

$$u_{m-1} = K_1 \exp\left(-\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) +$$
$$+ \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) \times$$
$$\times \left(K_2 \cos \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1}) +\right.$$
$$\left. + K_3 \sin \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)$$

Решение m-го и (m-1)-го уравнения можно записать в следующем виде:

$$u = \left(K_1 \exp\left(-\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) +\right.$$
$$+ \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right) \times$$
$$\times \left(K_2 \cos \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1}) +\right.$$
$$\left.\left. + K_3 \sin \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{p_{m-1} - C_{m-1}}}{2}(x_{m-1} - x_{0,m-1})\right)\right) \times$$
$$\times \left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_m - C_m}(x_m - x_{0,m})\right) + \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right) \times\right.$$
$$\left. \times \left(\cos \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m}) + \sin \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{p_m - C_m}}{2}(x_m - x_{0,m})\right)\right).$$

Продолжая этот процесс, общие решения второго и m -го уравнения можно записать в виде

$$u=\left(K_1\exp\left(-\sqrt[3]{p_1-C_1}(x_1-x_{0,1})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_1-C_1}}{2}(x_1-x_{0,1})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(K_2\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_1-C_1}}{2}(x_1-x_{0,1})+K_3\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_1-C_1}}{2}(x_1-x_{0,1})\right)\right)\times$$

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\right)$$

Теперь найдем решение первого уравнения вспомогательной системы, то есть,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+p\cdot u=C\cdot u \quad \text{или} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+p\cdot u-C\cdot u=0$$

Сначала найдем частные решения однородного уравнения. Здесь, как и раньше, частное решение будем искать в следующем виде:

$$u=z(t)\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0,j})\right)\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial t}\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right)$$

Эти выражения подставим в первое уравнение вспомогательной системы (2.1.4)

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}+(p-C)z\right)\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right)=0$$

$$k^3+p-C=0$$

$$k^3+\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^3=0$$

$$\left(k+\sqrt[3]{p-C}\right)\left(k^2-k\sqrt[3]{p-C}+\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2\right)=0$$

$$k_1=-\sqrt[3]{p-C}\ ;\ k_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{p-C}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}i.$$

$$v=K_1\exp\left(-\sqrt[3]{p-C}\cdot(t-t_0)\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(K_2\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)+K_3\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)\right)$$

Это выражение является решением однородного уравнения. Теперь напишем решение задачи Коши для системы уравнений (2.1.4), так же это в экспоненциальном классе является решением уравнения (2.1.1):

$$u = K_1 \exp\left(-\sqrt[3]{p-C}\cdot(t-t_0)\right) + \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\left(K_2\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0) + K_3\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}\cdot(x_j-x_{0,j})\right) + \exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right. \qquad (2.1.7)$$
$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j}) + \sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right)$$

где K_1, K_2 и K_3 - постоянные числа.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) в виде

$$\begin{cases} u(t_0; x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m}) = (K_1 + K_2)\cdot 2^m = u_{01}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(-\sqrt[3]{p+C}\cdot K_1 + \dfrac{\sqrt[3]{p+C}}{2}\cdot K_2 + \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot K_3\right)\cdot 2^m = u_{02}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\left(\sqrt[3]{p+C}\right)^2\cdot K_1 - \dfrac{\left(\sqrt[3]{p+C}\right)^2}{2}\cdot K_2 + \dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}{2}\cdot K_3\right)\cdot 2^m = u_{03}, \end{cases}$$

и найдем значения постоянных:

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2\cdot u_{01} + \sqrt[3]{p-C}\cdot u_{02} - u_{03}}{3\cdot 2^m\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}, \\ K_2 = \dfrac{2\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2\cdot u_{01} + \sqrt[3]{p-C}\cdot u_{02} - u_{03}}{3\cdot 2^m\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}, \\ K_3 = \dfrac{\sqrt[3]{p-C}\cdot u_{02} + u_{03}}{\sqrt{3}\cdot 2^m\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}. \end{cases}$$

Найденные значения K_1, K_2 и K_3 подставим в (2.1.7) и получим:

$$u=\frac{\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2\cdot u_{01}+\sqrt[3]{p-C}\cdot u_{02}-u_{03}}{3\cdot 2^m\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}\cdot\exp\left(-\sqrt[3]{p-C}\cdot(t-t_0)\right)+$$

$$+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2\cdot u_{01}+\sqrt[3]{p-C}\cdot u_{02}-u_{03}}{3\cdot 2^m\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)+\frac{\sqrt[3]{p-C}\cdot u_{02}+u_{03}}{\sqrt{3}\cdot 2^m\cdot\left(\sqrt[3]{p-C}\right)^2}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p-C}}{2}\cdot(t-t_0)\right) \qquad (2.1.8)$$

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\exp\left(-\sqrt[3]{p_j-C_j}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})+\sin\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\cdot(x_j-x_{0,j})\right)\right).$$

2. Этот пункт параграфа посвящен нелинейной волне, описываемой дифференциальным уравнением вида [3-А]

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-q\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-q_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n \qquad (2.1.9)$$

где $m,n\ (m,\ n>2)$- заданные натуральные числа, $t\geq t_0>0$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m$; q и $q_j\ (j=\overline{1,m})$- заданные действительные числа, $u(t,x)$- искомая функция.

Уравнение (2.1.9) является следствием уравнения (1.1.3) при

$$L=\frac{\partial^3}{\partial t^3}-q\frac{\partial}{\partial t},\qquad L_j=\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}-q_j\frac{\partial}{\partial x_j},\quad (j=\overline{1,m}) \qquad (2.1.10)$$

Для нахождения решения данного уравнения в простом классе составим переопределенную систему

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} - q\,\dfrac{d\,u}{\partial t} = C\,, \\
\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} - q_j\,\dfrac{u}{\partial x_j} = C_j\,, \quad (j = \overline{1, m}).
\end{cases}
\tag{2.1.11}
$$

Аналогично методом предыдущего параграфа, получаем решение уравнения (2.1.9):

$$
\begin{aligned}
u = \Bigg(&\frac{qu_{01} - u_{03}}{q \cdot 3^m} + \frac{qu_{02} + \sqrt{q}u_{03} - C}{2\sqrt{q^3} \cdot 3^m} \exp\left(\sqrt{q}(t - t_0)\right) - \\
&- \frac{qu_{02} - \sqrt{q}u_{03} - C}{2\sqrt{q^3} \cdot 3^m} \exp\left(-\sqrt{q}(t - t_0)\right) \times \\
&\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \exp\left(\sqrt{q_j}(x_j - x_{0,j})\right) + \exp\left(-\sqrt{q_j}(x_j - x_{0,j})\right)\right) + \\
&+ \frac{C}{q}(t - t_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0,j})\,.
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

б) Если $q = 0$, то общее решение уравнения (2.1.9) принимает вид

$$
\begin{aligned}
u = &\left(u_{01} + u_{02} \cdot (t - t_0) + \frac{u_{03}}{2} \cdot (t - t_0)^2\right) \prod_{j=1}^{m} \Big(1 + x_j - x_{0,j} + \\
&+ (x_j - x_{0,j})^2\Big) + \frac{1}{6} C \cdot (t - t_0)^3 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{m} C_j \cdot (x_j - x_{0,j})^3\,.
\end{aligned}
\tag{2.1.13}
$$

в) Если $q < 0$, то общее решение уравнения (2.1.9) принимает вид

$$
\begin{aligned}
u = \Bigg(&u_{01} + \frac{u_{03}}{q} - \frac{u_{03}}{q} \cos\sqrt{|q|}(t - t_0) + \\
&+ \left(\frac{u_{02}}{\sqrt{|q|}} + \frac{C}{q\sqrt{|q|}}\right) \sin\sqrt{|q|}(t - t_0)\Bigg) \times \\
&\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \cos\sqrt{|q_j|}(x_j - x_{0,j}) + \sin\sqrt{|q_j|}(x_j - x_{0,j})\right) - \\
&- \frac{C}{q}(t - t_0) - \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0,j}).
\end{aligned}
\tag{2.1.14}
$$

3. В этом пункте данного параграфа рассматривается нелинейная волна, описываемая дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка вида [20-А]

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - q\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} - q_j\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)^n \qquad (2.1.15)$$

где m, n $(m,\ n > 2)$ - натуральные числа, $t \ge t_0 > 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$; q и q_j $(j = \overline{1, m})$ - заданные действительные числа, $u(t, x)$ - искомая функция.

Уравнение (2.1.15) является следствием уравнения (1.1.3), при

$$L = \frac{\partial^3}{\partial t^3} - q\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ L_j = \frac{\partial^3}{\partial x_j^3} - q_j\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_j^2},\ (j = \overline{1, m}). \qquad (2.1.16)$$

Составим вспомогательную переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^2} - q\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} - q_j\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = C_j, \quad (j = \overline{1, m}), \end{cases} \qquad (2.1.17)$$

которая определяет класс простых решений уравнения (2.1.15). Задаём начальные условия (2.1.3), и получим решения данного уравнения:

а) При $q > 0$:

$$u = \left(\frac{q^3 u_{01} - q u_{03} - C}{q^3\cdot 2^m} + \frac{q^2 u_{02} - q u_{03} - C}{q^2\cdot 2^m}(t - t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{q u_{03} + C}{q^3\cdot 2^m}\exp\left(q(t - t_0)\right)\right)\prod_{j=1}^{m}\Big(1 + x_j - x_{0,j} +$$

$$+ \exp\left(q_j(x_j - x_{0,j})\right)\Big) - \frac{C}{2q}(t - t_0)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0,j})^2. \qquad (2.1.18)$$

б) При $q = 0$:

$$u=\left(u_{01}+u_{02}(t-t_0)+\frac{u_{03}}{2}(t-t_0)^2\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+x_j-x_{0,j}+(x_j-x_{0,j})^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}C(t-t_0)^3+\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{m}C_j(x_j-x_{0,j})^3. \qquad (2.1.19)$$

в) При $q<0$:

$$u=\left(\frac{q^3u_{01}-qu_{03}+C}{q^3\cdot 2^m}+\frac{q^2u_{02}+qu_{03}-C}{q^2\cdot 2^m}(t-t_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{qu_{03}-C}{q^3\cdot 2^m}\exp\left(-q(t-t_0)\right)\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+x_j-x_{0,j}+\exp\left(-q_j(x_j-x_{0,j})\right)\right)+$$

$$+\frac{C}{2q}(t-t_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0,j})^2. \qquad (2.1.20)$$

4. В этом пункте рассматривается дифференциальное уравнение вида [22-А]

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+p\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+q\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_j\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+q_j\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n \qquad (2.1.21)$$

где $m,n\ (m,n\geq 2)-$натуральные числа; $t>0$, $(x_1,x_2,...x_m)\in R^m$, $p,q,p_j,q_j\,(j=\overline{1,m})$ - действительные числа, $u(t,x_1,x_2,...x_m)$ - искомая функция.

Уравнение (2.1.21) является следствием уравнение (1.1.3) при

$$L=\frac{\partial^3}{\partial t^3}+p\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}+q\cdot\frac{\partial}{\partial t},\quad L_j=\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}+p_j\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+q_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_j},\ (j=\overline{1,m}).$$

Решения уравнения (2.1.21) будем искать в классе функций, удовлетворяющих переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} + p \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q \cdot \dfrac{\partial u}{\partial t} = C, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} + p_j \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + q_j \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x_j} = C_j, \quad (j = \overline{1, m}) \end{cases} \tag{2.1.22}$$

которая определяет класс простых решений уравнения (2.1.21). Здесь C и C_j $(j = \overline{1, m})$- произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования (1.1.6).

а) Если $p > 0$, $p_j > 0$, $q > 0$, $q_j > 0$ $(j = \overline{1, m})$, $p^2 - 4q > 0, p_j^2 - 4q_j > 0$, тогда общее решение уравнения (2.1.29) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u = \Big\{ & M_0 + N_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) \cdot (t - t_0)\right) + \\ & + P_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) \cdot (t - t_0)\right)\Big\} \prod_{j=1}^{m} \Big\{ 1 + \\ & + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j - \sqrt{p_j^2 - 4q_j}\right) \cdot (x_j - x_{0j})\right) + \\ & + \exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j + \sqrt{p_j^2 - 4q_j}\right) \cdot (x_j - x_{0j})\right)\Big\} + \\ & + \frac{C}{q}(t - t_0) + \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{q_j} \cdot (x_j - x_{0j}), \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

где $M_{0,} N_0$ и P_0 произвольные постоянные числа.

Потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) для решения вида (2.1.23), откуда следует:

$$\begin{cases} M_0=\dfrac{\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2u_{01}-q\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^4u_{02}}{2^m\cdot\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}-\\ -\dfrac{2\cdot\left(\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2-4q\right)u_{03}+4C\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}{2^m\cdot\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}, \\ N_0=\dfrac{q\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)u_{02}+2qu_{03}-C\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)}{2^m\cdot q\cdot\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)}, \\ P_0=-\dfrac{q\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)u_{02}+8q^2u_{03}+C\cdot\left(p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{2^m\cdot q\cdot\left(p^2-p\sqrt{p^2-4q}-4q\right)\cdot\left(p+\sqrt{p^2-4q}\right)^2}. \end{cases} \qquad (2.1.24)$$

б) Если $p>0,\ \mathrm{p}_j>0,\ q>0,\ \mathrm{q}_j>0\ \ (j=\overline{1,m}),\ p^2-4q=0, \mathrm{p}_j^2-4q_j=0$, тогда общее решение уравнения (2.1.21) в классе функций, удовлетворяющих систему (2.1.22), можно представить в виде

$$\begin{aligned} u=&\left\{M_1+N_1\exp\left(-\frac{1}{2}p(t-t_0)\right)+P_1(t-t_0)\exp\left(-\frac{1}{2}p(t-t_0)\right)\right\}\times\\ &\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{1}{2}p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)+\left(x_j-x_{0j}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+ \qquad (2.1.25)\\ &+\frac{C}{q}(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}), \end{aligned}$$

где M_1, N_1 и P_1 произвольные постоянные числа.

Потребуем, чтобы решения вида (2.1.25) удовлетворяли начальные условия (2.1.3), откуда следует:

$$\begin{cases} M_1=\dfrac{p^2u_{01}-2pu_{02}+8u_{03}}{2^m\cdot p^2}, \\ N_1=\dfrac{2pu_{02}+8u_{03}}{2^m\cdot p^2}, \\ P_1=\dfrac{2pu_{02}+4u_{03}}{2^m\cdot p^2}. \end{cases} \qquad (2.1.26)$$

в) Если $p>0,\ \mathrm{p}_j>0,\ q>0,\ \mathrm{q}_j>0\ \ (j=\overline{1,m}),\ \ p^2-4q<0, \mathrm{p}_j^2-4q_j<0$, то общее решение уравнения (2.1.21) в классе функций, удовлетворяющих систему (2.1.22), можно представить в виде

$$u=\left\{M_2+\exp\left(-\frac{p}{2}(t-t_0)\right)\cdot\left[N_2\cos\frac{\sqrt{|p^2-4q|}}{2}(t-t_0)+P_2\sin\frac{\sqrt{|p^2-4q|}}{2}(t-t_0)\right]\right\}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{p_j}{2}(x_j-x_{0j})\right)\cdot\left[\cos\frac{\sqrt{|p_j^2-4q_j|}}{2}(x_j-x_{0j})+\sin\frac{\sqrt{|p_j^2-4q_j|}}{2}(x_j-x_{0j})\right]\right\}+ \quad (2.1.27)$$

$$+\frac{C}{q}\cdot(t-t_0)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}\cdot(x_j-x_{0j})$$

где $M_{2,}\,N_2$ и P_2 произвольные постоянные числа.

Потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) для решения вида (2.1.27), откуда следует:

$$\begin{cases} M_2=\dfrac{q^2u_{01}+pqu_{02}+qu_{03}-Cp}{2^m\cdot q^2}, \\ N_2=\dfrac{-pqu_{02}-qu_{03}+Cp}{2^m\cdot q^2}, \\ P_2=\dfrac{q(2q-p^2)u_{02}-pqu_{03}-(2q-p^2)C}{2^m\cdot q^2}. \end{cases} \quad (2.1.28)$$

2.2. Распространение гравитационных волн в мелкой воде

В этом параграфе рассматривается дисперсия и диссипация энергии распространения волн и распространение гравитационных волн в мелкой воде. Такие процессы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных третьего порядка с переменными коэффициентами.

1. Рассмотрим гравитационные волны, которые описываются дифференциальным уравнением вида [3-А]

$$\left(t^3\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}-pt\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^3\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-p_j x_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n \qquad (2.2.1)$$

где $m,n\,(m,\,n>1)$ - натуральные числа, $t\ge t_0>0$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in R^m$; $p>0$ и $p_j>0$ $(j=\overline{1,m})$ - действительные числа, $u(t,x)$ -искомая функция.

Для решения задачи Коши для данного уравнения зададим начальные условия вида (2.1.3) и составим следующую вспомогательную переопределенную систему уравнений:

$$\begin{cases} t^3\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}-pt\dfrac{\partial u}{\partial t}=C, \\ x_j^3\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-p_j x_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_j,\ (j=\overline{1,m}), \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

которая определяет соответственно класс простых решений уравнения (2.2.1).

Из второго уравнения вспомогательной системы (2.2.2), при $j=m$, получаем:

$$x_m^3\frac{\partial^3 u}{\partial x_m^3}-p_m x_m\frac{\partial u}{\partial x_m}=C_m. \qquad (2.2.3)$$

Для однородного уравнения (2.2.3) имеем:

$$u=t^k;\ u^{/}=kt^{k-1};\ u^{//}=k(k-1)t^{k-2};\ u^{///}=k(k-1)(k-2)t^{k-3}.$$

$$k(k-1)(k-2)-p_m k=0\Rightarrow k_1=0;\ k_{2,3}=\frac{1}{2}\left(3\pm\sqrt{4p_m+1}\right).$$

а) Пусть $4p+1>0;\ 4p_j+1>0$. В этом случае решение однородного уравнения (2.2.3) будет таким:

$$u_{m.од.}=C_1+C_2\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_m+1}\right)\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)+$$
$$+C_3\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_m+1}\right)\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right). \qquad (2.2.4)$$

Теперь найдем частное решение уравнения (2.2.3):

$$u_{m.ч.}=-\frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right| \tag{2.2.5}$$

Следовательно, общее решение m-го уравнения (2.2.3) принимает вид

$$\begin{gathered}u_m=C_1+C_2\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_m+1}\right)\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)+\\+C_3\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_m+1}\right)\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)-\frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|\end{gathered} \tag{2.2.6}$$

Найдем общее решение m-го и (m-1)-го уравнения.

$$\begin{gathered}u_{m,m-1}=\left(C_1+C_2\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_{m-1}+1}\right)\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)+\right.\\\left.+C_3\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_{m-1}+1}\right)\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)\right)\times\\\times\left(1+\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_m+1}\right)\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)+\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_m+1}\right)\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)\right)-\\-\frac{C_{m-1}}{p_{m-1}-2}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|-\frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|.\end{gathered} \tag{2.2.7}$$

Продолжая этот процесс, общее решение второго и m-го уравнения можно записать в виде

$$\begin{gathered}u=\left(C_1+C_2\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_1+1}\right)\ln\left|\frac{x_1}{x_{01}}\right|\right)+\right.\\\left.+C_3\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_1+1}\right)\ln\left|\frac{x_1}{x_{01}}\right|\right)\right)\times\\\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_j+1}\right)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)+\right.\\\left.+\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_j+1}\right)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.\end{gathered} \tag{2.2.8}$$

Следовательно, общее решение системы (2.2.2) представляется в виде

$$
\begin{aligned}
u = &\left(A_0 + B_0 \exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p+1}\right)\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right) + \right.\\
&\left. + D_0 \exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p+1}\right)\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right)\times \\
&\times \prod_{j=1}^{m}\left(1 + \exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_j+1}\right)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right) + \right.\\
&\left. + \exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_j+1}\right)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right) - \\
&- \frac{C}{p-2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right| - \sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

где A_0, B_0 и D_0 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и найдем значения A_0, B_0 и D_0:

$$
\begin{cases}
A_0 = \dfrac{(p-2)^2 u_{0,1} + 3t_0(p-2)u_{0,2} - t_0^2(p-2)u_{0,3} - 4C}{3^m(p-2)^2}, \\
B_0 = \dfrac{t_0(p-2)\left(3+\sqrt{4p+1}\right)u_{0,2} - 2t_0^2(p-2)u_{0,3} + \left(5+\sqrt{4p+1}\right)C}{3^m(p-2)\sqrt{4p+1}\left(3-\sqrt{4p+1}\right)}, \\
D_0 = \dfrac{-t_0(p-2)\left(3-\sqrt{4p+1}\right)u_{0,2} + 2t_0^2(p-2)u_{0,3} - \left(5-\sqrt{4p+1}\right)C}{3^m(p-2)\sqrt{4p+1}\left(3+\sqrt{4p+1}\right)}.
\end{cases}
\tag{2.2.10}
$$

Подставляя значения A_0, B_0 и D_0 в (2.2.9) получаем:

$$u=\left(\frac{(p-2)^2u_{0,1}+3t_0(p-2)u_{0,2}-t_0^2(p-2)u_{0,3}-4C}{3^m(p-2)^2}+\right.$$

$$+\frac{t_0(p-2)\left(3+\sqrt{4p+1}\right)u_{0,2}-2t_0^2(p-2)u_{0,3}+\left(5+\sqrt{4p+1}\right)C}{3^m(p-2)\sqrt{4p+1}\left(3-\sqrt{4p+1}\right)}\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p+1}\right)\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+$$

$$+\frac{-t_0(p-2)\left(3-\sqrt{4p+1}\right)u_{0,2}+2t_0^2(p-2)u_{0,3}-\left(5-\sqrt{4p+1}\right)C}{3^m(p-2)\sqrt{4p+1}\left(3+\sqrt{4p+1}\right)}\times$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p+1}\right)\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{4p_j+1}\right)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)+\exp\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{4p_j+1}\right)\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)-$$

$$-\frac{C}{p-2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|. \qquad (2.2.11)$$

б) Пусть $4p+1=0;\ 4p_j+1=0$. В этом случае решение однородного уравнения (2.2.3) принимает вид

$$u_{m.од.}=C_1+C_2\left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}}+C_3\left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right| \qquad (2.2.12)$$

Теперь найдем частное решение уравнения (2.2.3):

$$u_{m.ч.}=-\frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right| \qquad (2.2.13)$$

Следовательно, общее решение m-го уравнения (2.2.3) принимает вид

$$u_{m.об.}=C_1+C_2\left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}}+C_3\left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|-\frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right| \qquad (2.2.14)$$

Найдем общее решение (m-1) -го и m -го уравнения:

$$u_{m.m-1}=\left(C_1+C_2\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{3}{2}}+C_3\left(\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|\right)\times$$

$$\times\left(1+\left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)- \tag{2.2.15}$$

$$-\frac{C_{m-1}}{p_{m-1}-2}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right|-\frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|.$$

Продолжая этот процесс, общее решение второго и m -го уравнения можно записать в виде

$$u=\left(C_1+C_2\left(\frac{x_1}{x_{01}}\right)^{\frac{3}{2}}+C_3\left(\frac{x_1}{x_{01}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_1}{x_{01}}\right|\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|. \tag{2.2.16}$$

Следовательно, общее решение системы (2.2.2) представляется в виде

$$u=\left(A_1+B_1\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}+D_1\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)-\frac{C}{p-2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|. \tag{2.2.17}$$

где A_1, B_1 и D_1 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и найдем значения A_1, B_1 и D_1:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{9(p-2)u_{0,1} - 8t_0(p-2)u_{0,2} + 4t_0^2(p-2)u_{0,3} + C}{9\cdot 2^m(p-2)}, \\ B_1 = \dfrac{8t_0(p-2)u_{0,2} - 4t_0^2(p-2)u_{0,3} + C}{9\cdot 2^m(p-2)}, \\ D_1 = \dfrac{-t_0(p-2)u_{0,2} + 2t_0^2(p-2)u_{0,3} - C}{3\cdot 2^m(p-2)}. \end{cases} \qquad (2.2.18)$$

Подставляя значения A_1, B_1 и D_1 в (2.2.17) получаем:

$$u = \left(\frac{9(p-2)u_{0,1} - 8t_0(p-2)u_{0,2} + 4t_0^2(p-2)u_{0,3} + C}{9\cdot 2^m(p-2)} + \right.$$

$$+ \frac{8t_0(p-2)u_{0,2} - 4t_0^2(p-2)u_{0,3} + C}{9\cdot 2^m(p-2)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$\left. + \frac{-t_0(p-2)u_{0,2} + 2t_0^2(p-2)u_{0,3} - C}{3\cdot 2^m(p-2)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}} \ln\left|\frac{t}{t_0}\right| \right) \times \qquad (2.2.19)$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}} \ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right| \right) - \frac{C}{p-2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right| - \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{p_j - 2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.$$

в) Пусть $4p+1<0;\ 4p_j+1<0$. В этом случае решение однородного уравнения (2.2.3) будет таким:

$$u_{m.од.} = C_1 + \left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(C_2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_m+1}\cdot \ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right) + \right.$$

$$\left. + C_3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_m+1}\cdot \ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)\right). \qquad (2.2.20)$$

Теперь найдем частное решение уравнения (2.2.3):

$$u_{m.ч.} = -\frac{C_m}{p_m - 2}\cdot \ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|. \qquad (2.2.21)$$

Следовательно, общее решение m-го уравнения (2.2.3) принимает вид

$$u_m = C_1 + \left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(C_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_m+1}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right) + \right.$$

$$\left. + C_3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_m+1}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)\right) - \frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|. \tag{2.2.22}$$

Найдем общее решение m-го и (m-1)-го уравнения:

$$u_{m,m-1} = \left(C_1 + \left(\frac{x_{m-1}}{x_{0m-1}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(C_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_{m-1}+1}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0m-1}}\right|\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_{m-1}+1}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0m-1}}\right|\right)\right)\right) \times$$

$$\times \left(1 + \left(\frac{x_m}{x_{0m}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_m+1}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_m+1}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0m}}\right|\right)\right)\right) - \tag{2.2.23}$$

$$- \frac{C_{m-1}}{p_{m-1}-2}\ln\left|\frac{x_{m-1}}{x_{0,m-1}}\right| - \frac{C_m}{p_m-2}\ln\left|\frac{x_m}{x_{0,m}}\right|.$$

Продолжая этот процесс, общее решения второго и m -го уравнения можно записать в виде

$$u = \left(C_1 + \left(\frac{x_1}{x_{0,1}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(C_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_1+1}\ln\left|\frac{x_1}{x_{0,1}}\right|\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_1+1}\ln\left|\frac{x_1}{x_{0,1}}\right|\right)\right)\right) \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_j+1}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_j+1}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)\right) - \tag{2.2.24}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.$$

Следовательно, общее решение системы (2.2.2) представляется в виде

$$u=\left(A_2+\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(B_2\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p+1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+D_2\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p+1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right)\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_j+1}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_j+1}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)\right) \qquad (2.2.25)$$

$$-\frac{C}{p-2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.$$

где A_2, B_2 и D_2 произвольные постоянные. Потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и найдем значения этих постоянных:

$$\begin{cases} A_2=\dfrac{u_{0,1}}{2^m}-\dfrac{3t_0u_{0,2}-C}{2^m(p+4)}+\dfrac{t_0^2u_{0,3}}{2^m(p+4)}+ \\ +\dfrac{4C}{2^m(p+4)(p-2)}, \\ B_2=\dfrac{3t_0(p-2)u_{0,2}-t_0^2(p-2)u_{0,3}+4C}{2^m(p+4)(p-2)}, \\ D_2=\dfrac{t_0(2p-1)u_{0,2}+3t_0^2u_{0,3}+2C}{2^m(p+4)\sqrt{|4p+1|}}. \end{cases} \qquad (2.2.26)$$

Подставляя значения A_2, B_2 и D_2 в (2.2.25) получаем:

$$u=\left\{\frac{u_{0,1}}{2^m}-\frac{3t_0u_{0,2}-C}{2^m(p+4)}+\frac{t_0^2u_{0,3}}{2^m(p+4)}+\frac{4C}{2^m(p+4)(p-2)}+\right.$$

$$+\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3t_0(p-2)u_{0,2}-t_0^2(p-2)u_{0,3}+4C}{2^m(p+4)(p-2)}\times\right.$$

$$\times\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p+1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)+\frac{t_0(2p-1)u_{0,2}+3t_0^2u_{0,3}+2C}{2^m(p+4)\sqrt{|4p+1|}}\times$$

$$\left.\left.\times\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p+1}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right)\right\}\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\left(\frac{x_j}{x_{0j}}\right)^{\frac{3}{2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_j+1}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4p_j+1}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)\right\}-$$

$$-\frac{C}{p-2}\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|-\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j-2}\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|. \qquad (2.2.27)$$

2. В этом пункте рассмотрим дисперсию и диссипацию энергии распространения волн и гравитационных волн в мелкой воде, которые описываются дифференциальным уравнением вида [3-А]

$$\left(t^3\frac{\partial^3u}{\partial t^3}-pt^2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(x_j^3\frac{\partial^3u}{\partial x_j^3}-p_jx_j^2\frac{\partial^2u}{\partial x_j^2}\right)^n \qquad (2.2.28)$$

где $m,n\ (m,\ n>1)$- натуральные числа, $t\ge t_0>0$, $p>0$ и $p_j>0\ (j=\overline{1,m})$- заданные действительные числа, $u(t,x)$-искомая функция.

Для решения задачи Коши зададим начальные условия вида (2.1.3) и составим следующую вспомогательную переопределенную систему уравнений:

$$\begin{cases}t^3\dfrac{\partial^3u}{\partial t^3}-pt^2\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=C,\\ x_j^3\dfrac{\partial^3u}{\partial x_j^3}-p_jx_j^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x_j^2}=C_j,\ (j=\overline{1,m}),\end{cases} \qquad (2.2.29)$$

которая определяет соответственно класс простых решений уравнения (2.2.28).

Аналогично уравнению предыдущего пункта получаем решение:

$$u=\left(u_{0,1}-u_{0,2}t_0+\frac{u_{0,3}t_0^2}{p+2}+\frac{C}{p+1}+\left(u_{0,2}t_0-\frac{u_{0,3}t_0^2}{p+1}-\frac{C}{p+1}\right)\times\right.$$

$$\left.\left|\frac{t}{t_0}\right|+\frac{u_{0,3}t_0^2(p+2)+C}{(p+1)(p+2)}\cdot\exp\left((p+2)\cdot\ln\left|\frac{t}{t_0}\right|\right)\right)\times \tag{2.2.30}$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|+\exp\left((p_j+2)\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0j}}\right|\right)\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j+2}\cdot\ln\left|\frac{x_j}{x_{0,j}}\right|.$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$- являются решением уравнения согласования (1.1.6). Тогда решение уравнения (2.2.28), удовлетворяющее условиям (2.1.3), соответственно переопределённой системы (2.2.29) представляется в виде (2.2.30).

2.3. Распространение гравитационных волн с вырождениями

В этом параграфе главы рассматриваются процессы распространения гравитационных волн с вырождениями, которые характеризуются дифференциальными уравнениями в частных производных третьего порядка.

1. Рассмотрим процессы, которые описываются уравнением [7-А]

$$\left(\frac{1}{u}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n \tag{2.3.1}$$

где $m,n\ (m,\ n>1)$- заданные натуральные числа, $t\ge t_0>0$, $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$ и $u(t,x)$- искомая функция.

Уравнение (2.3.1) является следствием уравнения (1.1.3) при

$$L=\frac{1}{u}\frac{\partial^3}{\partial t^3},\quad L_j=\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}-q_j\frac{\partial}{\partial x_j},\quad (j=\overline{1,m}).\tag{2.3.2}$$

Для нахождения решений уравнения (2.3.1) зададим начальные условия вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределенную систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}=C,\\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}-q_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_j,\ (j=\overline{1,m}),\end{cases}\tag{2.3.3}$$

которая определяют соответственно класс простых решений уравнения (2.3.1).

Аналогично предыдущим параграфам находим решения данного уравнения:

а) При $q_j>0$:

$$u=\frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01}+\sqrt[3]{C}u_{02}+u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right)+\exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01}-\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1+\exp\left(\sqrt{q_j}(x_j-x_{0,j})\right)+\exp\left(-\sqrt{q_j}(x_j-x_{0,j})\right)\right)+\tag{2.3.4}$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0,j}).$$

б) При $q_j = 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01} + \sqrt[3]{C}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2} \cdot 2^m} \exp\left(\sqrt[3]{C}(t - t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t - t_0)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01} - \sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2} \cdot 2^m} \cos \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t - t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2} \cdot 2^m} \sin \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t - t_0) \right) \times \tag{2.3.5}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + x_j - x_{0,j} + (x_j - x_{0,j})^2\right) + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{m} C_j (x_j - x_{0,j})^3.$$

в) При $q_j < 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01} + \sqrt[3]{C}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2} \cdot 2^m} \exp\left(\sqrt[3]{C}(t - t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t - t_0)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01} - \sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2} \cdot 2^m} \cos \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t - t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2} \cdot 2^m} \sin \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t - t_0) \right) \times \tag{2.3.6}$$

$$\times \prod_{j=1}^{m} \left(1 + \cos\sqrt{|q_j|}(x_j - x_{0,j}) + \sin\sqrt{|q_j|}(x_j - x_{0,j})\right) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0,j}).$$

2. Рассмотрим процесс распространения гравитационных волн, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка вида [37-А]

$$\left(\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + u\right)\right)^n = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} - q_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)^n, \tag{2.3.7}$$

где m, n $(m,\ n > 1)$ - заданные натуральные числа, $t \ge t_0 > 0$, $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ и $u(t, x)$ - искомая функция.

Уравнение (2.3.7) является следствием уравнения (1.1.3) при

$$L = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} + 1\right); \quad L_j = \frac{\partial^3}{\partial x_j^3} - q_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}; \quad (j = \overline{1, m}). \tag{2.3.8}$$

Для нахождения решений уравнения (2.3.7) сначала зададим начальные условия вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределенную систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{1}{u}\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} + u\right) = C, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} + q_j \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = C_j, \ (j = \overline{1, m}), \end{cases} \tag{2.3.9}$$

которая определяют соответственно класс простых решений уравнения (2.3.7).

Аналогично уравнению предыдущего пункта получаем:

а) При $q_j > 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01} + \sqrt[3]{C-1}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2} \cdot 2^m} \exp\left(\sqrt[3]{C-1}(t-t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0)\right) \times$$
$$\times \left(\frac{2\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01} - \sqrt[3]{C-1}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2} \cdot 2^m} \cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0) + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt[3]{C-1}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{(C-1)^2} \cdot 2^m} \sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0)\right) \times \tag{2.3.10}$$
$$\times \prod_{j=1}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j} + \exp\left(q_j(x_j - x_{0,j})\right)\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0,j})^2.$$

б) При $q_j = 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01} + \sqrt[3]{C-1}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C-1}(t-t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01} - \sqrt[3]{C-1}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{C-1}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0)\right)\times \tag{2.3.11}$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j} + (x_j - x_{0,j})^2\right) + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{m} C_j (x_j - x_{0,j})^3.$$

в) При $q_j < 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01} + \sqrt[3]{C-1}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C-1}(t-t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01} - \sqrt[3]{C-1}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{C-1}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}(t-t_0)\right)\times \tag{2.3.12}$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left(1 + x_j - x_{0,j} + \exp\left(-q_j (x_j - x_{0,j})\right)\right) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0,j})^2.$$

3. В этом пункте рассмотрим процесс распространения гравитационных волн, который описываются дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка вида [31-А]

$$\left(\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + u\right)\right)^n = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} - p_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + q_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n \tag{2.3.13}$$

где m, n $(m,\ n > 1)$ - заданные натуральные числа, $t \ge t_0 > 0$, $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ и $u(t,x)$ - искомая функция.

Уравнение (2.3.13) является следствием уравнения(1.1.3) при

$$L=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}+1\right),\quad L_j=\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}+p_j\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+q_j\frac{\partial}{\partial x_j},\quad (j=\overline{1,m}) \tag{2.3.14}$$

Для нахождения решений уравнения (2.3.13) используем начальные условия вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределенную систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{u}\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}+u\right)=C, \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_j\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+q_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_j,\ (j=\overline{1,m}),\end{cases} \tag{2.3.15}$$

которая определяют соответственно класс простых решений уравнения (2.3.13).

Аналогично уравнению предыдущего пункта получаем:

а) При $p_j>0, q_j>0\ \ (j=\overline{1,m})$ и $p_j^2-4q_j>0$:

$$\begin{aligned}u=&\frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01}+\sqrt[3]{C}u_{02}+u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right)+\exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times\\ &\times\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01}-\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)+\right.\\ &\left.+\frac{\sqrt[3]{C}u_{02}-u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times\\ &\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j-\sqrt{p_j^2-4q_j}\right)\left(x_j-x_{0j}\right)\right)+\right.\\ &\left.+\exp\left(-\frac{1}{2}\left(p_j+\sqrt{p_j^2-4q_j}\right)\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j-x_{0j}).\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

б) При $p_j > 0, q_j > 0 \quad (j = \overline{1,m})$ и $p_j^2 - 4q_j = 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01} + \sqrt[3]{C}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01} - \sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1 + \exp\left(-\frac{1}{2}p_j\left(x_j - x_{0j}\right)\right) + \left(x_j - x_{0j}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}p_j\left(x_j - x_{0j}\right)\right)\right\} + \tag{2.3.17}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0j}).$$

в) При $p_j > 0, q_j > 0 \quad (j = \overline{1,m})$ и $p_j^2 - 4q_j < 0$:

$$u = \frac{\sqrt[3]{C^2}u_{01} + \sqrt[3]{C}u_{02} + u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\exp\left(\sqrt[3]{C}(t-t_0)\right) + \exp\left(-\frac{\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{2\sqrt[3]{C^2}u_{01} - \sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{3\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0) + \frac{\sqrt[3]{C}u_{02} - u_{03}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{C^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C}}{2}(t-t_0)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1 + \exp\left(-\frac{p_j}{2}(x_j - x_{0j})\right)\times\right. \tag{2.3.18}$$

$$\left.\times\left[\cos\frac{\sqrt{\left|p_j^2 - 4q_j\right|}}{2}(x_j - x_{0j}) + \sin\frac{\sqrt{\left|p_j^2 - 4q_j\right|}}{2}(x_j - x_{0j})\right]\right\} + \sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{q_j}(x_j - x_{0j}).$$

Имеет место следующая теорема:

Теорема. Пусть C и $C_j \ (j = \overline{1,m})$ - являются решением уравнения согласования (1.1.5). Тогда решения уравнения (2.3.13) в простом классе, удовлетворяющие условиям (2.1.3), соответственно переопределённых систем (2.3.15), представляются в видах (2.3.16), (2.3.17), (2.3.18).

2.4. Модели описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных четвертого порядка

1. В этом пункте данного параграфа рассматриваются волновые процессы, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n, \qquad (2.4.1)$$

Пусть $u(t,x)$ - характеризует состояние изменения некоторого объекта в точке x за момент времени t, а

$$L=\frac{\partial^4}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad L_j=\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (i=\overline{1,m}) \qquad (2.4.2)$$

- некоторые дифференциальные операторы, осуществляющие изменение состояния этого объекта. Тогда в самых общих случаях такие физические процессы приводят к модельному уравнению с экстремальными свойствами вида (1.1.2),

При заданных дифференциальных операторах (2.4.2) уравнение (2.4.1) также эквивалентно операторному уравнению (1.1.3).

Чтобы решить задачу Коши для уравнения (2.4.1) используем начальные условия (2.1.3) и составим вспомогательную переопределённую систему уравнений вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C,\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\dfrac{\partial u}{\partial x_j}=C_j,\ \left(j=\overline{1,m}\right),\end{cases} \qquad (2.4.3)$$

который определяет соответственно решений уравнения (2.4.1) в простом классе. Здесь C и C_j $(j=\overline{1,m})$ - произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования (1.1.7).

При нахождение общего решения системы (2.4.3), которое является общим решением уравнения (2.4.1), получаем два случая:

1. При $p>0$ получаем решение в виде

$$u=\left\{A_0+B_0(t-t_0)+C_0\cos\sqrt{p}(t-t_0)+D_0\sin\sqrt{p}(t-t_0)\right\}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\left(x_j-x_{0j}\right), \tag{2.4.4}$$

где A_0,B_0,C_0,D_0 - произвольные постоянные.

Потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и находим значения этих постоянных:

$$A_0=\frac{pu_{01}+u_{03}}{p\cdot 2^m},\quad B_0=\frac{pu_{02}+u_{04}}{p\cdot 2^m},\quad C_0=-\frac{u_{03}}{p\cdot 2^m},\quad D_0=-\frac{u_{04}}{p\sqrt{p}\cdot 2^m}. \tag{2.4.5}$$

Подставляя найденные значения постоянных (2.4.5) в (2.4.4) получаем:

$$u=\left\{\frac{pu_{01}+u_{03}}{p\cdot 2^m}+\frac{pu_{02}+u_{04}}{p\cdot 2^m}(t-t_0)-\frac{u_{03}}{p\cdot 2^m}\cos\sqrt{p}(t-t_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{u_{04}}{p\sqrt{p}\cdot 2^m}\sin\sqrt{p}(t-t_0)\right\}\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\left(x_j-x_{0j}\right), \tag{2.4.6}$$

2. При $p<0$ получаем решение в виде

$$u=\left\{A_1+B_1(t-t_0)+C_1\exp\left(\sqrt{|p|}(t-t_0)\right)+D_1\exp\left(\sqrt{|p|}(t-t_0)\right)\right\}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\left(x_j-x_{0j}\right), \tag{2.4.7}$$

где A_1,B_1,C_1,D_1 - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (3.1.5) и находим значения постоянных:

$$A_1=\frac{u_{01}\cdot 2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}-u_{03}\cdot 2^{m+1}\sqrt{|p|}}{2^{2m+1}|p|\sqrt{|p|}},\quad B_1=\frac{u_{02}\left(2^{m+1}|p|+2^m\right)-u_{04}2^m}{2^{2m+1}|p|},$$
$$C_1=\frac{u_{03}\sqrt{|p|}+u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}},\quad D_1=\frac{u_{03}\sqrt{|p|}-u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}}. \tag{2.4.8}$$

Подставляя найденные значения (2.4.8) в (2.4.7) получаем:

$$u=\left\{\frac{u_{01}\cdot 2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}-u_{03}\cdot 2^{m+1}\sqrt{|p|}}{2^{2m+1}|p|\sqrt{|p|}}+\frac{u_{02}\left(2^{m+1}|p|+2^m\right)-u_{04}2^m}{2^{2m+1}|p|}\left(t-t_0\right)+\right.$$

$$+\frac{u_{03}\sqrt{|p|}+u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}}\exp\left(\sqrt{|p|}\left(t-t_0\right)\right)+\frac{u_{03}\sqrt{|p|}-u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}}\exp\left(\sqrt{|p|}\left(t-t_0\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+\exp\left(-p_j\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\}+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{p_j}\left(x_j-x_{0j}\right),\qquad(2.4.9)$$

2. Этот пункт данного параграфа посвящен волновым процессам, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка вида [44-А]

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+qu\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_ju\right)^n.\qquad(2.4.10)$$

Следствием уравнения (1.1.3), при дифференциальных операторах

$$L=\frac{\partial^4}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2}{\partial t^2}+q \quad \text{и} \quad L_j=\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}+p_j,\quad (i=\overline{1,m}),$$

является модельное дифференциальное уравнение (2.4.10).

Составим переопределенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+qu=Cu,\\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_j^3}+p_ju=C_ju,\ (j=\overline{1.m}),\end{cases}\qquad(2.4.11)$$

которая определяет класс экспоненциальных решений уравнения (2.4.10). Напишем общее решение системы (2.4.11), которое является общим решением уравнения (2.4.10) в экспоненциальном классе. Для этого существует три случая:

1. Пусть $q-C<0, \mathrm{q}_j-C_j<0\ (j=\overline{1m})$. Тогда общее решение уравнения (2.4.10) в классе функций, удовлетворяющих систему (2.4.11), представляется в виде:

$$
\begin{aligned}
u(t,x_1,x_2,\ldots x_m) = &\left\{ A_2 \exp\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p^2-4(q-C)}-p}{2}}(t-t_0)\right] + \right. \\
&+ B_2 \exp\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2-4(q-C)}-p}{2}}(t-t_0)\right] + D_2 \cos\left[\sqrt{\frac{\sqrt{p^2-4(q-C)}+p}{2}}(t-t_0)\right] + \\
&\left. + E_2 \sin\left[-\sqrt{\frac{\sqrt{p^2-4(q-C)}+p}{2}}(t-t_0)\right]\right\} \prod_{j=1}^{m} \left\{ e^{-\sqrt[3]{p_j-C_j}\left(x_j-x_{0j}\right)} + e^{\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})} \times \right. \\
&\left. \times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j}) + \sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}\left(x_j-x_{0j}\right)\right)\right\},
\end{aligned}
\tag{2.4.12}
$$

где $A_2,\ B_2,\ D_2, E_2$ произвольные постоянные числа.

Потребуем, чтобы решения вида (2.4.12) удовлетворяли начальным условиям (2.1.3), откуда легко следует, что

$$
A_2 = \frac{(\sqrt{p^2-4(q-C)}+p)(u_{01}\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}-p}+\sqrt{2}u_{02})}{4\cdot 3^m\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)}} +
$$

$$
+\frac{2u_{03}\sqrt{\sqrt{p^2+4(q-C)}-p}+2\sqrt{2}u_{04}}{4\cdot 3^m\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)}};
$$

$$
B_2 = \frac{(\sqrt{p^2-4(q-C)}+p)(u_{01}\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}-p}-\sqrt{2}u_{02})}{4\cdot 3^m\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)}} +
$$

$$
+\frac{2u_{03}\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}-p}-2\sqrt{2}u_{04}}{4\cdot 3^m\sqrt{\sqrt{p^2-4(q-C)}(\sqrt{p^2+4(q-C)}-p)}};
$$

$$
D_2 = \frac{(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)u_{01}-2u_{03}}{2\cdot 3^m\sqrt{p^2-4(q-C)}};
$$

$$
E_2 = \frac{(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)u_{02}-2u_{04})}{3^m\sqrt{2\sqrt{p^2-4(q-C)}(\sqrt{p^2-4(q-C)}+p)}}.
$$

2. Пусть $q-C=0$, $q_j-C_j=0\,(j=\overline{1m})$. Тогда, как и раньше, решение уравнения (2.4.10) с учетом начальных условий (2.1.3) переставляется в виде

$$u=\begin{cases}\left\{A_1+B_1(t-t_0)+D_0\cos\left[\sqrt{p}(t-t_0)\right]+E_1\sin\left[\sqrt{p}(t-t_0)\right]\right\}\times\\ \times\prod_{j=1}^{m}\left\{e^{-\sqrt[3]{p_j-C_j}\left(x_j-x_{0j}\right)}+e^{\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})}\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})+\right.\right.\\ \left.\left.+\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})\right)\right\}, \quad при \quad p>0,\ \ p_j>0\ (j=\overline{1,m});\\ \left\{A_2+B_2(t-t_0)+D_2\exp\left[\sqrt{|p|}(t-t_0)\right]+E_2\exp\left[\sqrt{|p|}(t-t_0)\right]\right\}\times\\ \times\prod_{j=1}^{m}\left\{e^{-\sqrt[3]{p_j-C_j}\left(x_j-x_{0j}\right)}+e^{\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})}\cdot\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})+\right.\right.\\ \left.\left.+\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})\right)\right\}, \quad при \quad p<0,\ \ p_j<0\ (j=\overline{1,m}),\end{cases} \tag{2.4.13}$$

где

$$A_1=\frac{u_{01}\sqrt{p}+u_{03}}{2^m\sqrt{p}},\ B_1=\frac{u_{02}\,p+u_{04}}{2^m\,p},\ D_1=-\frac{u_{03}}{2^m\sqrt{p}},\ E_1=-\frac{u_{04}}{2^m\,p\sqrt{p}},$$

$$A_2=\frac{u_{01}|p|-u_{03}}{3^m|p|},B_2=\frac{u_{02}|p|-u_{04}}{3^m|p|},D_2=\frac{u_{03}|p|+u_{04}}{3^m2|p|\sqrt{|p|}},E_2=\frac{u_{03}\sqrt{|p|}-u_{04}}{3^m2|p|\sqrt{|p|}}.$$

3. Пусть $q-C>0;\ q_j-C_j>0,(j=\overline{1m})$. Тогда, аналогично решение уравнения (2.4.10) с учетом начальных условий (2.1.3) представляется в виде

$$u=\left\{A_3\cos\left[\sqrt{\frac{p-\sqrt{p^2-4(q-C)}}{2}}(t-t_0)\right]+B_3\sin\left[\sqrt{\frac{p-\sqrt{p^2-4(q-C)}}{2}}(t-t_0)\right]+\right.$$

$$\left.+D_3\cos\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2-4(q-C)}}{2}}(t-t_0)\right]+E_3\sin\left[\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2-4(q-C)}}{2}}(t-t_0)\right]\right\}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{e^{-\sqrt[3]{p_j-C_j}\left(x_j-x_{0j}\right)}+e^{\frac{\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})}\times\right. \tag{2.4.14}$$

$$\left.\times\left(\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})+\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{p_j-C_j}}{2}(x_j-x_{0j})\right)\right\},$$

где

$$A_3=\frac{u_{01}(\sqrt{p^2-4(q-C)}+p)+2u_{03}}{2^{m+1}\cdot\sqrt{p^2-4(q-C)}},$$

$$B_3=\frac{u_{02}(\sqrt{p^2-4(q-C)}+p)+2u_{04}}{2^m\cdot\sqrt{2(p^2-4(q-C)(p-\sqrt{p^2-4(q-C)}}},$$

$$D_3=\frac{u_{01}(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)-2u_{03}}{2^{m+1}\cdot\sqrt{p^2-4(q-C)}},$$

$$E_3=\frac{u_{02}(\sqrt{p^2-4(q-C)}-p)-2u_{04}}{2^m\cdot\sqrt{2(p^2-4(q-C)(p-\sqrt{p^2-4(q-C)}}}$$

2.5 Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных пятого порядка и процессы описываемыми ими

1. В этом пункте исследуется модель волновых процессов, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных пятого порядка с постоянными коэффициентами вида [39-А]

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}\right), \tag{2.5.1}$$

где $m, n \ (m, n > 1)$ - заданные натуральные числа, $t \geq t_0 > 0$, $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ - заданные действительные числа, $u(t, x)$ - искомая функция.

Пусть $u(t, x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке x за момент времени t, а $L = \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ и $L_j = \dfrac{\partial^5}{\partial x_j^5} + p_j \dfrac{\partial^4}{\partial x_j^4}, \quad (i = \overline{1, m})$ - некоторые операторы, осуществляющие изменение состояния этого объекта. Исследование таких процессов приводят к модельному уравнению с экстремальными свойствами вида (1.1.2).

Для данного уравнения (2.5.1) потребуем выполнение начальных условий вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределённую систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} = C, \\ \dfrac{\partial^5 u}{\partial x_j^5} + p_j \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_j^4} = C_j, \left(j = \overline{1, m}\right), \end{cases} \tag{2.5.2}$$

который определяет соответственно решений уравнения (2.5.1). Здесь C и C_j $(j = \overline{1, m})$ произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования (1.1.7).

Теперь напишем общее решение системы (2.5.2), которое является решением уравнения (2.5.1):

$$u = \left\{M + N(t - t_0) + P(t - t_0)^2 + Ke^{-p(t - t_0)}\right\}\prod_{j=1}^{m}\left\{1 + x_j - x_{0j} + \right.$$
$$\left. + \left(x_j - x_{0j}\right)^2 + \left(x_j - x_{0j}\right)^3 + e^{-p_j\left(x_j - x_{0j}\right)} + \frac{C_j}{4!\,p_j}\left(x_j - x_{0j}\right)^4\right\}, \tag{2.5.3}$$

где M, N, P, K - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и находим значения этих постоянных:

$$M = \frac{p^3 u_{01} + u_{04}}{p^3 \cdot 2^m}, \ \ N = \frac{p^2 u_{02} - u_{04}}{p^2 \cdot 2^m}, \ \ P = \frac{p u_{03} + u_{04}}{p \cdot 2^{m+1}}, \ \ K = -\frac{u_{04}}{p^3 \cdot 2^m}. \tag{2.5.4}$$

Подставляя найденных значений постоянных (2.5.4) в (2.5.3) получаем:

$$u=\left\{\frac{p^3u_{01}+u_{04}}{p^3\cdot 2^m}+\frac{p^2u_{02}-u_{04}}{p^2\cdot 2^m}(t-t_0)+\frac{pu_{03}+u_{04}}{p\cdot 2^{m+1}}(t-t_0)^2-\frac{u_{04}}{p^3\cdot 2^m}e^{-p(t-t_0)}\right\}$$
$$\prod_{j=1}^{m}\left\{1+x_j-x_{0j}+(x_j-x_{0j})^2+(x_j-x_{0j})^3+e^{-p_j(x_j-x_{0j})}+\frac{C_j}{4!\,p_j}(x_j-x_{0j})^4\right\}, \quad (2.5.5)$$

2. В этом пункте рассматривается модель волновых процессов, которые описываются дифференциальным уравнением вида [38-А]

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}\right). \quad (2.5.6)$$

Пусть $u(t,x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке x в момент времени t, а $L=\frac{\partial^4}{\partial t^4}$ и $L_j=\frac{\partial^5}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4}{\partial x_j^4}$, $(i=\overline{1,m})$ - некоторые операторы, осуществляющие изменение состояния этого объекта. Тогда в самых общих случаях такие физические процессы приводят к модельному уравнению с экстремальными свойствами вида (3.1.3).

Для нахождения решений задачи Коши для рассматриваемого процесса задаём начальные условия вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределённую систему уравнений вида

$$\begin{cases}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=C,\\ \frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}=C_j,\ (j=\overline{1,m}),\end{cases} \quad (2.5.7)$$

который определяет соответственно решений уравнения (2.5.6) в простом классе.

Напишем общее решение системы (2.5.7), которое является решением уравнения (2.5.6):

$$u=\left\{M_1e^{\sqrt[4]{p}(t-t_0)}+M_2e^{-\sqrt[4]{p}(t-t_0)}+M_3\cos\sqrt[4]{p}(t-t_0)+\right.$$
$$\left.+M_4\sin\sqrt[4]{p}(t-t_0)\right\}\prod_{j=1}^{m}\left\{1+x_j-x_{0j}+(x_j-x_{0j})^2+\right. \quad (2.5.8)$$
$$\left.+(x_j-x_{0j})^3+e^{-p_j(x_j-x_{0j})}+\frac{C_j}{4!\,p_j}(x_j-x_{0j})^4\right\},$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и получаем:

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{\sqrt[4]{p^3}u_{01} + \sqrt{p}u_{03} + \sqrt{p}u_{02} - u_{04}}{\sqrt[4]{p^3} \cdot 2^{m+2}} \\ M_2 = \dfrac{\sqrt[4]{p^3}u_{01} + \sqrt{p}u_{03} - \sqrt{p}u_{02} + u_{04}}{\sqrt[4]{p^3} \cdot 2^{m+2}} \\ M_3 = \dfrac{\sqrt{p}u_{01} - u_{03}}{\sqrt{p} \cdot 2^{m+1}} \\ M_4 = \dfrac{\sqrt{p}u_{02} - u_{04}}{\sqrt[4]{p^3} \cdot 2^{m+1}} \end{cases} \tag{2.5.9}$$

3. В этом пункте рассматривается модель волнового процесса, который описывается дифференциальным уравнением вида [40-А]

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5} + p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}\right). \tag{2.5.10}$$

Пусть $u(t,x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке x за момент времени t, а $L = \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $L_j = \dfrac{\partial^5}{\partial x_j^5} + p_j\dfrac{\partial^4}{\partial x_j^4}$, $(i = \overline{1,m})$ - некоторые операторы, осуществляющие изменение состояния этого объекта.

Для нахождения решения данного уравнения задаём начальные условия вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределённую систему уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\dfrac{\partial u}{\partial t} = C, \\ \dfrac{\partial^5 u}{\partial x_j^5} + p_j\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_j^4} = C_j, \left(j = \overline{1,m}\right), \end{cases} \tag{2.5.11}$$

которая определяет соответственно решений уравнения (2.5.10).

Напишем общее решение системы (2.5.11), которое является решением уравнения (2.5.10):

$$u=\left\{N_1+N_2e^{-\sqrt[3]{p}(t-t_0)}+e^{\frac{\sqrt[3]{p}}{2}(t-t_0)}\left[N_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{p}(t-t_0)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+N_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{p}(t-t_0)\right]+N_5(t-t_0)\right\}\sum_{j=1}^{m}\left\{1+x_j-x_{0j}+(x_j-x_{0j})^2+\right. \qquad (2.5.12)$$

$$\left.+(x_j-x_{0j})^3+e^{-p_j(x_j-x_{0j})}+\frac{C_j}{4!\,p_j}(x_j-x_{0j})^4\right\},$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и находим значения этих постоянных:

$$N_1=\frac{\left(1+\sqrt[3]{p}-3p\sqrt[3]{p}+3p\right)u_{01}+\left(2\sqrt[3]{p^2}-4p\right)u_{02}-6\sqrt[3]{p^2}u_{03}}{4p\left(1+\sqrt[3]{p}\right)\cdot 2^m},$$

$$N_2=\frac{\left(7\sqrt[3]{p^2}-\sqrt[3]{p}-7p-1\right)u_{01}+\left(2\sqrt[3]{p^2}+4p\right)u_{02}-2\sqrt[3]{p^2}u_{03}}{4p\left(1+\sqrt[3]{p}\right)\cdot 2^m},$$

$$N_3=\frac{\left(7p\sqrt[3]{p}-7\sqrt[3]{p^2}+8p\right)u_{01}-8pu_{02}-4\sqrt[3]{p^2}u_{03}}{4p\left(1+\sqrt[3]{p}\right)\cdot 2^m}, \qquad (2.5.13)$$

$$N_4=\frac{\left(-7\sqrt{3}p\sqrt[3]{p^2}-22\sqrt{3}p\sqrt[3]{p}-2\sqrt{3}\sqrt[3]{p^2}+21\sqrt{3}p\right)u_{01}}{4\sqrt{3}p\sqrt[3]{p}\left(1+\sqrt[3]{p}\right)\cdot 2^m}+$$

$$+\frac{\left(16\sqrt{3}p\sqrt[3]{p}+8p\sqrt[3]{p}+4\sqrt{3}p+8p\right)u_{02}}{4\sqrt{3}p\sqrt[3]{p}\left(1+\sqrt[3]{p}\right)\cdot 2^m}.$$

4. В этом пункте рассматривается модель волнового процесса, который описывается дифференциальным уравнением вида [6-А]

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}\right). \qquad (2.5.14)$$

Пусть $u(t,x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке x за момент времени t, а $L=\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+p\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $L_j=\frac{\partial^5}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4}{\partial x_j^4}$, $(i=\overline{1,m})$ - некоторые операторы, осуществляющие изменение состояния этого объекта.

Для нахождения решения данного уравнения задаём начальные условия вида (2.1.3) и составим вспомогательную переопределённую систему уравнений вида

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4} + p\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C, \\
\dfrac{\partial^5 u}{\partial x_j^5} + p_j \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_j^4} = C_j, \left(j = \overline{1,m}\right),
\end{cases}
\tag{2.5.15}
$$

которая определяет соответственно решений уравнения (2.5.14).

При нахождение общего решения системы (2.5.15), которое является общим решением уравнения (2.5.14), получаем два случая:

1. При $p > 0$ получаем решение в виде

$$
\begin{gathered}
u = \left\{M_1 + M_2(t - t_0) + M_3 \cos\sqrt{p}(t - t_0) + M_4 \sin\sqrt{p}(t - t_0)\right\} \times \\
\times \prod_{j=1}^{m} \left\{1 + x_j - x_{0j} + \left(x_j - x_{0j}\right)^2 + \left(x_j - x_{0j}\right)^3 + \right. \\
\left. + e^{-p_j\left(x_j - x_{0j}\right)} + \frac{C_j}{4!\,p_j}\left(x_j - x_{0j}\right)^4\right\},
\end{gathered}
\tag{2.5.16}
$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и находим значения этих постоянных:

$$
M_1 = \frac{pu_{01} + u_{03}}{p \cdot 2^m}, \quad M_2 = \frac{pu_{02} + u_{04}}{p \cdot 2^m}, \quad M_3 = -\frac{u_{03}}{p \cdot 2^m}, \quad M_4 = -\frac{u_{04}}{p\sqrt{p} \cdot 2^m}. \tag{2.5.17}
$$

Подставляя найденные значения постоянных в (2.5.16), получаем:

$$
\begin{gathered}
u = \left\{\frac{pu_{01} + u_{03}}{p \cdot 2^m} + \frac{pu_{02} + u_{04}}{p \cdot 2^m}(t - t_0) - \frac{u_{03}}{p \cdot 2^m}\cos\sqrt{p}(t - t_0) - \right. \\
\left. - \frac{u_{04}}{p\sqrt{p} \cdot 2^m}\sin\sqrt{p}(t - t_0)\right\} \prod_{j=1}^{m} \left\{1 + x_j - x_{0j} + \left(x_j - x_{0j}\right)^2 + \right. \\
\left. + \left(x_j - x_{0j}\right)^3 + e^{-p_j\left(x_j - x_{0j}\right)} + \frac{C_j}{4!\,p_j}\left(x_j - x_{0j}\right)^4\right\},
\end{gathered}
\tag{2.5.18}
$$

2. При $p < 0$ получаем решение в виде

$$u=\left\{N_1+N_2(t-t_0)+N_3e^{\sqrt{|p|}(t-t_0)}+N_4e^{\sqrt{|p|}(t-t_0)}\right\}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+x_j-x_{0j}+(x_j-x_{0j})^2+(x_j-x_{0j})^3+\right. \qquad (2.5.19)$$
$$\left.+e^{-p_j(x_j-x_{0j})}+\frac{C_j}{4!p_j}(x_j-x_{0j})^4\right\},$$

где $N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_4$ - произвольные постоянные.

Теперь потребуем выполнение начальных условий (2.1.3) и находим значения этих постоянных:

$$N_1=\frac{u_{01}\cdot 2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}-u_{03}\cdot 2^{m+1}\sqrt{|p|}}{2^{2m+1}|p|\sqrt{|p|}},\quad N_2=\frac{u_{02}\left(2^{m+1}|p|+2^m\right)-u_{04}2^m}{2^{2m+1}|p|},$$
$$N_3=\frac{u_{03}\sqrt{|p|}+u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}},\quad N_4=\frac{u_{03}\sqrt{|p|}-u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}}. \qquad (2.5.20)$$

Подставляя найденные значения постоянных в (2.5.19) получаем:

$$u=\left\{\frac{u_{01}\cdot 2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}-u_{03}\cdot 2^{m+1}\sqrt{|p|}}{2^{2m+1}|p|\sqrt{|p|}}+\frac{u_{02}\left(2^{m+1}|p|+2^m\right)-u_{04}2^m}{2^{2m+1}|p|}(t-t_0)+\right.$$
$$+\frac{u_{03}\sqrt{|p|}+u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}}e^{\sqrt{|p|}(t-t_0)}+\frac{u_{03}\sqrt{|p|}-u_{04}}{2^{m+1}|p|\sqrt{|p|}}e^{\sqrt{|p|}(t-t_0)}\times \qquad (2.5.21)$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+x_j-x_{0j}+(x_j-x_{0j})^2+(x_j-x_{0j})^3+\right.$$
$$\left.+e^{-p_j(x_j-x_{0j})}+\frac{C_j}{4!p_j}(x_j-x_{0j})^4\right\},$$

5. В этом пункте рассматривается модель волновых процессов с вырождениями, которые описываются дифференциальным уравнением вида [42-А]

$$\left(\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+u\right)\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}\right)^n, \qquad (2.5.22)$$

Пусть $u(t,x)$ - характеризует состояние некоторого объекта в точке x за момент времени t, а $L=\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}+1\right)$, и $L_j=\frac{\partial^5}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4}{\partial x_j^4}$, $(i=\overline{1,m})$ некоторые операторы, осуществляющие изменение состояния процесса.

Составим вспомогательную переопределённую систему уравнений вида

$$\begin{cases}\frac{1}{u}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+u\right)=C,\\ \frac{\partial^5 u}{\partial x_j^5}+p_j\frac{\partial^4 u}{\partial x_j^4}=C_j,\ \left(j=\overline{1,m}\right),\end{cases}\tag{2.5.23}$$

который определяет соответственно класс простых решений уравнения (2.5.22).

Находим общее решение системы (2.5.23), которое является общим решением уравнения (2.5.22)

$$\begin{gathered}u=\left[\frac{\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01}+\sqrt[3]{C-1}u_{02}+u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}e^{\sqrt[3]{C-1}\left(t-t_0\right)}+e^{-\frac{\sqrt[3]{C-1}}{2}\left(t-t_0\right)}\times\right.\\ \times\left(\frac{2\sqrt[3]{(C-1)^2}u_{01}-\sqrt[3]{C-1}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\cos\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}\left(t-t_0\right)+\right.\\ \left.\left.+\frac{\sqrt[3]{C-1}u_{02}-u_{03}}{3\sqrt[3]{(C-1)^2}\cdot 2^m}\sin\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{C-1}}{2}\left(t-t_0\right)\right)\right]\times\\ \times\frac{C_j}{4!\,p_j}\left(x_j-x_{0j}\right)^4\frac{C_j}{4!\,p_j}\left(x_j-x_{0j}\right)^4\times\\ \times\prod_{j=1}^{m}\left\{1+x_j-x_{0j}+\left(x_j-x_{0j}\right)^2+\left(x_j-x_{0j}\right)^3+e^{-p_j\left(x_j-x_{0j}\right)}+\right.\\ \left.+\frac{C_j}{4!\,p_j}\left(x_j-x_{0j}\right)^4\right\},\end{gathered}\tag{2.5.24}$$

2.6 Нелинейные дифференциальные модели произвольного порядка со специальными коэффициентами

В настоящий параграф исследуется процессы, описывающие дифференциальным уравнением в частных производных k-того порядка вида [13-A]

$$\left(a^{-1}(t)\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)^n = \sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{-1}(x_j)\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k}\right)^n \qquad (2.6.1)$$

где, k, m, n $(k, m, n \ge 2)$-натуральные числа, $u(t,x)$- искомая функция, $x=(x_1,x_2,...,x_m)\in R^m$, $t \ge t_0 > 0,$ $a(t)$ и $a_j(x_j)$ $(j=\overline{1,m})$-непрерывные функции своих аргументов.

Для нахождения решений уравнения (2.6.1) введем вспомогательную переопределенную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} a^{-1}(t)\dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} = C, \\ a_j^{-1}(x_j)\dfrac{\partial^k u}{\partial x_j^k} = C_j, \ \left(j=\overline{1,m}\right), \end{cases} \qquad (2.6.2)$$

которая определяет класс простых решений для рассматриваемого уравнения (2.6.1). Здесь C и C_j $(j=\overline{1,m})$-произвольные действительные числа, являющиеся решением уравнения согласования (1.1.7).

Общее решение уравнения (2.6.1) в классе простых решений, т.е. удовлетворяющих систему уравнений (2.6.2), представляется в виде

$$\begin{aligned} u = \sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{(i-1)!}(t-t_0)^{i-1} + C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_k}...\int_{t_0}^{\tau_3}\int_{t_0}^{\tau_2} a(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n + \\ + \sum_{j=1}^{m} C_j \int_{x_{0j}}^{x_j}\int_{x_{0j}}^{z_k}\cdots\int_{x_{0j}}^{z_3}\int_{x_{0j}}^{z_2} a_{j(z_i)dz_1dz_2\cdots dz_k} \end{aligned} \qquad (2.6.3)$$

где $A_i (i=\overline{1,k})$-произвольные постоянные числа.

Имеет место:

Теорема. Пусть $a(t)$ и $a_j(x_j)$ $(j=\overline{1,m})$-непрерывные функции своих аргументов и пусть C и C_j $(j=\overline{1,m})$-являются решением уравнения согласования (1.1.7). Тогда решение уравнения (2.5.17), удовлетворяющее начальным условиям (2.1.3) в простом классе представляется в виде

$$u=\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{0i}}{(i-1)!}(t-t_0)^{i-1`}+C\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_k}\dots\int_{t_0}^{\tau_3}\int_{t_0}^{\tau_2}a(\tau_1)d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_n+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}C_j\int_{x_{0j}}^{x_j}\int_{x_{0j}}^{z_k}\cdots\int_{x_{0j}}^{z_3}\int_{x_{0j}}^{z_2}a_{j(z_i)}dz_1dz_2\cdots dz_k \qquad (2.6.4)$$

Теперь наши рассуждения подкрепим примерами:

1) Пусть

$$\left(a^{-t}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(a_j^{-x_j}\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k}\right)^n$$

где $k,n,m(k,n,m\geq 2)-$ натуральные числа, a,a_j $(a,a_j>0;\ a,a_j\neq 1)$ $(j=\overline{1,m})$ произвольные действительные числа.

2) Пусть

$$\left(\frac{1}{cht}\cdot\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{chx_j}\cdot\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k}\right)^n,$$

где, $t\geq t_0>0;\ x_j\geq x_{0j}>0\ (j=\overline{1,m});$

Тогда из переопределённых систем дифференциальных уравнений

1) $$a^{-t}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}=C,\quad a_j^{-x_j}\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k}=C_j\ \ (j=\overline{1,m}),$$

2) $$\frac{1}{cht}\cdot\frac{\partial^k u}{\partial t^k}=C,\quad \frac{1}{chx_j}\cdot\frac{\partial^k u}{\partial x_j^k}=C_j\ \ (j=\overline{1,m}),$$

где C и C_j $(j=\overline{1,m})$, как и раньше, являются решением уравнения согласования (1.1.7), с учетом начальных условий (2.1.3), соответственно получаем:

1) $$u=\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{0i}}{(i-1)!}(t-t_0)^{i-1`}+\frac{C}{\ln^k a}(a^t-a^{t_0})-Ca^{t_0}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{t-t_0}{i!(\ln a)^{k-i}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{C_j}{\ln^k a_j}(a_j^{x_j}-a_j^{x_{0j}})-\sum_{j=1}^{m}C_ja_j^{x_{0j}}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\left(x_j-x_{0j}\right)^i}{i!(\ln a_j)^{k-i}}\ ;$$

$$2)\quad u=\sum_{i=1}^{k}\frac{u_{0i}}{(i-1)!}(t-t_0)^{i-1`}+$$

$$+\begin{cases} C\left[Cht-Cht_0-Sht_0\sum_{i=1}^{k/2}\frac{(t-t_0)^{2i-1}}{(2i-1)!}-Cht_0\sum_{i=1}^{(k-2)/2}\frac{(t-t_0)^{2i}}{(2i)!}\right]+ \\ +\sum_{j=1}^{m}C_j\left[Chx_j-Chx_{0j}-Shx_{0j}\sum_{i=1}^{k/2}\frac{(x_j-x_{0j})^{2i-1}}{(2i-1)!}-Chx_{0j}\sum_{i=1}^{(k-2)/2}\frac{(x_j-x_{0j})^{2i}}{(2i)!}\right], \\ \text{если } \kappa=2\lambda-\text{четное число}; \\ C\left[Sht-Sht_0-Cht_0\sum_{i=1}^{(k-1)/2}\frac{(t-t_0)^{2i-1}}{(2i-1)!}-Sht_0\sum_{i=1}^{(k-1)/2}\frac{(t-t_0)^{2i}}{(2i)!}\right]+ \\ +\sum_{j=1}^{m}C_j\left[Shx_j-Shx_{0j}-Chx_{0j}\sum_{i=1}^{(k-1)/2}\frac{(x_j-x_{0j})^{2i-1}}{(2i-1)!}-Shx_{0j}\sum_{i=1}^{(k-1)/2}\frac{(x_j-x_{0j})^{2i}}{(2i)!}\right], \\ \text{если } \kappa=2\lambda+1-\text{нечетное число}; \end{cases}$$

Заключение

1. Построены модели и алгоритмы для исследования волновых процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных второго и третьего порядков.
2. Исследованы: процессы малых поперечных и продольных колебаний струны; распространения звука в одномерной среде; электромагнитные волны; нелинейные волны гидродинамического происхождения; распространение гравитационных волн в мелкой воде; гравитационные волны с вырождениями; дисперсия и диссипация энергии.
3. Разработаны аналитические методы решения дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядков в экстремальных режимах.
4. Получены решения рассмотренных дифференциальных уравнений в явном виде, и они представлены в виде равномерно сходящихся рядов Фурье.
5. Созданы и обоснованы разностные алгоритмы для полученных рядов Фурье, которые описывают волновые процессы.
6. Создан комплекс программ для решения разностных аппроксимирующих задач.
7. Проведены компьютерные эксперименты при функционировании возникающих волн в различных случаях.
8. Проведен анализ полученных результатов в виде графических иллюстраций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Список использованных источников

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. 1966. 724 с.

[2] Лаптев Г.И., Лаптев Г.Г. Уравнения математической физики. – Москва: изд-во МГСУ, 2003. 327 с.

[3] Абросов Н.С., Ковров Б.Г. Анализ видовой структуры трофического уровня одноклеточных. - Новосибирск: Наука. 1977. - 186 с.

[4] Алексеев В.В. Человек и биосфера. - М.: изд-во МГУ, 1973. -133 с.

[5] Антонов Ю.П. Моделирование биологических систем. - Киев.: Наукова думка, 1977. - 260 с.

[6] Абдусаломов И. Заповедник "Тигровая балка" // Кн. Заповедники Советского Союза. - М.: Колос, 1969. - С.432-437.

[7] Беллман Р. Введение в теорию матриц. - М.: Наука, 1976. -351 с.

[8] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. -М.: Мир, 1967. - 548 с.

[9] Беляев В.И. Теория сложных геосистем. - Киев.: Наукова думка, 1977. – 186с.

[10] К. Будак Б.И., Васильев Ф.П. Приближенные методы решения задач оптимального управления. - М.: Изд-во МГУ, 1969. -299 с.

[11] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1981. - 400 с.

[12] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. - 286 с.

[13] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. - 575 с.

[14] Гаузе Р.Ф. Исследования над борьбой за существование в смешанных популяциях // Зоологический журнал. - 1935. -Т.2, № 2. - С.243-270.

[15] Грин М.Б., Хартли Г.С, Вест Т.Ф. Пестициды и защита растений. - М.: Колос, 1979. - 384 с.

[16] Джефферс Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии. - М.: Мир, 1981. - 252 с.
[17] Динамическая теория биологических популяций (Под ред. Р.А.Полуэктова). - М.: Наука, 1974. - 455 с.
[18] Давлатов А.С. К классификации тугаев "Тигровая балка" // Кн. Ученые записки каф.ботаники ТГУ. - Душанбе.: ТГУ, I 1970. - № 2. - С.65-70.
[19] Заповедник "Тигровая балка". - Сталинабад: Дониш, 1959. - 200 с.
[20] Зоологические науки Таджикистана за 60 лет.- Душанбе.: Дониш, 1985. - 245 с.
[21] Интегрированная защита хлопчатника от вредителей (Под ред. А.Н.Махсумова, М.Н.Нарзикулова). - Душанбе.: Дониш, 1981.- 248 с.
[22] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1977. - 392 с.
[23] Логофет Д.О. Матрицы и графы: Проблема устойчивости в математической экологии (Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук). Красноярск, 1986. - 55 с.
[24] Логофет Д.О., Юнусов М.К. Вопросы качественной устойчивости и регуляризации в динамических моделях агробиоценоза хлопчатника. Вопросы кибернетики, вып. 52. М.: Наука, 1979. - С. 62-74.
[25] Логофет Д.О., Ульянов Н.Б. Необходимые и достаточные условия знакоустойчивости матриц // Докл. АН СССР, 1982. -Т.264, № 3. - С. 542-546.
[26] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. - М.: Наука, 1972. - 232 с.
[27] Мэрди Дж. Модели популяций // Кн. Математическое моделирование. - М.: Мир, 1979. - С.109-127.
[28] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. - М.: Мир, 1983. - 397 с.
[29] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей /среды. - М.: Наука, 1982. - 320 с.
[30] Мадаминов В., Шукриллоев С. Биологические методы борьбы с вредителями хлопчатника. - Душанбе.: Дониш, 1987. - 59 с.
[31] Маслов В.П. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. - М,: Наука, 1987. - 259 с.
[32] Модели управления природными ресурсами (Под ред. В.И. Гурмана). - М.: Наука, 1981. - 264 с.
[33] Моисеев Н.Н. Модели экологии и эволюции. - Математика, кибернетика, 1983. - 10. - 30 с.
[34] Новосельцев В.Н. Теория управления и биосистемы. - М.: Наука, 1978. - 320 с.
[35] Одум Ю. Основы экологии. - М.: Мир, 1975. - 740 с.

[36] Олейник О.А., Калашников А.С, Чжоу-Юи-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. математ. - 1958. - Т.22, № 5.- С.667-704.
[37] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. - М.: Наука, 1975.- 343 с.
[38] Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. - 352 с.
[39] Свирежев Ю.М., Елизаров Е.Я. Математическое моделирование биологических систем. - М.: Наука, 1972. - 159 с.
[40] Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. - М.: Наука, 1987. - 366 с.
[41] Смит Дж.М. Модели в экологии. - М.: Мир, 1976. - 183 с.
[42] Самарский А.А., Курдюмов С.П., Галактионов В.А., Михайлов А.Г. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. - М.: Наука, 1987. - 477 с.
[43] Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. - М.": Наука, 1986. - 151 с.
[44] Форестер Дж. Мировая динамика. - М.: Наука, 1978. - 167 с.
[45] Уаат К. Экология и управление природными ресурсами. - М.: Мир, 1971. - 463 с."
[46] Юнуси (ов) М.К. О задачах оптимального управления, связанныхс моделями агроценозов [Текст] / М.К. Юнуси // Докл. АН Тадж. ССР. - 1978. -Т.21, № 4. - С.10-14.
[47] Юнусов М.К. Об агроценозах и связанные с ними задачи оптимизации. [Текст] / М.К. Юнусов // Матер. Всесоюз. конф. по биомедкибернетике, г. Сангахи, ГССР. - 1979. - С.353-356.
[48] Юнусов М.К. Математическая модель интегрированного метода борьбы с вредителями [Текст] / М.К. Юнусов // Докл АН Тадж. ССР. - 1979. - Т.22, № II. - С.652-656.
[49] Юнусов М.К. Об анализе качественной устойчивости некоторых экосистем заповедника "Тигровая балка" [Текст] / М.К. Юнусов, Г. Асимова // Известия АН Тадж. ССР, отд. биол. наук. - 1980. - № 4. - С.86-92. 49.
[50] Юнусов М.К. 0 чистых и смешанных стратегиях в интегрированном методе борьбы с вредителями // Докл. АН Тадж. ССР. - 1980. - Т.21, № 4. - С.210-214.
[51] Юнусов М.К. Разработать и сдать в Госфонд типовой пакет прикладных программ автоматизированной обработки экологических процессов хлопкового поля [Текст] / М.К. Юнусов, Ю. Горелов, М. Гуламов, О. Мирзоджанова // Отчет по теме ГКНТ СССР, ВИНИТИ, №0281.4015825. - 1981. - 82 с.
[52] Юнусов М.К. Оптимальное управление в биосистеме "хищник-жертва" [Текст] / М.К. Юнусов // Известия АН Тадж. ССР, отд. физ.-мат. наук, 1981. -12. - С.81-85.

[53] Юнусов М.К. О границах применения химического метода борьбы с вредителями сельского хозяйства [Текст] / М.К. Юнусов // Докл. АН Тадж. ССР. - 1981. - Т.24, № 5. - С.319-322.
[54] Юнусов М.К. Об определении пороговых значений в интегрированном методе борьбы с вредителями [Текст] / М.К. Юнусов, М. Нарзикулов // Докл. ВАСХНИЛ. - 1981. - № 2. - С.22-23.
[55] Юнусов М.К. Математическая модель динамики насекомых-вредителей с учетом их возрастной структуры [Текст] / М.К. Юнусов // Известия АН Тадж. ССР, отд. физ.-мат. наук. - 1982. -PL - С.103-105.
[56] Юнусов М.К. Математический способ определения критических значений экосистем трех трофических уровней. [Текст] / М.К. Юнусов // Журнал общей биологии. - 1982. - Т.43, № б. - С.836-841.
[57] Юнусов М.К. Определение параметров локального способа использования инсектицидов [Текст] / М.К. Юнусов // Экологические последствия применения ядохимикатов. - Пущино. - 1982. - С.154-157.
[58] Юнусов М.К. Решение одной интегро-дифференциальной задачи методом Фурье // Докл. АН Тадж. ССР. - 1984. - Т.27, И. - С.491-494.
[59] Юнусов М.К. Приближенное решение одной интегро-дифференциальной задачи [Текст] / М.К. Юнусов // Докл. АН Тадж. ССР. - 1985. - Т.28, № 9. - С.504-506.
[60] Юнусов М.К. Необходимые и достаточные условия сбора планируемого урожая [Текст] / М.К. Юнусов // Математическое моделирование в проблемах рационального природопользования. Ростов-на/Д. - 1986. - С.182-183.
[61] Юнусов М.К. Оптимальное управление экосистемой трех трофических уровней. [Текст] / М.К. Юнусов // Докл АН Тадж. ССР. - 1987. - Т.30, ,№ 5. -С.277-281.
[62] Юнусов М.К. Определение логистической поверхности [Текст] / М.К. Юнусов // Докл. АН Тадж. ССР. - 1988. - Т.31, № 6. - С.366-369.
[63] Юнусов М.К. Математические модели защиты растений и охраны популяций животных. [Текст] / М.К. Юнусов // - Душанбе. - 1988. -29 с.
[64] Юнусов М.К. Некоторые математические вопросы охраны популяций животных [Текст] / М.К. Юнусов // Докл. АН Тадж. ССР. - 1989. - Т.32, № 2. - С.87-92.
[65] Юнусов М.К. О решении одного класса интегро-дифференциальных задач // Докл. АН Тадж. ССР. - 1989. - Т.32, № 8. - С.510-513.
[66] Юнусов М.К. Имитационная система управления агроценозами. [Текст] / М.К. Юнусов // Кн. Имитация Систем. Острава (ЧССР), 1989. - С.152-154.
[67] Юнусов М.К. О решении некоторых интегро-дифференциальных задач [Текст] / М.К. Юнусов // Докл. АН Тадж. ССР. - 1990. - Т.33, № 6. – С.210-213.
[68] Юнусов М.К. Об одной интегро-дифференциальной задачи, связанных с биосистемой "хищник-жертва" [Текст] / М.К. Юнусов, У. Хаитова // Изв. АН Тадж. ССР. Отд. физ.-мат. наук. - 1985. - № 3. - С.68-70.

