

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
ТАДЖИКСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

УДК: 519:681.3+004

ББК: 22.174:73+22.18

К-23

На правах рукописи



КАРИМЗОДА МЕХРУБОН МАТКАРИМ

**МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ
ЦИКЛИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктор по
специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы
автоматизации проектирования)

Научный руководитель:

Нуров Исхокбой Джумаевич – доктор
физико-математических наук, профессор
кафедры информационно-коммуникационных
технологий Таджикского национального
университета

Душанбе – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ.....	7
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ И АНАЛИЗ БИФУРКАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	15
1.1. Методы отыскания периодических решений в динамических системах	16
1.1.1. Бифуркации в динамических системах	16
1.1.2. Бифуркация периодических решений Андронова - Хопфа	18
1.1.3. Методы локального исследования существования периодических решений	19
1.1.4. Об одном алгоритме вычисления вращения векторного поля	24
1.2. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью	26
1.3. Предельные циклы в дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью	26
1.4. Формула Лиувилля–Остроградского и её роль в анализе динамических систем	27
1.5. Применение кусочно-линейных моделей второго порядка с линией переключения	34
ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ АНДРОНОВА-ХОПФА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	36
2.1. Исследование бифуркации периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью	37
2.2. Приложение принципа смены индекса к исследованию бифуркации Андронова – Хопфа	43
2.2.1. Нечётное продолжение и построение области в пространстве $S[0,2\pi]$	47
2.2.2. Вычисление вращения вполне непрерывного векторного поля	48

2.3. Топологические методы доказательства теоремы Андронова - Хопфа о бифуркации	50
2.4. Доказательство основных утверждений.....	57
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ.....	65
3.1. Постановка задачи	66
3.2. Об одном аналоге теоремы Лиувилля – Остроградского для кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка.....	68
3.2.1. Численное построение фазового портрета и геометрическая интерпретация формулы Лиувилля – Остроградского	75
3.3. Моделирование возникновения предельного цикла дифференциального уравнения второго порядка с линией переключения	79
3.4. Исследование скользящих решений в кусочно-линейной системе с разрывной правой частью	89
3.5. Качественный анализ и секторные разделения дифференциального уравнения второго порядка с переключением.....	93
3.6. О новом программном пакете для задач моделирования предельных циклов дифференциального уравнения второго порядка с переключением	96
3.6.1. Численное интегрирование кусочно-линейной системы с линией переключения.....	97
3.7. Структура и описание алгоритмов программного пакета.....	101
3.7.1. Программная реализация алгоритмов численного исследования динамических систем	109
ОБСУЖДЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	129
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	132
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	145

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Модели с переключениями играют важную роль в различных областях науки и техники, включая теорию автоматического управления, механику, экономику, биологию и другие разделы прикладных наук. Такие модели, как правило, описываются дифференциальными уравнениями с негладкими, релейными или разрывными нелинейностями. Практические задачи, возникающие при исследовании указанных систем, стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, основы которой были заложены в работах А. Ф. Филиппова.

Одной из наиболее важных задач при исследовании динамических систем является изучение качественных изменений фазового портрета при варьировании параметров в окрестности состояний равновесия. Анализ таких изменений осуществляется с использованием аппарата теории бифуркаций и позволяет выявлять условия возникновения новых динамических режимов, в частности периодических движений и предельных циклов, что имеет принципиальное значение для исследования циклических явлений.

Теория предельных циклов и их бифуркаций получила значительное развитие благодаря работам таких авторов, как А. Пуанкаре [81], А.М. Ляпунов [51], А.А. Андронов [3], Н.Н. Боголюбов [19], Л. С. Понтрягин [79], Ю.А. Митропольский [59], М.А. Красносельский [42] и их последователей [20], [58], [62], [64], [89].

Особое место среди указанных явлений занимает бифуркация Андронова–Хопфа, описывающая рождение предельного цикла при изменении параметров системы. В классической постановке данная бифуркация предполагает достаточную гладкость правой части системы, что существенно ограничивает область её применения. В настоящей работе рассматривается обобщение условий возникновения бифуркации Андронова–Хопфа на случай систем с непрерывной, но негладкой правой частью, что позволяет расширить применимость теории к моделям с

переключениями, содержащим элементы насыщения, разрывные нелинейности и другие особенности.

В этой связи особую актуальность приобретает не только анализ указанных систем, но и разработка методов их проектирования, обеспечивающих формирование требуемых циклических режимов. Это соответствует современным задачам математического моделирования и систем автоматизации проектирования, где требуется комплексный подход, объединяющий аналитические и вычислительные методы.

Таким образом, диссертационная работа посвящена разработке и исследованию методов анализа и проектирования динамических систем с переключениями, ориентированных на изучение и формирование циклических явлений. Математическую основу исследования составляют следующие системы и уравнения:

1. Двумерная динамическая система с главной однородной частью вида

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

где P, Q – непрерывные функции по совокупности переменных (x, y, λ) , $(x, y) \in R^2$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, удовлетворяющие условиям $P(0, 0, \lambda) \equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0$, $|P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| > 0$, $|x| + |y| > 0$, $\lambda \in \Lambda$.

2. Динамическая система вида

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (2)$$

где $x \in R^n, n \geq 3$, $F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu)$, $A(\mu) = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3, \dots$ – квадратная матрица, а $\omega(x, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, |x| \rightarrow 0.$$

3. Кусочно-линейного дифференциального уравнения вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \quad (3)$$

при $\lambda = 0$, где a, b, c – вещественные числа.

4. Кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + g(y, y') = 0, \quad (4)$$

где

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), & h(y, y') < 0, \end{cases}$$

здесь $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in R$, $r \neq 0$ и a_i, b_i, c_i – вещественные числа, $i = 1, 2$.

Степень научной разработанности изучаемой проблемы.

Исследованию бифуркаций и предельных циклов в гладких и негладких динамических системах посвящено значительное число научных работ. В частности, фундаментальные результаты в этой области представлены в трудах А. А. Андронова [3–8], Г. Ю. Ризниченко [82], М. А. Красносельского [42–47], Я. З. Цыпкина, А. Ф. Филиппова [93–95], а также В. И. Уткина [92], в которых с использованием различных аналитических и качественных методов получены условия существования периодических решений для широких классов динамических систем.

В указанных работах разработаны подходы к исследованию колебательных режимов, включая анализ устойчивости предельных циклов, изучение нелинейных эффектов и построение соответствующих математических моделей. Вместе с тем, значительная часть результатов относится к гладким системам либо к частным классам негладких моделей.

В то же время для динамических систем с переключениями задачи качественного и приближённого исследования бифуркаций и предельных циклов остаются недостаточно разработанными. В ряде современных исследований предлагаются подходы, основанные на сочетании методов сшивания решений в различных областях фазового пространства, развиваемых в рамках теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, и методов анализа периодических режимов в системах, содержащих модульные или кусочно-линейные нелинейности.

Однако вопросы систематического анализа и, особенно, проектирования динамических систем с переключениями, обладающих

заданными циклическими свойствами, требуют дальнейшего развития, что и определяет направление настоящего исследования.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры информатики Таджикского национального университета на 2021-2024 гг. по теме "Методы качественного и приближённого исследования бифуркаций в динамических системах с переключениями", а также в соответствии с основными положениями Национальной стратегии развития образования Республики Таджикистан на период до 2030 года и Стратегии развития и изучения естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования на период до 2030 года.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Цель исследования. Целью диссертационной работы является разработка и исследование методов анализа и проектирования динамических систем с переключениями, направленных на изучение циклических явлений и периодических режимов в математических моделях с негладкой правой частью в окрестности состояний равновесия. Для достижения поставленной цели в работе выполнено качественное и приближённое исследование бифуркационных процессов, приводящих к возникновению предельных циклов, а также разработаны алгоритмы и программные средства, предназначенные для численного и качественного анализа динамических режимов, представляющих интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Особое внимание уделено исследованию двумерных динамических систем с переключениями, для которых проведён качественный и численный анализ фазовых портретов, а также разработаны и обоснованы методы сшивания решений на линии переключения, обеспечивающие корректное описание поведения траекторий и формирование циклических режимов.

Задачи исследования. В соответствии с поставленной целью исследования сформулированы следующие основные задачи:

1. Для двумерных динамических системы (1) с главной однородной частью получить необходимое и достаточное условия бифуркации периодических решений.

2. Для динамических системы (2) проанализировать условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа;

3. Разработать методы качественного и численного анализа фазовых портретов негладких динамических систем, описываемых уравнениями (3) и (4) с модульными и кусочно-линейными нелинейностями;

4. Разработать программный пакет для численного и качественного анализа полученных результатов динамических систем с переключением.

Объект исследования. Нелинейные, кусочно-линейные дифференциальные уравнения второго и третьего порядков с линейным переключением.

Предмет исследования. Моделирование бифуркационных явлений и предельных циклов в нелинейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков, а также анализ точек контакта на линии переключения.

Методы исследования. В работе применяются методы математического моделирования, теории нелинейных колебаний, приближенные методы решения дифференциальных уравнений, а также методы качественного анализа и исследования бифуркаций, в том числе негладких динамических систем с переключением. Эти методы используются для анализа и проектирования динамических систем, позволяя выявлять условия возникновения предельных циклов и скользящих траекторий, а также создавать модели с заранее заданными режимами движения.

Научная новизна исследования. В работе получены новые научные результаты, обладающие строгой математической обоснованностью и четкой формулировкой. При использовании результатов других авторов приведены соответствующие библиографические ссылки. К основным научным результатам работы относятся следующие положения:

1. Для двумерной динамической системы (1) с главной однородной частью с использованием принципа смены топологического индекса особой

точки вполне непрерывного векторного поля получены необходимые и достаточные условия бифуркации периодических решений;

2. Для динамической системы (2) с помощью топологических методов (принцип смены индекса), при условии непрерывной зависимости линейной части системы от параметра в терминах поведения коэффициентов установлены условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа;

3. Предложен новый подход к аналитическому и численному исследованию периодических явлений в негладких системах, описываемых уравнениями (3) и (4) с модульными и кусочно-линейными функциями, обеспечивающий построение фазовых портретов для основных типов негладких динамических систем;

4. Получены расчетные формулы, описывающие периодических явлений, возникающие в окрестности состояний равновесия динамических систем, описываемых уравнениями (3) и (4) с модульными и кусочно-линейными функциями;

5. Создан новый программный комплекс, предназначенный для компьютерного моделирования и анализа предельных циклов динамических систем с переключениями, описываемых уравнениями (3) и (4).

Теоретическая и научно-практическая значимость работы.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и обосновании математических моделей и методов анализа динамических систем с переключениями, предназначенных для исследования периодических и стационарных режимов в нелинейных и кусочно-линейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков. Полученные результаты развивают топологические и качественные методы теории динамических систем и расширяют классические представления теории бифуркаций применительно к негладким системам с разрывной структурой.

Особое значение имеет развитие подходов к исследованию циклических явлений в системах с переключениями, включая установление

условий существования и устойчивости предельных циклов, а также анализ фазовой структуры вблизи линий переключения.

Научно-практическая значимость работы обусловлена тем, что полученные теоретические результаты доведены до уровня расчётных соотношений, алгоритмов и программных средств, пригодных для практического применения. На их основе разработан и реализован программный комплекс на языке Java, предназначенный для компьютерного моделирования, анализа динамических режимов и построения фазовых портретов систем с переключениями.

Разработанные методы и алгоритмы могут быть использованы при проектировании и исследовании широкого класса нелинейных динамических систем, включая модели с элементами переключения, возникающие в задачах механики, теории автоматического управления, электроники и других прикладных областях, где существенную роль играют циклические процессы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Установлено, что для двумерной динамической системы (1) с главной однородной частью существуют необходимое и достаточное условия возникновения периодических решений; для динамической системы (2), при непрерывной зависимости линейной части системы от параметра установлены условия возникновения периодических решений в окрестности состояния равновесия на основе принципа смены топологического индекса;

2. Доказано, что для кусочно-линейного дифференциального уравнения (3) применим аналог формулы Лиувилля – Остроградского, описывающий изменение вронскиана при переходе решений между областями действия различных линейных уравнений; для кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка (4) доказано существование предельного цикла на основе сшивания решений и анализа точек контакта на линии переключения;

3. Разработаны алгоритмы автоматизированного численного моделирования и качественного анализа уравнений (3) и (4), обеспечивающие определение точек контакта, вычисление вронскиана и визуализацию фазовых портретов в автоматическом режиме. На основе разработанных алгоритмов получен программный комплекс, позволяющий исследовать условия возникновения и циклических режимов в системах с линиями переключения.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим математическим обоснованием с использованием методов качественной теории дифференциальных уравнений, математического моделирования, топологического анализа и теории негладких динамических систем, а также их численной верификацией посредством разработанного программного комплекса. Все теоретические выводы подтверждены компьютерными экспериментами и согласуются с известными результатами для классических случаев, что обеспечивает надежность и воспроизводимость результатов как для гладких, так и для негладких динамических систем.

Соответствия диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа выполнена по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования).

1. Методология автоматизированного проектирования в технике, включая постановку, формализацию и типизацию проектных процедур и процессов проектирования, вопросы выбора методов и средств для применения в САПР.

8. Разработка научных основ построения средств компьютерной графики, методов геометрического моделирования проектируемых объектов и синтеза виртуальной реальности.

9. Комплексные исследования научно-технических и фундаментально-прикладных проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

11. Разработка и обоснование методик и правил адаптации компьютерных моделей, их эффективного использования при прогнозах эволюции объектов, систем, процессов и явлений.

12. Разработка качественных, аналитических, приближенных, численных и имитационных методов подготовки и реализации этапов вычислительного эксперимента.

13. Разработка математических методов моделирования объектов, систем, процессов и явлений.

14. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математической модели.

15. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования.

16. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

17. Теоретические, прикладные и экспериментальные исследования по созданию, испытанию и применению математических моделей для решения актуальных задач автоматизированного проектирования, планирования и управления.

Личный вклад автора. Научным руководителем были определены основные направления исследования и сформулирована постановка задач. Все результаты, представленные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. В совместных публикациях с Э.М.Мухамадиевым и И.Дж.Нуровым девяти статей [2-А], [6-А - 13-А] соавторам принадлежат постановки задач и обсуждения методов доказательства основных результатов. Кроме того, Министерством культуры Республики Таджикистан автору выдано свидетельство о регистрации произведений науки, литературы и искусства № 227 от 6 марта 2025 года на компьютерную программу «О новом алгоритме построения фазовых портретов кусочно-линейных дифферен-

циальных уравнений». Копия свидетельства приведена в приложении 1 диссертации.

Апробация результатов диссертации. Основные положения и результаты диссертационного исследования неоднократно докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры «Информатика» Таджикского национального университета (ТНУ), а также на онлайн семинарах профессоров Нурова И.Дж. и Мухамадиева Э.М. (2019-2025 гг.).

Результаты работы были представлены и обсуждены на следующих международных научных конференциях: международной научной конференции "Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы (Вологда, 2021 г.)"; международной научной конференции "Современные методы теории краевых задач (Воронеж, 03-09 мая 2022 г.)"; международных научных конференциях "Современные методы теории функций и смежные проблемы (Воронеж, 27 января, 01 - февраля 2023 г.)"; международной научной конференции "Воронежская зимняя математическая школа - 2024" (Воронеж, 26-30 января 2024 г.); международной научной конференции "Современные методы теории функций и смежные проблемы (Воронеж, 30 – января, 04 февраля 2025)".

Результаты диссертационного исследования и разработанный программный пакет внедрены в научную и учебную деятельность механико-математического факультета Таджикского национального университета, а также в практическую деятельность Института математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана. Внедрение подтверждается соответствующими актами, приведёнными в приложениях 2 и 3 диссертации.

Публикации по теме диссертации. Результаты, полученные автором в ходе выполнения диссертационного исследования, отражены в 13 публикациях [1-А - 13-А]. Из них 6 статьи опубликованы в научных журналах и сборниках конференций Российской Федерации, и 7 в научных изданиях Республики Таджикистан. Полный перечень опубликованных работ приведён

в конце диссертации. Пять статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, а восемь – в материалах международных и республиканских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, каждая из которых подразделена на параграфы, заключения, библиографического списка, включающего 121 источник, и приложений. Общий объем диссертации составляет 148 страниц. Работа содержит 3 таблицы и 12 рисунков, при этом нумерация таблиц и рисунков осуществляется отдельно в пределах каждой главы. В диссертации используется сквозная тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, где первый индекс обозначает номер главы, второй индекс номер параграфа, третий на номер теорем, лемм, следствий и формул в текущем параграфе.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ И АНАЛИЗ БИФУРКАЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Настоящая глава посвящена анализу и обобщению теоретических и методологических основ моделирования динамических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, а также исследованию бифуркационных явлений в таких системах. В главе приводится обзор литературных источников, охватывающих вопросы качественного анализа стационарных и периодических решений, а также изучение особенностей фазовых портретов и бифуркаций в гладких и негладких динамических моделях.

Особое внимание уделяется вопросам существования стационарных и периодических решений, устойчивости этих решений и их поведения в окрестностях особых точек. Качественная теория дифференциальных уравнений позволяет исследовать поведение решений без их явного нахождения. Её основы связаны с работами А. Пуанкаре [80-81] и А. М. Ляпунова [51]. Дальнейшее развитие методов исследования нелинейных колебаний, устойчивости и периодических решений отражено в трудах Л. И. Мандельштама [56], А. А. Андропова [3-8], Н. И. Баутина [15], И. Г. Малкина [53-55], М. А. Красносельского [42-46], В. А. Плисса [77] и других исследователей [10-12], [13], [20-21], [24], [63-70], [73-75], [97].

В настоящей работе основное внимание уделяется условиям существования периодических решений и исследованию их устойчивости. Для решения этих задач рассматриваются фазовые портреты и поведение траекторий вблизи положений равновесия. Отдельного рассмотрения требуют системы с модульными и кусочно-линейными правыми частями: применимость методов, использующих производные правой части, зависит от её гладкости.

В главе изложены результаты теории локальных бифуркаций, необходимые для дальнейшего исследования выбранных моделей. Рассматриваются условия возникновения периодических решений, их свойства и устойчивость. При переходе от гладких систем к негладким обсуждаются ограничения

классических результатов и возможность их применения к изучаемым уравнениям. Этот материал используется в последующих главах при качественном и численном анализе моделей.

Обзор литературы посвящён методам, на которых основано исследование, и границам их применимости к системам с негладкими правыми частями. Вопросы существования периодических режимов и их изменения при варьировании параметров определяют дальнейшие задачи диссертационной работы.

1.1. Методы отыскания периодических решений в динамических системах

1.1.1. Бифуркации в динамических системах

При изменении параметров дифференциального уравнения может качественно меняться поведение его решений. «Такие изменения называют бифуркациями. К ним относятся, в частности, возникновение и исчезновение положений равновесия или периодических орбит, а также изменение их устойчивости. Поэтому бифуркационный анализ включает поиск критических значений параметров и исследование динамики системы вблизи этих значений» [51].

Для рассматриваемых в диссертации моделей основной интерес представляют бифуркации, связанные с возникновением периодических колебаний. Их исследование предполагает определение условий появления периодических решений и изучение того, как меняются их свойства при изменении параметров. В системах с негладкими правыми частями при этом необходимо учитывать поведение траекторий на границах участков гладкости.

Развитие бифуркационного анализа связано с качественными методами исследования дифференциальных уравнений и теорией устойчивости. Для излагаемых далее результатов исходное значение имеют работы А. М. Ляпунова [51] и А. Пуанкаре [79].

Существенный вклад в последующие развитие теории внесли А.А. Андронов [4], В.И. Арнольд [10-13], Дж. Гукенхеймер [28], М.А. Красносель-

ский [42-46] и ряд других исследователей, развивших как аналитические, так и геометрические подходы.

Как правило, бифуркационный анализ проводится для систем, зависящих от одного или нескольких параметров. Одной из наиболее распространённых постановок является исследование дифференциального уравнения вида

$$x' = f(x, \mu), \quad x \in R^N, \quad (1.1.1)$$

где μ обозначает скалярный параметр. Под бифуркацией в данном контексте понимается такое значение параметра $\mu = \mu_0$, при котором происходит изменение числа, характера или устойчивости равновесных состояний, а также возможное появление периодических решений. В таких точках наблюдается качественная перестройка фазового портрета.

Пример 1.1.1. «Рассмотрим два дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от параметра μ

$$x' = \mu - x, \quad x' = \mu + x^2. \quad (1.1.2)$$

В первом уравнении, для каждого фиксированного μ оно имеет единственную точку равновесия $x = \mu$, являющуюся устойчивой. Все решения стремятся к этому равновесию при $t \rightarrow +\infty$, независимо от малых вариаций параметра. То есть изменение μ приводит лишь к смещению положения равновесия, но не вызывает качественной перестройки фазовой структуры. Такая ситуация характерна для отсутствия бифуркации. Что касается второго уравнения (1.1.2), здесь наблюдается кардинально иная картина. При $\mu > 0$ стационарных точек нет, все решения монотонно возрастают, при $\mu = 0$ существует единственное равновесие $x = 0$, причём оно неустойчиво, а при $\mu < 0$ появляются две точки равновесия – две точки равновесия $x = \pm\sqrt{-\mu}$, первая из которых неустойчива, а второе – устойчива. Такой переход соответствует бифуркации типа рождение двух равновесий, что является характерным примером седло узловых бифуркации.

Рассмотрим другой пример

$$x' = x(\mu - x^2). \quad (1.1.3)$$

Здесь бифуркационным значением является $\mu_0 = 0$, так как при $\mu \leq 0$ единственным равновесным состоянием остаётся $x = 0$, а при $\mu > 0$ к нему добавляется две новые симметричные точки $x = \pm\sqrt{\mu}$.

Следует отметить, что изучение локальных бифуркаций равновесий является лишь первой ступенью в развитии теории. Значительно более сложные задачи возникают при исследовании бифуркаций предельных циклов, гомоклинических и гетероклинических структур, а также при работе с системами, правые части которых имеют разрыв или являются кусочно-линейными. При исследовании кусочно-линейных систем необходимо учитывать поведение решений на границах областей, в которых действуют разные уравнения. Внутри каждой области можно применять методы теории гладких систем, однако переходы траекторий через границу переключения требуют отдельного анализа. Выбор метода зависит от того, сохраняется ли непрерывность правой части на этой границе» [51], [79].

Бифуркационный анализ таких систем включает исследование условий возникновения периодических решений и изменения их устойчивости. При этом необходимо рассматривать взаимное расположение траекторий и границы переключения, в частности их пересечения и касания. Эти особенности учитываются при анализе изучаемой в диссертации модели.

1.1.2. Бифуркация периодических решений Андронова - Хопфа

Бифуркация Андронова – Хопфа связана с возникновением периодических решений вблизи положения равновесия при изменении параметра системы. В классическом случае в критической точке пара комплексно-сопряжённых собственных значений матрицы линеаризации пересекает мнимую ось. При выполнении дополнительных условий новорожденности от равновесия ответвляется семейство периодических орбит. Их устойчивость определяется свойствами нелинейных членов системы. При определенных значениях параметра могут происходить бифуркации, то есть качественные изменения поведения решений.