[69] Юнуси М.К. Математические модели управления агроценозами и охраняемые биологическими популяциями (Докторская диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук). / [Текст] / М.К. Юнуси // –Москва, ВЦ АН СССР, 1990. -313с.).
[70] Юнуси М.К. Определение критических значений для популяций входящий в экосистемы трех трофических уровней. [Текст] / М.К. Юнуси // Журнал общей биологии, 1982, №6, стр.836-840.
[71] Юнуси М.К. Критические значения в моделях охраны редких видов и защиты растений. [Текст] / М.К. Юнусов -Душанбе, ТНУ, 1991.-52стр.
[72] Юнуси(ов) М.К. Математические модели охраняемых популяций. [Текст] / М.К. Юнуси // -М. ВЦ АН СССР, 1991 , -29 стр..
[73] Юнуси М.К. О регуляризации неустойчивых моделей временной-возрастной-пространственной распределенных биологических структуру. [Текст] / М.К. Юнуси // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2017. №1/4, с.60-67
[74] Юнуси М.К. Оптимальное управление в некоторых задачах управления агроценозами и охраняемых биологических видов[1]. [Текст] / М.К. Юнуси // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2018. № 2. с 38-48
[75] Юнуси М.К. Оптимальное управление в некоторых задачах управления агроценозами и охраняемых биологических видов[2]. [Текст] / М.К. Юнуси // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук 2018. № 2. с. 63-72
[76] Юнуси М.К. Оптимальное управление в задачах защиты планируемого урожая, охраняемыми биологическими популяциями и их приложения. [Текст] / М.К. Юнуси // Душанбе, ТНУ, 2018, -287р.
[77] Auslander D.M. Dynamicsof interacting populations [Текст] / D.M. Auslander, G.P. Oster, M. Huffaker // J.Franklin Inst. 1974, No 297, p.345-376.
[78] Brokate M. Pontryagins principle for control problems in age dependent population dynamics // J.Math.Biology, 1985, No 23, p.75-101.
[79] Blasio G.D. Nonlinear age-dependent population diffusion //J.Math.Biology, 1979, No 8, p.265-284.
[80] Blasio G.D., Lamb-errs L. An initial boundary value problem for age-dependent population di f f us Ion//S I AM. J. Appl. Mathem., 1978, No 35, p.593-615
[81] Gushing J.M. Model stability and instability in age structured populat ions//J.Theoreth.Biol. 1980, No 86, p.709-730.
[82] Gopalasomy K. On the asymptotic age distributions in dispersive population//Math.Biosci. 1976, No 31, p.191-205.
[83] Garonni M.G., Langlaiis M. Age-dependent population diffusion with external constraints//J.Math.Biol., 1982, No 14, p.77-94.
[84] Gurtin M.E. A system of equation for age dependent population dlffusion//J.Theoret.Biol. 1973, No 40, p.389-392.

[85] Gurtin M.E., Levine B.S. On predator-prey interaction with predation dependent on age of prey//Math.Biosci. 1979, No 47, p.207-219.
[86] Gurtin M.E., MacCamy R.C. On the diffusion of biological population//Math.Biosci. 1977, No 38, p.35-49.
[87] Gurtin I.E., MacGamy R.G. Product solution and asymptotic behaviour in age-dependent population diffusion//Math. Biosci. 1932, No 62, p.157-167.
[88] Gurtin M.E., MacCamy R.G. Nonlinear age-dependent population dynamics//Arch.Rat.Mech.Anal. 1974 (54), p.281-300.
[89] Gurtin M.E., MacCamy R.C. Population dynamic with age dependence /ZNonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium III, Pitman. Boston-London-Melbourn, 1979, p.190-199.
[90] Gurtin M.E., MacCamy R.C. Some simple models for nonlinear age-dependent population dynamics//Nonlinear Anal. And Mechanics: Heriot-Watt Symposium III, Pitman, 1979, p.199-211.
[91] Gurtin M.E., Murphy. Oon the optimal harvesting of age-strustured population. Some simple models//Math.Biosci. 55 (1981), p.115-136.
[92] Hoppenstead T. An age dependent epidamics mode1//J.Prank!in Inst. 297 (1974), p.325-333.
[93] Langhaar H.L. General population theory in the age-time continuum//J.Franklin Inst. 293 (1972), p.199-214.
[94] Langhals M.A. A nonlinear problem in age-dependent population dlffusion//SIAM J.Math.Anal. 1985, v.I, No 3, p.510--529.
[95] Lotka A.T. Elements of physical biology. N.Y.Dover.Publ. 1956, p.1-460.
[96] Lotka A.T. The stability of the normal age distributions// Proc.Nat.Acad. Science, 1922, No 8, p.339-345.
[97] Geffries C. Qualitative stabiility and digraphs in model ecosystems//Ecology, 1974, No 4, p.1415-1419.
[98] Mai thus T.H. An essay on the principle of population. London, Tohnson, 1798.
[99] May R.M. Simple mathematical model with very complicated dynamlcs/ZNature, 1976, v. 261, No , p.459-467.
[100] May R.M., Oster G.F. Bifurcations and dynamical complexity in simple ecological models//The American Naturalist. 1976, v. 110, No 9, p.573-599.
[101] May R.M. Mathematical models in whaling and fisheries management //Some mathematical questions in biology. Providence. Rhode Island, AMS. 1980, v.13, p.1-64.
[102] May R.M. Analitative stability in model ecosystems/ZEcology, 1973, No 3, p.638-641.
[103] May R.M. Stability and complexity in model ecosystems. Princeton Univ.Press., 1973, 515 p.
[104] MacCamy R.C. A population model with nonlinear dif-fusion //J.Differential Equations 39 (1981). p.52-72.
[105] MacCamy R.C. Simple population models with diffusion//Comp. Math.Appl. 8 (1982).

[106] Oster G. Lectures In population dynamIcs//Lectures In Applied Mathematics 16, Amer.Math.Soc., 1977, p.149-170.
[107] SInestrari. Non-linear age-dependent population growth //J.Math.Biol. 28 (1980), p.1-15.
[108] Sinko J.W., Streifer W. A new model for age-size structure of a population/ZEcology 48 (1967), p.910-918.
[109] Sowunmi CO. Female dominant age-dependent deterministic population dynamics//J.Math.Biol. 3 (1976), p.9-17.
[110] Swick K.E. A nonlinear age-dependent model of single species population dynamics//SIAM J.Appl.Math. 22 (1977), p.484-498.
[111] Wang P.J.S. Stability of an age-dependent population//SIAM J.Math.Anal. II (1980), p.683-689.
[112] Webb G.F. Theory of nonlinear age-dependent population dynamics. Marcel Dekker, Inc., N.Y. 1985, 312 p.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи, опубликованные в журналах базы Scopus, ядро РИНЦ, в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте РТ и ВАК при Министерство образования и науки РФ:

[1-А] Кодиров О.К. Исследование процессов малых поперечных и продольных колебаний струны и тепловых волн с особенностями, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка в экстремальных режимах. [Текст] / О.К. Кодиров, М. Гадозода, М.К. Юнуси // Вестник национального университета. Серия естественных наук - 2020. - №2. - С.
[2-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения с частными производными пятого порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Вестник Бохтарского государственного университета. Серия естественных наук. - 2016, №2-4. - С. 3-5.
[3-А] Кодиров О.К. М. Об одном классе дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Вестник национального университета. Серия естественных наук. - 2009. - №1 (46). - С. 49-53.
[4-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего

порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Вестник Таджикского технического университета. - 2008. - №4. - С. 5-7.

[5-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / О.К. Кодиров // Вестник Таджикского технического университета. - 2014. - №2(26). - С. 7-9.

[6-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка. / О.К. Кодиров // Вестник Таджикского технического университета. - 2017. - №1. - С. 12-17.

[7-А] Кодиров О.К. Представление решений для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Вестник национального университета. Серия естественных наук. - 2017. - №1/4. - С. 49-52.

Статьи, опубликованные в других журналах, изданиях и сборниках:

[8-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, Х.М. Хафизов, О.К. Кодиров // Вестник Педагогического университета. Серия естественных наук. - 2009. - №1(32). - С. 16-19.

[9-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Вестник Института предпринимательства и сервис. Научно - практический журнал, посвящённой 70 - летию профессора М. Исмати. - 2010. - №20. - С. 29-32.

Материалы конференций, тезисы докладов:

[10-А] Кодиров О.К. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, Х.М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы III-й Международной научно -

практической конференции «Перспективы развития науки и образования в XXI веке». ТТУ им. М.С. Осими. 2008. - С. 255-257.

[11-А] Кодиров О.К. Представление решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Central Asian Journal of Information Technology. International Conference on Computer Analysis of Science and Technology Problems (Dec. 23-26, 2008) Tajik National University. 2008. - P. 74.

[12-А] Кодиров О.К. Представление решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Central Asia Journal of Information Technology. Журнал Средней Азии Информационной Технологии. 2009. - С. 153-155.

[13-А] Кодиров О.К. Об одном дифференциальном уравнение в частных производных k-того порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров, Ш.А. Саидов // Материалы IV Международной научно - практической конференции «Перспектива развития науки и образования» (ТТУ им. М.С. Осими, 20-22 мая 2010 г.). Душанбе. - 2010. - С. 173-175.

[14-А] Кодиров О.К. Представление решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, Х.М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы IV Международной научно - практической конференции «Перспективы развития науки и образования». ТТУ им. ак. М.С. Осими. 2010. - С. 175-178.

[15-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного класса дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, Х. М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы Международной научно - практической конференции «Применение информационно коммуникационных технологий на образование и науку». (26-27.11.2010). ТТУ им. ак. М.С. Осими, 2011. - С. 246-250.

[16-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, Х. М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы Международной конференции по компьютерному анализу проблем науки и технологии. 2011. - С. 64-67.

[17-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, Х. М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы V Международной научно - практической конференции «Перспективы применения инновационных технологии и усовершенствования технического образования в высших учебных заведениях стран СНГ». 2011. Часть 2. - С. 34-36.

[18-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, Х. М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложения», посвященной 20-летию 16 сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Сафарова Дж.С., (6.10.2012г.). - Курган-тюбе, 2012. - С. 22-24.

[19-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / О.К. Кодиров // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и её приложений», посвящённой 20-летию 16 сессии Верховного Совета Республики Таджикистан и 60-летию доктора физико-математических наук, профессора Сафарова Дж. С. (6.10.2012г.). 2012. - С. 24-26.

[20-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, Х. М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы VI Международной научно- практической конференции «Перспективы развития науки и образования» посвяшенной 20-летию XVI Сессии Верховного Совета Республики Таджикистан (16-17.11.2012г). 2012. - С. 34-36.

[21-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, Х. М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы Восьмой Международной теплофизической школы «Теплофизические исследования и измерения в энерго и ресурсосбережении при контроле и управлении качеством процессов, продукции и услуг» (8-13.10.2012 г.). Душанбе-Тамбов, 2012. – С. 228-230.

[22-А] Кодиров О.К. О представлении решений одного дифференциального уравнения в часных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Proceedings of the 9- the international conference on the computer analysis of problems of ascien ceand technology. (30-31.12.2013г.). 2013. - С. 73-75.

[23-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами. / О.К. Кодиров // Современные проблемы математики и её преподавания. Материалы Международной конференции, посвящённой 20 – летию Конституции Республики Таджикистан и 60 – летию ученых математиков А. Мухсинова, А.Б. Назимова, С. Байзаева, Д. Осимовой, К. Тухлиева. ХГУ имени Бободжана Гафурова. 2014. – С. 176-178.

[24-А] Кодиров О.К. О решении одного дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка с постоянными коэффициентами. / О.К. Кодиров // Материалы VII Международной научно-практической конференции «Перспективы развития науки и образования». ТТУ имени академика М. Осими (23-24 октября 2014г.). 2014. - С. 103-105.

[25-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. / О.К. Кодиров //Материалы Международной научно - практической конференции «Перспективы Кулябского государственного университета имени А. Рудаки о подготовке специалистов» посвящённой 70 - летию университета (17-18.04.2015). 2015. - С. 150-152.

[26-А] Кодиров О.К. О решении одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и ее приложения». Материалы республиканской научно – практической конференции, посвященной 75- летию доктора физико – математических наук, профессора М. Исмати, доцентов Б. Муродова и Б. Раджабова и 60 – летию доцента Х. Караева. Институт предпринимательство и сервис. 2015. - С. 30-32.

[27-А] Кодиров О.К. Предстaвление решений для дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы республиканской научной конференции Неклассические дифференциальные и интегральные уравнения и их приложение, посвящённой 3000-летию Гиссара и 50-летию механико-математического факультета. (25-26 сентября 2015г.). 2015. - С. 25-27.

[28-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // 10- ая Международная конференция по компьютерному анализу проблем науки и технологии. (30-31.12.2015г.). – Душанбе, 2015. - С. 164-167.

[29-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы республиканской научно-теоретической конференции «Неклассические уравнения математической физики и смежные вопросы анализа» (02.04.2016г). 2016. – С. 26-28.

[30-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. [Текст] / М. Гадозода // Материалы республиканской научно-практической конференции «Проблемы металлургии Таджикистана и пути их решения» ДФ НИТУ «МИСиС» (29-30апреля 2016г.). 2016. - С. 160-162.

[31-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан «Современные проблемы математики и её приложений» (3-4 июня 2016г.). Душанбинский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова. 2016. - С. 10-12.

[32-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, Х.М. Хафизов, О.К. Кодиров // Материалы научно-теоретической конференции «Развитие науки и образования в современном мире», посвященной 25-летию государственной независимости Республики Таджикистан и 50-летию деятельности профессора С. Холназарова. Бохтарский государственный университет имени Н. Хусрава. 2016. - С. 123-125.

[33-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы VIII Международной научно-практической конференции «Перспективы развития науки и образования», посвящённой 25-летию Государственной независимости Республики Таджикистан и 60-летию ТТУ имени академика М.С.Осими (3-4ноября 2016г.). 2016. Часть 2. - С. 126-129.

[34-А] Кодиров О.К. О решении одного дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст]/ М. Гадозода, О.К. Кодиров //Сборник материалов II Международной научно-практической конференции «Наука и инновации Борисоглебского городского округа: образование, индустрия, строительство», посвящённой 970-летию Омара Хайяма. Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования, «Воронежский государственный технический университет», Протокол №7/05 от 18.05.2018 г. 2018. – С.12-14.

[35-А] Кодиров О.К. Представление решения одного дифференциального уравнения в частных производных третьего порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // «Современные задачи математики и их приложения». Материалы международной научно-теоретической конференции, посвящённой 70-летию образования Таджикского национального университета и 80-летию академика АН Республики Таджикистан, д.ф.-м.н., профессора Раджабова Нусрата. Таджикский национальный университет (25-26 сентября 2018 г.). 2018. - С. 21-25.

[36-А] Кодиров О.К. Процесс распространения популяционных волн в экстремальных режимах и их численные расчеты [Текст] / М.К. Юнуси, О.К. Кодиров // «Улучшение инженерного образования путём осуществления новых педагогических подходов в вузах Республики Таджикистан». Материалы международной научно-теоретической конференции программа EXTEND. Таджикский национальный университет (25-26 июня 2019 г.). 2019. - С. 183-191.

[37-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. [Текст] / М.

Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы международной научно-практической конференции «Перспективы развития науки и образования». ТТУ имени академика М.С.Осими (27-28 ноября 2019г.). 2019. - С. 126-129.

[38-А] Кодиров О.К. Представление решений одного дифференциального уравнения с частными производными пятого порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Сборник материалов I Международной научно-практической конференции «Инновации в образовании: Научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» Филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный технический университет», Рекомендовано учебно-методическим советом ФГБОУ ВО «ВТУ», прот. №18/05 от 14.05.2017г., г. Борисоглебск. - 2017г. - С. 168-170.

[39-А] Кодиров О.К. Представление решений дифференциального уравнения с частными производными пятого порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы республиканской научно-практической конференции «Стратегия и аспекты развития горной промышленности Республики Таджикистан» (5-6 мая 2017г.): ДФ НИТУ «МИСиС». Душанбе. -2017 г. - С. 221-224.

[40-А] Кодиров О.К. Решение одного дифференциального уравнения с частными производными пятого порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Материалы международной научной конференции, посвящённой 25-летию XVI сессии Верховного Совета Республики Таджикистан (27-28 октября 2017 г.). Курган-Тюбе. – 2017 г. С. 36-37.

[41-А] Кодиров О.К. Представление решения одного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // «Компьютерный анализ проблем науки и технологий». Материалы XI-ой международной научно-теоретической конференции, посвященной

70-летию образования ТНУ и 70-летию д.ф.-м.н., проф. М.К. Юнуси (ТНУ. 27-28 декабря 2018 г.). Душанбе. – 2018. - С. 175-177.

[42-А] Кодиров О.К. Представление решения одного дифференциального уравнения в частных производных пятого порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Международная научно - практическая конференция «Перспектива развития науки и образования» (ТТУ им. М.С. Осими, 27-28 ноября 2019 г.). Душанбе. - 2019. - С. 228-230.

[43-А] Кодиров О.К. Исследование волнового процесса физических явлений в экстремальных режимах. [Текст] / О.К. Кодиров, Л. Туйчиев // Международная научно - практическая конференция «Перспектива развития науки и образования» (ТТУ им. М.С. Осими, 27-28 ноября 2019 г.). Душанбе. - 2019. - С. 306-309.

[44-А] Кодиров О.К. Волновые процессы, описывающие дифференциальным уравнениям в частных производных четвертого порядка. [Текст] / М. Гадозода, О.К. Кодиров // Международная научно – практическая конференция «Электроэнергетика Таджикистана: актуальные проблемы и пути их решения» посвящённой 80 - летию профессора кафедры электроэнергетики ДФ НИУ МЭИ Иноятова М.Б., 70 – летию доцента кафедры электроэнергетики Шамсиева М.В. и приуроченный ко «Дню энергетики» (ДФ НИУ МЭИ, 17-18 декабря 2019 г.). Душанбе – 2019. - С. 185-188.

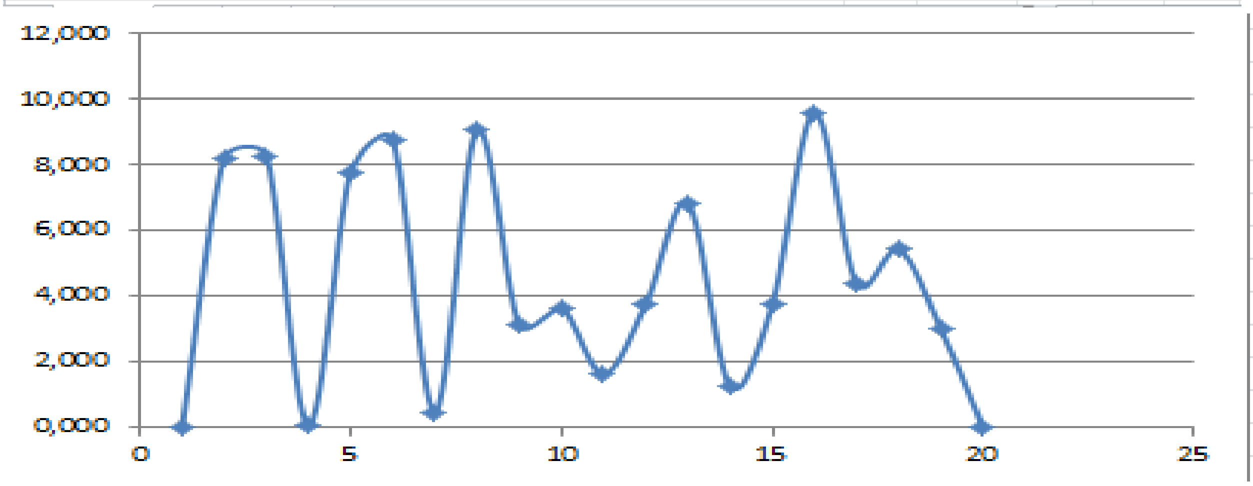
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приводимые ниже эксперименты были проведены вместе с научным руководителем проф. Юнуси М.К. и к.т.н. Туйчиевым Л. для процесса малых поперечных и продольных колебаний струны, которые описывается дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами в экстремальных режимах вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^n$$

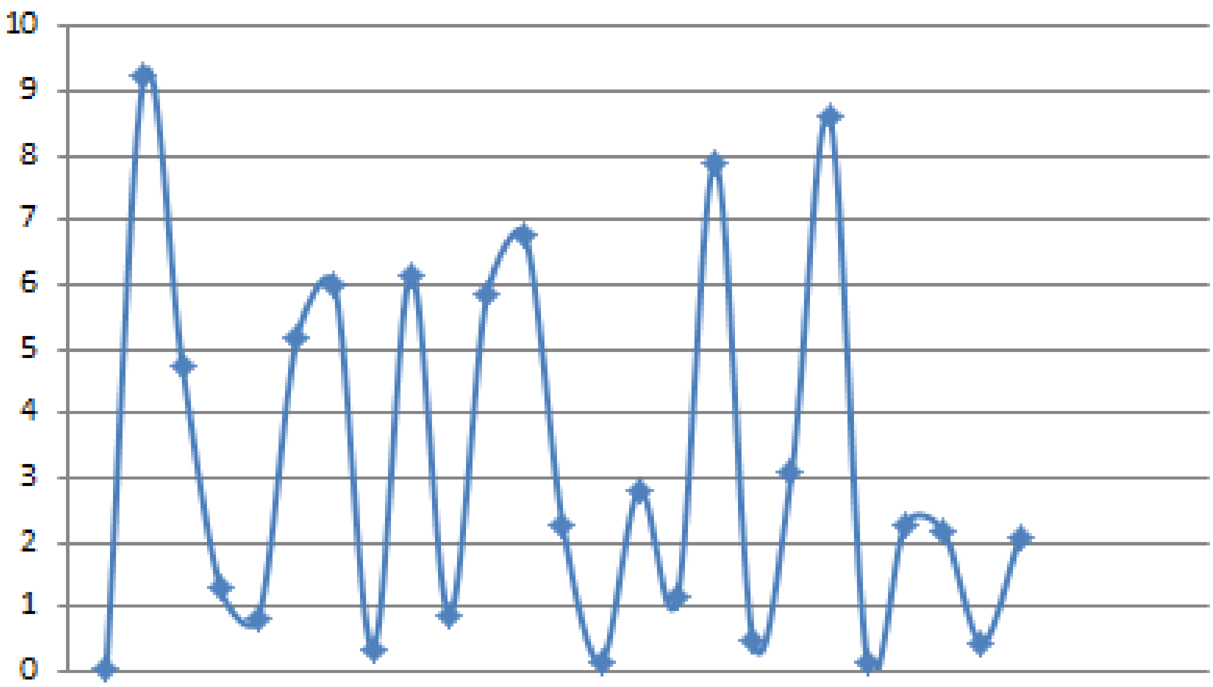
Эксперимент 1.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат						
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y						
1.	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	1,000	2,000	20,000	0,0004	0,000	0,3691	0,3691	0,0002	0,0002	0,0002
2.			2,000	3,000	2,000	3,000	1,1	3,000		0,8206	0,000	0,1116	0,04119156	0,0002	0,8202	0,8204
3.			3,000	4,000	3,000	4,000	1,2	4,000		0,8295	0,000	0,0277	)1141006212	0,0002	10 088	18 292
4.			4,000	5,000	4,000	5,000	1,3	5,000		0,008	0,000	0,0057	6,50E+04	0,0002	0,1784	20 076
5.			5,000	6,000	5,000	6,000	1,4	6,000		0,7757	0,000	0,001	6,50E+01	0,0002	0,7677	27 753
6.			6,000	7,000	6,000	7,000	1,5	7,000		0,8764	0,000	0,0002	1,30E-01	0,0002	11 006	38 759
7.			7,000	8,000	7,000	8,000	1,6	8,000		0,0479	0,000	0,0001	1,30E-05	0,0002	11 713	50 472
8.			8,000	9,000	8,000	9,000	1,7	9,000		0,9071	0,000	0,0001	1,30E-09	0,0002	0,8592	59 064
9.			9,000	10,000	9,000	10,000	1,8	10,000		0,312	0,000	0,0001	1,30E-13	0,0002	14 048	73 112
10.			10,000	11,000	10,000	11,000	1,9	11,000		0,3646	0,000	0,0001	1,30E-17	0,0002	10 525	83 637
11.			11,000	12,000	11,000	12,000	2,000	12,000		0,1632	0,000	0,0001	1,30E-21	0,0002	17 984	101 621
12.			12,000	13,000	12,000	13,000	2,1	13,000		0,3758	0,000	0,0001	1,30E-25	0,0002	12 125	113 746
13.			13,000	14,000	13,000	14,000	2,2	14,000		0,683	0,000	0,0001	1,30E-29	0,0002	2 307	136 816
14.			14,000	15,000	14,000	15,000	2,3	15,000		0,125	0,000	0,0001	1,30E-33	0,0002	24 416	161 232
15.			15,000	16,000	15,000	16,000	2,4	16,000		0,3751	0,000	0,0001	1,30E-37	0,0002	32 498	19 373
16.			16,000	17,000	16,000	17,000	2,5	17,000		0,9605	0,000	0,0001	1,30E-41	0,0002	35 851	229 581
17.			17,000	18,000	17,000	18,000	2,6	18,000		0,4391	0,000	0,0001	1,30E-45	0,0002	34 782	264 363
18.			18,000	19,000	18,000	19,000	2,7	19,000		0,5434	0,000	0,0001	1,30E-49	0,0002	51 038	315 401
19.			19,000	20,000	19,000	20,000	2,8	20,000		0,3003	0,000	0,0001	1,30E-53	0,0002	57 563	372 964
20.			20,000	21,000	20,000	21,000	2,9	21,000		0,1284	0,000	0,0001	1,30E-57	0,0002	58 275	431 239
	0,000		0,000			0,0002			431239,000	0,55						



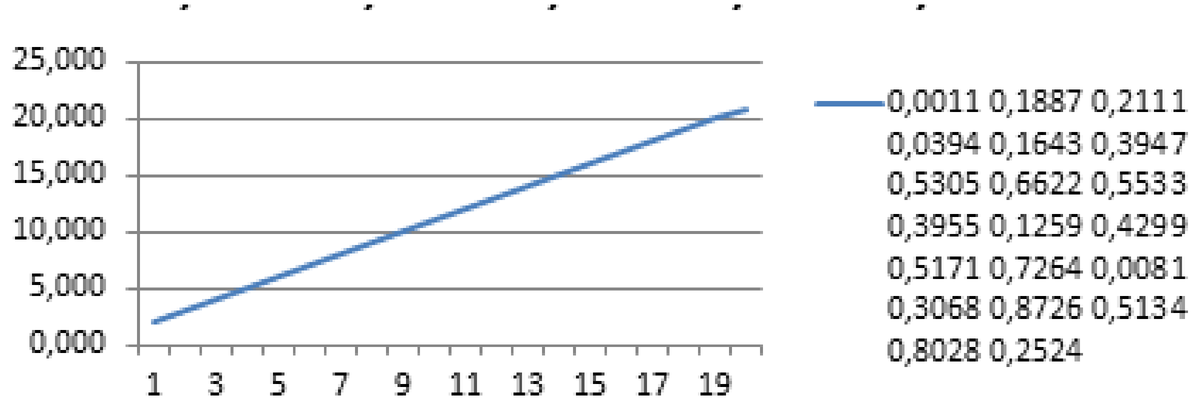
Эксперимент 2.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат								
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y								
1.	0,000	3,000	1,000	4,000	1,000	5,000	1,000	5,000	25,000	0,0035	0,000	0,0503	0,0503	0,002	0,0015	0,0015	0,035	
2.			2,000	5,000	2,000	6,000	1,1	6,000		0,9255	0,000	0,0014	7,04E-02	0,002	0,922	0,9235	9,255	
3.			3,000	6,000	3,000	7,000	1,2	7,000		0,4727	0,000	0,0001	7,04E-06	0,002	0,5471	14 706	4,727	
4.			4,000	7,000	4,000	8,000	1,3	8,000		0,1292	0,000	0,0001	7,04E-10	0,002	0,6565	21 271	1,292	
5.			5,000	8,000	5,000	9,000	1,4	9,000		0,0845	0,000	0,0001	7,04E-14	0,002	0,9552	30 823	0,845	
6.			6,000	9,000	6,000	10,000	1,5	10,000		0,5164	0,000	0,0001	7,04E-18	0,002	14 318	45 141	5,164	
7.			7,000	10,000	7,000	11,000	1,6	11,000		0,5988	0,000	0,0001	7,04E-22	0,002	10 823	55 964	5,988	
8.			8,000	11,000	8,000	12,000	1,7	12,000		0,0361	0,000	0,0001	7,04E-26	0,002	14 371	70 335	0,361	
9.			9,000	12,000	9,000	13,000	1,8	13,000		0,6157	0,000	0,0001	7,04E-30	0,002	25 793	96 128	6,157	
10.			10,000	13,000	10,000	14,000	1,9	14,000		0,0896	0,000	0,0001	7,04E-34	0,002	24 736	120 864	0,896	
11.			11,000	14,000	11,000	15,000	2,000	15,000		0,5845	0,000	0,0001	7,04E-38	0,002	34 946	15 581	5,845	
12.			12,000	15,000	12,000	16,000	2,1	16,000		0,6773	0,000	0,0001	7,04E-42	0,002	40 925	196 735	6,773	
13.			13,000	16,000	13,000	17,000	2,2	17,000		0,2254	0,000	0,0001	7,04E-46	0,002	55 475	25 221	2,254	
14.			14,000	17,000	14,000	18,000	2,3	18,000		0,0164	0,000	0,0001	7,04E-50	0,002	67 902	320 112	0,164	
15.			15,000	18,000	15,000	19,000	2,4	19,000		0,2827	0,000	0,0001	7,04E-54	0,002	82 655	402 767	2,827	
16.			16,000	19,000	16,000	20,000	2,5	20,000		0,114	0,000	0,0001	7,04E-58	0,002	108 302	511 069	1,14	
17.			17,000	20,000	17,000	21,000	2,6	21,000		0,7889	0,000	0,0001	7,04E-62	0,002	126 737	637 806	7,889	
18.			18,000	21,000	18,000	22,000	2,7	22,000		0,0463	0,000	0,0001	7,04E-66	0,002	152 558	790 364	0,463	
19.			19,000	22,000	19,000	23,000	2,8	23,000		0,3076	0,000	0,0001	7,04E-70	0,002	172 596	96 296	3,076	
20.			20,000	23,000	20,000	24,000	2,9	24,000		0,8612	0,000	0,0001	7,04E-74	0,002	205 516	1 168 476	8,612	
21.			21,000	24,000	21,000	25,000	3,000	25,000		0,016	0,000	0,0001	7,04E-78	0,002	241 523	1 409 999	0,16	
22.			22,000	25,000	22,000	26,000	3,1	26,000		0,2297	0,000	0,0001	7,04E-82	0,002	27 211	1 682 109	2,297	
23.			23,000	26,000	23,000	27,000	3,2	27,000		0,2179	0,000	0,0001	7,04E-75	0,002	309 851	199 196	2,179	
24.			24,000	27,000	24,000	28,000	3,3	28,000		0,0461	0,000	0,0001	7,04E-79	0,002	358 246	2 350 206	0,461	
25.			25,000	28,000	25,000	29,000	3,4	29,000		0,2081	0,000	0,0001	7,04E-83	0,002	40 158	2 751 786	2,081	
	0,000		0,000			0,002			2751786,000	2,93								



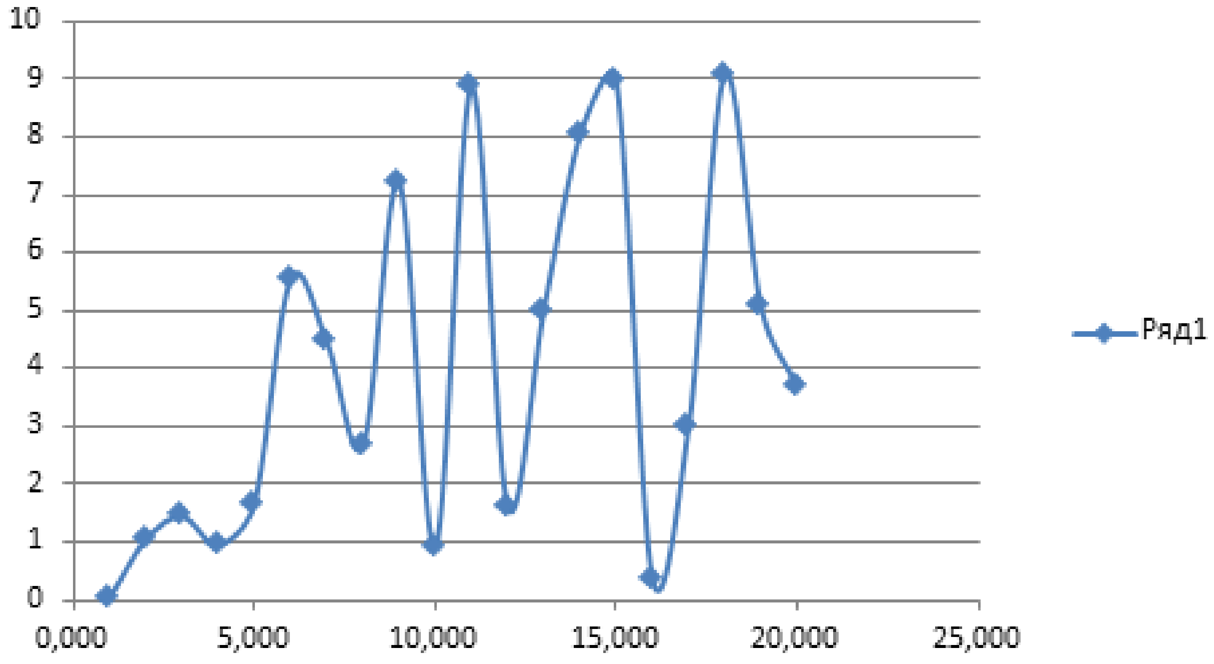
Эксперимент 3.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	1,000	3,000	2,000	4,000	3,000	5,000	1,000	3,000	20,000	0,0011	0,000	0,1362	0,1362	0,0006	0,0006	0,0006	
2.			3,000	5,000	4,000	6,000	1,1	4,000		0,1887	0,000	0,0125	0,0017025	0,0006	0,1876	0,1882	
3.			4,000	6,000	5,000	7,000	1,2	5,000		0,2111	0,000	0,0008	1,36E-03	0,0006	10 223	12 105	
4.			5,000	7,000	6,000	8,000	1,3	6,000		0,0394	0,000	0,0001	1,36E-07	0,0006	0,8282	20 387	
5.			6,000	8,000	7,000	9,000	1,4	7,000		0,1643	0,000	0,0001	1,36E-11	0,0006	11 248	31 635	
6.			7,000	9,000	8,000	10,000	1,5	8,000		0,3947	0,000	0,0001	1,36E-15	0,0006	12 302	43 937	
7.			8,000	10,000	9,000	11,000	1,6	9,000		0,5305	0,000	0,0001	1,36E-19	0,0006	11 357	55 294	
8.			9,000	11,000	10,000	12,000	1,7	10,000		0,6622	0,000	0,0001	1,36E-23	0,0006	11 317	66 611	
9.			10,000	12,000	11,000	13,000	1,8	11,000		0,5533	0,000	0,0001	1,36E-27	0,0006	18 908	85 519	
10.			11,000	13,000	12,000	14,000	1,9	12,000		0,3955	0,000	0,0001	1,36E-31	0,0006	1 842	103 939	
11.			12,000	14,000	13,000	15,000	2,000	13,000		0,1259	0,000	0,0001	1,36E-35	0,0006	27 301	13 124	
12.			13,000	15,000	14,000	16,000	2,1	14,000		0,4299	0,000	0,0001	1,36E-39	0,0006	33 038	164 278	
13.			14,000	16,000	15,000	17,000	2,2	15,000		0,5171	0,000	0,0001	1,36E-43	0,0006	30 868	195 146	
14.			15,000	17,000	16,000	18,000	2,3	16,000		0,7264	0,000	0,0001	1,36E-47	0,0006	4 209	237 236	
15.			16,000	18,000	17,000	19,000	2,4	17,000		0,0081	0,000	0,0001	1,36E-51	0,0006	52 811	290 047	
16.			17,000	19,000	18,000	20,000	2,5	18,000		0,3068	0,000	0,0001	1,36E-55	0,0006	62 981	353 028	
17.			18,000	20,000	19,000	21,000	2,6	19,000		0,8726	0,000	0,0001	1,36E-59	0,0006	75 651	428 679	
18.			19,000	21,000	20,000	22,000	2,7	20,000		0,5134	0,000	0,0001	1,36E-63	0,0006	96 398	525 077	
19.			20,000	22,000	21,000	23,000	2,8	21,000		0,8028	0,000	0,0001	1,36E-67	0,0006	112 883	63 796	
20.			21,000	23,000	22,000	24,000	2,9	22,000		0,2524	0,000	0,0001	1,36E-71	0,0006	124 482	762 442	
	0,000		0,000			0,0006			#######	1,000							



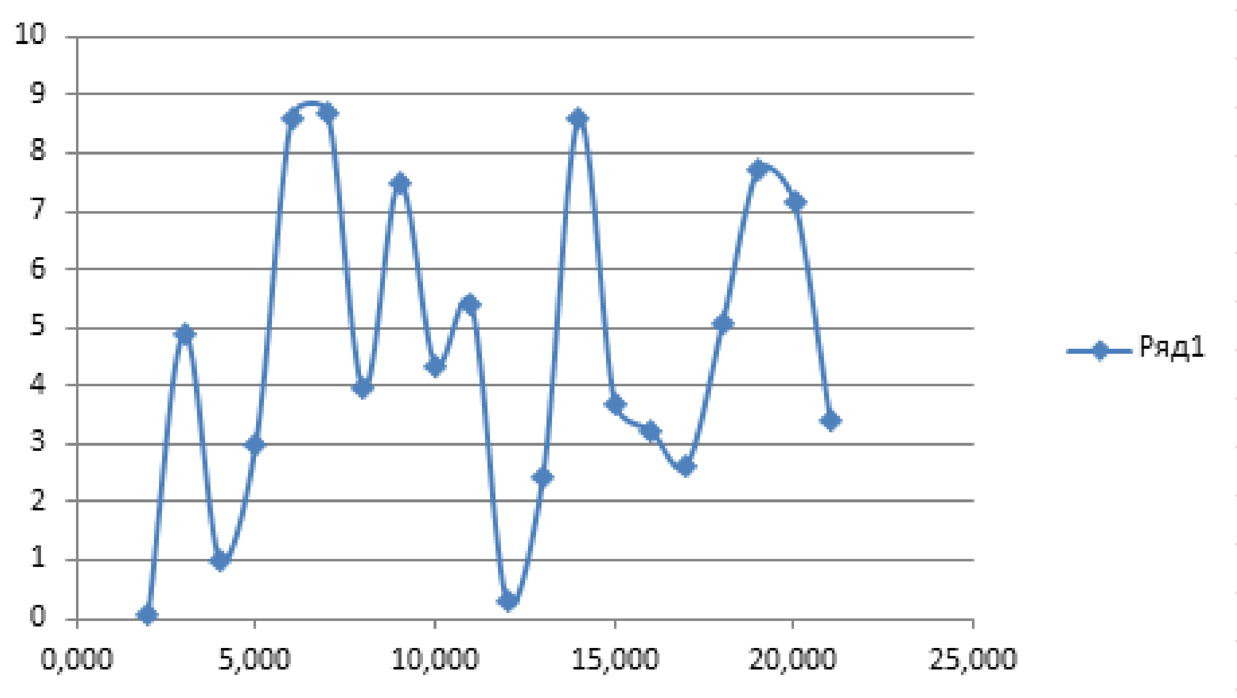
Эксперимент 4.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	2,000	6,000	1,000	4,000	1,000	4,000	1,000	4,000	20,000	0,0023	0,000	0,0503	0,0503	0,0012	0,0012	0,0012	0,023
2.			2,000	5,000	2,000	5,000	1,1	5,000		0,1042	0,000	0,0014	7,04E-02	0,0012	0,1018	0,103	1,042
3.			3,000	6,000	3,000	6,000	1,2	6,000		0,1446	0,000	0,0001	7,04E-06	0,0012	10 403	11 433	1,446
4.			4,000	7,000	4,000	7,000	1,3	7,000		0,094	0,000	0,0001	7,04E-10	0,0012	0,9494	20 927	0,94
5.			5,000	8,000	5,000	8,000	1,4	8,000		0,1654	0,000	0,0001	7,04E-14	0,0012	10 713	3 164	1,654
6.			6,000	9,000	6,000	9,000	1,5	9,000		0,5541	0,000	0,0001	7,04E-18	0,0012	13 886	45 526	5,541
7.			7,000	10,000	7,000	10,000	1,6	10,000		0,4472	0,000	0,0001	7,04E-22	0,0012	0,893	54 456	4,472
8.			8,000	11,000	8,000	11,000	1,7	11,000		0,2648	0,000	0,0001	7,04E-26	0,0012	18 173	72 629	2,648
9.			9,000	12,000	9,000	12,000	1,8	12,000		0,7228	0,000	0,0001	7,04E-30	0,0012	24 578	97 207	7,228
10.			10,000	13,000	10,000	13,000	1,9	13,000		0,0914	0,000	0,0001	7,04E-34	0,0012	23 683	12 089	0,914
11.			11,000	14,000	11,000	14,000	2,000	14,000		0,8866	0,000	0,0001	7,04E-38	0,0012	37 949	158 839	8,866
12.			12,000	15,000	12,000	15,000	2,1	15,000		0,1613	0,000	0,0001	7,04E-42	0,0012	42 742	201 581	1,613
13.			13,000	16,000	13,000	16,000	2,2	16,000		0,5006	0,000	0,0001	7,04E-46	0,0012	53 388	254 969	5,006
14.			14,000	17,000	14,000	17,000	2,3	17,000		0,803	0,000	0,0001	7,04E-50	0,0012	63 018	317 987	8,03
15.			15,000	18,000	15,000	18,000	2,4	18,000		0,8973	0,000	0,0001	7,04E-54	0,0012	80 936	398 923	8,973
16.			16,000	19,000	16,000	19,000	2,5	19,000		0,0371	0,000	0,0001	7,04E-58	0,0012	101 387	50 031	0,371
17.			17,000	20,000	17,000	20,000	2,6	20,000		0,2989	0,000	0,0001	7,04E-62	0,0012	122 606	622 916	2,989
18.			18,000	21,000	18,000	21,000	2,7	21,000		0,9081	0,000	0,0001	7,04E-66	0,0012	146 078	768 994	9,081
19.			19,000	22,000	19,000	22,000	2,8	22,000		0,5059	0,000	0,0001	7,04E-70	0,0012	165 961	934 955	5,059
20.			20,000	23,000	20,000	23,000	2,9	23,000		0,3698	0,000	0,0001	7,04E-74	0,0012	198 619	1 133 574	3,698
	0,000		0,000			0,0012			1133574,000	1,48							