В частности, теорема Андронова-Хопфа устанавливает, что при определенных условиях (например, при наличии особой точки) при изменении параметра системы могут появляться циклические решения, которые ранее отсутствовали. Это явление называется бифуркацией Андронова-Хопфа.

Суть данного явления заключается в следующем: если система дифференциальных уравнений зависит от параметра, то при изменении этого параметра возможны переходы от устойчивого состояния равновесия к устойчивому циклическому движению. Это происходит в том случае, когда при некотором критическом значении параметра пара комплексно – сопряжённых собственных значений матрицы линеаризации пересекает мнимую ось, проходя из левой полуплоскости в правую или наоборот. При этом вблизи точки бифуркации формируется небольшая замкнутая траектория периодического решения, амплитуда которого стремится к нулю при стремлении параметра к критическому значению.

Классическая теорема, лежащая в основе этого явления, устанавливает наличие непрерывной зависимости параметра, определяющего бифуркацию, и периода возникающего решения от малой величины, характеризующей отклонение от точки бифуркации. Также доказывается, что соответствующее периодическое решение стремится к нулю по норме, что подтверждает его рождение из состояния равновесия.

Бифуркация Андронова-Хопфа описывает один из механизмов возникновения периодических колебаний вблизи равновесия. Применение классической теоремы требует выполнения условий гладкости и невырожденности. Для рассматриваемых далее кусочно-линейных моделей вопрос существования периодических решений исследуется с помощью топологических методов.

1.1.3. Методы локального исследования существования периодических решений

«При топологическом подходе задачу о периодических решениях сводят к задаче о неподвижных точках соответствующего оператора. Это позво-

ляет исследовать существование решения без нахождения его явного выражения. В данном разделе рассматриваются необходимые для такого исследования понятия и результаты, связанные с принципом Лере-Шаудера» [49].

Во второй главе этот принцип используется для доказательства существования периодических решений рассматриваемых кусочно-линейных систем. Ниже приводятся определения и свойства вращения вполне непрерывных векторных полей, необходимые для проведения доказательств. В связи с этим ниже приводится краткое введение в используемый топологический аппарат, включающее необходимые определения и свойства вращения вполне непрерывных векторных полей.

«Пусть E – вещественное банахово пространство, а $\Omega \subset E$ ограниченная область. На замыкании $\bar{\Omega}$ рассматривается вполне непрерывный оператор $A: E \rightarrow E$, удовлетворяющий условию $Ax \neq x$ для всех $x \in \dot{\Omega}$, здесь $\dot{\Omega}$ – граница области Ω . В этом случае на границе $\dot{\Omega}$ корректно определяется целочисленный топологический инвариант вращения $\Upsilon(I - A, \dot{\Omega})$, который является характеристической векторного поля

$$\Phi x = x - Ax.$$

Вращения отражает количество «обходов» векторного поля при движении по границе области и служит важным инструментом для установления факта существования неподвижных точек оператора A . При этом точное вычисление вращения в большинстве случаев оказывается несущественным, важную роль играют лишь его топологические свойства» [46, с. 16].

«Два невырожденных на $\dot{\Omega}$ векторных полей

$$\Phi_0 x = x - A_0 x, \quad x \in \dot{\Omega}, \quad \Phi_1 x = x - A_1 x, \quad x \in \dot{\Omega},$$

называются гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует непрерывное по параметру $\lambda \in [0, 1]$ семейство операторов $A(\lambda, x)$, определяющих векторные поля

$$\Phi(\lambda, x) = x - A(\lambda, x), \quad x \in \dot{\Omega},$$

которые также не имеют нулей на $\dot{\Omega}$. Тогда выполняются следующие свойства:

Свойство 1.1.1. Если поля Φ_0 и Φ_1 гомотопны на $\dot{\Omega}$, то

$$\Upsilon(\Phi_0, \dot{\Omega}) = \Upsilon(\Phi_1, \dot{\Omega}).$$

Данное свойство даёт возможность упростить задачу, вместо сложных векторных полей рассматривать более простые при вычислении их вращения.

Свойство 1.1.2. Пусть $A\bar{\Omega} \subset E_0$, где E_0 – замкнутое линейное подпространство пространства E , причём $\Omega_0 = \Omega \cap E_0 = \emptyset$. На границе области Ω_0 , рассматриваемой относительно пространства E_0 , определим поле

$$\Psi x = x - Ax.$$

Это поле принимает значения в E_0 и не обращается в нуль на указанной границе. Вращение исходного поля $\Phi x = x - Ax$ совпадает с вращением его ограничения на подпространство E_0 :

$$\Upsilon(\Phi, \dot{\Omega}) = \Upsilon(\Psi, \dot{\Omega}_0).$$

Свойство 1.1.3. Пусть Ω – ограниченная область в банаховом пространстве E , а оператор $A: \bar{\Omega} \rightarrow E$ вполне непрерывен. Предположим, что поле $\Phi x = x - Ax$ не обращается в нуль на границе $\dot{\Omega}$. Если

$$\Upsilon(\Phi, \dot{\Omega}) \neq 0,$$

то существует хотя бы одна точка $x_* \in \Omega$, удовлетворяющая равенству

$$\Phi x_* = 0.$$

Следовательно, $Ax_* = x_*$, то есть оператор A имеет неподвижную точку внутри области Ω .

Таким образом, для доказательства существования решения уравнения $x - Ax = 0$ достаточно установить, что вращение соответствующего поля на границе области отлично от нуля» [46].

«Перейдём к принципу Лере–Шаудера. Рассмотрим уравнение

$$Ax = x, \quad x \in E. \quad (1.1.4)$$

Здесь $A: E \rightarrow E$ – вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве E . С использованием гомотопической инвариантности вращения и свойства 1.1.3 формулируется следующая теорема.

Теорема. Пусть оператор $A(x, \lambda)$, зависящий от $x \in E$ и параметра $0 \leq \lambda \leq 1$, является вполне непрерывным по совокупности аргументов и удовлетворяет условию $A(x, 0) = Ax$. Предположим, что для всех решений уравнений

$$x = A(x, \lambda), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (1.1.5)$$

выполняется единая априорная оценка $\|x\| = R_0$. Предположим далее, что векторное поле $x = A(x, 1)$ имеет ненулевое вращение на сфере $\|x\| = R_1$, где $R_1 > R_0$. Тогда уравнение (1.1.4) имеет хотя бы одно решение» [42].

«Существо принципа Лере-Шаудера заключается в том, что для доказательства разрешимости уравнения (1.1.4) сводится к исследованию семейства вспомогательных уравнений (1.1.5). При $\lambda = 1$ данное семейство подбирается таким образом, чтобы существование решений уравнения $x = A(x, 1)$ либо очевидно, либо следовало из заранее известных результатов. Применение данного принципа к исследованию периодических решений дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (1.1.6)$$

где $x \in R^n$, $\mu \in \Lambda \subset R$, а $F(x, \mu)$ — непрерывно — дифференцируемая вектор — функция по совокупности переменных x, μ требует предварительного построения вполне непрерывного оператора A , неподвижные точки которого соответствуют периодическим решениям исходной системы. Существует несколько способов построения таких операторов» [41], [42]. Один из них будет использован при доказательстве результатов второй главы диссертации.

«Перейдём к рассмотрению вращения векторных полей в одномерном пространстве. В одномерном случае связная область $\Omega \subset R$ является промежутком, а её граница $\dot{\Omega}$ содержит две точки. На этой границе векторные поля распадаются на четыре гомотопических класса. Первый класс состоит из полей, чьи векторы на обоих концах промежутка направлены наружу, по определению вращение таких полей равно 1. Второй и третий классы образуют поля, векторы которых на обоих концах направлены одинаково, для них

вращение полагается равным нулю. Четвертый класс соответствует полям, направленным внутрь промежутка на обоих его концах; вращение таких полей равно -1» [45, с.17].

Другой подход, применяемый в настоящей работе для исследования периодических решений, опирается на теорему Арцела [39]. Следует отметить, что понятие равностепенной непрерывности было введено практически одновременно Дж. Асколи (1883-1884) и Ч. Арцела (1882-1883). Первую слабую версию соответствующей теоремы доказал Дж. Асколи в 1883-1884 г.г., установив достаточные условия компактности. Ч. Арцела в 1895 году дополнил результат необходимым условием и впервые дал его корректную интерпретацию.

«Теорема Арцела. *Если множество Ω числовых функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то из любой последовательности функций этого множества можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции»* [39].

«Равномерная ограниченность функций означает существование числа $M > 0$, такое что $|f_n(x)| < M$ для всех n и всех x . Семейство функций $f_n(x)$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из условия $|x_1 - x_2| < \delta$ следует неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для всех n и всех x .» [35], [38], [39], [42], [50], [83].

Данная теорема широко применяется при выполнении предельных переходов и установлении ограниченности в нелинейных системах, зависящих от скалярного параметра. Исследованию таких систем посвящены работы многих авторов. В частности, А.Н. Тихоновым [91] показана эффективность метода малого параметра, например, в задачах химической кинетики. В работе А.Д. Морозова [61] для анализа подобных систем используются методы компьютерного моделирования.

Несмотря на большое количество исследований, посвящённых периодическим решениям дифференциальных уравнений, общая теория до сих пор не разработана. Разнообразие конкретных систем и сложность рассматривае-

мых задач препятствуют выработке универсального подхода. В частности, мало изучены условия существования периодических решений нелинейных систем, зависящих от малого параметра.

Таким образом, исследование условий существования стационарных и периодических решений нелинейных дифференциальных систем, рассматриваемое в настоящей диссертационной работе, является актуальной научной задачей.

1.1.4. Об одном алгоритме вычисления вращения векторного поля

Пусть непрерывное плоское векторное поле Φ определено на замыкании ограниченной области $M \subseteq R^2$ и нигде не обращается в нуль на ее границе. Тогда вращение $\gamma(\Phi, M)$ векторного поля Φ на границе Γ области M численно равно количеству полных оборотов, которое совершает вектор Φx , в то время как точка x пробегает кривую в положительном направлении.

Пусть $a \in R^2$ – изолированная особая точка векторного поля Φ (нули будем также считать особыми точками). Тогда вращение векторного поля Φ на границе любого круга, внутри которого нет других особых точек, будет равняться одному и тому же числу, которое называется индексом изолированной точки a поля Φ и обозначается $ind(a, \Phi)$.

В пособии [43] предлагается ряд методов нахождения индекса изолированной особой точки плоского векторного поля. К ним относится вычисление вращения по формуле Пуанкаре:

$$\gamma(\Phi, \Gamma) = \int_a^b \frac{P(t)Q'(t) - Q(t)P'(t)}{P^2(t) + Q^2(t)} dt, \quad (1.1.7)$$

и использование алгоритма вычисления вращения плоского векторного поля на замкнутой кривой.

Алгоритм вычисления вращения на замкнутой кривой. Пусть Γ – замкнутая кривая, заданная уравнением $z = z(t)$, при условии $t \in [a, b]$ – непрерывное векторное поле без нулевых векторов на Γ : $\Phi(z) = \{P(z), Q(z)\}$.

1. Находим $P(t) = P(z(t))$ и $Q(t) = Q(z(t))$.

2. Находим все корни функции Q на $[a, b)$.
3. Из найденных корней функции Q отбираем только, те для которых $P > 0$.
4. По множеству отобранных корней t_k находим числа:

n_1 – количество точек, где Q убывает;

n_2 – количество точек, где Q возрастает.

5. Вычисляем вращение: $\gamma(\Phi, \Gamma) = n_2 - n_1$.