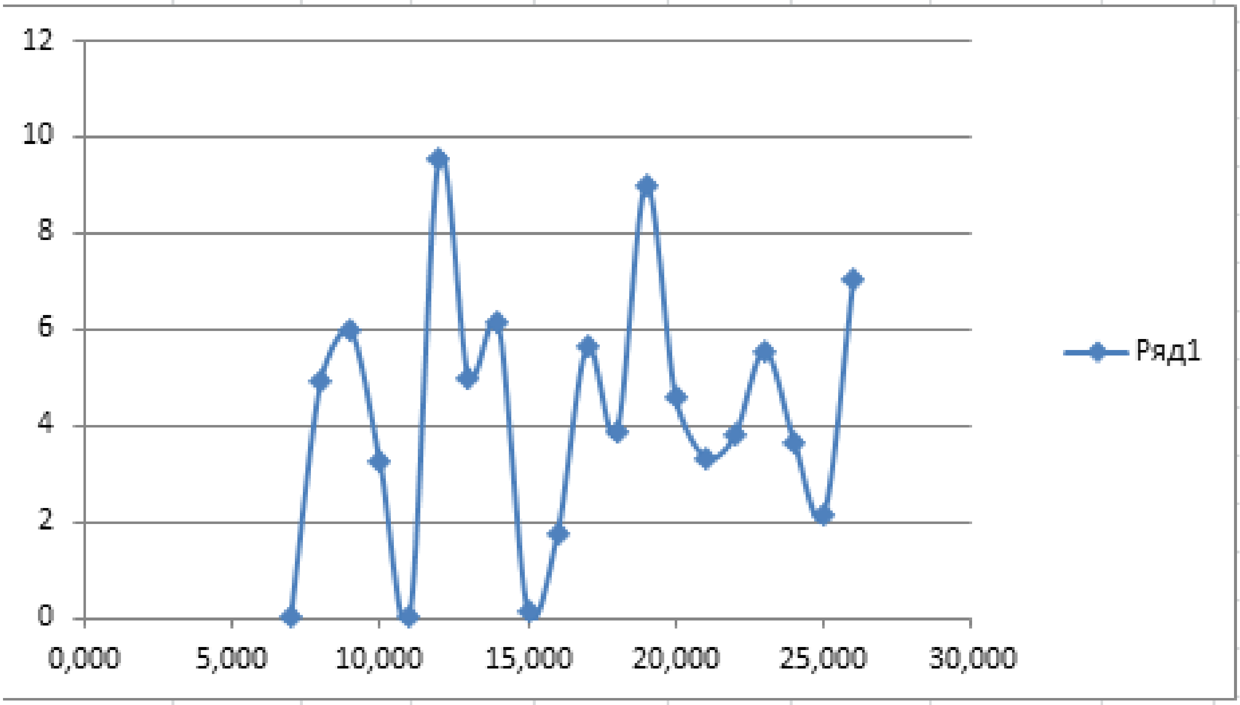
Эксперимент 5.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	3,000	5,000	2,000	9,000	1,000	5,000	1,000	5,000	20,000	0,0055	0,000	0,001	0,001	0,002	0,0035	0,0035	0,055
2.			3,000	10,000	2,000	6,000	1,1	6,000		0,4905	0,000	0,0001	1,00E-07	0,002	0,485	0,4885	4,905
3.			4,000	11,000	3,000	7,000	1,2	7,000		0,1007	0,000	0,0001	1,00E-11	0,002	0,6101	10 986	1,007
4.			5,000	12,000	4,000	8,000	1,3	8,000		0,2993	0,000	0,0001	1,00E-15	0,002	11 986	22 972	2,993
5.			6,000	13,000	5,000	9,000	1,4	9,000		0,8618	0,000	0,0001	1,00E-19	0,002	15 623	38 595	8,618
6.			7,000	14,000	6,000	10,000	1,5	10,000		0,8698	0,000	0,0001	1,00E-23	0,002	20 078	58 673	8,698
7.			8,000	15,000	7,000	11,000	1,6	11,000		0,3956	0,000	0,0001	1,00E-27	0,002	25 255	83 928	3,956
8.			9,000	16,000	8,000	12,000	1,7	12,000		0,7492	0,000	0,0001	1,00E-31	0,002	33 533	117 461	7,492
9.			10,000	17,000	9,000	13,000	1,8	13,000		0,435	0,000	0,0001	1,00E-35	0,002	46 853	164 314	4,35
10.			11,000	18,000	10,000	14,000	1,9	14,000		0,5407	0,000	0,0001	1,00E-39	0,002	61 051	225 365	5,407
11.			12,000	19,000	11,000	15,000	2,000	15,000		0,0291	0,000	0,0001	1,00E-43	0,002	74 876	300 241	0,291
12.			13,000	20,000	12,000	16,000	2,1	16,000		0,2459	0,000	0,0001	1,00E-47	0,002	102 158	402 399	2,459
13.			14,000	21,000	13,000	17,000	2,2	17,000		0,858	0,000	0,0001	1,00E-51	0,002	126 109	528 508	8,58
14.			15,000	22,000	14,000	18,000	2,3	18,000		0,37	0,000	0,0001	1,00E-55	0,002	155 105	683 613	3,7
15.			16,000	23,000	15,000	19,000	2,4	19,000		0,3249	0,000	0,0001	1,00E-59	0,002	18 953	873 143	3,249
16.			17,000	24,000	16,000	20,000	2,5	20,000		0,2647	0,000	0,0001	1,00E-63	0,002	239 374	1 112 517	2,647
17.			18,000	25,000	17,000	21,000	2,6	21,000		0,5064	0,000	0,0001	1,00E-67	0,002	282 388	1 394 905	5,064
18.			19,000	26,000	18,000	22,000	2,7	22,000		0,7736	0,000	0,0001	1,00E-71	0,002	342 638	1 737 543	7,736
19.			20,000	27,000	19,000	23,000	2,8	23,000		0,7167	0,000	0,0001	1,00E-75	0,002	399 391	2 136 934	7,167
20.			21,000	28,000	20,000	24,000	2,9	24,000		0,342	0,000	0,0001	1,00E-79	0,002	466 206	260 314	3,42
	0,000		0,000			0,002			260314,000	2,91							



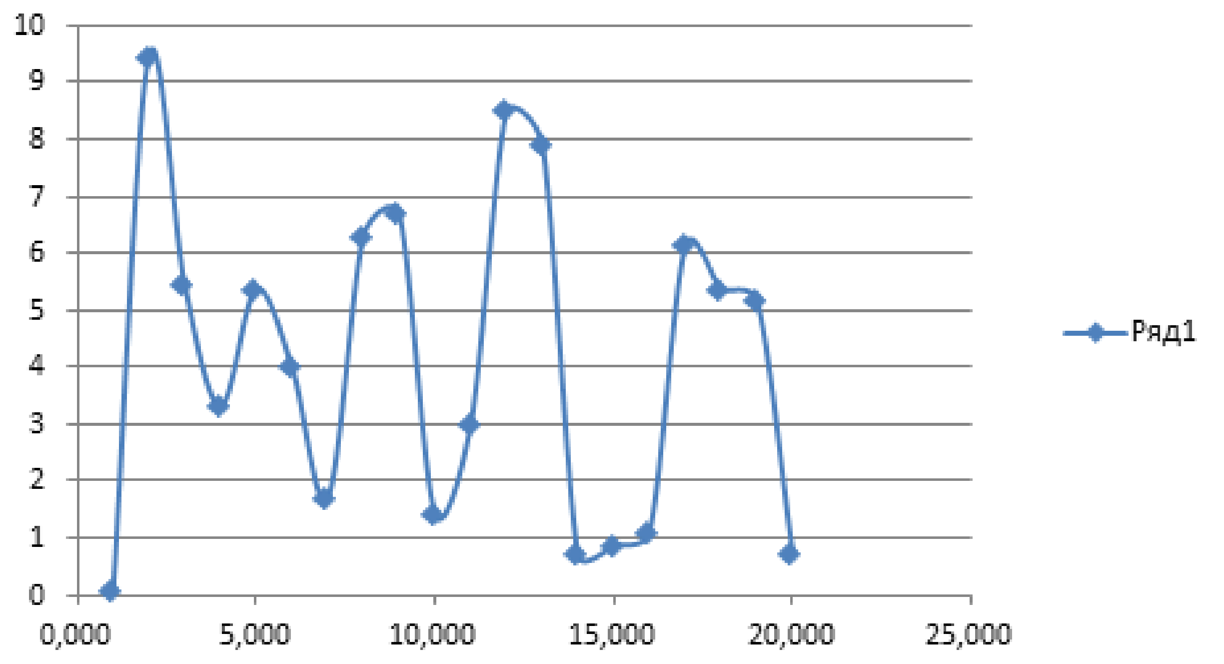
Эксперимент 6.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	3,000	6,000	1,000	7,000	2,000	6,000	1,000	6,000	20,000	0,006	0,000	0,0026	0,0026	0,0024	0,0036	0,0036	0,06
2.			2,000	8,000	3,000	7,000	1,1	7,000		0,491	0,000	0,0001	2,6E-7	0,0024	0,485	0,4886	4,91
3.			3,000	9,000	4,000	8,000	1,2	8,000		0,5988	0,000	0,0001	2,6E-11	0,0024	11 078	15 964	5,988
4.			4,000	10,000	5,000	9,000	1,3	9,000		0,3262	0,000	0,0001	2,6E-15	0,0024	0,7273	23 237	3,262
5.			5,000	11,000	6,000	10,000	1,4	10,000		0,0048	0,000	0,0001	2,6E-19	0,0024	0,6785	30 022	0,048
6.			6,000	12,000	7,000	11,000	1,5	11,000		0,9551	0,000	0,0001	2,6E-23	0,0024	19 502	49 524	9,551
7.			7,000	13,000	8,000	12,000	1,6	12,000		0,4987	0,000	0,0001	2,6E-27	0,0024	25 433	74 957	4,987
8.			8,000	14,000	9,000	13,000	1,7	13,000		0,6128	0,000	0,0001	2,6E-31	0,0024	31 138	106 095	6,128
9.			9,000	15,000	10,000	14,000	1,8	14,000		0,0151	0,000	0,0001	2,6E-35	0,0024	44 018	150 113	0,151
10.			10,000	16,000	11,000	15,000	1,9	15,000		0,1735	0,000	0,0001	2,6E-39	0,0024	51 578	201 691	1,735
11.			11,000	17,000	12,000	16,000	2,000	16,000		0,5628	0,000	0,0001	2,6E-43	0,0024	73 886	275 577	5,628
12.			12,000	18,000	13,000	17,000	2,1	17,000		0,3853	0,000	0,0001	2,6E-47	0,0024	88 216	363 793	3,853
13.			13,000	19,000	14,000	18,000	2,2	18,000		0,8988	0,000	0,0001	2,6E-51	0,0024	115 124	478 917	8,988
14.			14,000	20,000	15,000	19,000	2,3	19,000		0,4574	0,000	0,0001	2,6E-55	0,0024	145 571	624 488	4,574
15.			15,000	21,000	16,000	20,000	2,4	20,000		0,3339	0,000	0,0001	2,6E-59	0,0024	178 748	803 236	3,339
16.			16,000	22,000	17,000	21,000	2,5	21,000		0,3797	0,000	0,0001	2,6E-63	0,0024	210 437	1 013 673	3,797
17.			17,000	23,000	18,000	22,000	2,6	22,000		0,5558	0,000	0,0001	2,6E-67	0,0024	251 736	1 265 409	5,558
18.			18,000	24,000	19,000	23,000	2,7	23,000		0,3668	0,000	0,0001	2,6E-71	0,0024	308 078	1 573 487	3,668
19.			19,000	25,000	20,000	24,000	2,8	24,000		0,2166	0,000	0,0001	2,6E-75	0,0024	358 462	1 931 949	2,166
20.			20,000	26,000	21,000	25,000	2,9	25,000		0,7034	0,000	0,0001	2,6E-79	0,0024	414 827	2 346 776	7,034
	0,000		2,6E-79			0,0024			2346776,000	3,02							



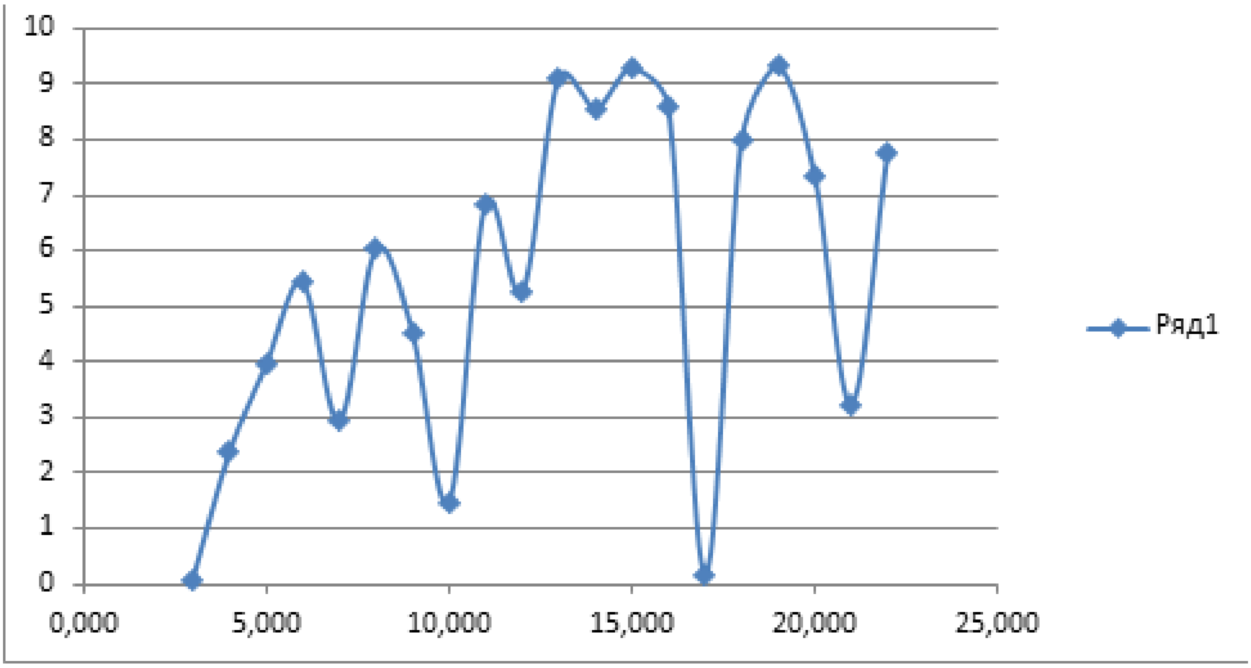
Эксперимент 7.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	2,000	5,000	3,000	8,000	1,000	7,000	1,000	7,000	20,000	0,0077	0,000	0,0069	0,0069	0,0042	0,0035	0,0035	0,077
2.			4,000	9,000	2,000	8,000	1,1	8,000		0,9456	0,000	0,0001	6,9E-7	0,0042	0,938	0,9415	9,456
3.			5,000	10,000	3,000	9,000	1,2	9,000		0,5468	0,000	0,0001	6,9E-11	0,0042	0,6011	15 426	5,468
4.			6,000	11,000	4,000	10,000	1,3	10,000		0,3314	0,000	0,0001	6,9E-15	0,0042	0,7845	23 271	3,314
5.			7,000	12,000	5,000	11,000	1,4	11,000		0,5367	0,000	0,0001	6,9E-19	0,0042	12 052	35 323	5,367
6.			8,000	13,000	6,000	12,000	1,5	12,000		0,4007	0,000	0,0001	6,9E-23	0,0042	18 638	53 961	4,007
7.			9,000	14,000	7,000	13,000	1,6	13,000		0,1692	0,000	0,0001	6,9E-27	0,0042	17 683	71 644	1,692
8.			10,000	15,000	8,000	14,000	1,7	14,000		0,6305	0,000	0,0001	6,9E-31	0,0042	24 611	96 255	6,305
9.			11,000	16,000	9,000	15,000	1,8	15,000		0,6682	0,000	0,0001	6,9E-35	0,0042	40 373	136 628	6,682
10.			12,000	17,000	10,000	16,000	1,9	16,000		0,1423	0,000	0,0001	6,9E-39	0,0042	44 736	181 364	1,423
11.			13,000	18,000	11,000	17,000	2,000	17,000		0,2996	0,000	0,0001	6,9E-43	0,0042	61 566	24 293	2,996
12.			14,000	19,000	12,000	18,000	2,1	18,000		0,8488	0,000	0,0001	6,9E-47	0,0042	75 485	318 415	8,488
13.			15,000	20,000	13,000	19,000	2,2	19,000		0,7912	0,000	0,0001	6,9E-51	0,0042	99 415	41 783	7,912
14.			16,000	21,000	14,000	20,000	2,3	20,000		0,0707	0,000	0,0001	6,9E-55	0,0042	122 782	540 612	0,707
15.			17,000	22,000	15,000	21,000	2,4	21,000		0,0877	0,000	0,0001	6,9E-59	0,0042	150 155	690 767	0,877
16.			18,000	23,000	16,000	22,000	2,5	22,000		0,1118	0,000	0,0001	6,9E-63	0,0042	190 222	880 989	1,118
17.			19,000	24,000	17,000	23,000	2,6	23,000		0,6138	0,000	0,0001	6,9E-67	0,0042	224 997	1 105 986	6,138
18.			20,000	25,000	18,000	24,000	2,7	24,000		0,5363	0,000	0,0001	6,9E-71	0,0042	269 198	1 375 184	5,363
19.			21,000	26,000	19,000	25,000	2,8	25,000		0,517	0,000	0,0001	6,9E-75	0,0042	309 776	168 496	5,17
20.			22,000	27,000	20,000	26,000	2,9	26,000		0,0723	0,000	0,0001	6,9E-79	0,0042	365 516	2 050 476	0,723
	0,000		6,9E-79			0,0042			2050476,000	2,1							



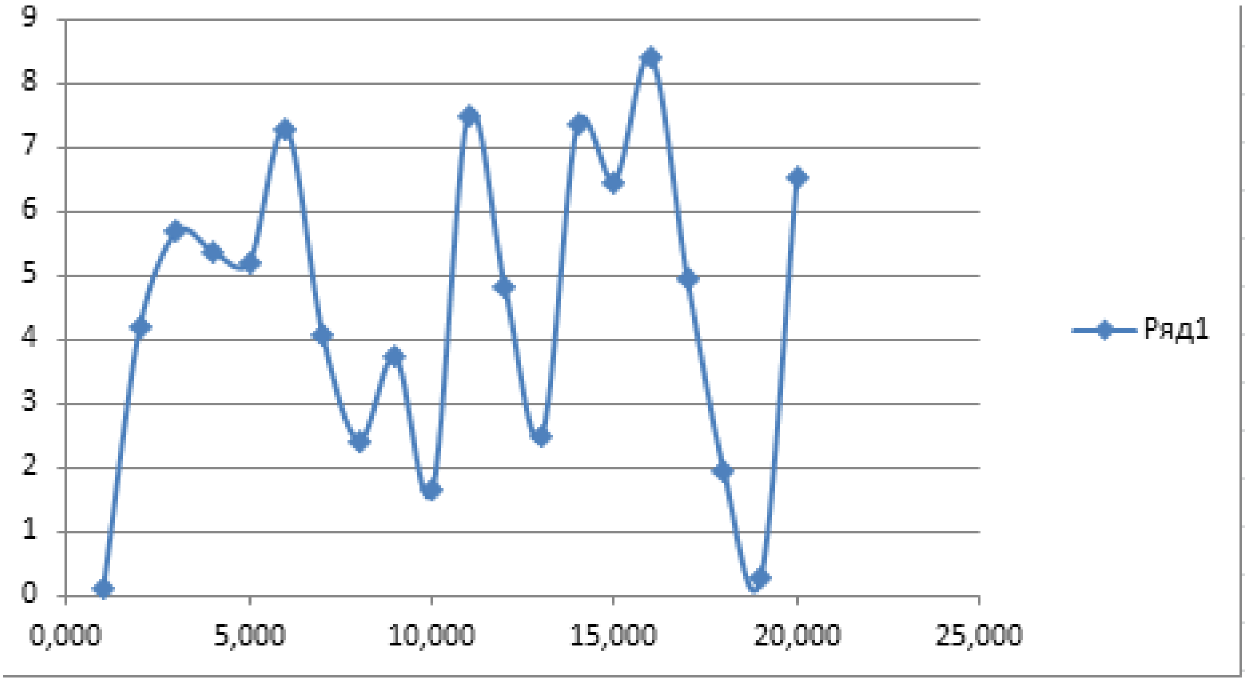
Эксперимент 8.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	езультат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	1,000	8,000	2,000	9,000	3,000	8,000	1,000	8,000	20,000	0,0096	0,000	0,001	0,001	0,004	0,0056	0,0056	0,1
2.			3,000	10,000	4,000	9,000	1,1	9,000		0,2372	0,000	0,0001	1,00E-07	0,004	0,2276	0,2332	2,37
3.			4,000	11,000	5,000	10,000	1,2	10,000		0,3946	0,000	0,0001	1,00E-11	0,004	11 573	13 905	3,95
4.			5,000	12,000	6,000	11,000	1,3	11,000		0,5429	0,000	0,0001	1,00E-15	0,004	11 482	25 387	5,43
5.			6,000	13,000	7,000	12,000	1,4	12,000		0,2929	0,000	0,0001	1,00E-19	0,004	17 498	42 885	2,93
6.			7,000	14,000	8,000	13,000	1,5	13,000		0,6033	0,000	0,0001	1,00E-23	0,004	23 102	65 987	6,03
7.			8,000	15,000	9,000	14,000	1,6	14,000		0,4543	0,000	0,0001	1,00E-27	0,004	28 507	94 494	4,54
8.			9,000	16,000	10,000	15,000	1,7	15,000		0,1464	0,000	0,0001	1,00E-31	0,004	36 917	131 411	1,46
9.			10,000	17,000	11,000	16,000	1,8	16,000		0,6827	0,000	0,0001	1,00E-35	0,004	55 358	186 769	6,83
10.			11,000	18,000	12,000	17,000	1,9	17,000		0,5254	0,000	0,0001	1,00E-39	0,004	6 842	255 189	5,25
11.			12,000	19,000	13,000	18,000	2,000	18,000		0,9114	0,000	0,0001	1,00E-43	0,004	93 851	34 904	9,11
12.			13,000	20,000	14,000	19,000	2,1	19,000		0,8564	0,000	0,0001	1,00E-47	0,004	119 438	468 478	8,56
13.			14,000	21,000	15,000	20,000	2,2	20,000		0,9296	0,000	0,0001	1,00E-51	0,004	140 718	609 196	9,3
14.			15,000	22,000	16,000	21,000	2,3	21,000		0,8604	0,000	0,0001	1,00E-55	0,004	17 929	788 486	8,6
15.			16,000	23,000	17,000	22,000	2,4	22,000		0,0188	0,000	0,0001	1,00E-59	0,004	221 561	1 010 047	0,19
16.			17,000	24,000	18,000	23,000	2,5	23,000		0,7994	0,000	0,0001	1,00E-63	0,004	267 781	1 277 828	7,99
17.			18,000	25,000	19,000	24,000	2,6	24,000		0,9327	0,000	0,0001	1,00E-67	0,004	321 301	1 599 129	9,33
18.			19,000	26,000	20,000	25,000	2,7	25,000		0,7364	0,000	0,0001	1,00E-71	0,004	387 998	1 987 127	7,36
19.			20,000	27,000	21,000	26,000	2,8	26,000		0,3243	0,000	0,0001	1,00E-75	0,004	455 833	244 296	3,24
20.			21,000	28,000	22,000	27,000	2,9	27,000		0,7777	0,000	0,0001	1,00E-79	0,004	524 482	2 967 442	7,78
	0,000		0,000			0,004			2967442,000	3,7							



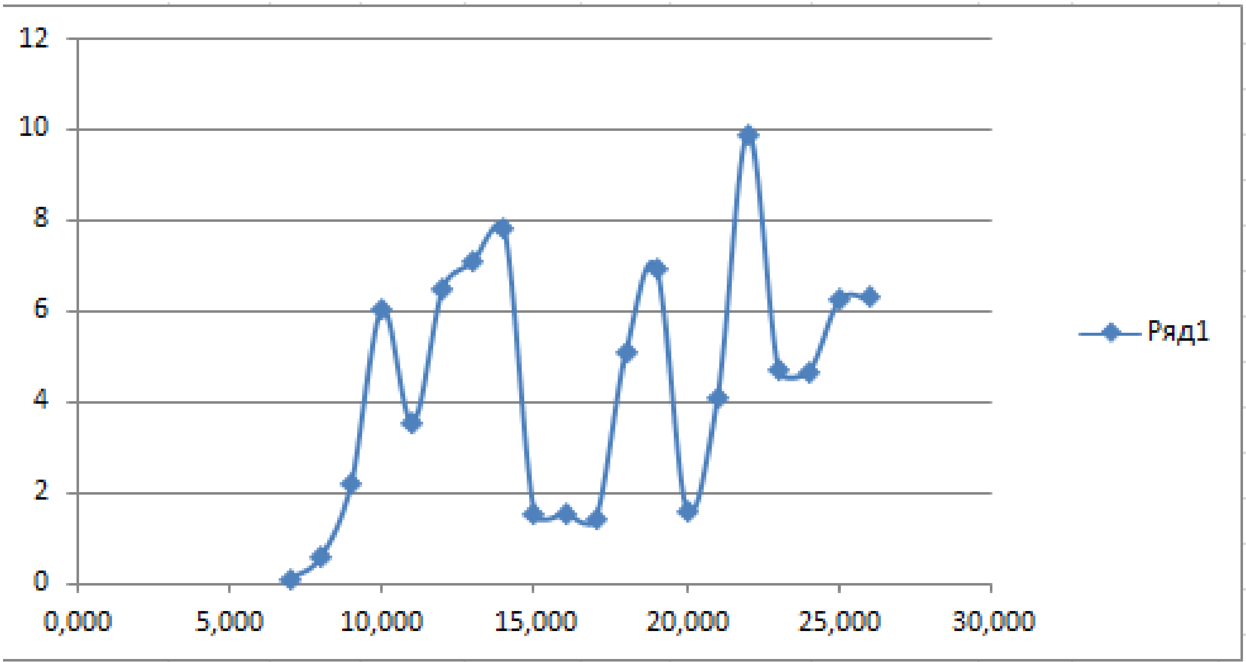
Эксперимент 9.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	Результат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	5,000	9,000	1,000	7,000	1,000	9,000	1,000	9,000	20,000	0,0126	0,000	0,0026	0,0026	0,0072	0,0054	0,0054	0,13
2.			2,000	8,000	2,000	10,000	1,1	10,000		0,4198	0,000	0,0001	2,6E-7	0,0072	0,4072	0,4126	4,2
3.			3,000	9,000	3,000	11,000	1,2	11,000		0,5682	0,000	0,0001	2,6E-11	0,0072	11 483	15 609	5,68
4.			4,000	10,000	4,000	12,000	1,3	12,000		0,538	0,000	0,0001	2,6E-15	0,0072	0,9697	25 306	5,38
5.			5,000	11,000	5,000	13,000	1,4	13,000		0,5202	0,000	0,0001	2,6E-19	0,0072	0,9821	35 127	5,2
6.			6,000	12,000	6,000	14,000	1,5	14,000		0,7298	0,000	0,0001	2,6E-23	0,0072	22 094	57 221	7,3
7.			7,000	13,000	7,000	15,000	1,6	15,000		0,4092	0,000	0,0001	2,6E-27	0,0072	26 792	84 013	4,09
8.			8,000	14,000	8,000	16,000	1,7	16,000		0,2419	0,000	0,0001	2,6E-31	0,0072	38 323	122 336	2,42
9.			9,000	15,000	9,000	17,000	1,8	17,000		0,3733	0,000	0,0001	2,6E-35	0,0072	51 308	173 644	3,73
10.			10,000	16,000	10,000	18,000	1,9	18,000		0,1633	0,000	0,0001	2,6E-39	0,0072	57 894	231 538	1,63
11.			11,000	17,000	11,000	19,000	2,000	19,000		0,7505	0,000	0,0001	2,6E-43	0,0072	85 865	317 403	7,51
12.			12,000	18,000	12,000	20,000	2,1	20,000		0,4829	0,000	0,0001	2,6E-47	0,0072	107 313	424 716	4,83
13.			13,000	19,000	13,000	21,000	2,2	21,000		0,2488	0,000	0,0001	2,6E-51	0,0072	127 646	552 362	2,49
14.			14,000	20,000	14,000	22,000	2,3	22,000		0,7376	0,000	0,0001	2,6E-55	0,0072	164 872	717 234	7,38
15.			15,000	21,000	15,000	23,000	2,4	23,000		0,6457	0,000	0,0001	2,6E-59	0,0072	199 061	916 295	6,46
16.			16,000	22,000	16,000	24,000	2,5	24,000		0,8409	0,000	0,0001	2,6E-63	0,0072	241 928	1 158 223	8,41
17.			17,000	23,000	17,000	25,000	2,6	25,000		0,4957	0,000	0,0001	2,6E-67	0,0072	286 518	1 444 741	4,96
18.			18,000	24,000	18,000	26,000	2,7	26,000		0,1949	0,000	0,0001	2,6E-71	0,0072	346 958	1 791 699	1,95
19.			19,000	25,000	19,000	27,000	2,8	27,000		0,0259	0,000	0,0001	2,6E-75	0,0072	39 827	2 189 969	0,26
20.			20,000	26,000	20,000	28,000	2,9	28,000		0,6512	0,000	0,0001	2,6E-79	0,0072	466 206	2 656 175	6,51
	0,000		2,6E-79			0,0072			2656175,000	3,27							



Эксперимент 10.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
№	Нач.усл	Кон.усл	Нач.усл	Кон.усл	Время		Коэфф	Конст	Предел	езультат							
	U_{01}	U_{02}	X_{0j}	X_j	t_{01}	t_{02}	P	C	m	Y							
1.	2,000	4,000	1,000	7,000	2,000	7,000	1,000	10,000	20,000	0,011	0,000	0,0026	0,0026	0,005	0,006	0,006	0,11
2.			2,000	8,000	3,000	8,000	1,1	11,000		0,0588	0,000	0,0001	2,6E-7	0,005	10 478	10 538	0,59
3.			3,000	9,000	4,000	9,000	1,2	12,000		0,2208	0,000	0,0001	2,6E-11	0,005	11 618	22 156	2,21
4.			4,000	10,000	5,000	10,000	1,3	13,000		0,6047	0,000	0,0001	2,6E-15	0,005	13 838	35 994	6,05
5.			5,000	11,000	6,000	11,000	1,4	14,000		0,3546	0,000	0,0001	2,6E-19	0,005	17 498	53 492	3,55
6.			6,000	12,000	7,000	12,000	1,5	15,000		0,6506	0,000	0,0001	2,6E-23	0,005	22 958	7 645	6,51
7.			7,000	13,000	8,000	13,000	1,6	16,000		0,7088	0,000	0,0001	2,6E-27	0,005	30 578	107 028	7,09
8.			8,000	14,000	9,000	14,000	1,7	17,000		0,781	0,000	0,0001	2,6E-31	0,005	40 718	147 746	7,81
9.			9,000	15,000	10,000	15,000	1,8	18,000		0,1553	0,000	0,0001	2,6E-35	0,005	53 738	201 484	1,55
10.			10,000	16,000	11,000	16,000	1,9	19,000		0,1558	0,000	0,0001	2,6E-39	0,005	69 998	271 482	1,56
11.			11,000	17,000	12,000	17,000	2,000	20,000		0,1426	0,000	0,0001	2,6E-43	0,005	89 858	36 134	1,43
12.			12,000	18,000	13,000	18,000	2,1	21,000		0,5115	0,000	0,0001	2,6E-47	0,005	113 678	475 018	5,12
13.			13,000	19,000	14,000	19,000	2,2	22,000		0,6947	0,000	0,0001	2,6E-51	0,005	141 818	616 836	6,95
14.			14,000	20,000	15,000	20,000	2,3	23,000		0,1603	0,000	0,0001	2,6E-55	0,005	174 638	791 474	1,6
15.			15,000	21,000	16,000	21,000	2,4	24,000		0,4121	0,000	0,0001	2,6E-59	0,005	212 498	1 003 972	4,12
16.			16,000	22,000	17,000	22,000	2,5	25,000		0,9904	0,000	0,0001	2,6E-63	0,005	255 758	125 973	9,9
17.			17,000	23,000	18,000	23,000	2,6	26,000		0,4713	0,000	0,0001	2,6E-67	0,005	304 778	1 564 508	4,71
18.			18,000	24,000	19,000	24,000	2,7	27,000		0,4667	0,000	0,0001	2,6E-71	0,005	359 918	1 924 426	4,67
19.			19,000	25,000	20,000	25,000	2,8	28,000		0,6247	0,000	0,0001	2,6E-75	0,005	421 538	2 345 964	6,25
20.			20,000	26,000	21,000	26,000	2,9	29,000		0,6294	0,000	0,0001	2,6E-79	0,005	489 998	2 835 962	6,29
	0,000		2,6E-79			0,005			2835962,000	3,43							

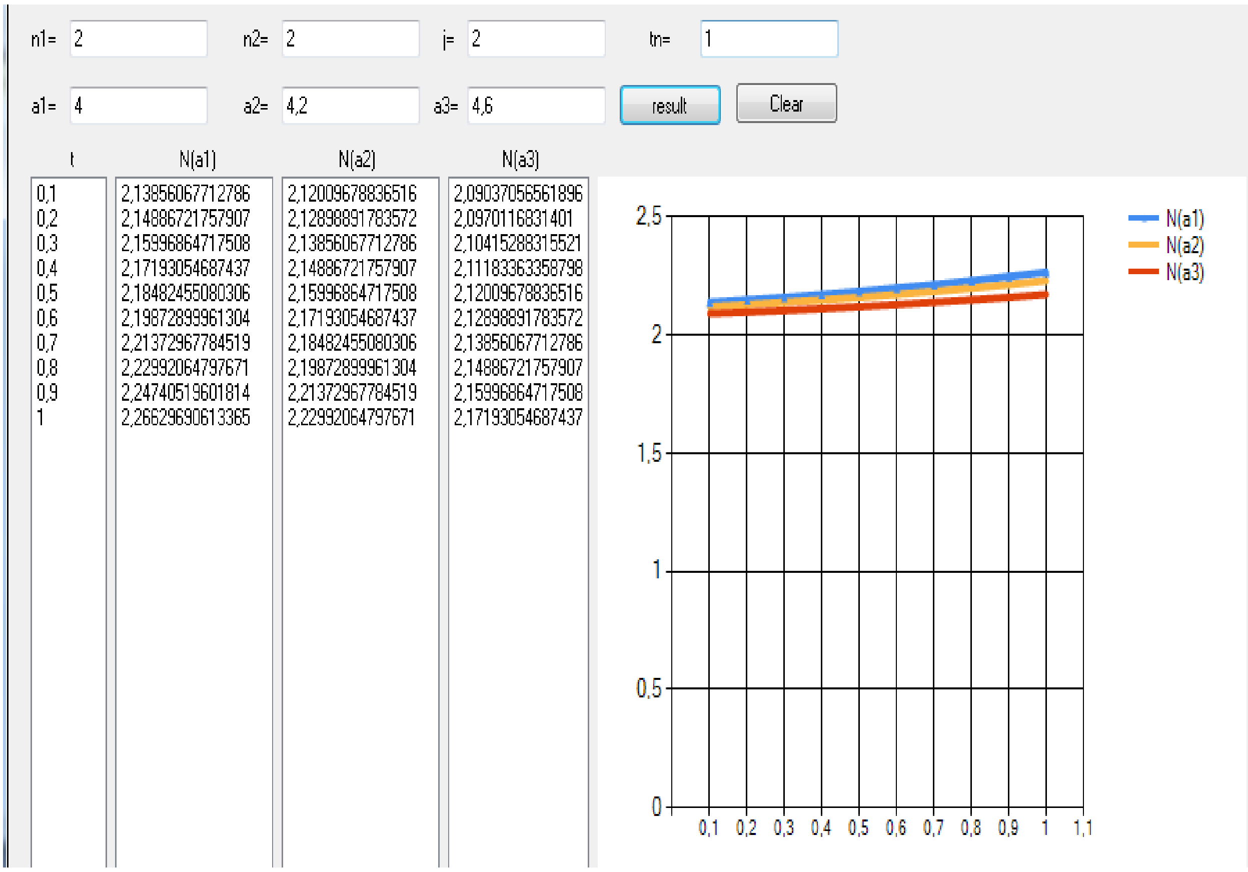


ПРИЛОЖЕНИЕ 2

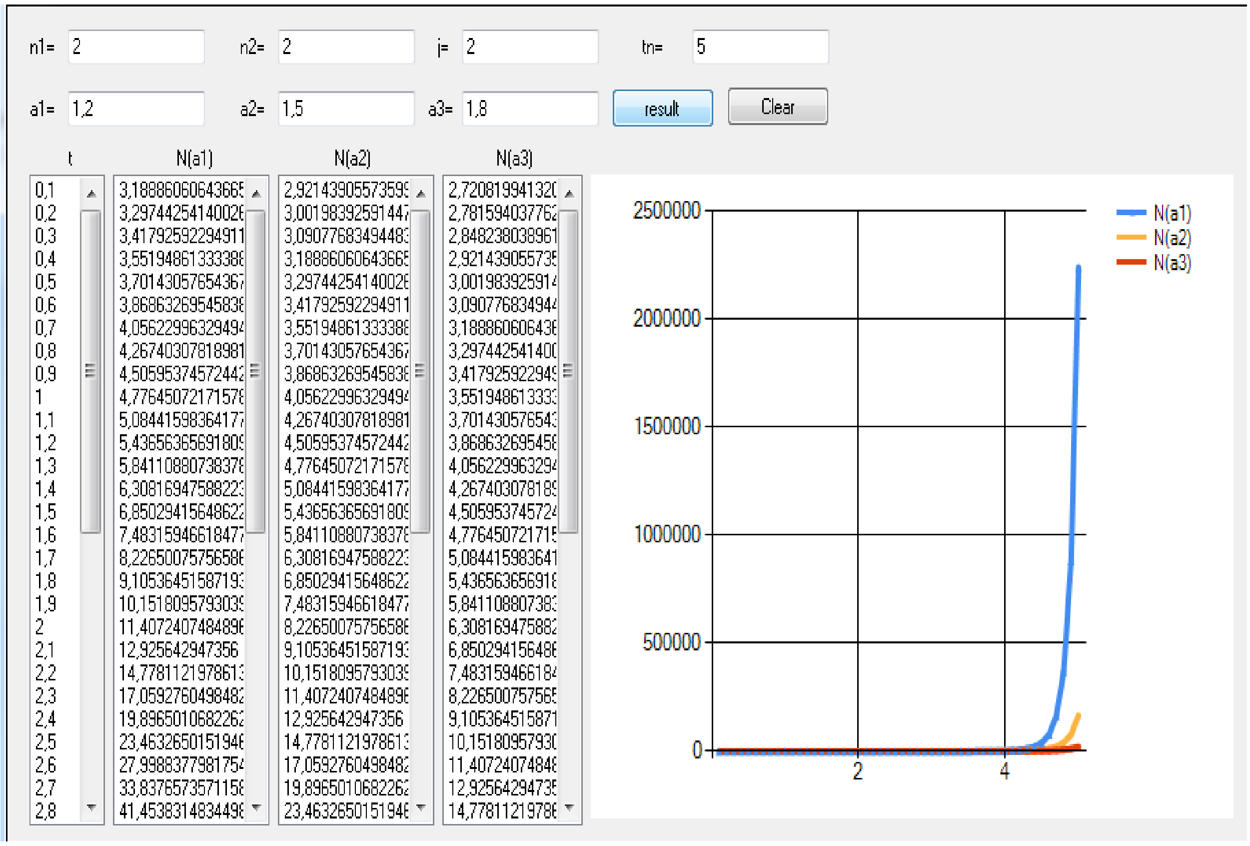
Приводимые ниже эксперименты были проведены вместе с научным руководителем профессором Юнуси М.К. для процесса распространения популяционных волн в экстремальных режимах, которые описываются дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами вида

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial t}+qu\right)^n=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}+p_j\frac{\partial u}{\partial x_j}+q_j u\right)^n$$

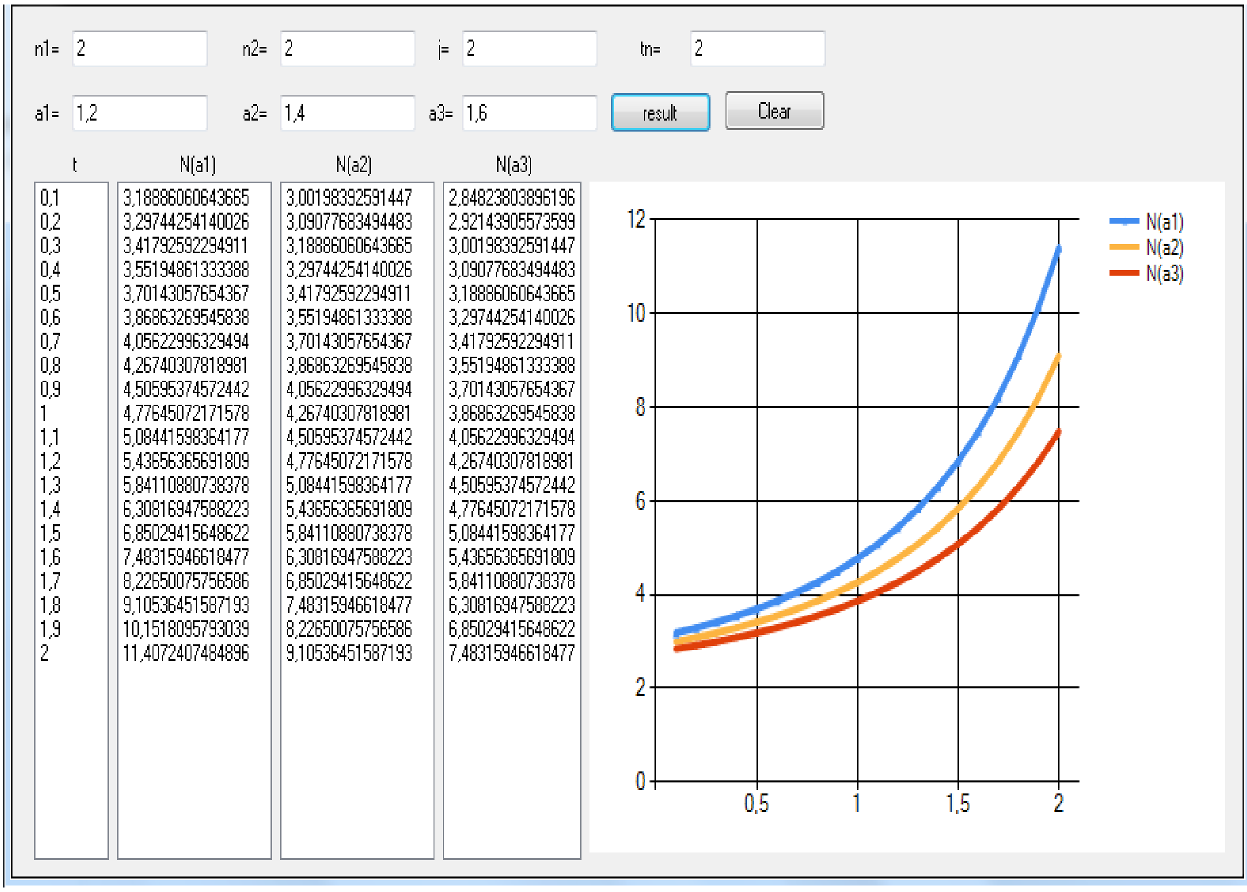
Эксперимент 1



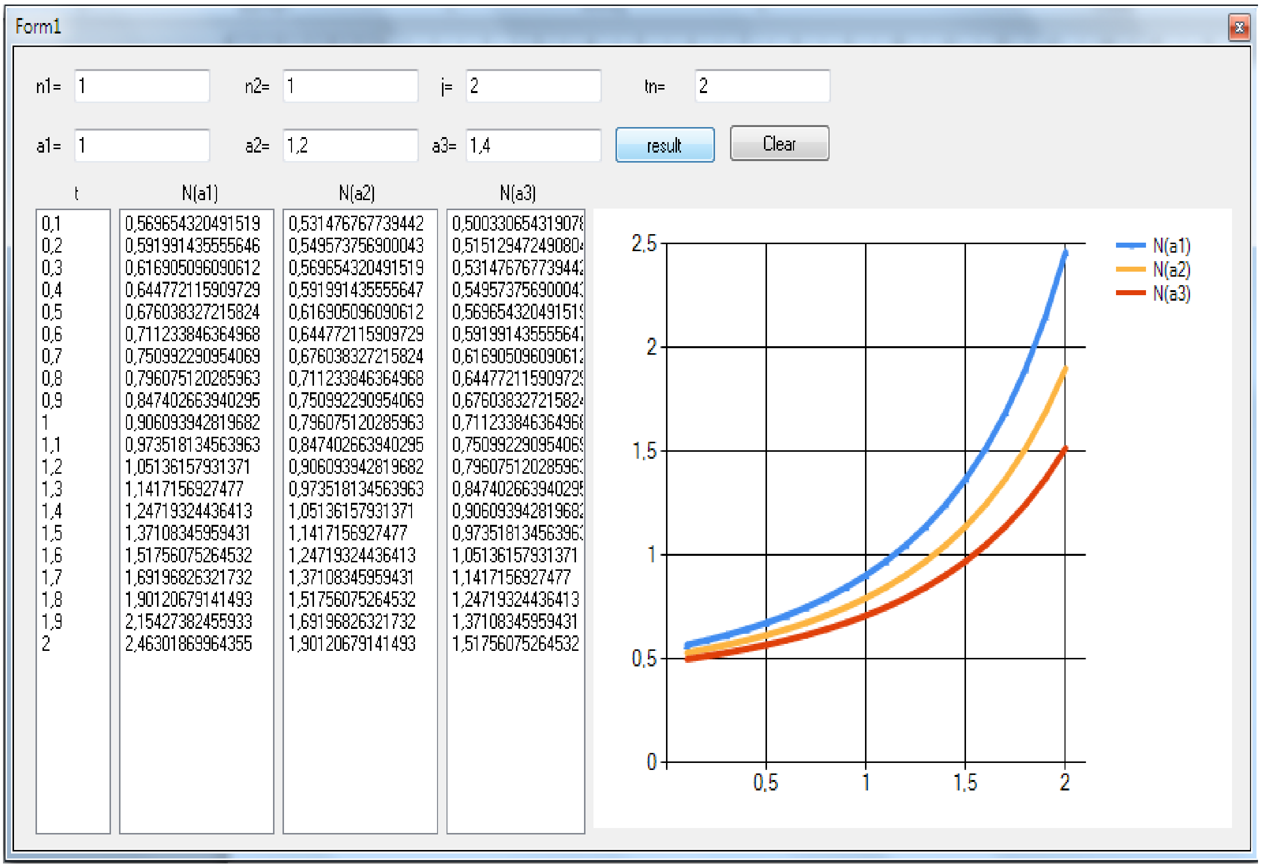
Эксперимент 2



Эксперимент 3

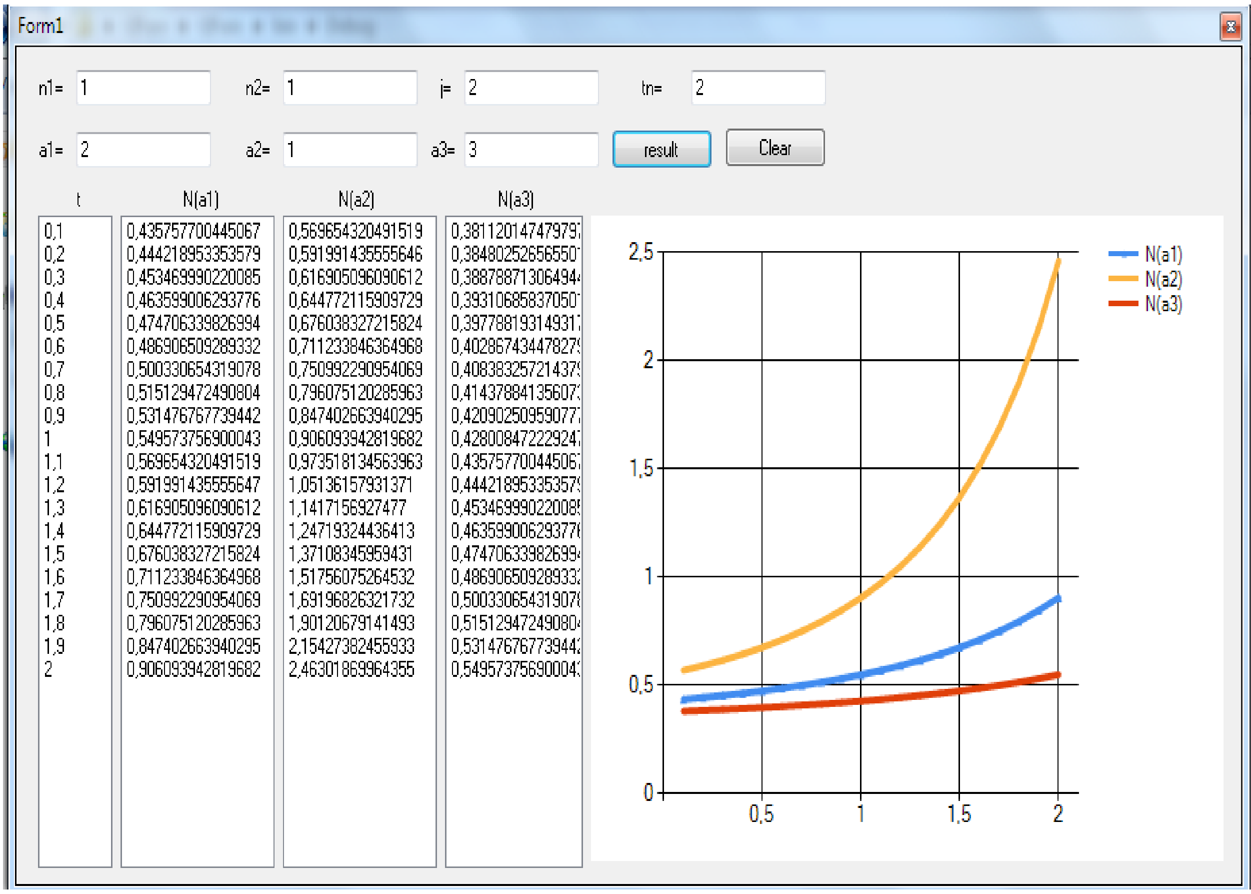


Эксперимент 4



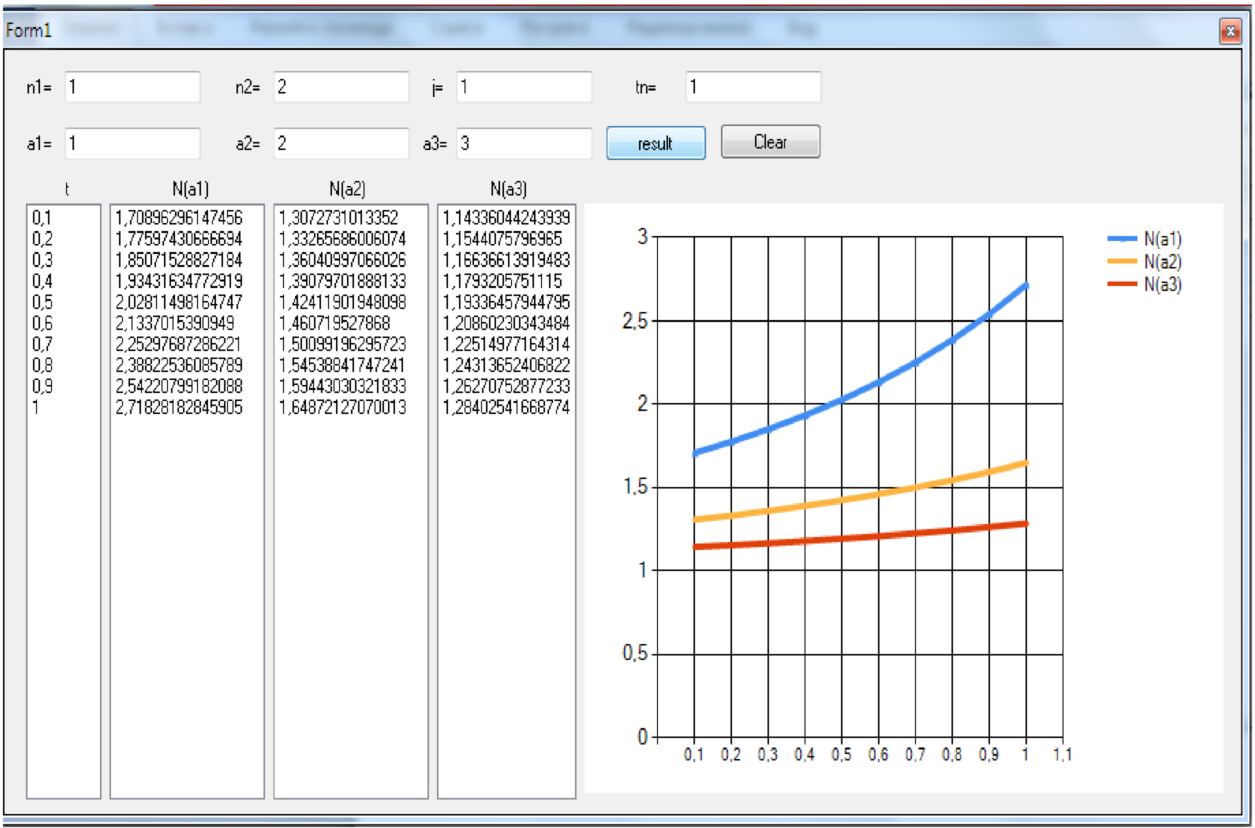
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	0,569654320491519	0,531476767739442	0,50033065431907
0,2	0,591991435555646	0,549573756900043	0,51512947249080
0,3	0,616905096090612	0,569654320491519	0,53147676773944
0,4	0,644772115909729	0,591991435555647	0,54957375690004
0,5	0,676038327215824	0,616905096090612	0,56965432049151
0,6	0,711233846364968	0,644772115909729	0,59199143555564
0,7	0,750992290954069	0,676038327215824	0,61690509609061
0,8	0,796075120285963	0,711233846364968	0,64477211590972
0,9	0,847402663940295	0,750992290954069	0,67603832721582
1	0,906093942819682	0,796075120285963	0,71123384636496
1,1	0,973518134563963	0,847402663940295	0,75099229095406
1,2	1,05136157931371	0,906093942819682	0,79607512028596
1,3	1,1417156927477	0,973518134563963	0,84740266394029
1,4	1,24719324436413	1,05136157931371	0,90609394281968
1,5	1,37108345959431	1,1417156927477	0,97351813456396
1,6	1,51756075264532	1,24719324436413	1,05136157931371
1,7	1,69196826321732	1,37108345959431	1,1417156927477
1,8	1,90120679141493	1,51756075264532	1,24719324436413
1,9	2,15427382455933	1,69196826321732	1,37108345959431
2	2,46301869964355	1,90120679141493	1,51756075264532

Эксперимент 5



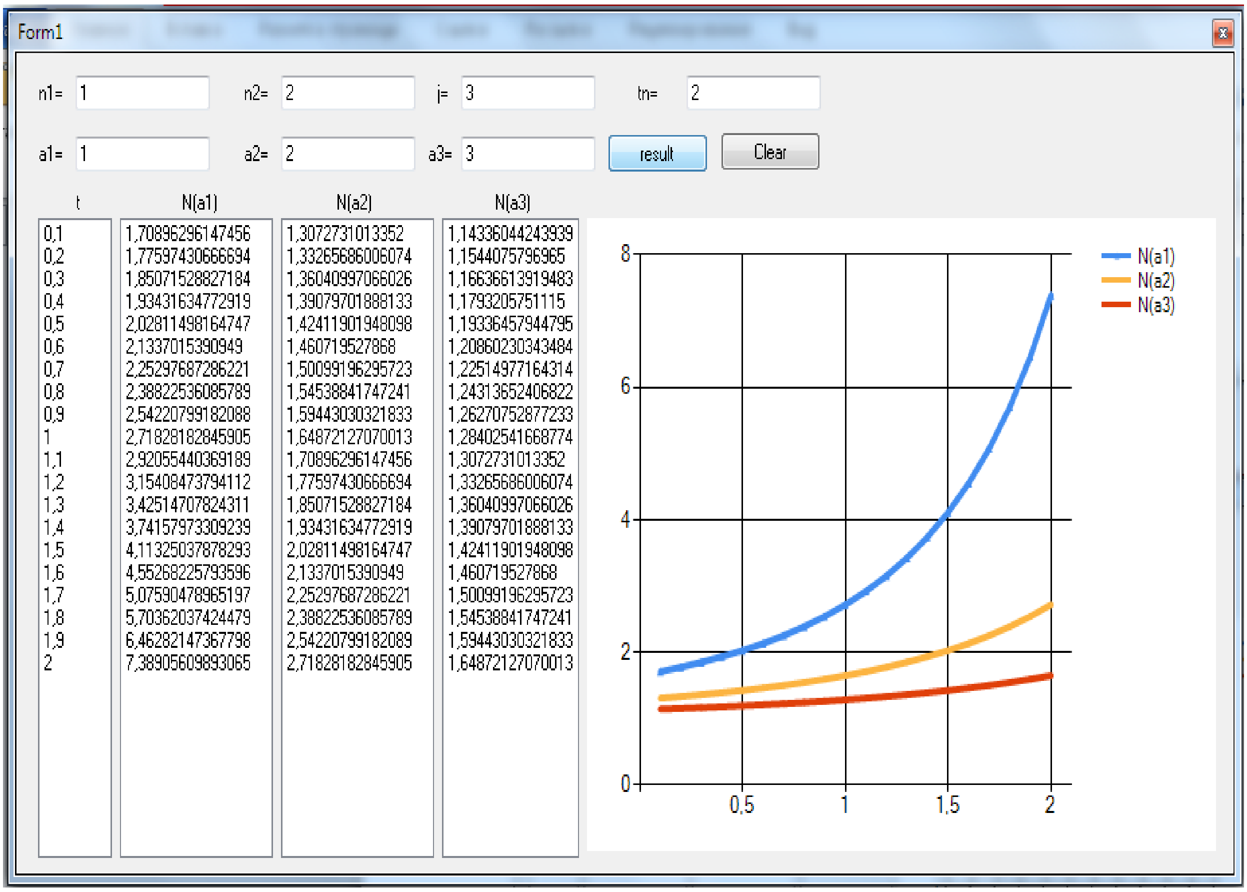
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	0,435757700445067	0,569654320491519	0,38112014747979
0,2	0,444218953353579	0,591991435555646	0,38480252656550
0,3	0,453469990220085	0,616905096090612	0,38878871306494
0,4	0,463599006293776	0,644772115909729	0,39310685837050
0,5	0,474706339826994	0,676038327215824	0,39778819314931
0,6	0,486906509289332	0,711233846364968	0,40286743447827
0,7	0,500330654319078	0,750992290954069	0,40838325721437
0,8	0,515129472490804	0,796075120285963	0,41437884135607
0,9	0,531476767739442	0,847402663940295	0,42090250959077
1	0,549573756900043	0,906093942819682	0,42800847222924
1,1	0,569654320491519	0,973518134563963	0,43575770044506
1,2	0,591991435555647	1,05136157931371	0,44421895335357
1,3	0,616905096090612	1,1417156927477	0,45346999022008
1,4	0,644772115909729	1,24719324436413	0,46359900629377
1,5	0,676038327215824	1,37108345959431	0,47470633982699
1,6	0,711233846364968	1,51756075264532	0,48690650928933
1,7	0,750992290954069	1,69196826321732	0,50033065431907
1,8	0,796075120285963	1,90120679141493	0,51512947249080
1,9	0,847402663940295	2,15427382455933	0,53147676773944
2	0,906093942819682	2,46301869964355	0,54957375690004

Эксперимент 6



t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,70896296147456	1,3072731013352	1,14336044243939
0,2	1,77597430666694	1,33265686006074	1,1544075796965
0,3	1,85071528827184	1,36040997066026	1,16636613919483
0,4	1,93431634772919	1,39079701888133	1,1793205751115
0,5	2,02811498164747	1,42411901948098	1,19336457944795
0,6	2,1337015390949	1,460719527868	1,20860230343484
0,7	2,25297687286221	1,50099196295723	1,22514977164314
0,8	2,38822536085789	1,54538841747241	1,24313652406822
0,9	2,54220799182088	1,59443030321833	1,26270752877233
1	2,71828182845905	1,64872127070013	1,28402541668774

Эксперимент 7



t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,70896296147456	1,3072731013352	1,14336044243939
0,2	1,77597430666694	1,33265686006074	1,1544075796965
0,3	1,85071528827184	1,36040997066026	1,16636613919483
0,4	1,93431634772919	1,39079701888133	1,1793205751115
0,5	2,02811498164747	1,42411901948098	1,19336457944795
0,6	2,1337015390949	1,460719527868	1,20860230343484
0,7	2,25297687286221	1,50099196295723	1,22514977164314
0,8	2,38822536085789	1,54538841747241	1,24313652406822
0,9	2,54220799182088	1,59443030321833	1,26270752877233
1	2,71828182845905	1,64872127070013	1,28402541668774
1,1	2,92055440369189	1,70896296147456	1,3072731013352
1,2	3,15408473794112	1,77597430666694	1,33265686006074
1,3	3,42514707824311	1,85071528827184	1,36040997066026
1,4	3,74157973309239	1,93431634772919	1,39079701888133
1,5	4,11325037878293	2,02811498164747	1,42411901948098
1,6	4,55268225793596	2,1337015390949	1,460719527868
1,7	5,07590478965197	2,25297687286221	1,50099196295723
1,8	5,70362037424479	2,38822536085789	1,54538841747241
1,9	6,46282147367798	2,54220799182089	1,59443030321833
2	7,38905609893065	2,71828182845905	1,64872127070013

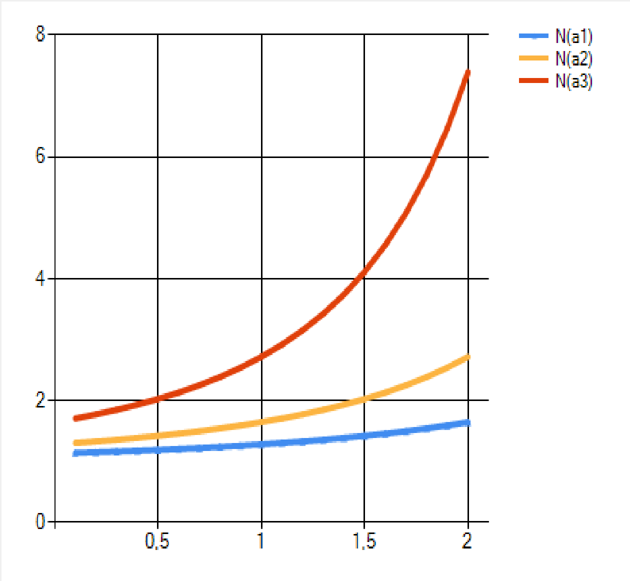
Эксперимент 8

Form1

n1= 1   n2= 2   j= 3   tn= 2

a1= 3   a2= 2   a3= 1   result   Clear

t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,14336044243939	1,3072731013352	1,70896296147456
0,2	1,1544075796965	1,33265686006074	1,77597430666694
0,3	1,16636613919483	1,36040997066026	1,85071528827184
0,4	1,1793205751115	1,39079701888133	1,93431634772919
0,5	1,19336457944795	1,42411901948098	2,02811498164747
0,6	1,20860230343484	1,460719527868	2,1337015390949
0,7	1,22514977164314	1,50099196295723	2,25297687286221
0,8	1,24313652406822	1,54538841747241	2,38822536085789
0,9	1,26270752877233	1,59443030321833	2,54220799182088
1	1,28402541668774	1,64872127070013	2,71828182845905
1,1	1,3072731013352	1,70896296147456	2,92055440369189
1,2	1,33265686006074	1,77597430666694	3,15408473794112
1,3	1,36040997066026	1,85071528827184	3,42514707824311
1,4	1,39079701888133	1,93431634772919	3,74157973309239
1,5	1,42411901948098	2,02811498164747	4,11325037878293
1,6	1,460719527868	2,1337015390949	4,55268225793596
1,7	1,50099196295723	2,25297687286221	5,07590478965197
1,8	1,54538841747241	2,38822536085789	5,70362037424479
1,9	1,59443030321833	2,54220799182089	6,46282147367798
2	1,64872127070013	2,71828182845905	7,38905609893065



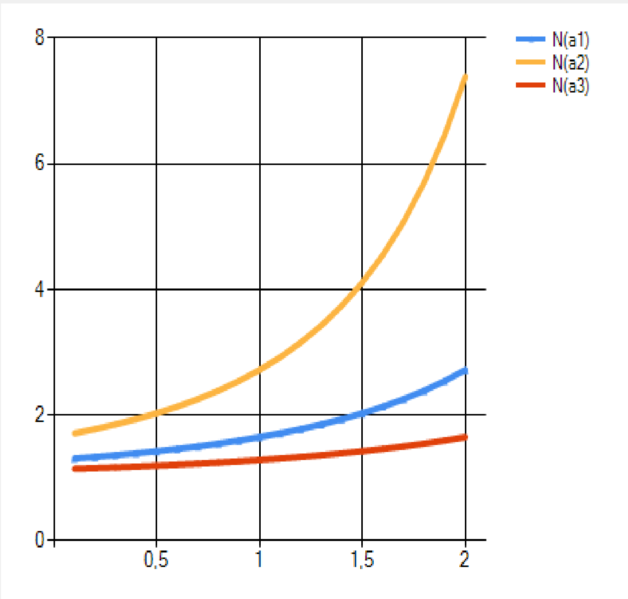
Эксперимент 9

Form1

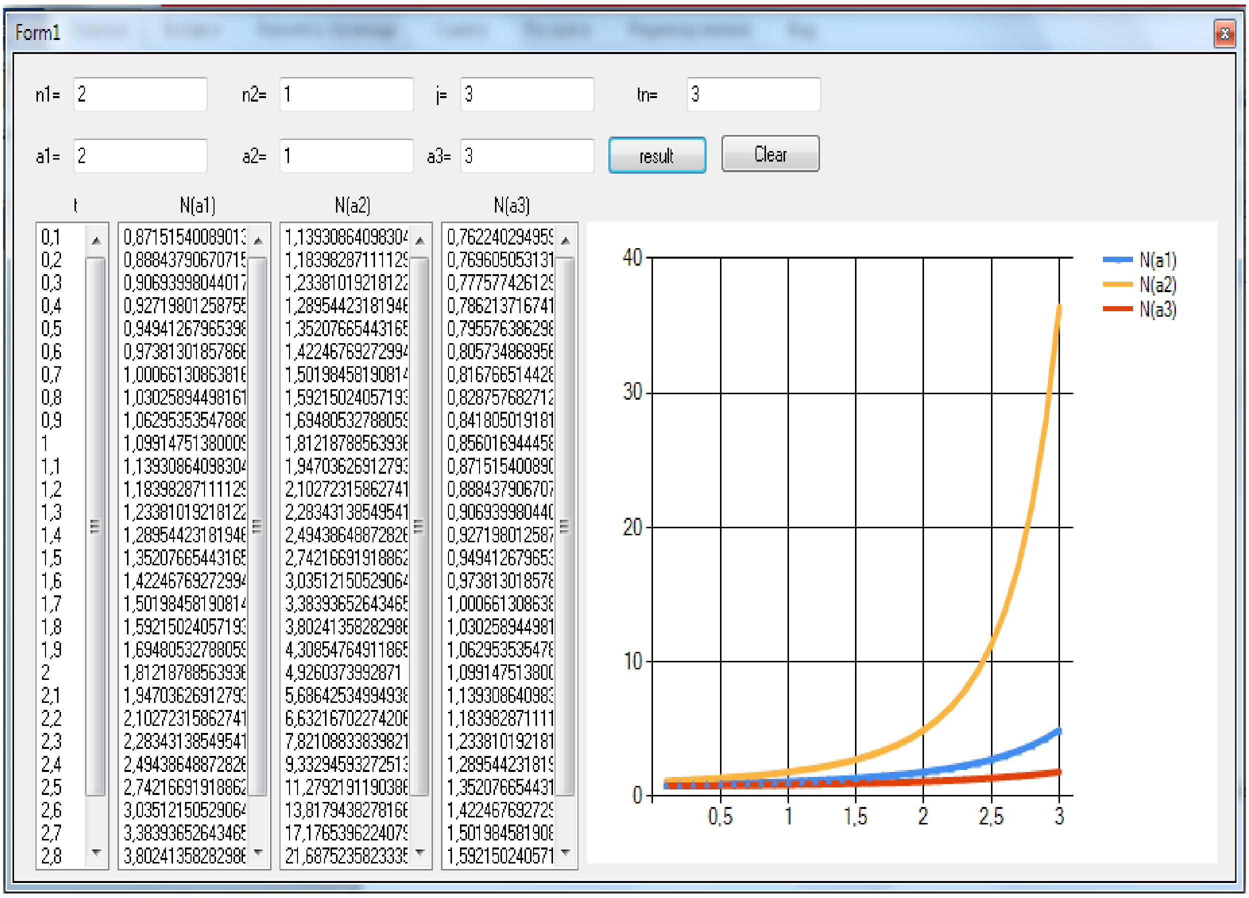
n1= 1   n2= 2   j= 3   tn= 2

a1= 2   a2= 1   a3= 3   result   Clear

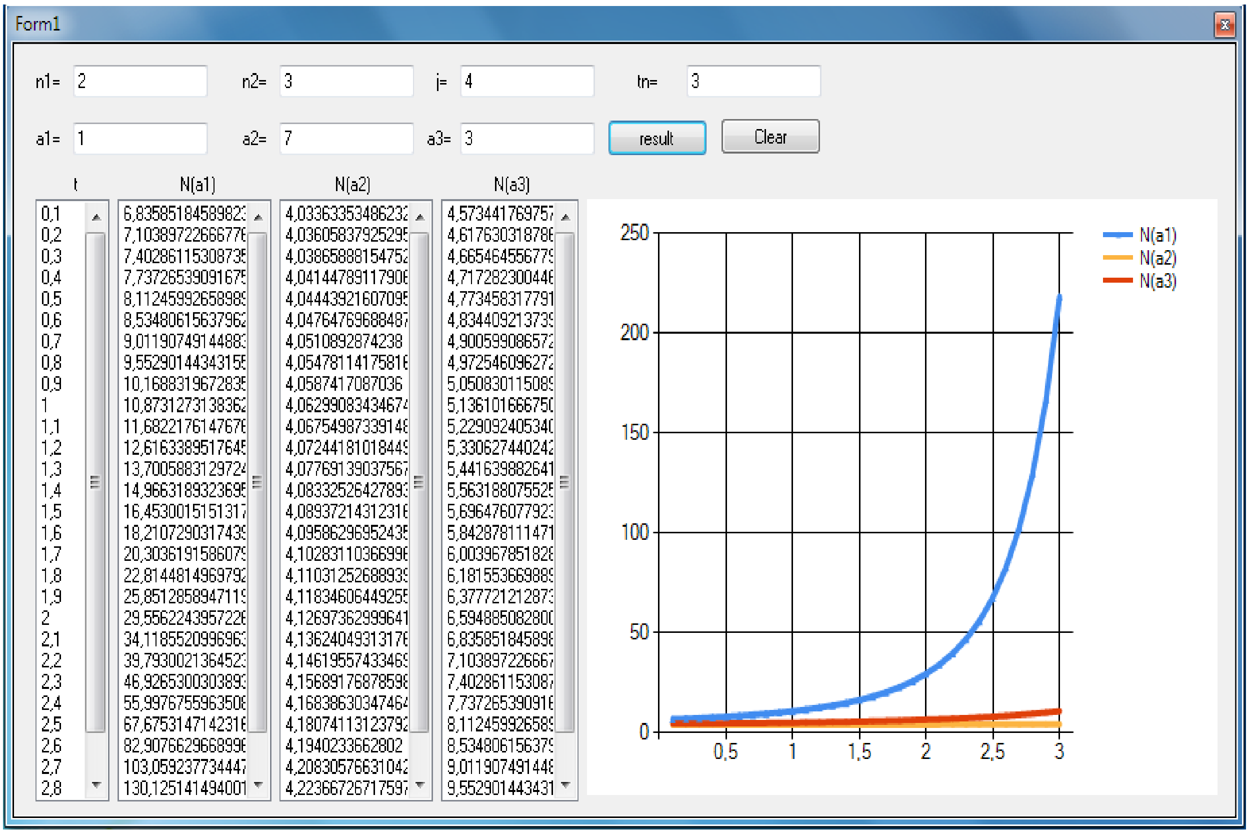
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,3072731013352	1,70896296147456	1,14336044243939
0,2	1,33265686006074	1,77597430666694	1,1544075796965
0,3	1,36040997066026	1,85071528827184	1,16636613919483
0,4	1,39079701888133	1,93431634772919	1,1793205751115
0,5	1,42411901948098	2,02811498164747	1,19336457944795
0,6	1,460719527868	2,1337015390949	1,20860230343484
0,7	1,50099196295723	2,25297687286221	1,22514977164314
0,8	1,54538841747241	2,38822536085789	1,24313652406822
0,9	1,59443030321833	2,54220799182088	1,26270752877233
1	1,64872127070013	2,71828182845905	1,28402541668774
1,1	1,70896296147456	2,92055440369189	1,3072731013352
1,2	1,77597430666694	3,15408473794112	1,33265686006074
1,3	1,85071528827184	3,42514707824311	1,36040997066026
1,4	1,93431634772919	3,74157973309239	1,39079701888133
1,5	2,02811498164747	4,11325037878293	1,42411901948098
1,6	2,1337015390949	4,55268225793596	1,460719527868
1,7	2,25297687286221	5,07590478965197	1,50099196295723
1,8	2,38822536085789	5,70362037424479	1,54538841747241
1,9	2,54220799182089	6,46282147367798	1,59443030321833
2	2,71828182845905	7,38905609893065	1,64872127070013