Недостатком этих методов является неприменимость их в пространствах с большим числом размерностей и наличие громоздких вычислений.

В связи с этим возникает необходимость исследования новых методов вычисления индекса изолированной особой точки, которые бы были более наглядны и просты в применении, допускали перенос на пространства больших размерностей, позволяли взглянуть на одну и ту же проблему с разных сторон, были достаточно эффективны хотя бы в некоторых частных случаях. Поэтому для вычисления индекса изолированной особой точки предлагается разные методы вычисления, как метод малых деформаций, геометрический метод, метод гомотопий и т.п. Среди всех методов наибольший интерес представляют метод гомотопий.

Векторные поля называются гомотопными, если их можно соединить невырожденной деформацией. В книге [46] рассматривается ряд признаков гомотопности.

«Основная идея метода – замена векторного поля Φ гомотопным полем Φ_1 , для которого вычисление индекса изолированной особой точки θ упрощается. При этом используется тот факт, что гомотопные поля имеют одинаковые вращения. В процессе вычисления индекса возможно несколько гомотопных переходов: $\Phi - \Phi_1 - \Phi_2 - \dots - \Phi_n$, поскольку гомотопность является отношением эквивалентности» [46].

Некоторые гомотопные преобразования описаны в книге [2]. «Так, если $a(x, y)$ – непрерывная функция, то при вычислении индекса нулевой изолированной особой точки поля $\Phi = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ можно перейти к вектор-

ному полю $\Phi_1 = \{P(x, y), Q(x, y) - a(x, y)P(x, y)\}$, для которого θ – тоже изолированная точка с тем же самым индексом» [2].

С помощью рационального использования вышеописанных методов можно получить, в частности, основной алгоритм вычисления индекса нулевой изолированной особой точки векторного поля.

1.2. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью

«Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью представляют собой обобщение классических обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых допускается разрывность функции, задающей правую часть системы. Такие уравнения возникают во многих приложениях, например, при описании динамики электрических цепей с элементами переключения, механических систем с ударными взаимодействиями, а также в экономических и биологических моделях. Основная особенность этих уравнений заключается в том, что траектории решений могут пересекать разрывные поверхности, что приводит к необходимости специального определения решения в окрестности таких поверхностей. Одним из широко используемых подходов является определение решений, в котором рассматриваются дифференциальные включения вместо классических уравнений, позволяя учитывать многозначность правой части на разрывных множествах. В кусочно-линейных системах линия переключения разделяет фазовую плоскость на области, в каждой из которых движение описывается соответствующей линейной системой. При этом характер движения вблизи указанной линии определяется взаимным расположением векторных полей по обе её стороны. Поэтому исследование периодических решений требует не только анализа движения внутри каждой области, но и согласования отдельных участков траектории на границе переключения. Примером таких систем является кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка с линией переключения» [93].

1.3. Предельные циклы в дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью

В дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью предельные циклы играют важную роль в качественном анализе поведения систем. «Предельный цикл – это замкнутая орбита, к которой стремятся траектории из соседних областей фазового пространства. При наличии разрывных поверхностей поведение решений вблизи таких циклов может существенно отличаться от поведения гладких систем. В частности, предельные циклы могут возникать или исчезать при изменении параметров системы за счёт пересечения разрывных множеств или изменения характера скользящих режимов. Анализ предельных циклов в подобных системах требует применения методов теории дифференциальных уравнений с переключением, регуляризации разрывов или построения кусочно-линейных аппроксимаций, что позволяет исследовать устойчивость циклов, их бифуркации и мультипликативные свойства» [47].

«В экономических моделях разрывная правая часть может описывать пороговый механизм инвестирования: компания направляет средства на развитие после того, как прибыль или накопленный капитал достигают заданного значения. При определённых условиях переключение инвестиционной активности может сопровождаться периодическими колебаниями экономических показателей, однако существование предельного цикла необходимо обосновывать для конкретной системы. В моделях популяционной динамики аналогичный механизм связан с регулированием численности: при превышении установленного порога начинается отлов, изменяющий скорость прироста популяции. Такое управление задаёт разные уравнения по обе стороны порога, но наличие переключений ещё не доказывает существования периодического режима и его устойчивости» [114].

1.4. Формула Лиувилля–Остроградского и её роль в анализе динамических систем

«При анализе динамической системы необходимо установить, как её параметры влияют на движение и как изменяется поведение решений при возмущении начальных условий. В задачах проектирования эти зависимости

используются для выбора характеристик системы, обеспечивающих требуемый переходный процесс. Для линейных дифференциальных уравнений второго порядка одним из инструментов такого исследования является формула Лиувилля-Остроградского. Она определяет закон изменения вронскиана и позволяет связать свойства фундаментальной системы решений с преобразованием фазовой площади» [78, с. 114].

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0,$$

где p и q – действительные параметры. Подобные уравнения используются при описании свободного движения механических систем, переходных процессов в электрических цепях и поведения линейных моделей в окрестности равновесия. В механической интерпретации коэффициент p характеризует демпфирование, отнесённое к массе, а коэффициент q – соответствующую характеристику жёсткости. Физический смысл этих параметров зависит от принятой модели, поэтому их знаки и допустимые значения должны определяться с учётом свойств исследуемого объекта.

Пространство решений данного уравнения двумерно. Вид фундаментальной системы решений устанавливается по корням характеристического уравнения

$$\mu^2 + p\mu + q = 0.$$

При $p^2 - 4q > 0$ имеются два различных действительных корня; при $p^2 - 4q = 0$ возникает кратный действительный корень; при $p^2 - 4q < 0$ корни являются комплексно-сопряжёнными. Эти случаи соответствуют различным формам свободного движения. Однако для анализа системы существенен не только вид отдельных решений, но и закон изменения площади, образованной двумя независимыми решениями в фазовой плоскости.

Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решения рассматриваемого уравнения. Их вронскиан определяется выражением

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

Дифференцирование этого выражения приводит к сокращению слагаемых, содержащих произведение первых производных. После подстановки вторых производных из исходного уравнения сокращаются также слагаемые с коэффициентом q . В результате получаем

$$W'(t) = -pW(t).$$

Интегрирование последнего равенства с учётом значения вронскиана в момент t_0 даёт формулу Лиувилля-Остроградского:

$$W(t) = W(t_0)e^{-p(t-t_0)}.$$

Экспоненциальный множитель не обращается в нуль при конечных значениях времени. Следовательно, если вронскиан ненулевой в начальный момент, то он остаётся ненулевым на всём интервале рассмотрения. Таким образом, линейную независимость двух решений одного и того же уравнения достаточно проверить в одной точке. Для построения общего решения это означает возможность однократной проверки выбранной фундаментальной системы. Данное свойство лежит в основе критерия независимости решений через вронскиан.

Геометрическая интерпретация формулы связана с вектором (y_1, y_1') и (y_2, y_2') . Вронскиан равен ориентированной площади построенного на них параллелограмма, а его модуль – обычной площади. При движении системы эта площадь изменяется с множителем $e^{-p(t-t_0)}$. Поэтому при положительном p происходит её сжатие, при нулевом – сохранение, при отрицательном – расширение. Коэффициент q не входит в закон изменения площади при фиксированном начальном значении вронскиана, хотя влияет на форму траекторий и характер движения.

Для задач анализа необходимо различать сжатие фазовой площади и устойчивость равновесия. Уменьшение площади допускает ситуацию, в которой возмущения сокращаются в одном направлении и возрастают в другом. В рассматриваемой системе асимптотическая устойчивость нулевого решения обеспечивается при одновременном выполнении условий $p > 0$ и $q > 0$. Если $q < 0$, характеристические корни имеют разные знаки и равновесие

является седловым, в том числе при положительном p . Следовательно, формула Лиувилля-Остроградского должна применяться совместно с анализом характеристических корней данного дифференциального уравнения.

Аналогичного уточнения требует описание фазовых портретов. При $p = 0$ и $q > 0$ ненулевые траектории представляют собой замкнутые эллипсы; после соответствующего масштабирования координат они могут быть представлены окружностями. Сохранение площади при отрицательном q сопровождается седловым характером равновесия и не приводит к замкнутым траекториям. При положительных p и q приближение к равновесию имеет спиральный характер только в случае комплексно-сопряжённых корней. При действительных отрицательных корнях движение происходит без колебательной составляющей.

С точки зрения проектирования коэффициенты p и q следует рассматривать как взаимосвязанные параметры. Выбор положительного p задаёт сжатие фазовой площади, но сам по себе не определяет требуемое быстрое действие системы. При неизменном положительном q увеличение демпфирования может привести к переходу от колебательного движения к апериодическому. Дальнейшее увеличение p способно замедлить наиболее медленную составляющую переходного процесса, несмотря на более быстрое уменьшение площади. Поэтому при выборе параметров необходимо сопоставлять закон изменения вронскиана с положением характеристических корней и требованиями к длительности переходного процесса.

Матричное представление позволяет распространить это рассуждение на системы большей размерности. После перехода от уравнения второго порядка к система первого порядка получаем

$$x'(t) = Ax(t).$$

Это равенство выполняется как для отдельного векторного решения, так и для матрицы, составленной из таких решений. Далее в выражении для определителя по $x(t)$ понимается фундаментальная матрица системы. При постоянной матрице A справедливо соотношение

$$\det x(t) = \det x(t_0) e^{tr(A)(t-t_0)}.$$

Для рассматриваемого уравнения матрица коэффициентов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix},$$

а её след равен $-p$. Поэтому закон изменения определителя фундаментальной матрицы совпадает с полученным законом изменения вронскиана. В системе размерности n определитель характеризует изменение ориентированного фазового объёма, а след матрицы определяет его относительную скорость изменения. След равен сумме собственных значений с учётом их алгебраических кратностей; при этом отрицательность суммы не исключает наличия отдельных собственных значений с положительной действительной частью.

Практическое значение формулы можно проследить на примере гармонического осциллятора

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

При положительной собственной частоте коэффициент p равен нулю, вронскиан сохраняется, а фазовые траектории ненулевых решений замкнуты. Эта модель описывает свободные колебания без потерь энергии и может использоваться как исходный случай при исследовании влияния демпфирования.

Добавление сопротивления приводит к уравнению

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = 0.$$

При положительных γ и ω равновесие асимптотически устойчиво, а фазовая площадь уменьшается по закону Лиувилля-Остроградского. Соотношение параметров определяет, будет ли переходный процесс колебательным, критическим или апериодическим. При проектировании демпфирующего устройства это позволяет отдельно оценивать характер затухания и скорость сжатия площади. отождествлять изменение вронскиана с изменением энергии нельзя: эти величины описывают разные свойства движения и в общем случае не подчиняются одному закону.

Отрицательный коэффициент p соответствует решению фазовой площади и неустойчивости нулевого решения. В физической модели такой режим может описывать поступление энергии в систему. Однако линейное уравнение с отрицательным демпфированием не объясняет установление автоколебаний конечной амплитуды. Для описания их ограничения необходимо учитывать дополнительные механизмы, например нелинейность или переключение режимов. Тем самым анализ линейной модели позволяет установить начало неустойчивости, но не заменяет исследование последующего движения.

При разработке программы для анализа динамических систем формула Лиувилля-Остроградского может использоваться как независимое контрольное соотношение. Программа вычисляет два решения с линейно независимыми начальными данными, определяет их вронскиан и сравнивает его с теоретическим значением. Для такого сравнения удобно выбрать начальные фазовые векторы, образующие единичную матрицу: тогда исходное значение определителя известно заранее. Расхождение между расчётным и теоретическим вронскианом характеризует нарушение закона изменения фазовой площади.