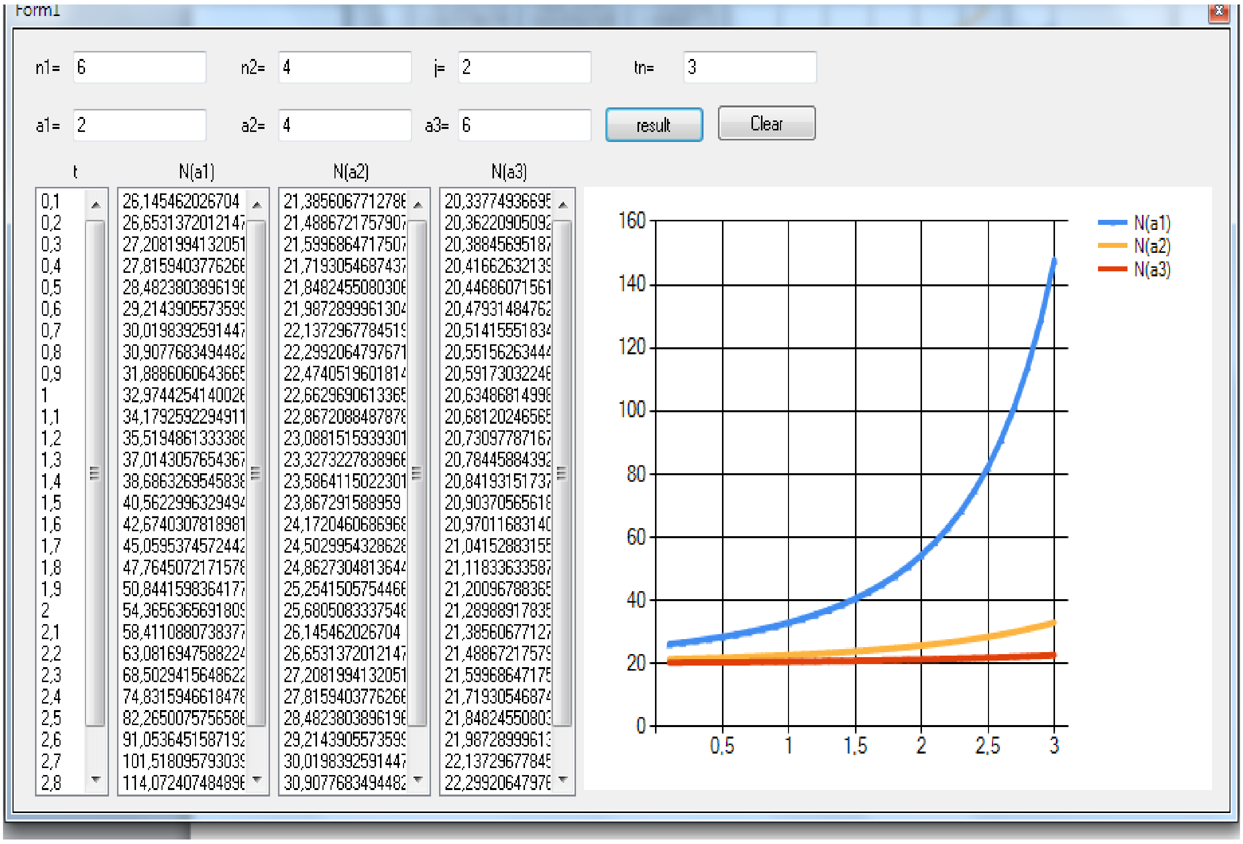
Эксперимент 10



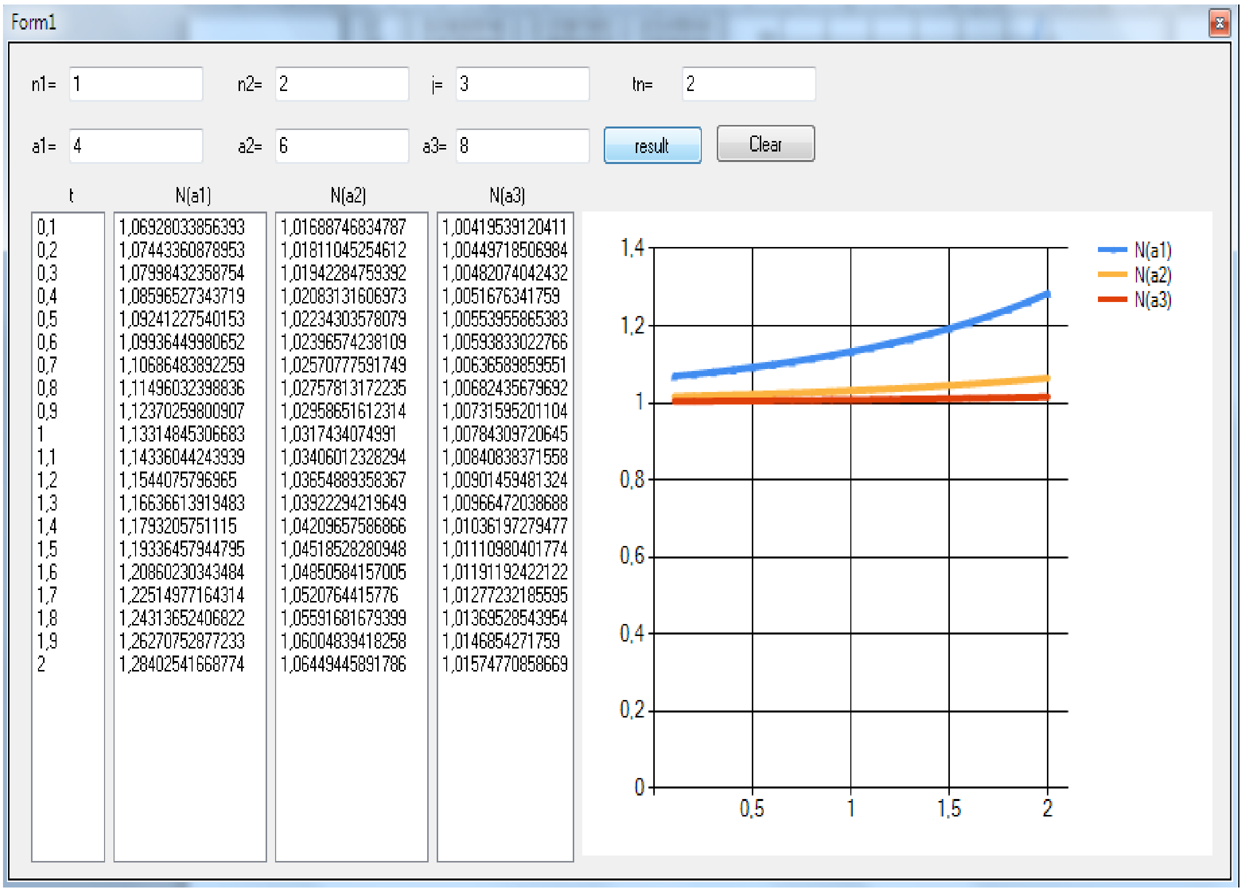
Эксперимент 11



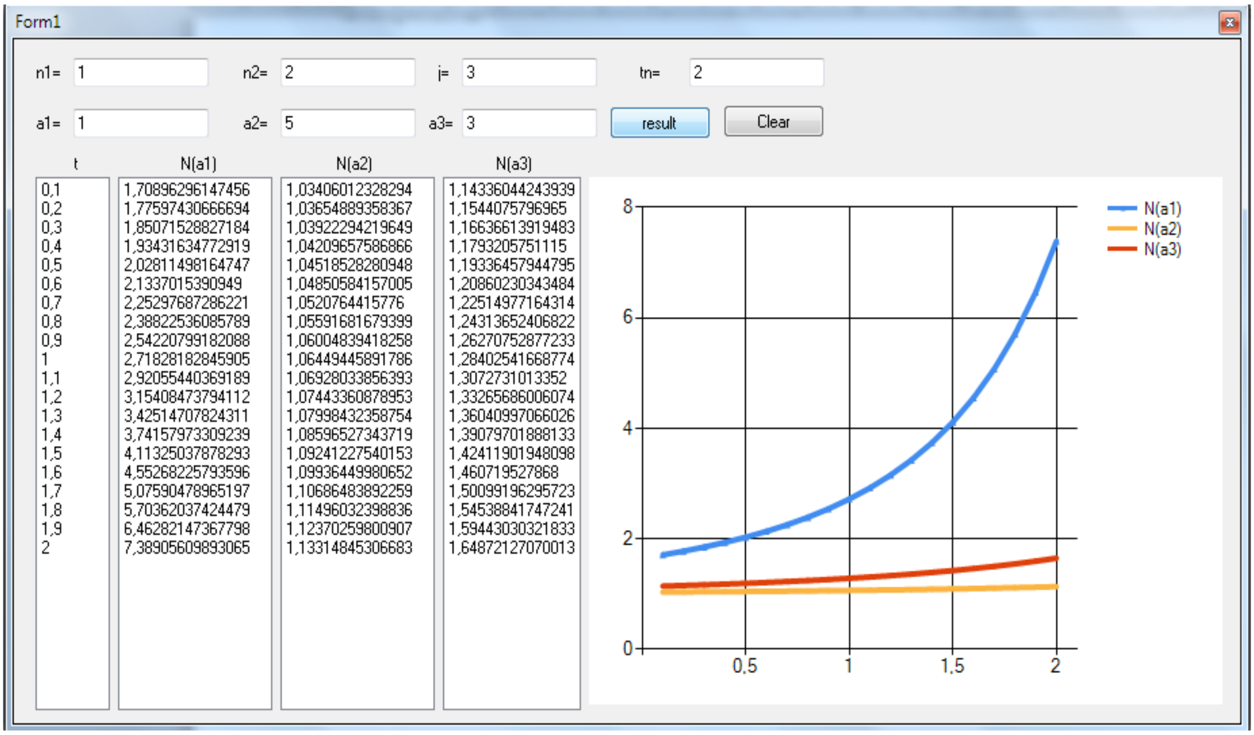
Эксперимент 12



Эксперимент 13

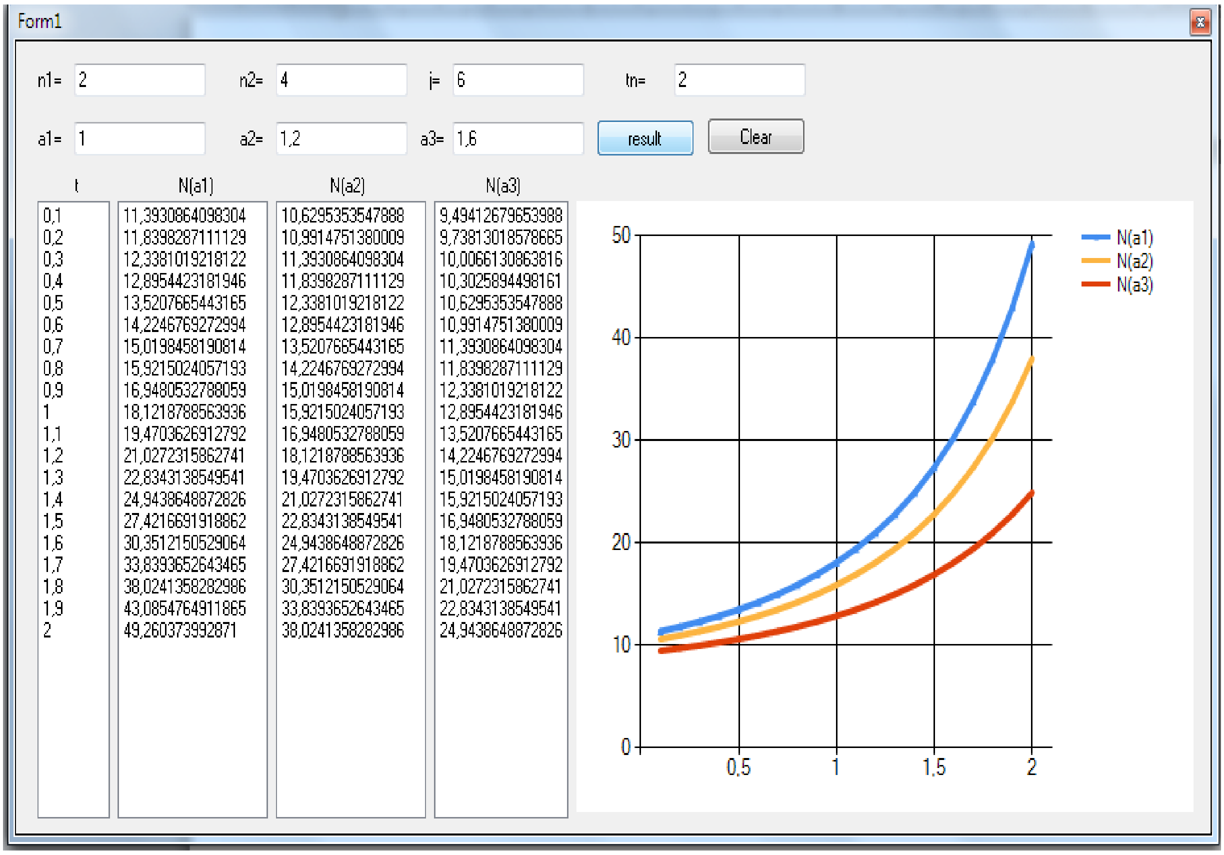


Эксперимент 14



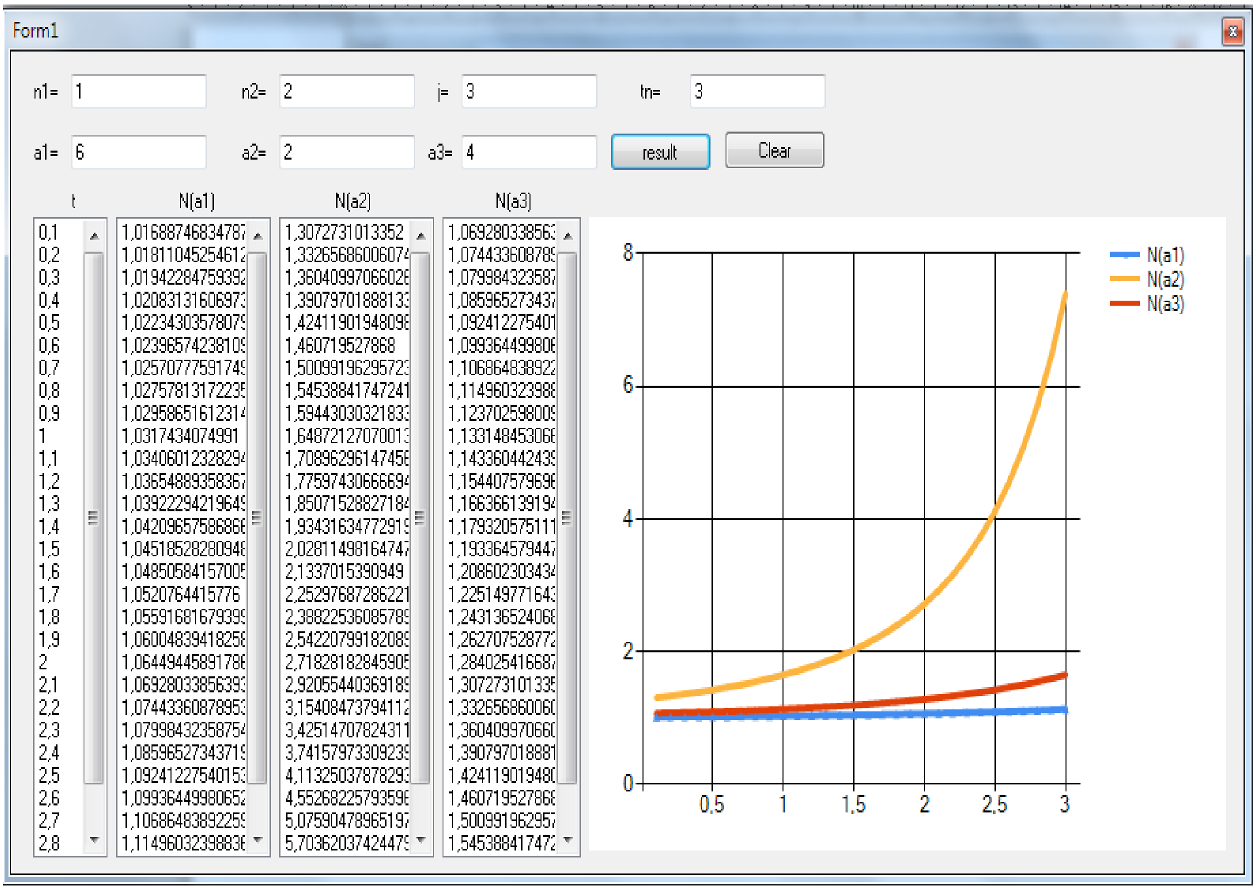
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,70896296147456	1,03406012328294	1,14336044243939
0,2	1,77597430666694	1,03654889358367	1,1544075796965
0,3	1,85071528827184	1,03922294219649	1,16636613919483
0,4	1,93431634772919	1,04209657586866	1,1793205751115
0,5	2,02811498164747	1,04518528280948	1,19336457944795
0,6	2,1337015390949	1,04850584157005	1,20860230343484
0,7	2,25297687286221	1,0520764415776	1,22514977164314
0,8	2,38822536085789	1,05591681679399	1,24313652406822
0,9	2,54220799182088	1,06004839418258	1,26270752877233
1	2,71828182845905	1,06449445891786	1,28402541668774
1,1	2,92055440369189	1,06928033856393	1,3072731013352
1,2	3,15408473794112	1,07443360878953	1,33265686006074
1,3	3,42514707824311	1,07998432358754	1,36040997066026
1,4	3,74157973309239	1,08596527343719	1,39079701888133
1,5	4,11325037878293	1,09241227540153	1,42411901948098
1,6	4,55268225793596	1,09936449980652	1,460719527868
1,7	5,07590478965197	1,10686483892259	1,50099196295723
1,8	5,70362037424479	1,11496032398836	1,54538841747241
1,9	6,46282147367798	1,12370259800907	1,59443030321833
2	7,38905609893065	1,13314845306683	1,64872127070013

Эксперимент 15

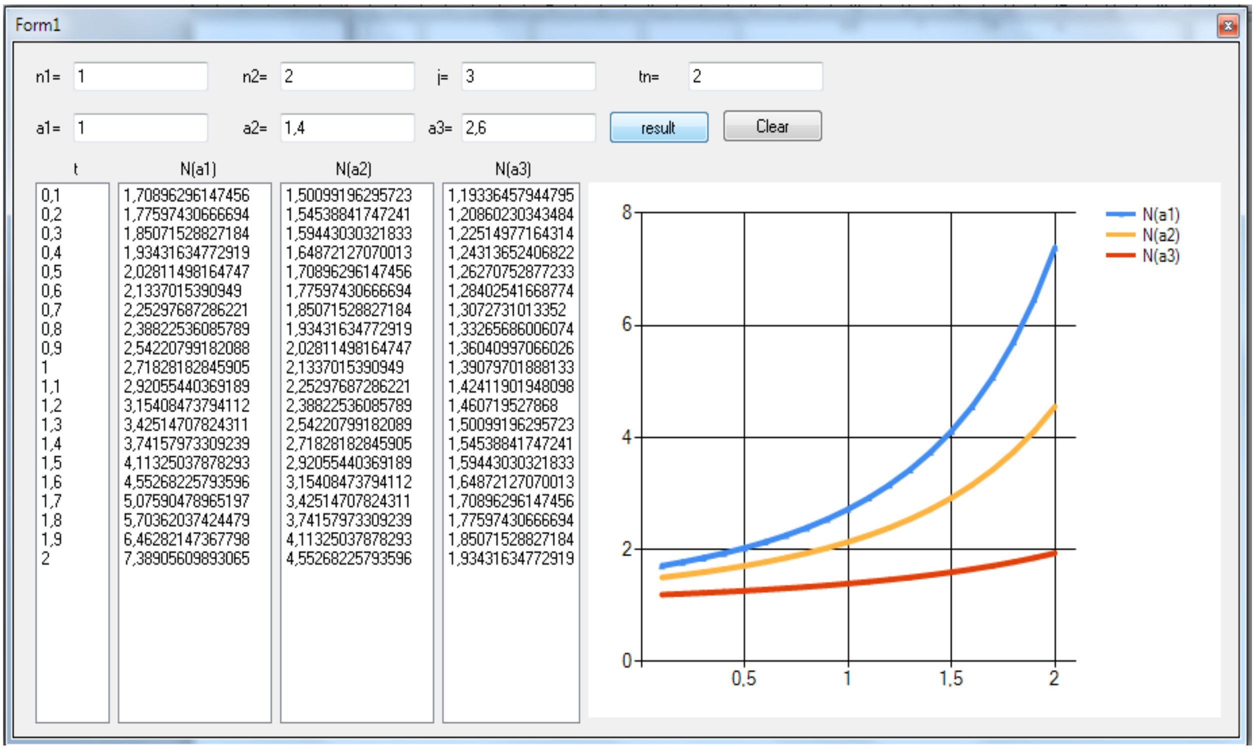


t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	11,3930864098304	10,6295353547888	9,49412679653988
0,2	11,8398287111129	10,9914751380009	9,73813018578665
0,3	12,3381019218122	11,3930864098304	10,0066130863816
0,4	12,8954423181946	11,8398287111129	10,3025894498161
0,5	13,5207665443165	12,3381019218122	10,6295353547888
0,6	14,2246769272994	12,8954423181946	10,9914751380009
0,7	15,0198458190814	13,5207665443165	11,3930864098304
0,8	15,9215024057193	14,2246769272994	11,8398287111129
0,9	16,9480532788059	15,0198458190814	12,3381019218122
1	18,1218788563936	15,9215024057193	12,8954423181946
1,1	19,4703626912792	16,9480532788059	13,5207665443165
1,2	21,0272315862741	18,1218788563936	14,2246769272994
1,3	22,8343138549541	19,4703626912792	15,0198458190814
1,4	24,9438648872826	21,0272315862741	15,9215024057193
1,5	27,4216691918862	22,8343138549541	16,9480532788059
1,6	30,3512150529064	24,9438648872826	18,1218788563936
1,7	33,8393652643465	27,4216691918862	19,4703626912792
1,8	38,0241358282986	30,3512150529064	21,0272315862741
1,9	43,0854764911865	33,8393652643465	22,8343138549541
2	49,260373992871	38,0241358282986	24,9438648872826

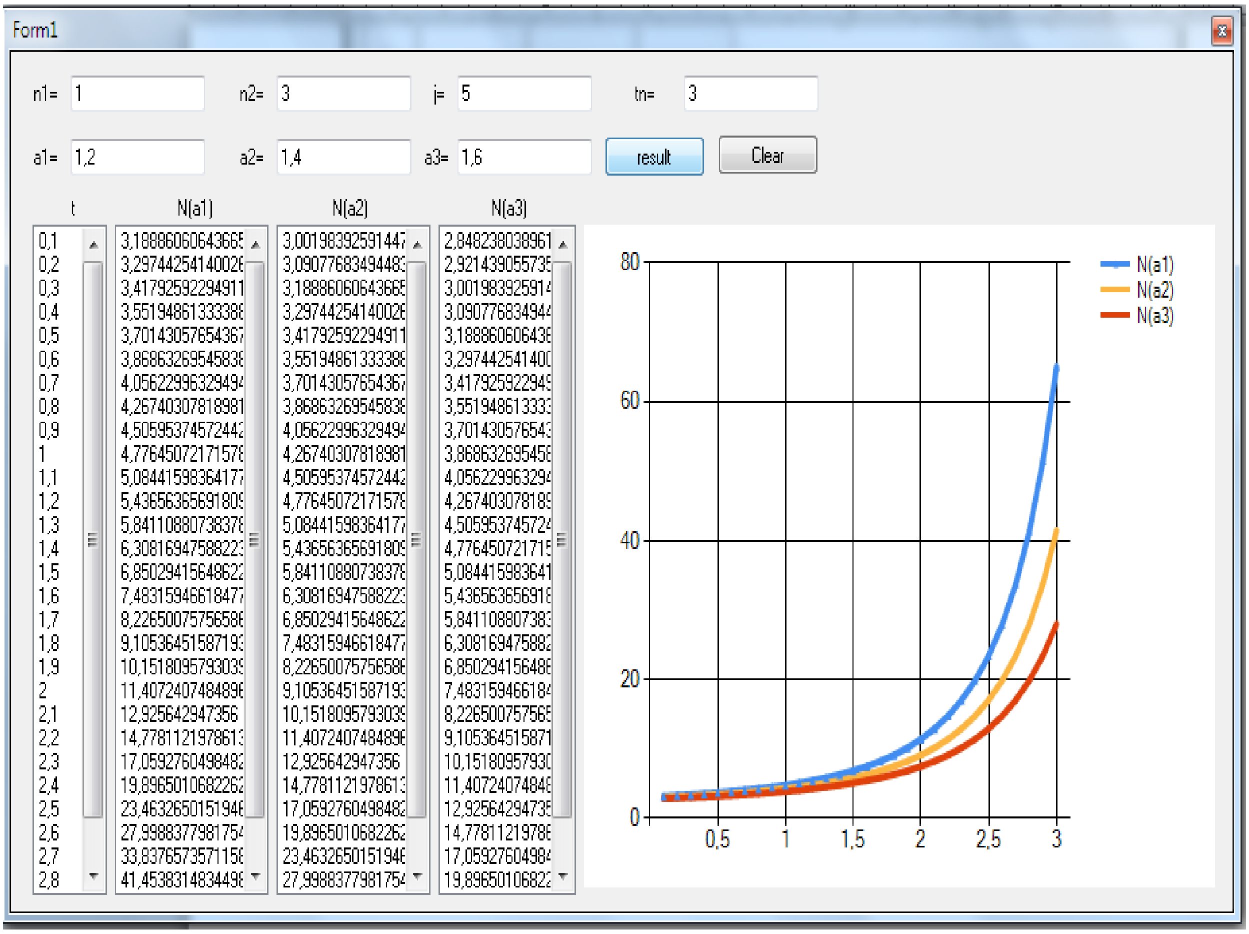
Эксперимент 16



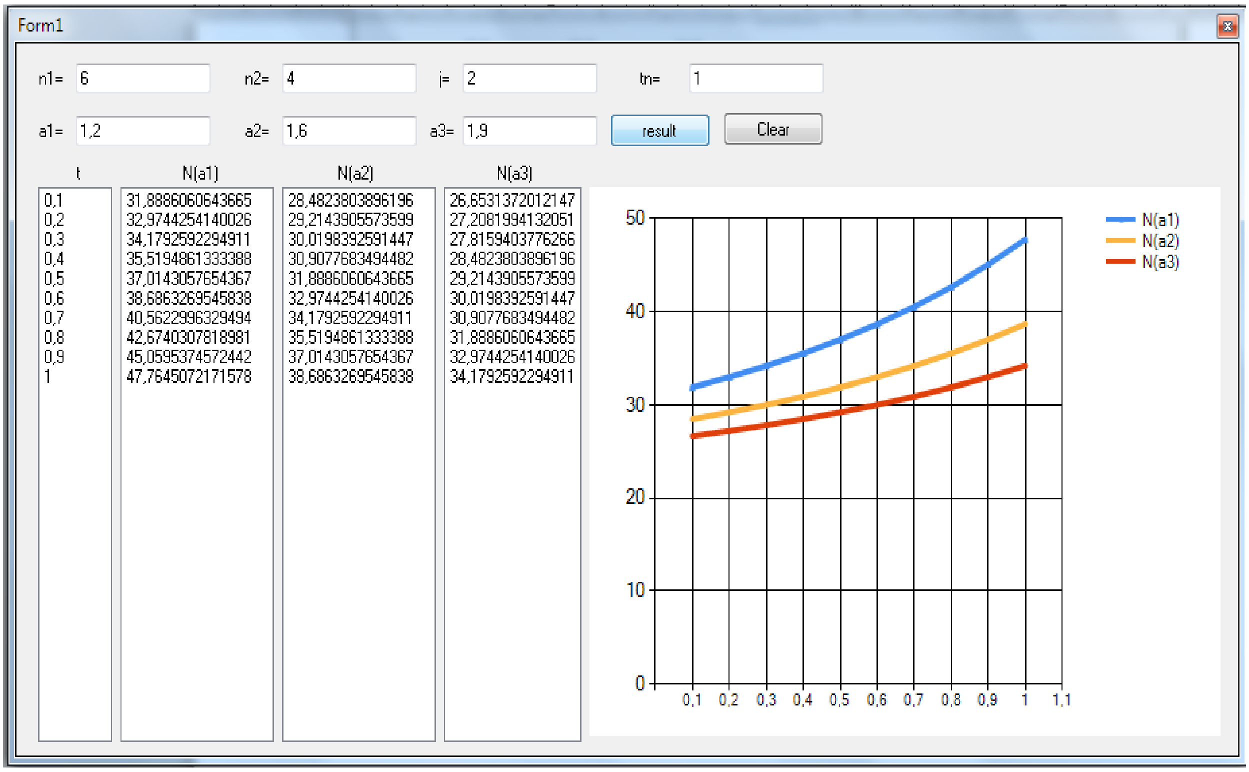
Эксперимент 17



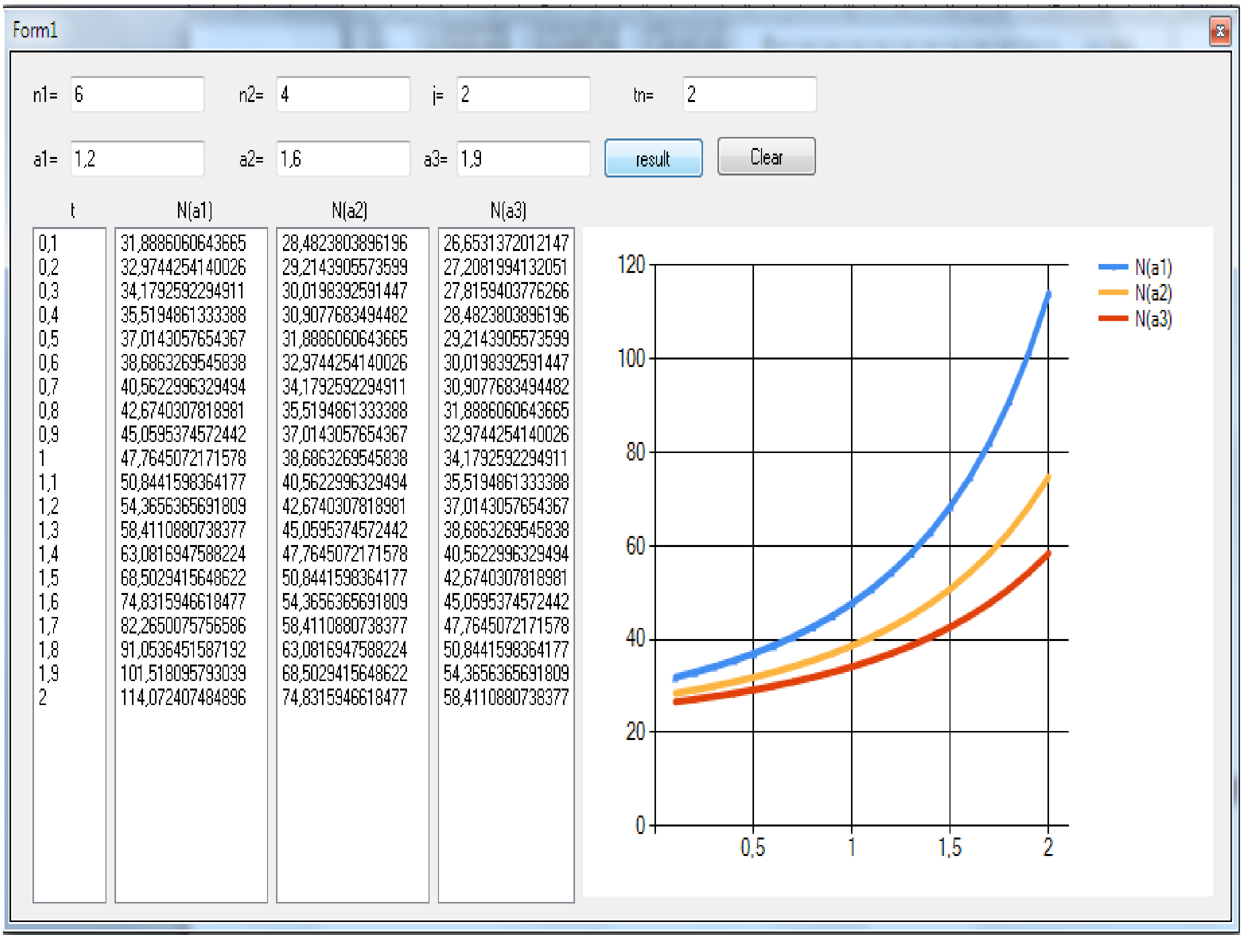
Эксперимент 18



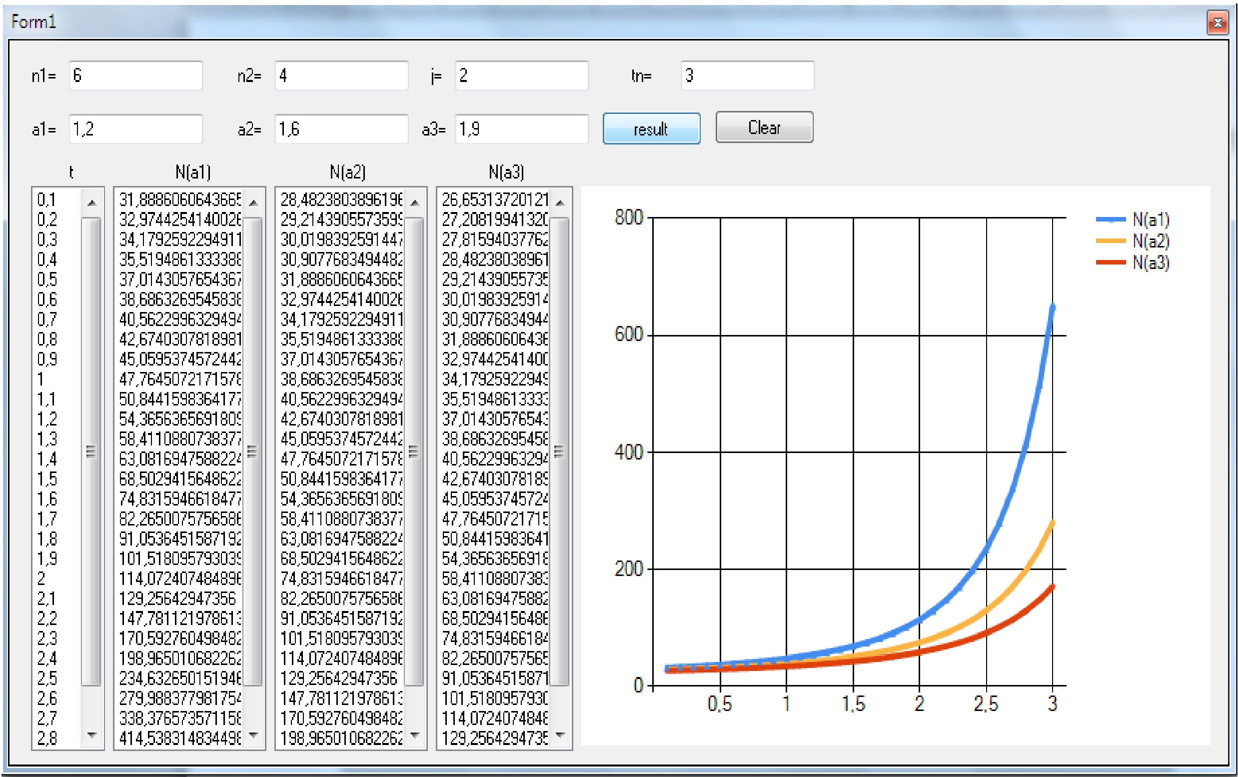
Эксперимент 19



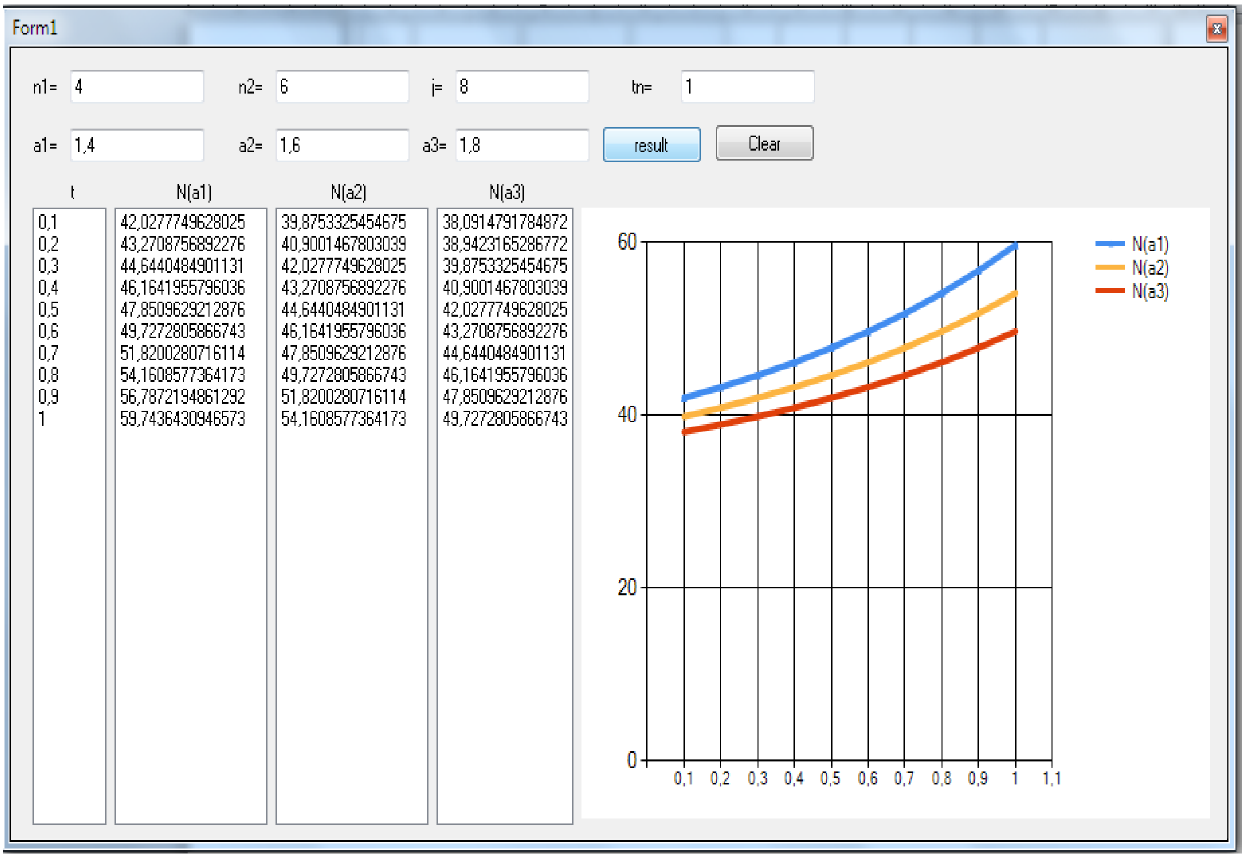
Эксперимент 20



Эксперимент 21

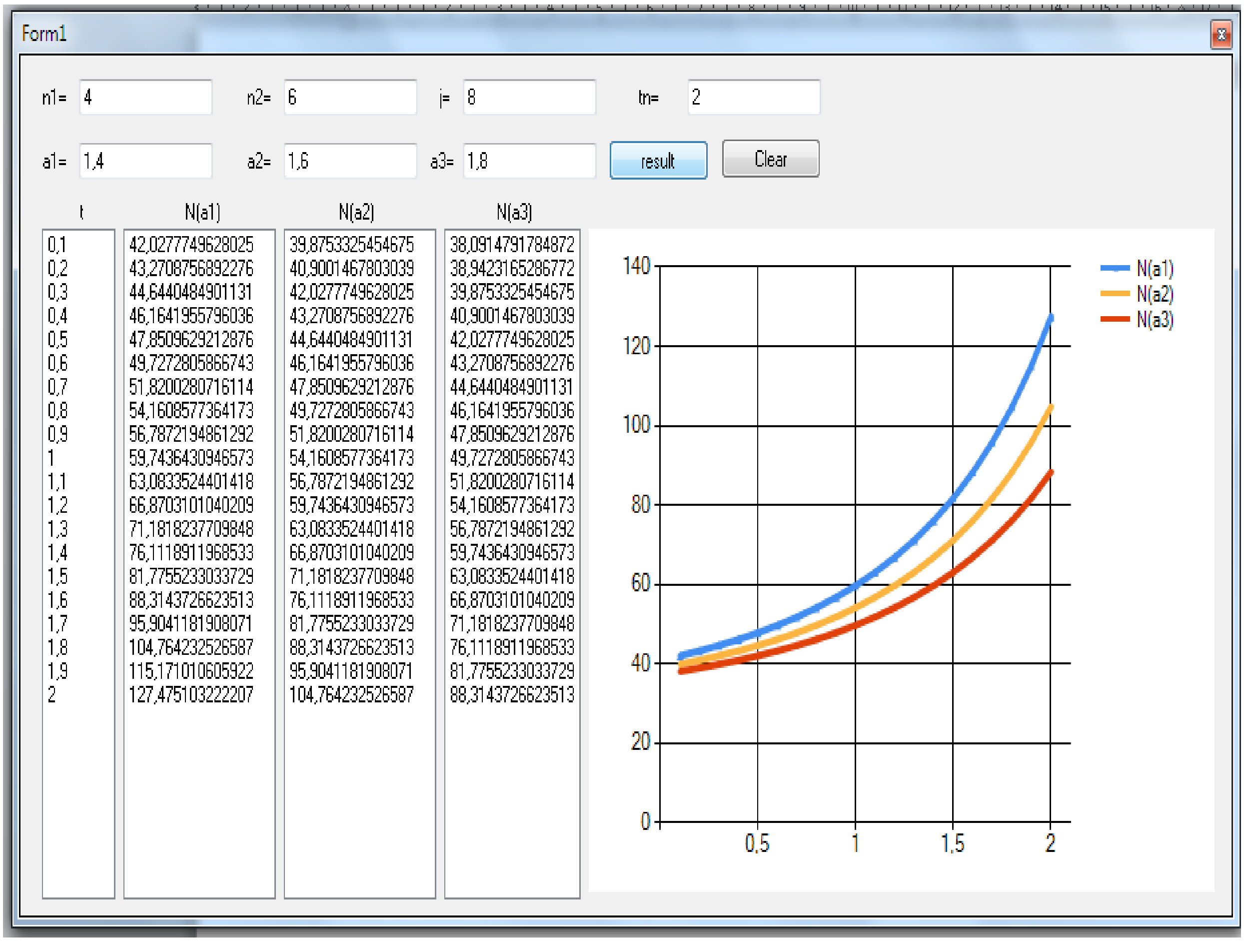


Эксперимент 22



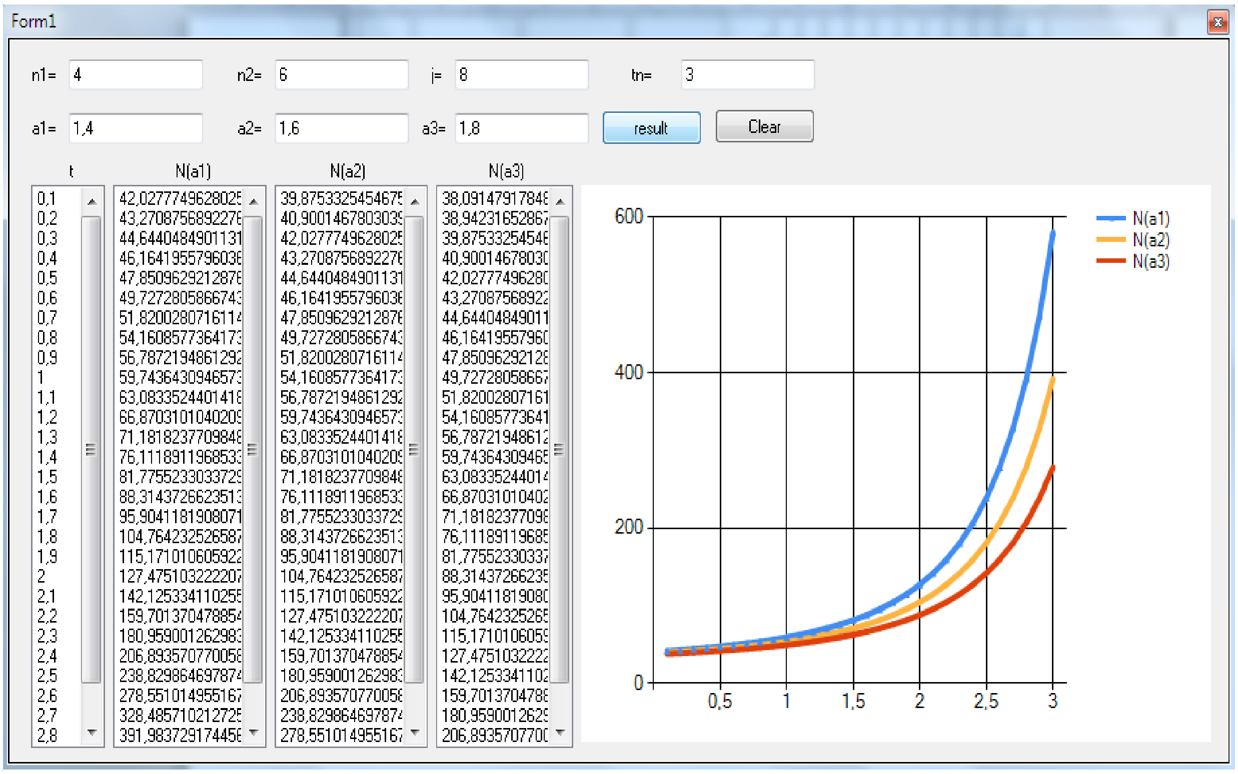
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	42,0277749628025	39,8753325454675	38,0914791784872
0,2	43,2708756892276	40,9001467803039	38,9423165286772
0,3	44,6440484901131	42,0277749628025	39,8753325454675
0,4	46,1641955796036	43,2708756892276	40,9001467803039
0,5	47,8509629212876	44,6440484901131	42,0277749628025
0,6	49,7272805866743	46,1641955796036	43,2708756892276
0,7	51,8200280716114	47,8509629212876	44,6440484901131
0,8	54,1608577364173	49,7272805866743	46,1641955796036
0,9	56,7872194861292	51,8200280716114	47,8509629212876
1	59,7436430946573	54,1608577364173	49,7272805866743