Подобная проверка дополняет оценку точности отдельных решений. Систематическое отклонение указывает на слишком большой шаг интегрирования, накопление ошибок округления программной реализации. При этом совпадение вронскиана с теоретическим значением не доказывает точности каждой траектории: разные ошибки могут компенсироваться при вычислении определителя. Поэтому контроль вронскиана следует сочетать с проверкой начальных сравнением результатов при уменьшении шага и сопоставлением с аналитическими решениями в доступных частных случаях.

Выбор численного метода также должен учитывать свойства модели. Для консервативных гамильтоновых систем применяются симплектические методы, сохраняющие соответствующую геометрическую структуру, включая фазовый объём. При наличии демпфирования расчётная схема должна

корректно воспроизводить предусмотренную моделью сжатие. Искусственное сохранение площади в диссипативной системе и её искусственное уменьшение в консервативной одинаково искажают исследуемую динамику. Связь геометрических свойств численного метода с качеством длительного расчёта рассматривается в теории геометрического интегрирования, геометрическое численное интегрирование.

В программном средстве результаты такого анализа целесообразно представлять совместно: фазовый портрет доказывает форму движения, характеристические корни позволяют оценивать устойчивость, а график вронскиана служит для проверки изменения площади. Такое представление помогает обосновывать выбор параметров и обнаруживать случаи, когда визуально правдоподобное решение получено с нарушением свойств исходной модели.

Полученные результаты составляют основу для исследования кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка. В пределах каждой области с постоянными коэффициентами формула Лиувилля-Остроградского применяется к соответствующей локальной системе. Однако движение по всей фазовой плоскости определяется также расположением границ областей и правилами перехода между ними. Поэтому локальные свойства решений должны рассматриваться совместно с условиями их согласования.

Если модель не предусматривает импульсных воздействий или скачков состояния, при переходе между областями согласуются значения функции и её первой производной. Для анализа возмущений требуется учитывать дополнительное обстоятельство: близкие траектории могут пересекать границу в разные моменты времени. Следовательно, закон изменения фазовой площади внутри отдельных областей сам по себе не определяет устойчивость всей системы с переключениями.

Для программной реализации из этого следует необходимость точно определять моменты пересечения границ, переключать локальные уравнения

и проверять выполнение условий согласования. Формула Лиувилля-Остроградского при этом используется для контроля вычислений на участках движения с неизменными коэффициентами. Исследование полного переходного процесса требует совместного учёта локальной динамики и преобразований, возникающих при переключении.

В главе 3 изложенные положения будут использованы при анализе кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка и разработке средств его численного исследования, Построение фундаментальных систем решений в отдельных областях, контроль вронскиана и согласование траекторий позволят связать аналитическое описание модели с вычислительными результатами и обосновать выбор параметров исследуемой системы.

1.5. Применение кусочно-линейных моделей второго порядка с линией переключения

Кусочно-линейные дифференциальные уравнения второго порядка с линией переключения возникают при математическом описании процессов, в которых динамика системы изменяется при достижении некоторого порогового уровня состояния. Подобные ситуации характерны для широкого круга прикладных задач, связанных с наличием инерции и нелинейных механизмов саморегуляции.

«В биологии и экологии такие модели естественным образом появляются при исследовании популяционной динамики с учётом запаздывающей реакции биологических процессов и эффекта перенаселения. Инерционная модель численности $x(t)$ может быть представлена в виде

$$Mx'' + \alpha x' = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - D(x), \quad D(x) = \begin{cases} 0, & x < R, \\ d, & x > R, \end{cases}$$

где M – коэффициент инерции, α – демпфирование, r – темп роста, K – ёмкость среды, а R – порог перенаселения. Линеаризация данной модели в окрестности стационарных состояний приводит к кусочно-линейной системе второго порядка с линией переключения $x = R$, допускающей колебательные режимы численности» [113].

«Аналогичные негладкие структуры возникают и в экономической динамике. В частности, модель накопления капитала $K(t)$ с пороговым механизмом инвестирования описывается уравнением

$$K' = \begin{cases} -\delta K, & K < K_0, \\ sAK^\alpha - \delta K, & K \geq K_0, \end{cases}$$

где K_0 – инвестиционный порог, A – технологический параметр, $0 < \alpha < 1$ – эластичность выпуска, $s \in (0,1)$ – норма сбережений, $\delta > 0$ – коэффициент амортизации. Данная модель характеризуется наличием линии переключения $K = K_0$, разделяющей режимы деградации и устойчивого экономического роста.

Порог $h(K) = K - K_0$.

1. $0 < K < K_0$. $K' = -\delta K < 0$.

Вследствие чего все фазовые траектории монотонно убывают и стремятся к равновесию $K = 0$. С точки зрения экономики, деградация капитала при отсутствии инвестиционной активности.

2. $K > K_0$. $K' = sAK^\alpha - \delta K$.

При выполнении условия

$$K^* = \left(\frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > K_0,$$

существует второе стационарное состояние $K = K^*$.

Таким образом, фазовый портрет модели представляет собой фазовую прямую с двумя устойчивыми состояниями равновесия $K = 0$ и $K = K^*$ разделенной пороговой точкой $K = K_0$ » [114].

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧЕ АНДРОНОВА-ХОПФА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В данной главе исследуется бифуркационное поведение динамической системы – возникновение в окрестности стационарного решения нестационарные периодические решения малой амплитуды, так называемая бифуркация Андронова – Хопфа. С помощью топологических методов (принцип смены индекса), при условии непрерывной зависимости от параметра линейной части системы, в терминах поведения коэффициентов найдены условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа для динамической системы в двухмерном и трехмерном пространствах. На основе предложенного метода сформулированы и доказаны теоремы существования периодических решений-циклов для случая непрерывности всех входящих в системах функций. Также исследована бифуркация Андронова-Хопфа периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью. В терминах свойств главной однородной части динамической системы получены необходимое и достаточное условия бифуркации периодических решений, как следствие принципа смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля, порожденного динамической системой.

В теории бифуркации исследуется качественное поведение решений динамических систем при изменении входящих в них параметров. В трудах основоположников этой теории А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, А. А. Андронова, Э. Хопфа и их учеников и последователей были получены обширные результаты по теории бифуркации динамических систем (см., напр., [4, 15]). Среди них важное место занимает бифуркация Андронова-Хопфа – появление периодических решений в окрестности стационарных решений при определенных значениях параметров, такие значения параметров называют бифуркационными [42]. В работе [42, 46] для исследования бифуркации Андронова-Хопфа предложен и обоснован метод функционализации параметра.

Суть метода заключается в том, что параметры, входящие в динамическую систему, заменяются специальными функционалами. Это даёт возможность изолировать отдельные решения и находить бифуркационные значения. Данный метод эффективно применяется в теории управления динамическими системами.

Результаты данной главы связаны с работами [1-А - 3-А, 7-А, 8-А, 11-А] автора.

2.1. Исследование бифуркации периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью

В этом параграфе исследована бифуркация Андронова-Хопфа периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью. Используя принцип смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля, порожденного динамической системой, получены необходимые и достаточные условия бифуркации периодических решений в терминах характеристики главной однородной части динамической системы.

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda), \end{cases} \quad (2.1.1)$$

где P, Q – непрерывные функции по совокупности переменных (x, y, λ) , $(x, y) \in R^2$, $\lambda \in \Lambda \subset R$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} P(0, 0, \lambda) &\equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0, \\ |P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| &> 0, \quad |x| + |y| > 0, \quad \lambda \in \Lambda. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Предположим, что в функциях P и Q выделены главные однородные части:

$$\begin{aligned} P(x, y, \lambda) &= P_m(x, y, \lambda) + p(x, y, \lambda), \\ Q(x, y, \lambda) &= Q_m(x, y, \lambda) + q(x, y, \lambda), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где P_m, Q_m положительно однородные порядка $m > 0$ функции переменных x, y :

$$P_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m P_m(x, y, \lambda), \quad Q_m(\rho x, \rho y, \lambda) \equiv \rho^m Q_m(x, y, \lambda), \quad \forall \rho > 0,$$

а функции p, q удовлетворяют условиям малости

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^m} \sup_{x^2+y^2 \leq \rho^2, \lambda \in \Lambda} (|p(x, y, \lambda)| + |q(x, y, \lambda)|) = 0. \quad (2.1.4)$$

Верна следующая лемма.

Лемма 2.1.1. Пусть функции P и Q непрерывны по совокупности переменных и имеют представление (2.1.3), где $m > 0$ и функции p и q удовлетворяют условию (2.1.4). Тогда функции P_m, Q_m, p и q непрерывны по совокупности переменных $(x, y, \lambda) \in R^2 \times \Lambda$.

Система уравнений (2.1.1), в силу условий (2.1.2), при всех $\lambda \in \Lambda$ имеет изолированное нулевое стационарное (периодическое любого периода) решение. Нас интересует множество предельных точек Λ^* последовательностей $\lambda_n \in \Lambda, n = 1, 2, \dots$ для которых система (2.1.1) при $\lambda = \lambda_n$ имеет ненулевое периодическое решение $(x_n(t), y_n(t))$, удовлетворяющих условию:

$$\max_t (|x_n(t)| + |y_n(t)|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Определение. Число $\lambda_0 \in \Lambda$ назовем бифуркационным значением для динамической системы (2.1.1), если существуют число $T_0 > 0$ и последовательности $\lambda_n \in \Lambda, T_n > 0, n = 1, 2, \dots$ такие, что при каждом $\lambda = \lambda_n, n = 1, 2, \dots$ система уравнений (2.1.1) имеет ненулевое T_n -периодическое решение $(x_n(t), y_n(t))$ и при $n \rightarrow \infty$ имеют место пределы

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_0, \quad \rho_n := \max_t (|x_n(t)| + |y_n(t)|) \rightarrow 0, \quad \rho_n^{m-1} T_n \rightarrow T_0.$$

Приведенное определение при $m = 1$ совпадает с понятием точки бифуркации Андронова – Хопфа [46, 57].

Наряду с динамической системой (2.1.1) рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x' = P_m(x, y, \lambda), \\ y' = Q_m(x, y, \lambda). \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Система уравнений (2.1.5) в случае, когда функции P_m и Q_m являются однородными многочленами, исследованы многими авторами (см., напр., [75]). Ниже выделим такие свойства системы (2.1.5), которые необхо-

димы для существования бифуркационных значений параметра динамической системой (2.1.1).

Введем в рассмотрение функцию

$$G(\varphi, \lambda) = -P_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi + Q_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi.$$

Данная функция непрерывна по совокупности переменных $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times \Lambda$ и 2π -периодична по φ .

Лемма 2.1.2. Если $G(\varphi_0, \lambda) \neq 0$, то при любом $\rho > 0$ решение системы уравнений (2.1.5), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \rho \cos \varphi_0$, $y(0) = \rho \sin \varphi_0$, единственно.

Лемма 2.1.3. Пусть задача Коши $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ в любой ненулевой точке $(x_0, y_0) \in R^2$ для системы (2.1.5) имеет единственное решение. Пусть система (2.1.5) имеет ненулевое решение $(x_0(t), y_0(t))$, удовлетворяющее условиям $(x_0(0), y_0(0)) = \rho_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$, $G(\varphi_0, \lambda) \neq 0$ и $(x_0(T), y_0(T)) = \sigma(x_0(0), y_0(0))$, $T \neq 0$, $\sigma > 0$. Тогда функция $G(\varphi, \lambda)$ удовлетворяет условию $G(\varphi, \lambda) \neq 0 \forall \varphi \in [0, 2\pi]$.

Необходимое и достаточное условия.

Определим множество $\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda: G(\varphi, \lambda) \neq 0 \forall \varphi \in [0, 2\pi]\}$. В силу непрерывности функции G множество Λ_0 открыто. Предположим, что множество Λ_0 не пусто. Для $\lambda \in \Lambda_0$ введём числовую характеристику системы (2.1.5)

$$\chi(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{F(\varphi, \lambda)}{G(\varphi, \lambda)} d\varphi,$$

где

$$F(\varphi, \lambda) = P_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi + Q_m(\cos \varphi, \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi.$$

Из непрерывности функций $G(\varphi, \lambda)$, $F(\varphi, \lambda)$ по совокупности переменных следует, что $\chi(\lambda)$ также является непрерывной функцией на множестве Λ_0 .

Лемма 2.1.4. Пусть при $\lambda \in \Lambda_0$ решение $(x(t), y(t))$ системы уравнений (5) удовлетворяет условиям $(x(t), y(t)) \neq \rho(x(0), y(0))$ при всех $\rho > 0$,

$0 < t < T$ и $(x(T), y(T)) = \rho_0(x(0), y(0))$, $\rho_0 > 0$. Тогда имеет место равенство $\rho_0 = e^{\chi(\lambda)}$.

Следующая теорема даёт необходимое условие бифуркации.

Теорема 2.1.1. Если система уравнений (2.1.5) имеет единственное стационарное решение $(0,0)$ и число $\lambda_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением для динамической системы (2.1.1), то $\lambda_0 \in \Lambda_0$ и $\chi(\lambda_0) = 0$.

В пространстве $C[0, 2\pi]$ непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ функций рассмотрим вполне непрерывное векторное поле

$$(\Phi_\lambda u)(\varphi) = u(\varphi) - u(2\pi) - \int_0^\varphi u(s)R(u(s), s, \lambda) ds,$$

где функция $R(u, s, \lambda)$ определена равенствами

$$R(u, s, \lambda) = F(s, \lambda)/G(s, \lambda) \quad \text{при } u = 0,$$

$$R(u, s, \lambda) = \frac{|u|^m F(s, \lambda) + f(|u|, s, \lambda)}{|u|^m G(s, \lambda) + g(|u|, s, \lambda)} \quad \text{при } u \neq 0,$$

и

$$f(\rho, s, \lambda) = p(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi + q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi,$$

$$g(\rho, s, \lambda) = q(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \cos \varphi - p(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \lambda) \sin \varphi.$$

Для произвольного значения $\lambda \in \Lambda_0$ существует $r_0 = r_0(\lambda) > 0$ такое, что

$$\inf\{|G(s, \lambda) + \rho^{-m}g(\rho, s, \lambda)|: 0 < \rho \leq r_0, s \in [0, 2\pi]\} > 0.$$

Поэтому при $\lambda \in \Lambda_0$ функция $R(u, s, \lambda)$ определена и непрерывна на множестве $\{(u, s): |u| \leq r_0, s \in [0, 2\pi]\}$. Следовательно, векторное поле Φ_λ определено в шаре радиуса r_0 пространства $C[0, 2\pi]$ с центром в нуле. В силу 2π -периодичности функции $R(u, s, \lambda)$ по переменной s , нули поля Φ_λ являются 2π -периодическими решениями дифференциального уравнения

$$u' = uR(u, \varphi, \lambda). \quad (2.1.6)$$

Отметим некоторые свойства решения скалярного уравнения (2.1.6). Если $u(\varphi)$ решение уравнения (2.1.6) и $|u(\varphi)| \leq r_0(\lambda)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, то $(-u(\varphi))$ также решение, причем $u(\varphi) \neq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, если $u(\varphi)$ не равна нулю тождественно. Пусть $u_0(\varphi)$ является 2π -периодическим решением

уравнения (2.1.6) и $0 < u_0(\varphi) \leq r_0(\lambda)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Обозначим через $\varphi_0(t)$ решение уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{u_0^m(\varphi)G(\varphi, \lambda) + g(u_0(\varphi), \varphi, \lambda)}{u_0(\varphi)},$$

удовлетворяющее условию $\varphi(0) = 0$. Тогда пара функций

$$x(t) = u_0(\varphi_0(t)) \cos \varphi_0(t), \quad y(t) = u_0(\varphi_0(t)) \sin \varphi_0(t)$$

является периодическим решением системы уравнений (2.1.1) периода

$$T = \pm \int_0^{2\pi} \frac{u_0(s) ds}{u_0^m(s)G(s, \lambda) + g(u_0(s), s, \lambda)}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.1.5. Пусть $\lambda \in \Lambda_0$ и $\chi(\lambda) \neq 0$. Тогда нуль θ пространства $C[0, 2\pi]$ является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля Φ_λ , и для ее индекса $\gamma(\Phi_\lambda, \theta)$ справедлива формула

$$\gamma(\Phi_\lambda, \theta) = -\text{sign} \chi(\lambda).$$

Следующая теорема даёт достаточное условие бифуркации.

Теорема 2.1.2. Пусть $\lambda_0 \in \Lambda_0$ и существуют последовательности положительных чисел δ_n^+ , δ_n^- , $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$(\lambda_n - \delta_n^-, \lambda_n + \delta_n^+) \subset \Lambda_0, \chi(\lambda_0 - \delta_n^-) \cdot \chi(\lambda_0 + \delta_n^+) < 0,$$

и $\delta_n^+ \rightarrow 0$, $\delta_n^- \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда λ_0 является бифуркационным значением для динамической системы (2.1.1).

Пример 2.1.1. Пусть $m = 3$ и

$$P_m(x, y, \lambda) = \frac{y(x^2 + y^2)^2 + x\tilde{P}(x, y, \lambda)}{x^2 + y^2}, \quad Q_m(x, y, \lambda) = \frac{x(x^2 + y^2)^2 + y\tilde{P}(x, y, \lambda)}{x^2 + y^2},$$

где

$$\tilde{P}(x, y, \lambda) = x^4 + a(\lambda)x^3y + b(\lambda)x^2y^2 + c(\lambda)xy^3 + d(\lambda)y^4$$

с непрерывными коэффициентами $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ и $d(\lambda)$ на множестве Λ .

Тогда для функции $\chi(\lambda)$ справедлива следующая формула

$$\chi(\lambda) = -\frac{\pi}{4}(3 + 3d(\lambda) + b(\lambda)), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Заметим, что в полученной формуле коэффициенты $a(\lambda)$, $c(\lambda)$ не участвуют. Для определения бифуркационных значений находим нули функ-

ции $3 + 3d(\lambda) + b(\lambda)$, затем в окрестности каждого нуля выясняем смену знака этой функции.

Пример 2.1.2. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$x'' + a(\lambda)x' + b(\lambda)x + c(\lambda)|x'| = f(x, x', \lambda), \quad (2.1.7)$$

где коэффициенты $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ непрерывные функции на множестве Λ , а функция $f(x, y, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных $(x, y, \lambda) \in R^2 \times \Lambda$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow 0} \sup_{\lambda \in \Lambda} |f(x, y, \lambda)| = 0.$$

Уравнение (2.1.7) эквивалентно системе (2.1.1) с правыми частями $P = P_1 + p$ и $Q = Q_1 + q$, где

$$\begin{aligned} P_1(x, y, \lambda) &= y, & Q_1(x, y, \lambda) &= -(a(\lambda)y + b(\lambda)x + c(\lambda)|y|), \\ p(x, y, \lambda) &\equiv 0, & q(x, y, \lambda) &= f(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

Отметим, что в этом случае соответствующая системе (2.1.5) функция G имеет вид

$$\begin{aligned} G(\varphi, \lambda) &= -[\sin^2 \varphi + a(\lambda) \sin \varphi \cos \varphi + b(\lambda) \cos^2 \varphi + \\ &\quad c(\lambda)|\sin \varphi| \cos \varphi]. \end{aligned}$$

Для функции G множество Λ_0 и соответствующая функция $\chi(\lambda)$ на этом множестве определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \{ \lambda: 4b(\lambda) > (|a(\lambda)| + |c(\lambda)|)^2 \}, \\ \chi(\lambda) &= -\pi \left(\frac{a(\lambda) + c(\lambda)}{\sqrt{4b(\lambda) - (a(\lambda) + c(\lambda))^2}} + \frac{a(\lambda) - c(\lambda)}{\sqrt{4b(\lambda) - (a(\lambda) - c(\lambda))^2}} \right), \lambda \in \Lambda_0. \end{aligned}$$

Лемма 2.1.6. Функция $\chi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_0$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $a(\lambda) = 0$, причём $\chi(\lambda)a(\lambda) < 0$ при $a(\lambda) \neq 0$, $\lambda \in \Lambda_0$.

Применяя теоремы 2.1.1 и 2.1.2, выводим:

Теорема 2.1.3. Пусть число $\lambda_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением для динамической системы, соответствующей уравнению (2.1.7). Тогда $4b(\lambda_0) > (c(\lambda_0))^2$ и $a(\lambda_0) = 0$.

Теорема 2.1.4. Пусть

$$\lambda_0 \in \Lambda_0 := \{ \lambda: 4b(\lambda) > (|a(\lambda)| + |c(\lambda)|)^2 \},$$

и существуют последовательности положительных чисел $\delta_n^+, \delta_n^-, n = 1, 2, \dots$ такие, что

$$(\lambda_n - \delta_n^-, \lambda_n + \delta_n^+) \subset \Lambda_0, \quad a(\lambda_0 - \delta_n^-) \cdot a(\lambda_0 + \delta_n^+) < 0$$

и $\delta_n^+ \rightarrow 0, \delta_n^- \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда λ_0 является бифуркационным значением для динамической системы, соответствующей уравнению (2.1.7).

В заключении отметим, что изложенные выше методы анализа о точках бифуркации задачи о периодическом решении в окрестности нулевого стационарного решения, по существу, без изменений, переносятся для исследования «рождения» (при изменении параметра) периодических решений большой нормы.

2.2. Приложение принципа смены индекса к исследованию бифуркации Андронова – Хопфа

В теории бифуркации исследуется качественное поведение решение динамических систем при изменении параметров. Основная идея в теории бифуркации Андронова-Хопфа заключается в том, что если система дифференциальных уравнений зависит от параметра, то при изменении этого параметра решения системы могут изменять свое поведение. При определенных значениях параметра могут происходить бифуркации, то есть качественные изменения поведения решений.

В частности, теорема Андронова-Хопфа устанавливает, что при определенных условиях (например, при наличии особой точки) при изменении параметра системы могут появляться циклические решения, которые ранее отсутствовали. Это явление называется бифуркацией Андронова-Хопфа.

«Для автономной системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{2.2.1}$$

приведена классическая теорема Хопфа в работе [57]. Здесь $x \in R^n, \mu \in \Lambda \subset R$, а $F(x, \mu)$ – непрерывно – дифференцируемая вектор – функция по совокупности переменных x, μ . Предполагается, что система дифференциальных

уравнений (2.2.1) допускает аналитическое семейство $x = x(\mu)$ состояний равновесия, т.е. $F(x(\mu), \mu) = 0$. Производя замену, без ограничения общности можно предполагать, что $x(\mu) \equiv 0$, то есть $F(0, \mu) \equiv 0$. Предположим, что при некотором $\mu = \mu_0$, (например, при $\mu_0 = 0$), матрица Якоби $F_x(0, \mu_0)$ имеет два чисто мнимых простых собственных значения $\pm i\beta$ и не существуют других собственных значений матрицы $F_x(0, \mu_0)$, кратных $i\beta$. Пусть $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ является продолжением по параметру μ собственного значения $i\beta$. Предполагается, что $\alpha'(0) \neq 0$ » [57].