Эксперимент 23

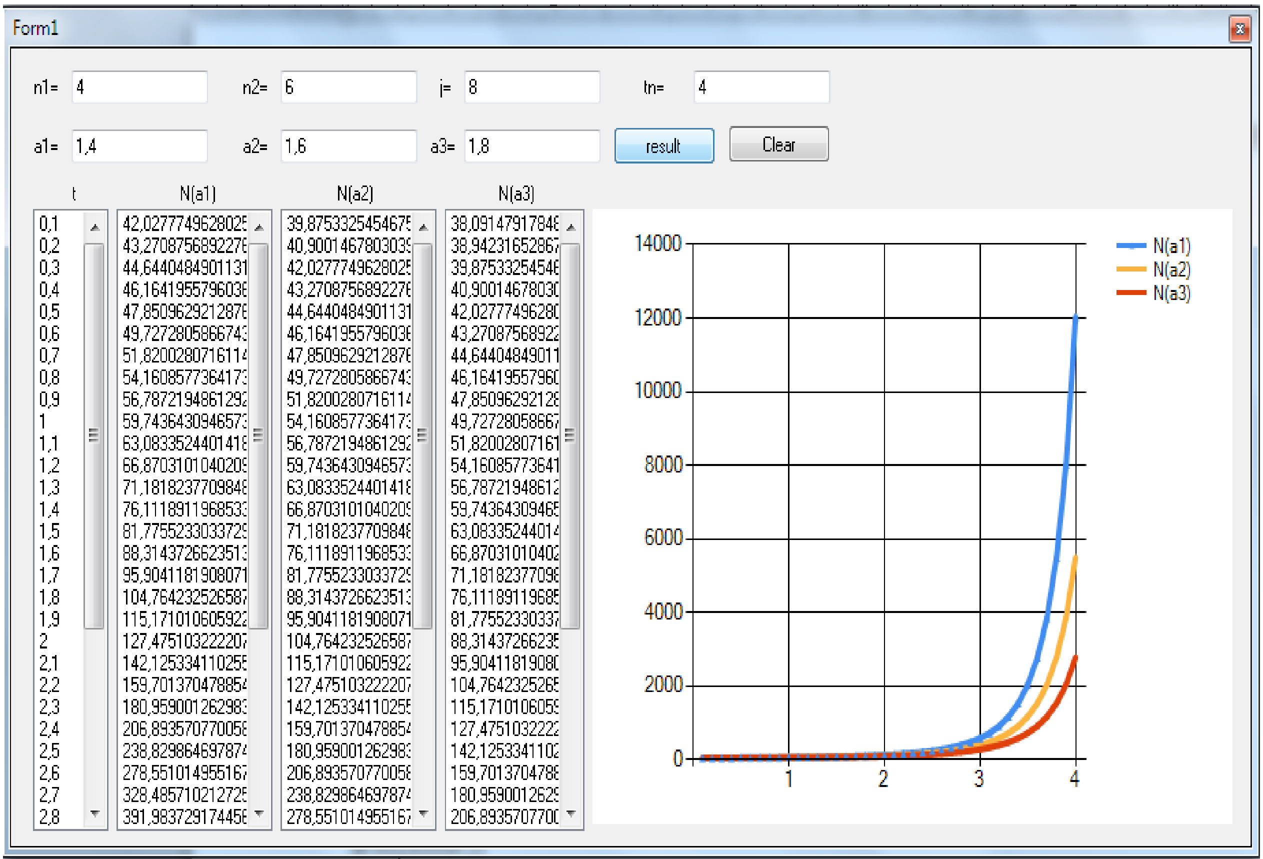


t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	42,0277749628025	39,8753325454675	38,0914791784872
0,2	43,2708756892276	40,9001467803039	38,9423165286772
0,3	44,6440484901131	42,0277749628025	39,8753325454675
0,4	46,1641955796036	43,2708756892276	40,9001467803039
0,5	47,8509629212876	44,6440484901131	42,0277749628025
0,6	49,7272805866743	46,1641955796036	43,2708756892276
0,7	51,8200280716114	47,8509629212876	44,6440484901131
0,8	54,1608577364173	49,7272805866743	46,1641955796036
0,9	56,7872194861292	51,8200280716114	47,8509629212876
1	59,7436430946573	54,1608577364173	49,7272805866743
1,1	63,0833524401418	56,7872194861292	51,8200280716114
1,2	66,8703101040209	59,7436430946573	54,1608577364173
1,3	71,1818237709848	63,0833524401418	56,7872194861292
1,4	76,1118911968533	66,8703101040209	59,7436430946573
1,5	81,7755233033729	71,1818237709848	63,0833524401418
1,6	88,3143726623513	76,1118911968533	66,8703101040209
1,7	95,9041181908071	81,7755233033729	71,1818237709848
1,8	104,764232526587	88,3143726623513	76,1118911968533
1,9	115,171010605922	95,9041181908071	81,7755233033729
2	127,475103222207	104,764232526587	88,3143726623513

Эксперимент 24



Эксперимент 25



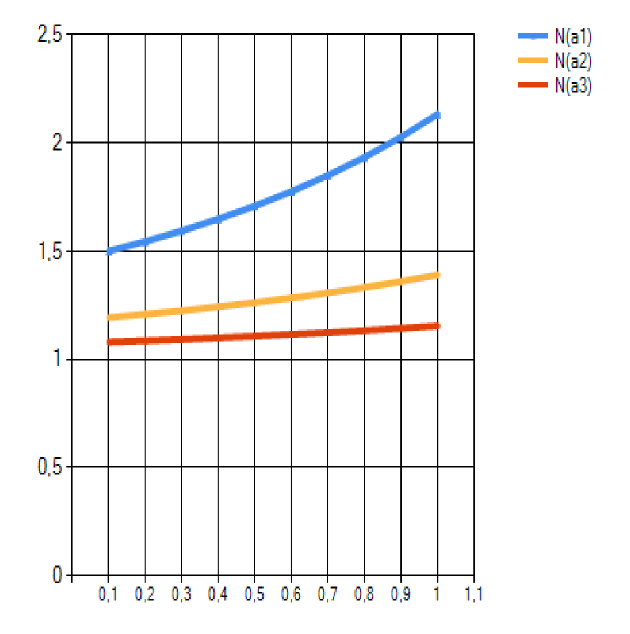
Эксперимент 26

Form1

n1= 1 n2= 2 j= 3 tn= 1

a1= 1,4 a2= 2,6 a3= 3,8 result Clear

t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,50099196295723	1,19336457944795	1,07998432358754
0,2	1,54538841747241	1,20860230343484	1,08596527343719
0,3	1,59443030321833	1,22514977164314	1,09241227540153
0,4	1,64872127070013	1,24313652406822	1,09936449980652
0,5	1,70896296147456	1,26270752877233	1,10686483892259
0,6	1,77597430666694	1,28402541668774	1,11496032398836
0,7	1,85071528827184	1,3072731013352	1,12370259800907
0,8	1,93431634772919	1,33265686006074	1,13314845306683
0,9	2,02811498164747	1,36040997066026	1,14336044243939
1	2,1337015390949	1,39079701888133	1,1544075796965



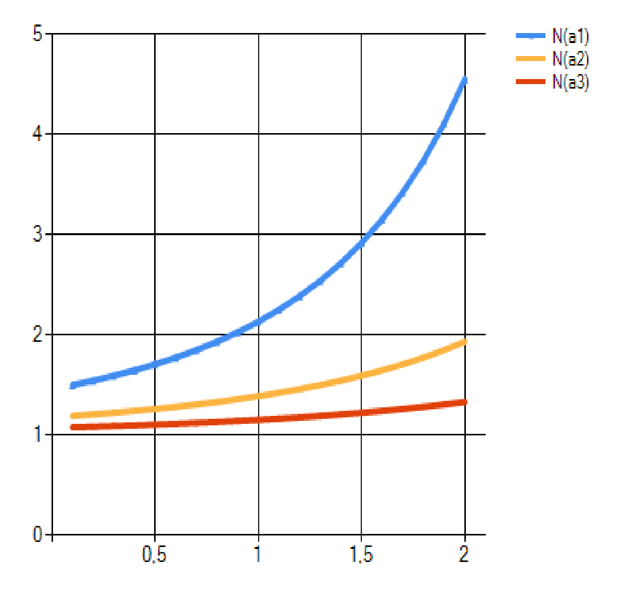
Эксперимент 27

Form1

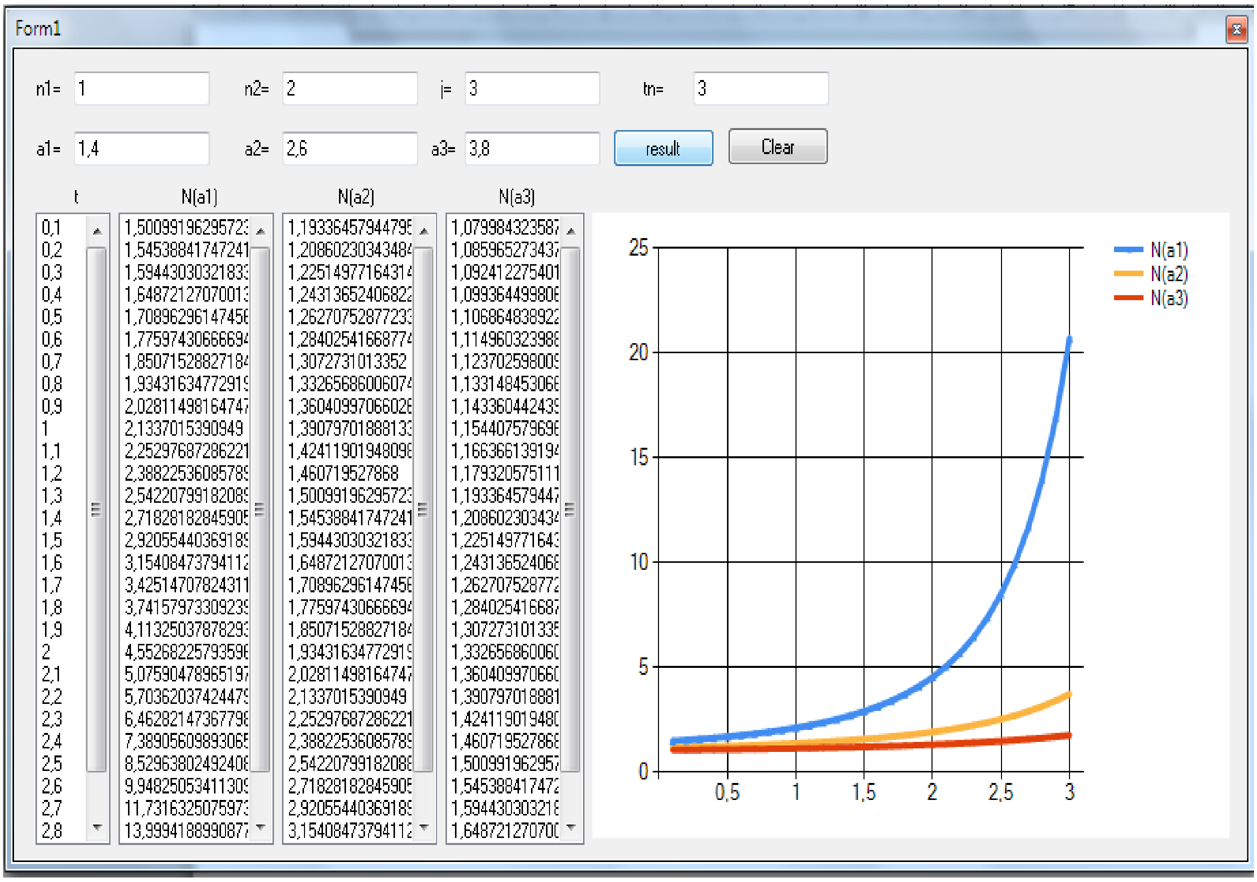
n1= 1 n2= 2 j= 3 tn= 2

a1= 1,4 a2= 2,6 a3= 3,8 result Clear

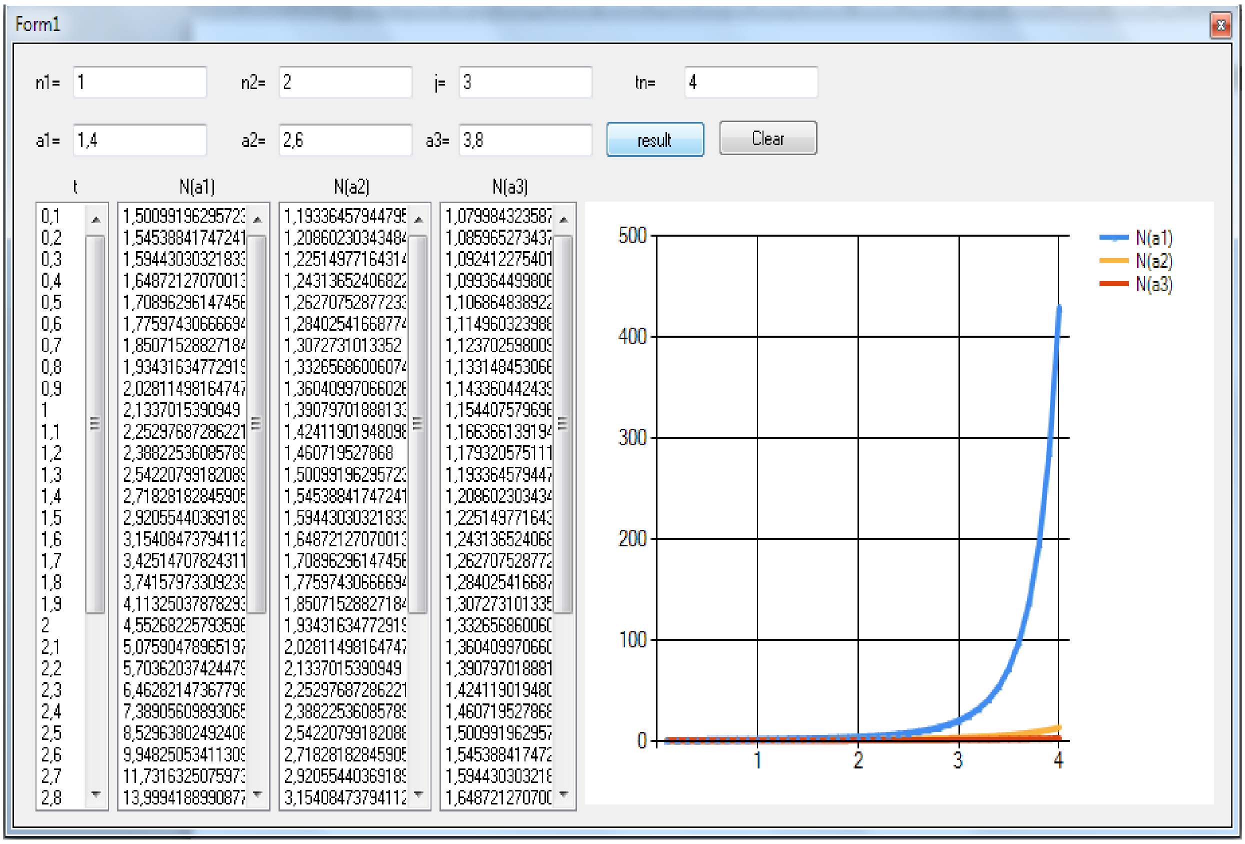
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	1,50099196295723	1,19336457944795	1,07998432358754
0,2	1,54538841747241	1,20860230343484	1,08596527343719
0,3	1,59443030321833	1,22514977164314	1,09241227540153
0,4	1,64872127070013	1,24313652406822	1,09936449980652
0,5	1,70896296147456	1,26270752877233	1,10686483892259
0,6	1,77597430666694	1,28402541668774	1,11496032398836
0,7	1,85071528827184	1,3072731013352	1,12370259800907
0,8	1,93431634772919	1,33265686006074	1,13314845306683
0,9	2,02811498164747	1,36040997066026	1,14336044243939
1	2,1337015390949	1,39079701888133	1,1544075796965
1,1	2,25297687286221	1,42411901948098	1,16636613919483
1,2	2,38822536085789	1,460719527868	1,1793205751115
1,3	2,54220799182089	1,50099196295723	1,19336457944795
1,4	2,71828182845905	1,54538841747241	1,20860230343484
1,5	2,92055440369189	1,59443030321833	1,22514977164314
1,6	3,15408473794112	1,64872127070013	1,24313652406822
1,7	3,42514707824311	1,70896296147456	1,26270752877233
1,8	3,74157973309239	1,77597430666694	1,28402541668774
1,9	4,11325037878293	1,85071528827184	1,3072731013352
2	4,55268225793596	1,93431634772919	1,33265686006074



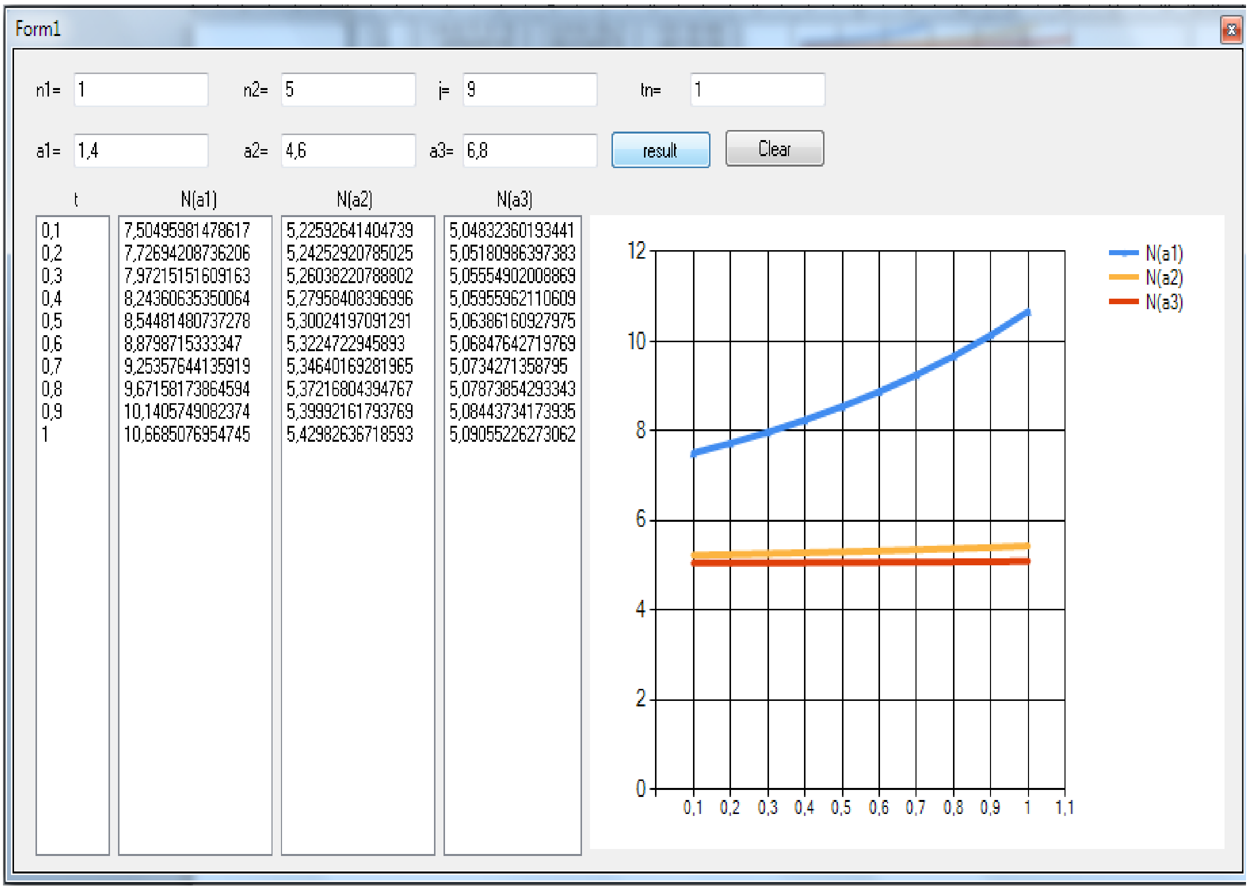
Эксперимент 28



Эксперимент 29

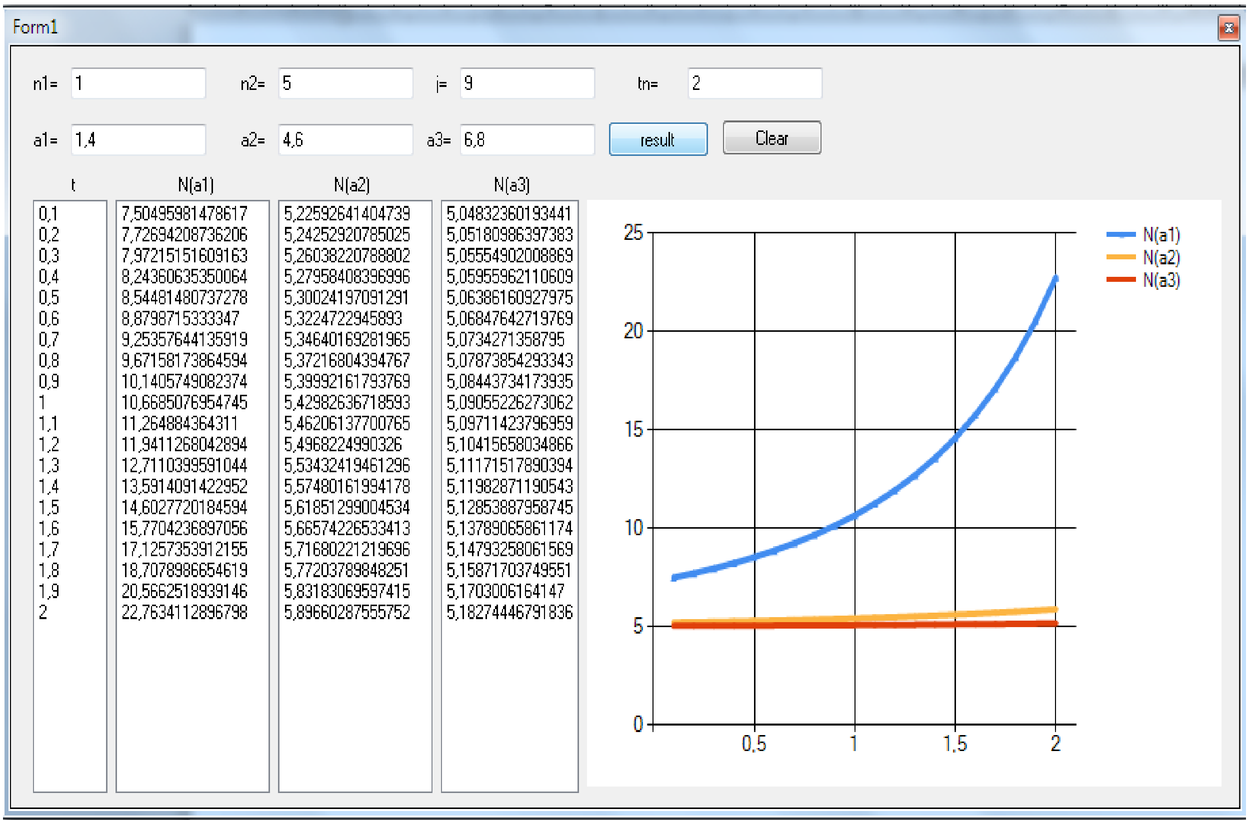


Эксперимент 30



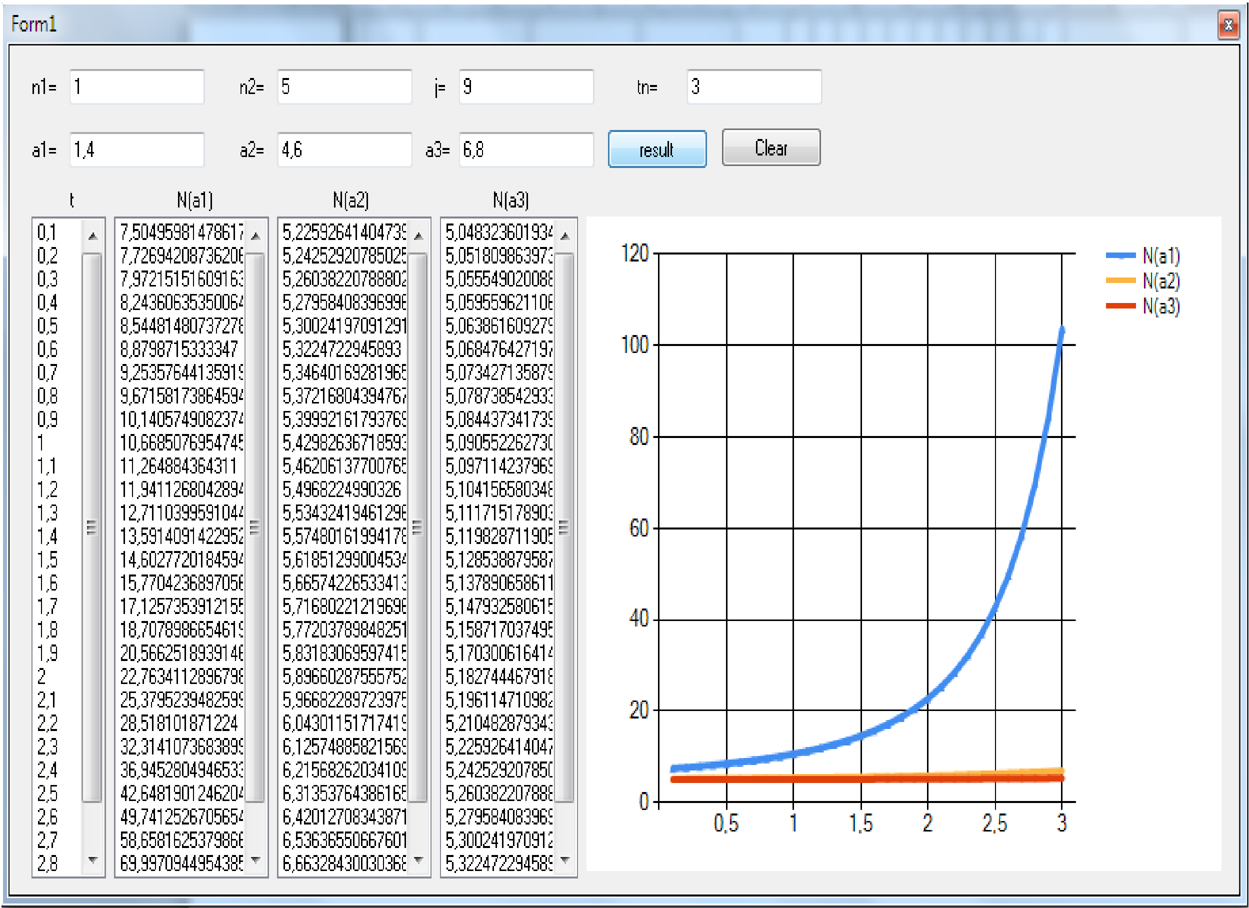
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	7,50495981478617	5,22592641404739	5,04832360193441
0,2	7,72694208736206	5,24252920785025	5,05180986397383
0,3	7,97215151609163	5,26038220788802	5,05554902008869
0,4	8,24360635350064	5,27958408396996	5,05955962110609
0,5	8,54481480737278	5,30024197091291	5,06386160927975
0,6	8,8798715333347	5,3224722945893	5,06847642719769
0,7	9,25357644135919	5,34640169281965	5,0734271358795
0,8	9,67158173864594	5,37216804394767	5,07873854293343
0,9	10,1405749082374	5,39992161793769	5,08443734173935
1	10,6685076954745	5,42982636718593	5,09055226273062

Эксперимент 31

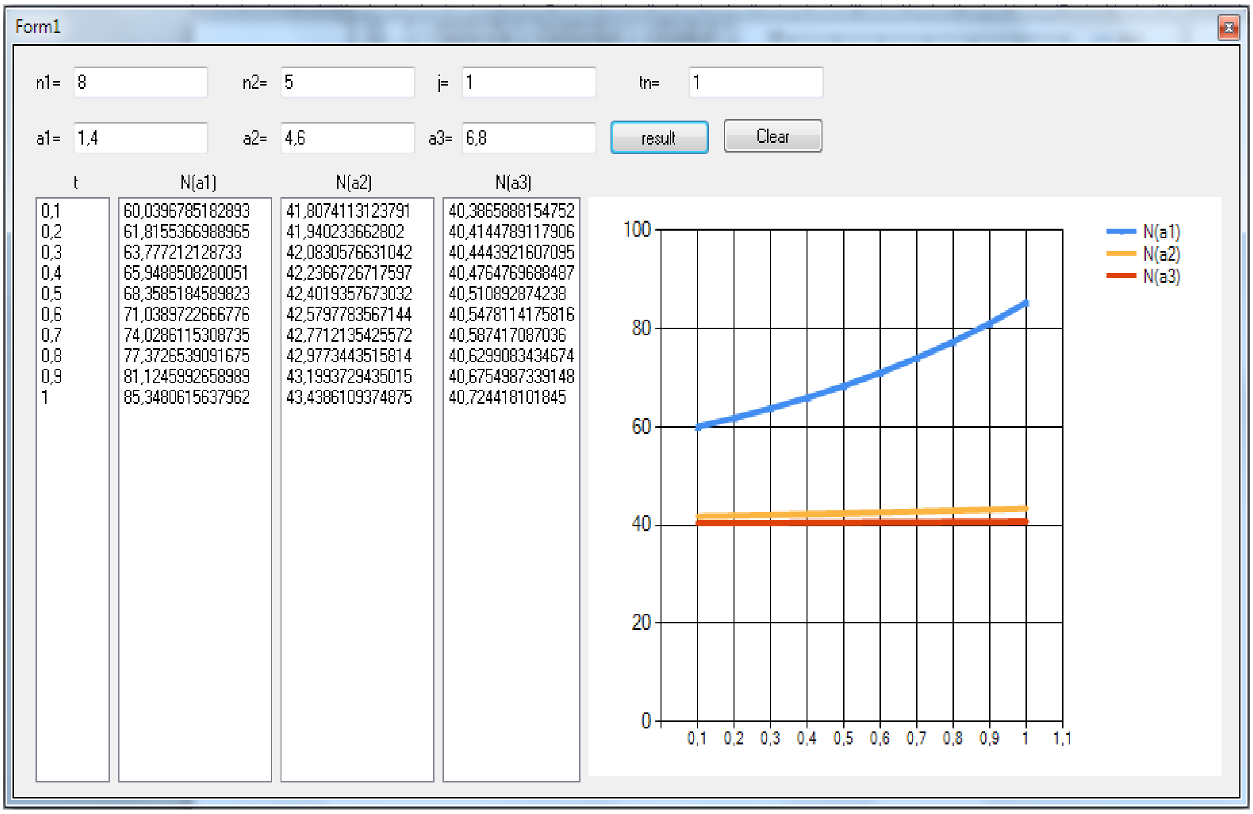


t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	7,50495981478617	5,22592641404739	5,04832360193441
0,2	7,72694208736206	5,24252920785025	5,05180986397383
0,3	7,97215151609163	5,26038220788802	5,05554902008869
0,4	8,24360635350064	5,27958408396996	5,05955962110609
0,5	8,54481480737278	5,30024197091291	5,06386160927975
0,6	8,8798715333347	5,3224722945893	5,06847642719769
0,7	9,25357644135919	5,34640169281965	5,0734271358795
0,8	9,67158173864594	5,37216804394767	5,07873854293343
0,9	10,1405749082374	5,39992161793769	5,08443734173935
1	10,6685076954745	5,42982636718593	5,09055226273062
1,1	11,264884364311	5,46206137700765	5,09711423796959
1,2	11,9411268042894	5,4968224990326	5,10415658034866
1,3	12,7110399591044	5,53432419461296	5,11171517890394
1,4	13,5914091422952	5,57480161994178	5,11982871190543
1,5	14,6027720184594	5,61851299004534	5,12853887958745
1,6	15,7704236897056	5,66574226533413	5,13789065861174
1,7	17,1257353912155	5,71680221219696	5,14793258061569
1,8	18,7078986654619	5,77203789848251	5,15871703749551
1,9	20,5662518939146	5,83183069597415	5,1703006164147
2	22,7634112896798	5,89660287555752	5,18274446791836

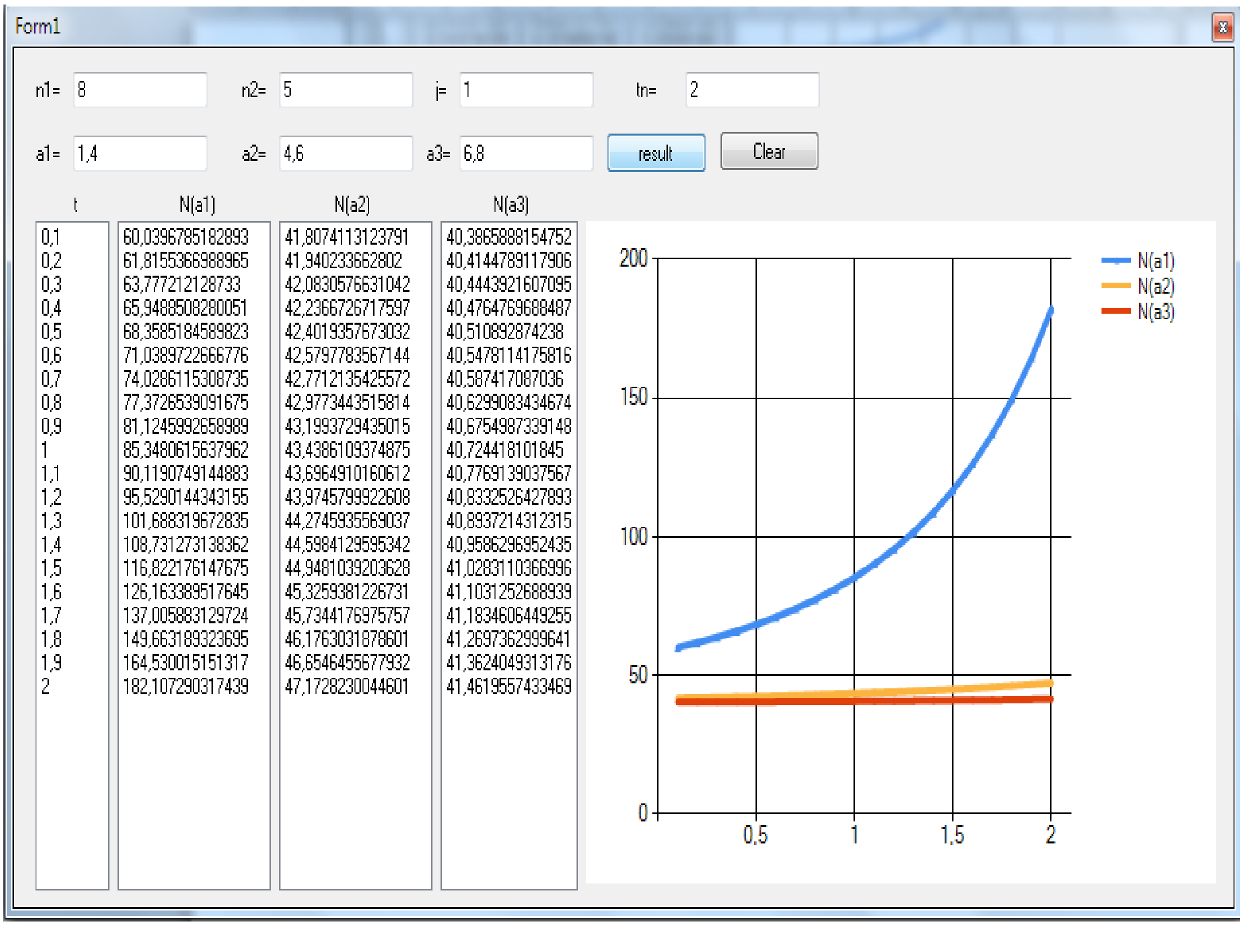
Эксперимент 32



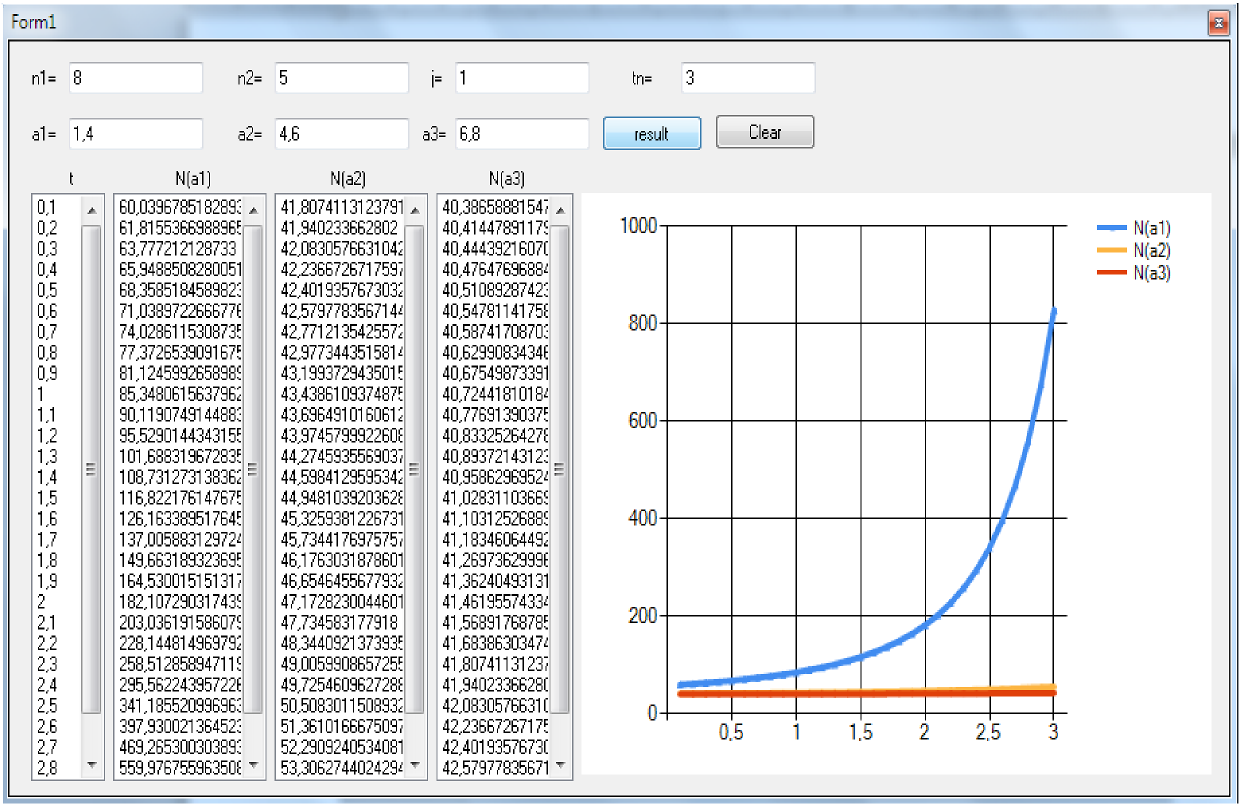
Эксперимент 33



Эксперимент 34



Эксперимент 35



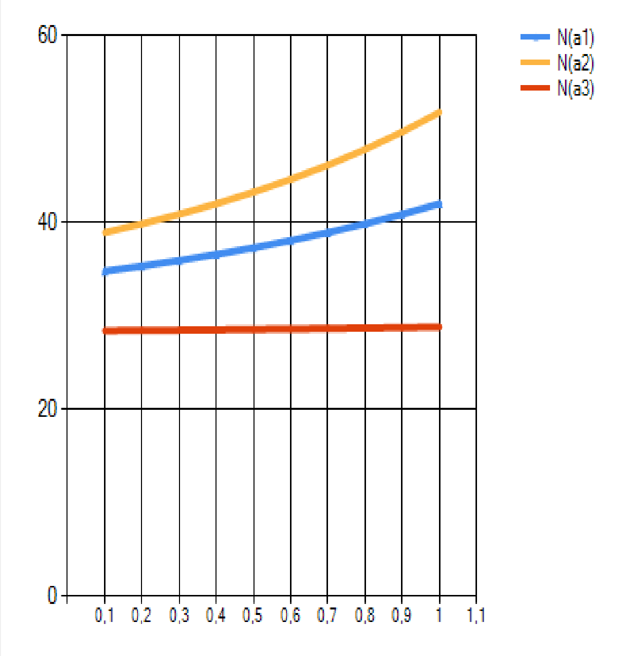
Эксперимент 36

Form1

n1= 3 n2= 7 j= 5 tn= 1

a1= 2,3 a2= 1,7 a3= 6,1 result Clear

t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	34,8078226739101	38,9423165286772	28,4409358404272
0,2	35,3558108056253	39,8753325454675	28,4728491137404
0,3	35,9527116672568	40,9001467803039	28,5070926712915
0,4	36,6036468373856	42,0277749628025	28,5438397326297
0,5	37,3143920817006	43,2708756892276	28,5832768499525
0,6	38,0914791784872	44,6440484901131	28,6256050018621
0,7	38,9423165286772	46,1641955796036	28,6710407866704
0,8	39,8753325454675	47,8509629212876	28,7198177256897
0,9	40,9001467803039	49,7272805866743	28,7721876882257
1	42,0277749628025	51,8200280716114	28,8284224514479