Теорема (теорема Хопфа). *При сформулированных условиях существуют непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε , $\mu(0) = 0, T(0) = 2\pi\beta^{-1}$ и такие, что у уравнения (2.2.1) существуют ненулевые периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, которые удовлетворяют условию*

$$\alpha(\varepsilon) = \max_t |x(t, \varepsilon)| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ниже исследуется бифуркация Хопфа [47], когда $n = 3$ при менее ограничительных условиях на функцию $F(x, \mu)$. Предположим, что $F(x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных, $F(0, \mu) \equiv 0$ и имеет место представление

$$F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu), \quad (2.2.2)$$

где $A(\mu) = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3$ – квадратная матрица, а $\omega(x, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0, \quad (2.2.3)$$

равномерно относительно μ . Отметим, что из непрерывности по совокупности переменных функции $F(x, \mu)$, представления (2.2.2) и условия (2.2.3) следует, что матрица $A(\mu)$ – непрерывно зависит от μ , а $\omega(x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных. В отличие от условий Хопфа, где предполагается, что функция $F(x, \mu)$ – дифференцируема по совокупности переменных

x, μ , нам достаточно условие непрерывности правой части системы по совокупности переменных.

Предположим, что спектр $\sigma(A(\mu))$ матрицы $A(\mu)$ имеет представление $\sigma(A(\mu)) = \{\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu), \gamma(\mu)\}$, где $\beta(\mu) \neq 0, \gamma(\mu) \neq 0, \mu \in \Lambda$. В силу непрерывной зависимости матрицы $A(\mu)$ от параметра μ , при значениях μ , близких к μ_0 , существует $\varepsilon > 0$ такое, что при $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ имеют место неравенства $|\beta(\mu) - \beta(\mu_0)| < \frac{1}{2}\beta(\mu_0), |\gamma(\mu) - \gamma(\mu_0)| < \frac{1}{2}|\gamma(\mu_0)|, |\alpha(\mu)| < \frac{1}{2}|\gamma(\mu)|$.

При этих условиях дифференцируемость собственного значения $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ матрицы $A(\mu)$ по параметру μ не гарантирована. Поэтому условие $\alpha'(\mu_0) \neq 0$, предполагаемое в формулировке теоремы Хопфа, заменяется на условие существования последовательности чисел $\delta_k^+ > 0, \delta_k^- > 0$, стремящихся к нулю при $k \rightarrow \infty$ таких, что $\alpha(\mu_0 - \delta_k^-)\alpha(\mu_0 + \delta_k^+) < 0, k = 1, 2, \dots$. Ниже это условие получаем непосредственно через элементы матрицы $A(\mu)$.

Система уравнений (2.2.1), в силу условий (2.2.2), (2.2.3) при всех $\mu \in \Lambda$ имеет изолированное нулевое стационарное (периодическое, любого периода) решение. Нас интересует множество предельных точек Λ^* последовательностей $\mu_k \in \Lambda, k = 1, 2, \dots$ для которых система (2.2.1) при $\mu = \mu_k$ имеет ненулевые периодические решения $x_k(t)$, удовлетворяющие условию:

$$\max_t |x_k(t)| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Отметим, что если $\mu_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением [41] Андронова - Хопфа, то спектр $\sigma(A(\mu_0))$ матрицы $A(\mu_0)$ содержит пару чисто мнимых и одно вещественное собственное значение: $\sigma(A(\mu_0)) = \{\pm i\beta_0, \gamma_0\}$. Эти условия эквивалентны тому, что коэффициенты характеристического уравнения матрицы $A(\mu)$

$$\lambda^3 + a_1(\mu)\lambda^2 + a_2(\mu)\lambda + a_3(\mu) = 0, \quad (2.2.4)$$

при $\mu = \mu_0$ удовлетворяют условиям $a_1(\mu_0) = -\gamma_0, a_2(\mu_0) = \beta_0^2, a_3(\mu_0) = -\beta_0^2\gamma_0$. Здесь $a_1(\mu) = -(a_{11}(\mu) + a_{23}(\mu) + a_{33}(\mu)), a_2(\mu) = a_{11}(\mu)a_{22}(\mu) - a_{12}(\mu)a_{21}(\mu) + a_{11}(\mu)a_{33}(\mu) - a_{13}(\mu)a_{31}(\mu) + a_{22}(\mu)a_{33}(\mu) - a_{23}(\mu)a_{32}(\mu), a_3(\mu) = -\det A(\mu)$.

Следовательно, если $\gamma_0 \neq 0$, то выполняются следующие условия

$$a_3(\mu) = a_1(\mu)a_2(\mu), \quad a_2(\mu) > 0, a_1(\mu) \neq 0, \text{ при } \mu = \mu_0.$$

Обозначим

$$\Delta(\mu) = a_3(\mu) - a_1(\mu)a_2(\mu). \quad (2.2.5)$$

Теорема 2.2.2. Пусть $\Delta(\mu_0) = 0, a_1(\mu_0) \neq 0, a_2(\mu_0) > 0$ и существуют такие числа $\delta_k^+ > 0, \delta_k^- > 0$, стремящиеся к нулю, при $k \rightarrow \infty$, что $\Delta(\mu_0 - \delta_k^-)\Delta(\mu_0 + \delta_k^+) < 0, k = 1, 2, \dots$. Тогда точка $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа для системы (2.2.1).

Согласно теореме Жордана существует невырожденная матрица $U(\mu)$, непрерывно зависящая от μ , такая, что

$$U^{-1}(\mu)A(\mu)U(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) & 0 \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(\mu) \end{pmatrix}.$$

С помощью линейной замены $x = U(\mu)y$ систему (2.2.1) приведем к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 + \beta(\mu)y_2 + f_1(y, \mu), \\ \dot{y}_2 = -\beta(\mu)y_1 + \alpha(\mu)y_2 + f_2(y, \mu), \\ \dot{y}_3 = \gamma(\mu)y_3 + f_3(y, \mu). \end{cases} \quad (2.2.6)$$

В системе (2.2.6) произведем замену искомых функций

$$y_1(t) = r(t) \cos \varphi(t), y_2(t) = r(t) \sin \varphi(t), y_3(t) = r(t)v(t), 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

получим

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \alpha(\mu)r + f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -\beta(\mu) - \frac{1}{r}[f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi], \\ \frac{dv}{dt} = [\gamma(\mu) - \alpha(\mu)]v - \frac{v}{r}[f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi] + \frac{1}{r}f_3, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Здесь $f_j = f_j(r \cos \varphi, r \sin \varphi, rv, \mu), j = 1, 2, 3$.

Если для решения $(y_1(t), y_2(t), y_3(t))$ системы (2.2.6) при данном значении μ , правая часть второго уравнения системы (2.2.7) не равна нулю при всех t , исключим независимую переменную t из системы (2.2.7) и получим

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\varphi} = R_1(r, v, \varphi, \mu), \\ \frac{dv}{d\varphi} = R_2(r, v, \varphi, \mu), \end{cases} \quad (2.2.8)$$

где

$$R_1(r, v, \varphi, \mu) = \frac{\alpha(\mu)r + f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi}{-\beta(\mu) - \frac{1}{r} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi]},$$

$$R_2(r, v, \varphi, \mu) = \frac{[\gamma(\mu) - \alpha(\mu)]v - \frac{v}{r} [f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi] + \frac{1}{r} f_3}{-\beta(\mu) - \frac{1}{r} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi]}.$$

Отметим, что в силу условия (2.2.3), для любого $v_0 > 0$ существует $r_0 > 0$ такое, что функции $R_1(r, v, \varphi, \mu)$, $R_2(r, v, \varphi, \mu)$ определены и непрерывны в области $0 \leq r \leq r_0$, $|v| \leq v_0$, $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$, $\varphi \in R$.

2.2.1. Нечётное продолжение и построение области в пространстве $C[0, 2\pi]$

Известно, что по определению величина r принимала неотрицательные значения.

В дальнейшем, нам удобно расширить область определения $R_1(r, v, \varphi, \mu)$, $R_2(r, v, \varphi, \mu)$. А именно при $-r_0 \leq r \leq 0$ полагая $R_1(r, v, \varphi, \mu) = -R_1(-r, v, \varphi, \mu)$, $R_2(r, v, \varphi, \mu) = 2R_2(0, v, \varphi, \mu) - R_2(-r, v, \varphi, \mu)$, получим непрерывное продолжение функции $R_1(r, v, \varphi, \mu)$, $R_2(r, v, \varphi, \mu)$ в области $|r| \leq r_0$, $|v| \leq v_0$, $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$, $\varphi \in R$.

«Задача о существовании 2π –периодических решений системы (2.2.8) эквивалентна существованию решения интегральных уравнений вида

$$\begin{cases} r(\varphi) = r(2\pi) + \int_0^\varphi R_1(r, v, s, \mu) ds, \\ v(\varphi) = v(2\pi) + \int_0^\varphi R_2(r, v, s, \mu) ds, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

в пространстве $C[0, 2\pi]$.» [42], [46].

Введём в рассмотрение семейство вполне непрерывных векторных полей

$$(\Phi(r, v, \mu)(\varphi)) = \begin{cases} r(\varphi) - r(2\pi) - \int_0^\varphi R_1(r, v, s, \mu) ds \\ v(\varphi) - v(2\pi) - \int_0^\varphi R_2(r, v, s, \mu) ds \end{cases}, \quad (2.2.10)$$

на границе области

$$\begin{aligned} S(\delta_0, v_0) &= \{(r(\varphi), v(\varphi)): \|r(\varphi)\| \leq \delta_0, \|v(\varphi)\| \leq v_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \\ &\subset C[0, 2\pi], \end{aligned}$$

здесь « $C[0, 2\pi]$ пространство вектор – функций, непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$, $\|\cdot\|$ -норма в пространстве непрерывных функций» [71, 72].

2.2.2. Вычисление вращения вполне непрерывного векторного поля

На границе $\dot{S}(\delta_0, v_0)$ ограниченной области $S(\delta_0, v_0) \subset C[0, 2\pi]$ рассмотрим векторное поле (2.2.10).

Лемма 2.2.1. *Предположим, что $\alpha(\mu) \neq 0$, $\beta(\mu) \neq 0$, $\gamma(\mu) \neq 0$, $\gamma(\mu) \neq \alpha(\mu)$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $0 \leq \lambda \leq 1$ и $(r(\varphi), v(\varphi)) \in \dot{S}(\delta_0, v_0)$, выполняется $(\Phi_\lambda(r, v, \mu))(\varphi) \neq 0$,*

где

$$(\Phi_\lambda(r, v, \mu)(\varphi)) = \begin{cases} r(\varphi) - r(2\pi) - \int_0^\varphi R_{1\lambda}(r(s), v(s), s, \mu) ds \\ v(\varphi) - v(2\pi) - \int_0^\varphi R_{2\lambda}(r(s), v(s), s, \mu) ds \end{cases}. \quad (2.2.11)$$

Здесь

$$R_{1\lambda}(r, v, \varphi, \mu) = \frac{\alpha(\mu)r + \lambda(f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi)}{-\beta(\mu) - \frac{\lambda}{r}[f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi]},$$

$$R_{2\lambda}(r, v, \varphi, \mu) = \frac{[\gamma(\mu) - \alpha(\mu)]v - \frac{\lambda}{r}[f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi] + \frac{\lambda}{r}f_3}{-\beta(\mu) - \frac{\lambda}{r}[f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi]}.$$

Из леммы 2.2.1 вытекает, что нуль является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля (2.2.10) и векторные поля $\Phi_1(r, v, \mu)(\varphi)$ и $\Phi_0(r, v, \mu)(\varphi)$ гомотопны. Тогда их вращения одинаковы. Вычислим вращение поля

$$(\Phi_0(r, v, \mu)(\varphi)) = \begin{pmatrix} r(\varphi) - r(2\pi) - \int_0^\varphi a(\mu)r(s)ds \\ v(\varphi) - v(2\pi) - \int_0^\varphi b(\mu)v(s)ds \end{pmatrix},$$

где

$$a(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{-\beta(\mu)} \neq 0, \quad b(\mu) = \frac{\gamma(\mu) - \alpha(\mu)}{-\beta(\mu)} \neq 0.$$

Векторное поле $(\Phi_0(r, v, \mu)(\varphi))$ перепишем в более общем виде

$$(\Phi_0 x)(\varphi) = x(\varphi) - x(2\pi) - \int_0^\varphi B(\mu)x(s)ds,$$

где $B(\mu) = (b_{ij}(\mu))$, $i, j = 1, 2$ – квадратная матрица, $x(\varphi) = (r(\varphi), v(\varphi))^T$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Линейное векторное поле $(\Phi_0 x)(\varphi)$ на границе $\dot{S}(\delta_0, v_0)$ не равно нулю. «Отсюда следует, что определено его вращение $\gamma(\Phi_0, \dot{S})$ и оно совпадает с индексом $ind_\theta(\Phi_0)$ нулевой особой точки» [46]. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.2.2. Пусть $it \notin \sigma(B)$, $t \in Z$, тогда $(\Phi_0 x)(\varphi) \neq 0$ для любой ненулевой функции $x(\varphi) \in C[0, 2\pi]$ и $\gamma(\Phi_0, \dot{S}) = ind_\theta(\Phi_0) = sign(det B)$.