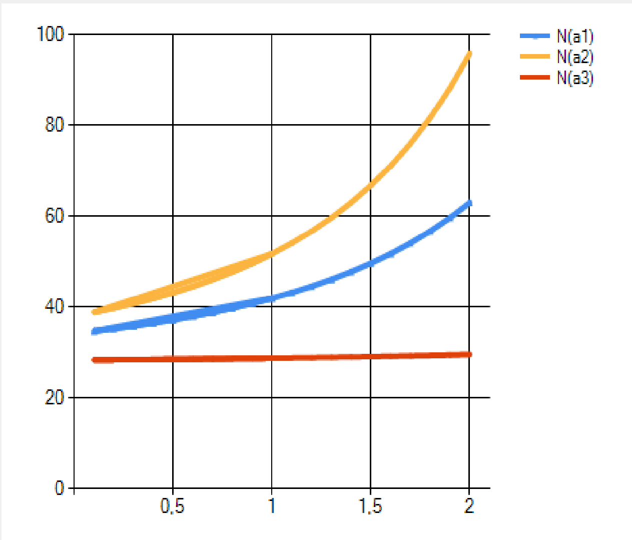
Эксперимент 37

Form1

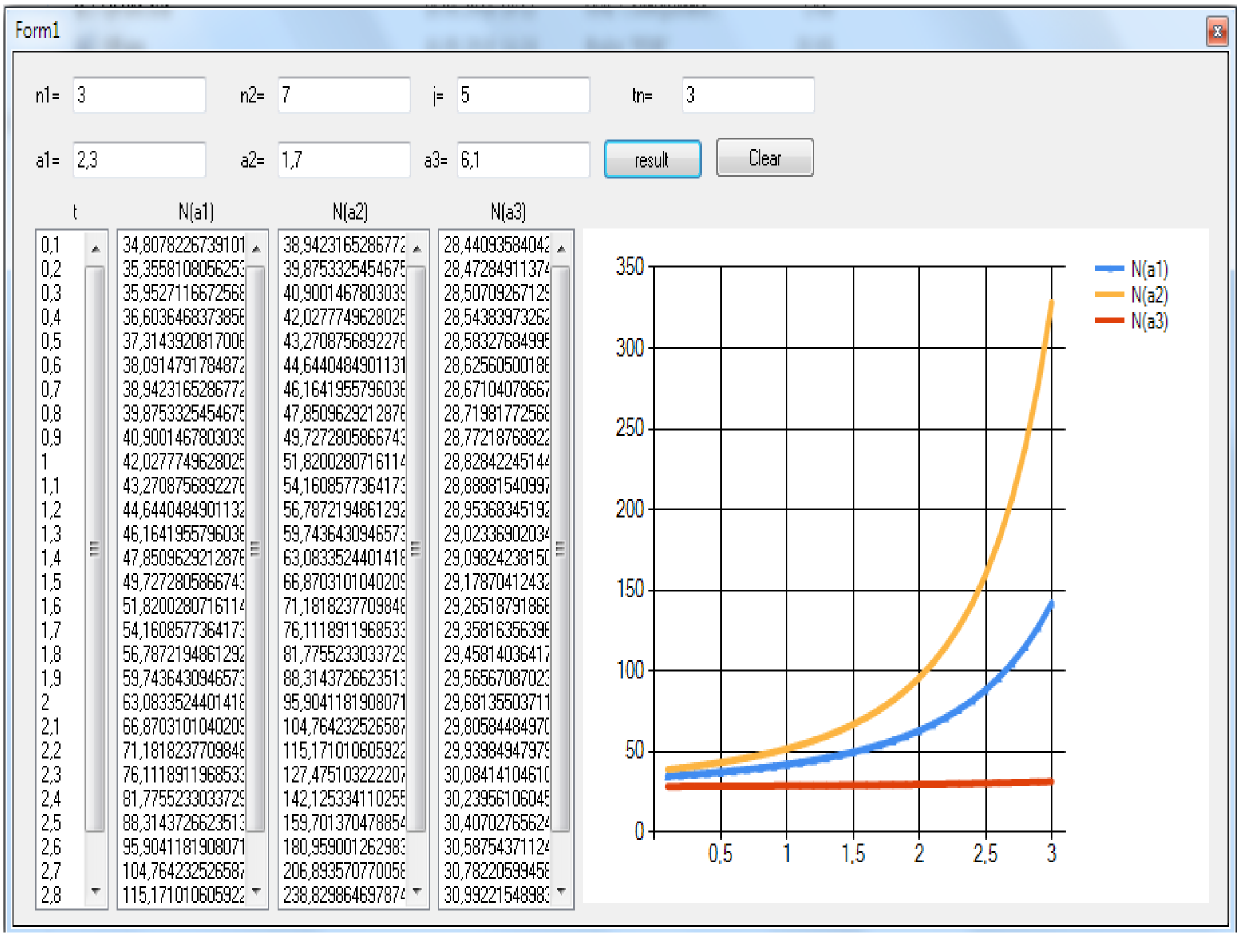
n1= 3 n2= 7 j= 5 tn= 2

a1= 2,3 a2= 1,7 a3= 6,1 result Clear

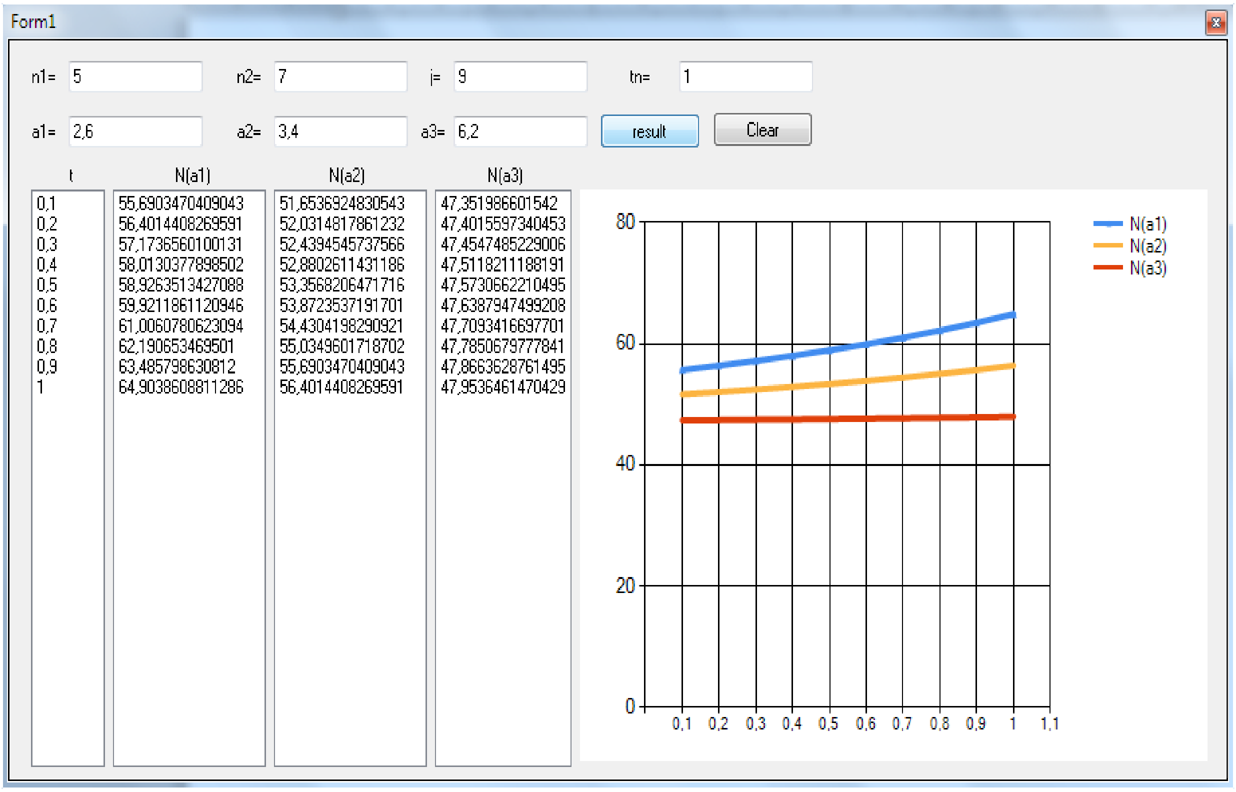
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	34,8078226739101	38,9423165286772	28,4409358404272
0,2	35,3558108056253	39,8753325454675	28,4728491137404
0,3	35,9527116672568	40,9001467803039	28,5070926712915
0,4	36,6036468373856	42,0277749628025	28,5438397326297
0,5	37,3143920817006	43,2708756892276	28,5832768499525
0,6	38,0914791784872	44,6440484901131	28,6256050018621
0,7	38,9423165286772	46,1641955796036	28,6710407866704
0,8	39,8753325454675	47,8509629212876	28,7198177256897
0,9	40,9001467803039	49,7272805866743	28,7721876882257
1	42,0277749628025	51,8200280716114	28,8284224514479
1,1	43,2708756892276	54,1608577364173	28,8881540997749
1,2	44,6440484901132	56,7872194861292	28,9536834519223
1,3	46,1641955796036	59,7436430946573	29,0233690203428
1,4	47,8509629212876	63,0833524401418	29,0982423815018
1,5	49,7272805866743	66,8703101040209	29,1787041243225
1,6	51,8200280716114	71,1818237709848	29,2651879186654
1,7	54,1608577364173	76,1118911968533	29,3581635639614
1,8	56,7872194861292	81,7755233033729	29,4581403641729
1,9	59,7436430946573	88,3143726623513	29,5656708702318
2	63,0833524401418	95,9041181908071	29,6813550371123



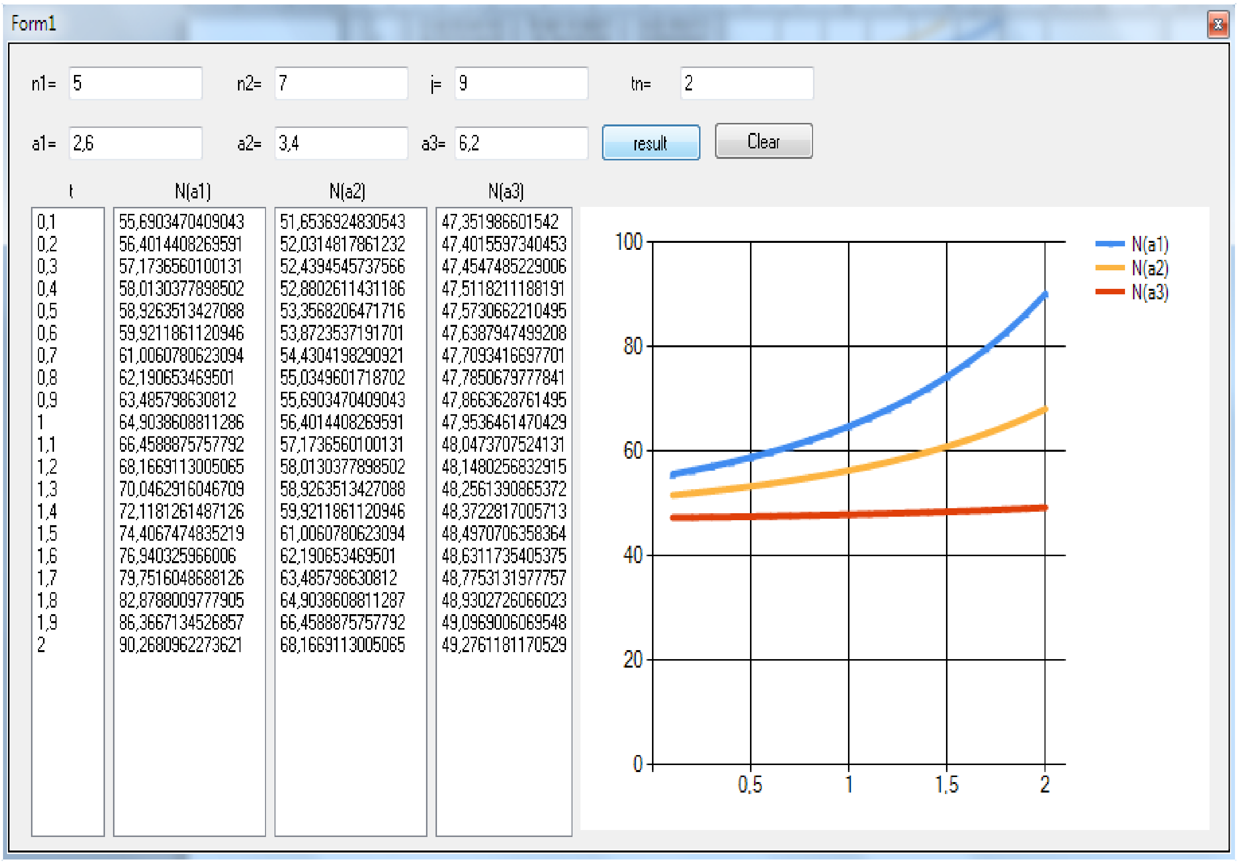
Эксперимент 38



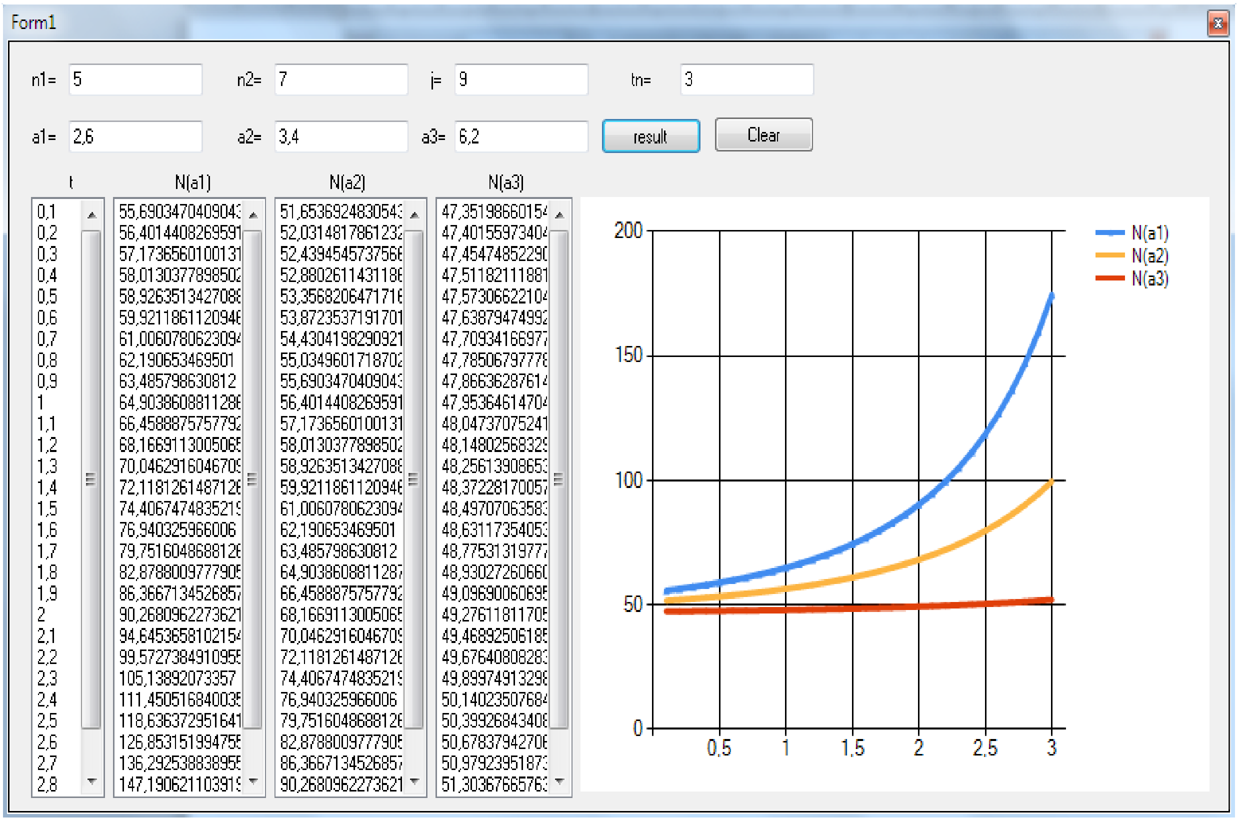
Эксперимент 39



Эксперимент 40



Эксперимент 41



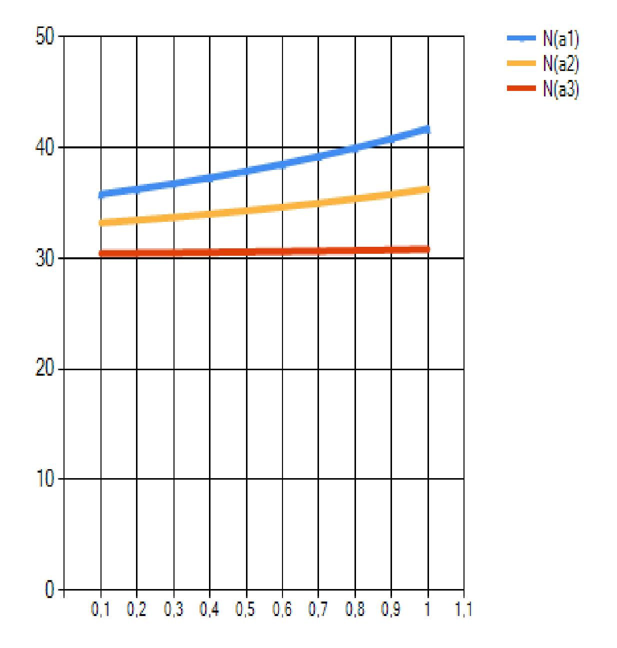
Эксперимент 42

Form1

n1= 9 n2= 4 j= 1 tn= 1

a1= 2,6 a2= 3,4 a3= 6,2 result Clear

t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	35,8009373834385	33,2059451676778	30,440562815277
0,2	36,2580691030451	33,4488097196507	30,4724312576006
0,3	36,7544931492942	33,7110779402721	30,5066240504361
0,4	37,2940957220465	33,9944535920048	30,5433135763837
0,5	37,8812258631699	34,3008132731817	30,5826854278176
0,6	38,5207625006323	34,6322273908951	30,624939482092
0,7	39,2181930400561	34,9909841758449	30,6702910734237
0,8	39,9797058018221	35,3796172533451	30,7189722714326
0,9	40,8122991198077	35,8009373834385	30,7712332775247
1	41,7239105664398	36,2580691030451	30,8273439516704



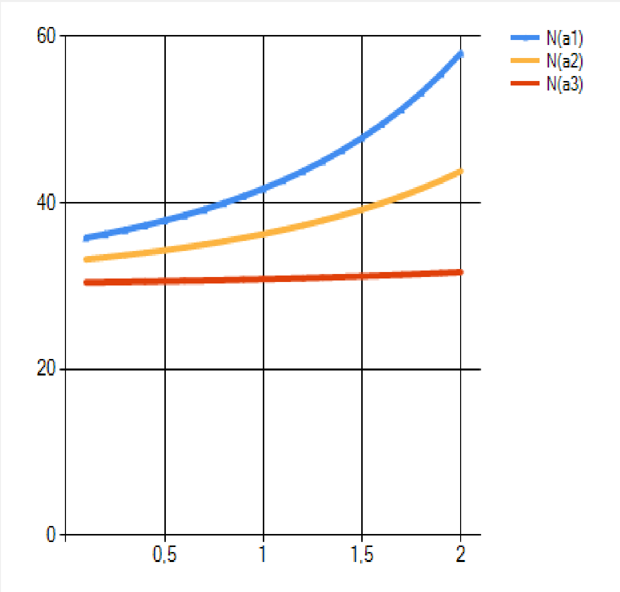
Эксперимент 43

Form1

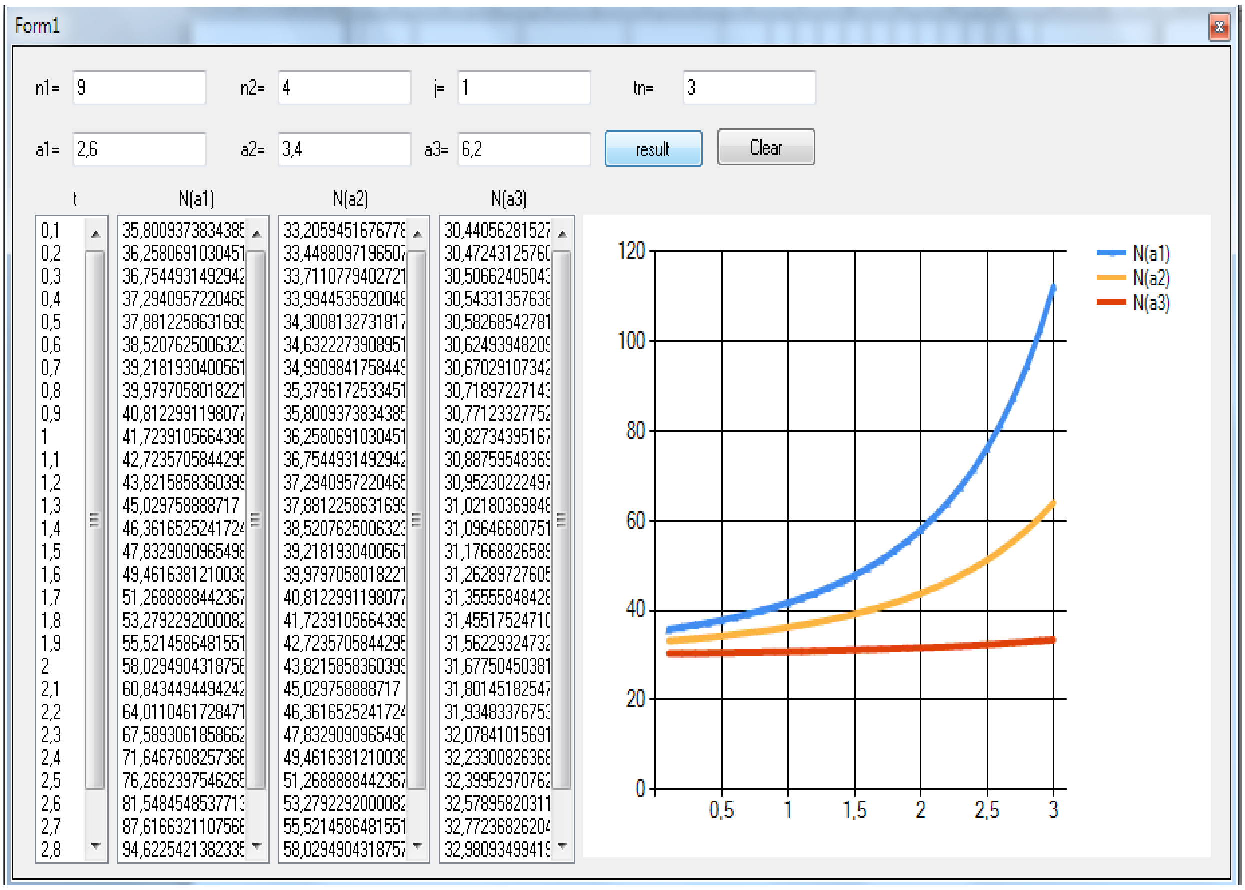
n1= 9 n2= 4 j= 1 tn= 2

a1= 2,6 a2= 3,4 a3= 6,2 result Clear

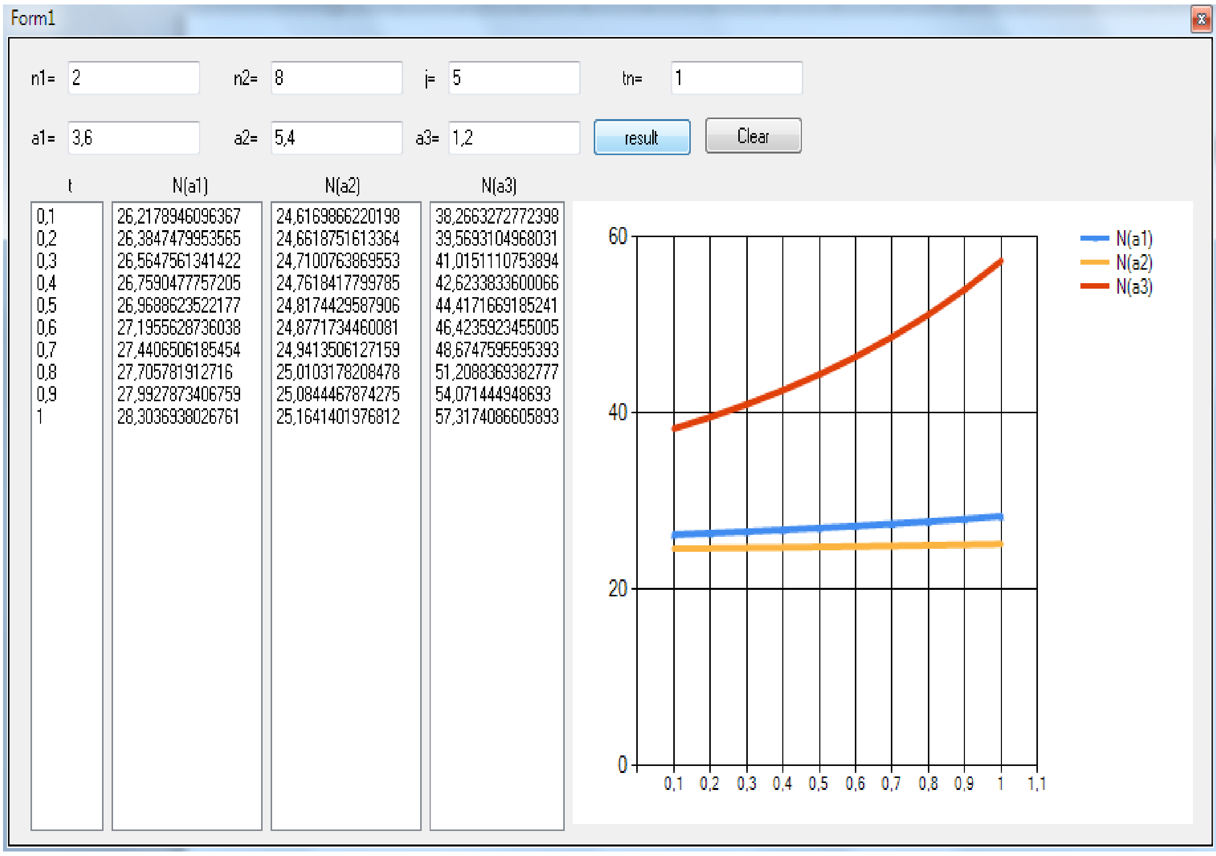
t	N(a1)	N(a2)	N(a3)
0,1	35,8009373834385	33,2059451676778	30,440562815277
0,2	36,2580691030451	33,4488097196507	30,4724312576006
0,3	36,7544931492942	33,7110779402721	30,5066240504361
0,4	37,2940957220465	33,9944535920048	30,5433135763837
0,5	37,8812258631699	34,3008132731817	30,5826854278176
0,6	38,5207625006323	34,6322273908951	30,624939482092
0,7	39,2181930400561	34,9909841758449	30,6702910734237
0,8	39,9797058018221	35,3796172533451	30,7189722714326
0,9	40,8122991198077	35,8009373834385	30,7712332775247
1	41,7239105664398	36,2580691030451	30,8273439516704
1,1	42,7235705844295	36,7544931492942	30,8875954836941
1,2	43,8215858360399	37,2940957220465	30,9523022249731
1,3	45,029758888717	37,8812258631699	31,0218036984882
1,4	46,3616525241724	38,5207625006323	31,0964668075101
1,5	47,8329090965498	39,2181930400561	31,1766882658948
1,6	49,4616381210038	39,9797058018221	31,2628972760598
1,7	51,2688888442367	40,8122991198077	31,3555584842844
1,8	53,2792292000082	41,7239105664399	31,4551752471015
1,9	55,5214586481551	42,7235705844295	31,5622932473281
2	58,0294904318756	43,8215858360399	31,6775045038198



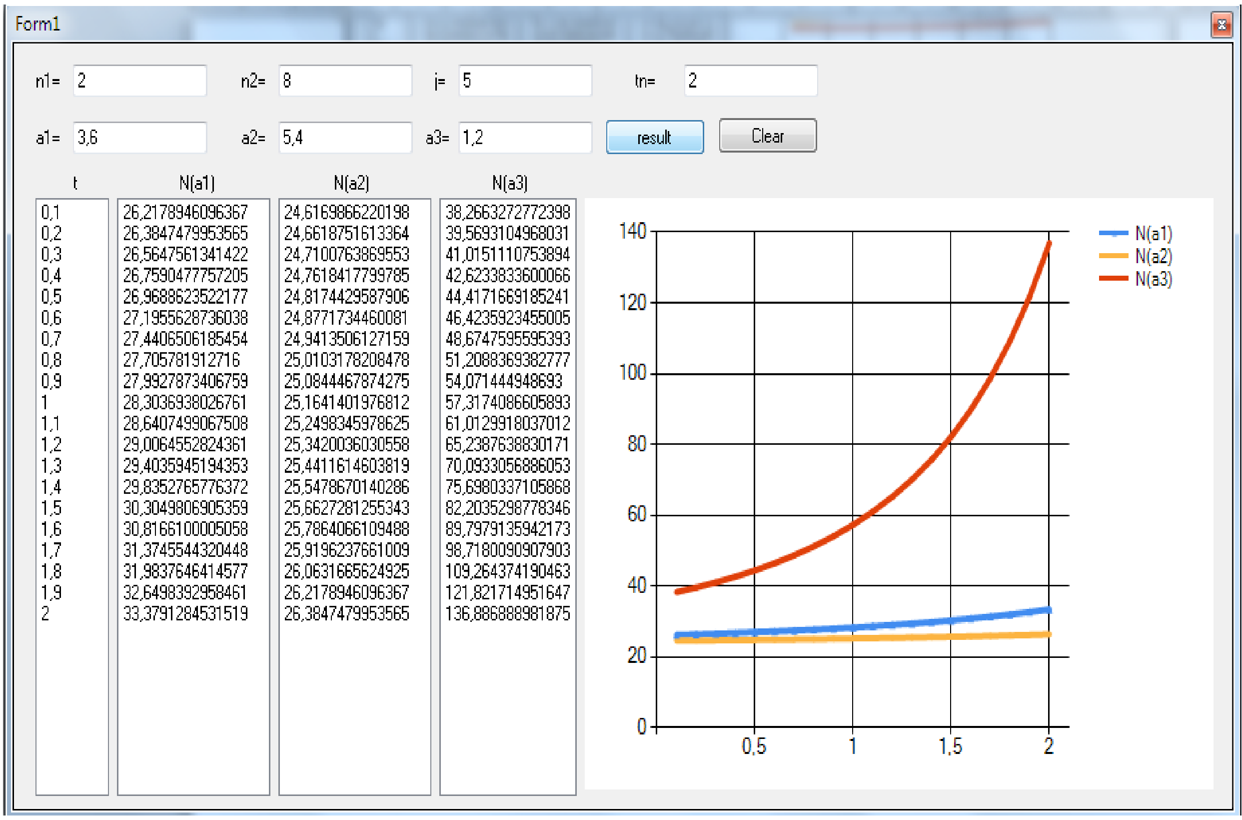
Эксперимент 44



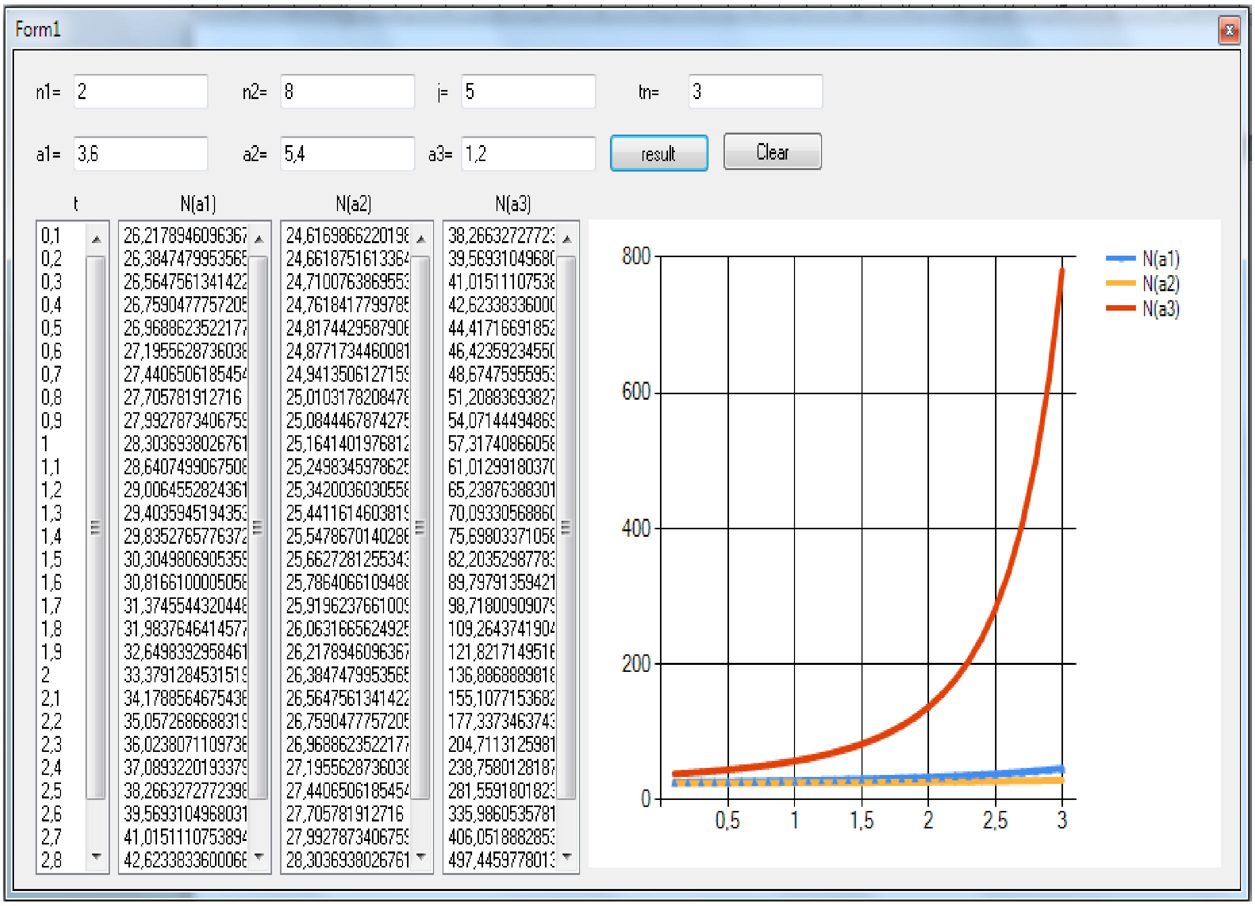
Эксперимент 45



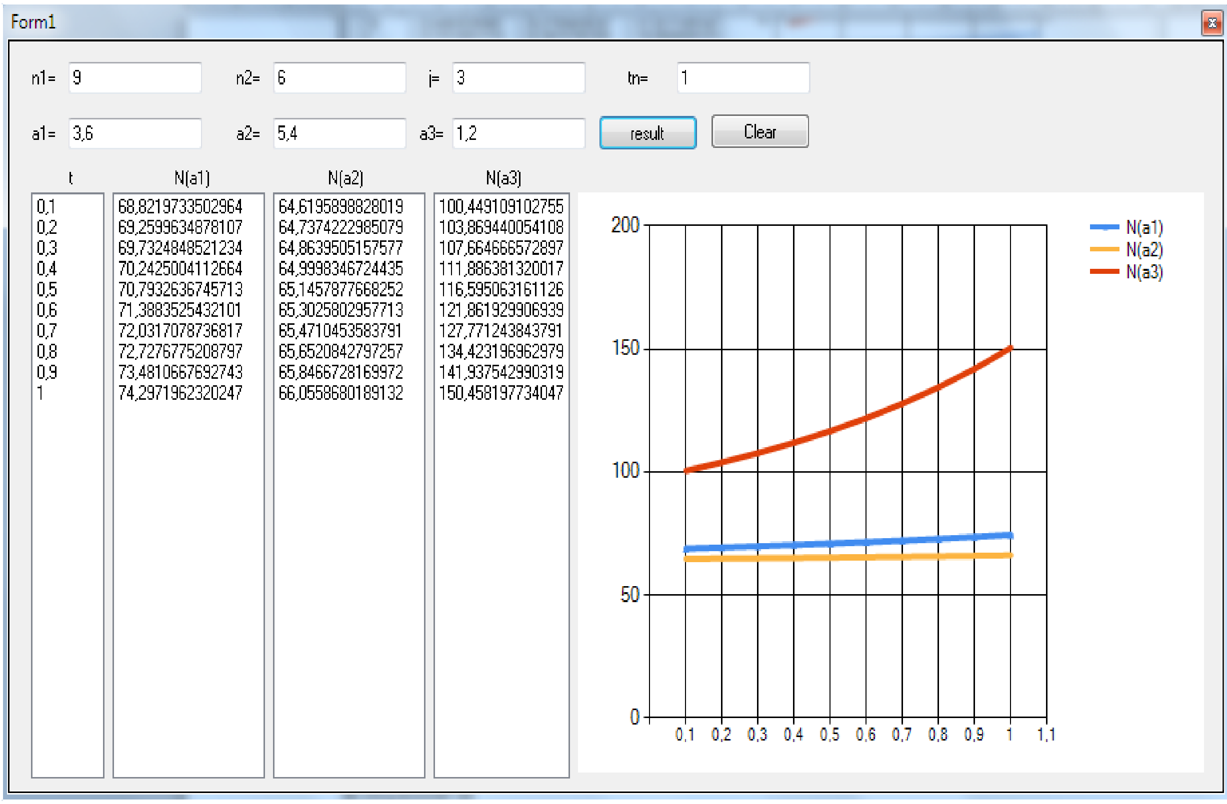
Эксперимент 46



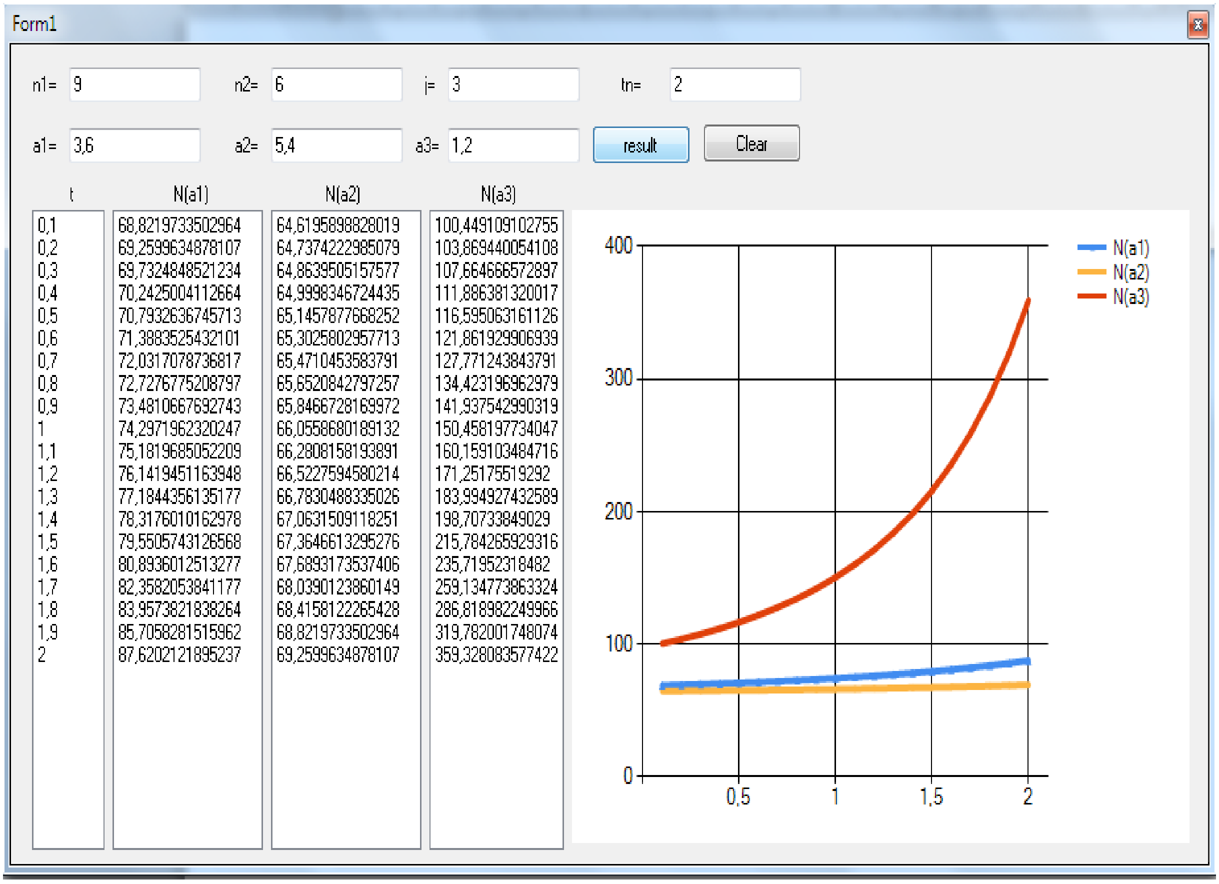
Эксперимент 47



Эксперимент 48



Эксперимент 49



Эксперимент 50