Приведем схему доказательства теоремы 2.2.2. Из обозначения (2.2.5) имеем

$$\Delta(\mu) = 2\alpha(\mu) [\beta^2(\mu) + (\alpha(\mu) + \gamma(\mu))^2].$$

Отсюда, полагая $\mu = \mu_k^- \equiv \mu_0 - \delta_k^-$ и $\mu = \mu_k^+ \equiv \mu_0 + \delta_k^+$, в силу условий $\Delta(\mu_k)\Delta(\mu_k') < 0$, имеем $\alpha(\mu_k)\alpha(\mu_k') < 0, k = 1, 2, 3 \dots$

В условиях леммы 2.2.1 при $\mu = \mu_k^-$ и $\mu = \mu_k^+$ выберем общее $\delta_k > 0$ такое, что в силу леммы 2.2.2

$$\gamma\left(\Phi(r, v, \mu_k^-), \dot{S}(\delta_k, v_0)\right) = \text{sign}[\alpha(\mu_k^-)(\gamma(\mu_k^-) - \alpha(\mu_k^-))],$$

$$\gamma\left(\Phi(r, v, \mu_k^+), \dot{S}(\delta_k, v_0)\right) = \text{sign}[\alpha(\mu_k^+)(\gamma(\mu_k^+) - \alpha(\mu_k^+))].$$

Из этих равенств следует, что при достаточно больших k векторные поля $\Phi(r, v, \mu_k)$ и $\Phi(r, v, \mu_k')$ не гомотопны на $\dot{S}(\delta_k, v_0)$. Поэтому существуют $\mu_k \in (\mu_k^-, \mu_k^+)$ и $(r_k(\varphi, \mu_k), v_k(\varphi, \mu_k)) \in \dot{S}(\delta_k, v_0)$ такие, что $\Phi(r_k, v_k, \mu_k)(\varphi) = 0$. Таким образом, нами получено существование 2π -периодического решения $(r_k(\varphi, \mu_k), v_k(\varphi, \mu_k)) \in \dot{S}(\delta_k, v_0)$ дифференциального уравнения (2.2.8).

Таким образом, смена знака $\Delta(\mu)$ в окрестности значения $\mu_0 \in \Lambda$ обеспечивает бифуркацию периодических решений динамической системы (2.2.1). Ниже на рисунке приведена геометрическая иллюстрация доказательства теоремы 2.2.2.

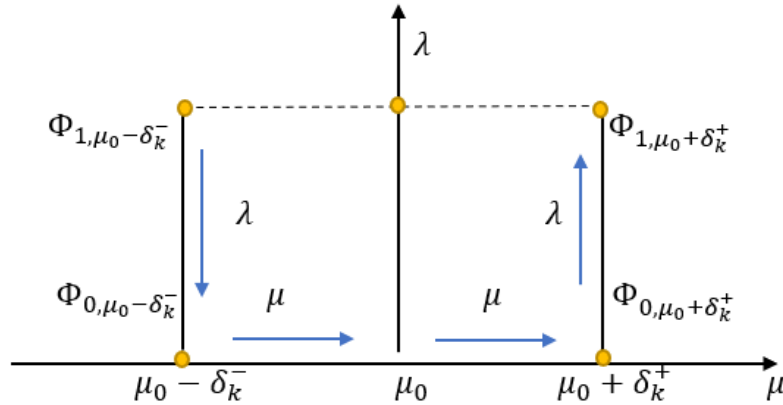


Рисунок 2.2.1 – Гомотопия вполне непрерывных векторных полей (составлено автором)

2.3. Топологические методы доказательства теоремы Андронова - Хопфа о бифуркации

В теории бифуркации исследуется качественное поведение решение динамических систем при изменении параметров. Основная идея в теории

бифуркации Андронова-Хопфа заключается в том, что если система дифференциальных уравнений зависит от параметра, то при изменении этого параметра решения системы могут изменять свое поведение. При определенных значениях параметра могут происходить бифуркации, то есть качественные изменения поведения решений.

В частности, теорема Андронова-Хопфа устанавливает, что при определенных условиях (например, при наличии особой точки) при изменении параметра системы могут появляться циклические решения, которые ранее отсутствовали. Это явление называется бифуркацией Андронова-Хопфа.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (2.3.1)$$

где $F(x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных и имеет место представление

$$F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu), \quad (2.3.2)$$

где $A(\mu) = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ – квадратная матрица, а $\omega(x, \mu)$ удовлетворяет условию

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0, \quad (2.3.3)$$

равномерно относительно μ . Отметим, что из непрерывности по совокупности переменных функции $F(x, \mu)$, представления (2.3.2) и условия (2.3.3) следует, что матрица $A(\mu)$ – непрерывно зависит от μ , а $\omega(x, \mu)$ непрерывна по совокупности переменных. В отличие от условий Хопфа, где предполагается, что функция $F(x, \mu)$ – дифференцируема по совокупности переменных x, μ , нам достаточно условие непрерывности правой части системы по совокупности переменных.

«Определение. Число $\mu_0 \in \Lambda$ называют бифуркационным значением Андронова - Хопфа для динамической системы (2.3.1), если существуют число $T_0 > 0$ и последовательности $\mu_k \in \Lambda, T_k > 0, k = 1, 2, \dots$ такие, что при каждом $\mu = \mu_k, k = 1, 2, \dots$ система уравнений (2.3.1) имеет ненулевое T_k -периодическое решение $x_k(t)$ и при $k \rightarrow \infty$ имеют место

$$\mu_k \rightarrow \mu_0, \max_t |x(t, \mu_k)| \rightarrow 0, T_k \rightarrow T_0 \gg [57].$$

Нас интересует вопрос существования $\mu_0 \in \Lambda$ которая является точкой бифуркации Андронова – Хопфа для системы (2.3.1).

Необходимая условия существования бифуркации Андронова – Хопфа.

Лемма 2.3.1. Пусть точка $\mu_0 \in \Lambda$ является бифуркационным значением Андронова – Хопфа для уравнения (2.3.1) и $\det(A(\mu_0)) \neq 0$. Тогда $\sigma(A(\mu_0))$ содержит пара чисто мнимых собственных значение $\pm i\beta_0$, $\beta_0 > 0$.

Предполагаем, что $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ является собственным значением матрицы $A(\mu)$ и при $\mu = \mu_0$, $\alpha(\mu_0)=0$, $\beta(\mu_0) = \beta_0 > 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$, существуют такие $\mu', \mu'' \in [\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$, что $\alpha(\mu_0 - \varepsilon)\alpha(\mu_0 + \varepsilon) < 0$.

В дальнейшем предполагаем, что матрица $A(\mu)$ удовлетворяет следующим условиям:

Существуют непрерывная ненулевая функция $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ и непрерывные ненулевые вектор-функции $h^1(\mu), h^2(\mu)$, определенные при $|\mu - \mu_0| \leq \delta_0$, такие что

$$\begin{cases} A(\mu)h^1(\mu) = \alpha(\mu)h^1(\mu) - \beta(\mu)h^2(\mu), \\ A(\mu)h^2(\mu) = \beta(\mu)h^1(\mu) + \alpha(\mu)h^2(\mu). \end{cases}$$

В силу условия $\beta_0 > 0$, векторы $h^1(\mu), h^2(\mu)$ линейно независимые. Пусть $h^3, h^4, \dots, h^n$ линейно независимые векторы такие что $h^1(\mu_0), h^2(\mu_0), h^3(\mu_0), \dots, h^n(\mu_0)$ образует базис в пространстве R^n . Так как векторы $h^1(\mu), h^2(\mu), h^3, \dots, h^n$ линейно независимые, то тогда базис в пространстве R^n имеет вид

$$H(\mu) = (h^1(\mu), h^2(\mu), h^3, \dots, h^n), \quad h^k = \begin{pmatrix} h_1^k \\ h_2^k \\ \vdots \\ h_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Нужно отметить, что $\det(H(\mu)) \neq 0$. Теперь вычисляем матрицу $A(\mu)H(\mu)$

$$A(\mu)H(\mu) = (A(\mu)h^1(\mu), A(\mu)h^2(\mu), \dots, A(\mu)h_n),$$

здесь

$$A(\mu)h^k = \sum_{i=1}^n b_{ik}(\mu)h^i, \quad k = \overline{3, n}.$$

Имеет место утверждение $A(\mu)H(\mu) = H(\mu)B(\mu)$. Здесь

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & \beta(\mu) & b_{13}(\mu) & \dots & b_{1n}(\mu) \\ -\beta(\mu) & \alpha(\mu) & b_{23}(\mu) & \dots & b_{2n}(\mu) \\ 0 & 0 & b_{33}(\mu) & \dots & b_{3n}(\mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & b_{n3}(\mu) & \dots & b_{nn}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Проводя линейную замену $x = H(\mu)y$, уравнение (2.3.1) с правой частью (2.3.2) – (2.3.3) приводим к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = \alpha(\mu)y_1 + \beta(\mu)y_2 + \sum_{j=3}^n b_{1j}(\mu)y_j + f_1(y_1, \dots, y_n, \mu), \\ \dot{y}_2 = -\beta(\mu)y_1 + \alpha(\mu)y_2 + \sum_{j=3}^n b_{2j}(\mu)y_j + f_2(y_1, \dots, y_n, \mu), \\ \dot{y}_3 = \sum_{j=3}^n b_{3j}(\mu)y_j + f_3(y_1, \dots, y_n, \mu), \\ \vdots \\ \dot{y}_n = \sum_{j=3}^n b_{nj}(\mu)y_j + f_n(y_1, \dots, y_n, \mu). \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

Производя замену искомых функций $y_1(t) = z_1(t) \cos \varphi(t)$, $y_2(t) = z_1(t) \sin \varphi(t)$, $y_j(t) = z_1(t)z_{j-1}(t)$, $j = 3, \dots, n$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_1}{dt} = z_1(\alpha + \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi]z_{j-1}) + f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi]z_{j-1} - \frac{1}{z_1} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi], \\ \frac{dz_{k-1}}{dt} = -\alpha z_{k-1} + \sum_{j=3}^n b_{kj}z_{j-1} - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi]z_{j-1}z_{k-1} + \\ + \frac{1}{z_1} [f_k - z_{k-1}(f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi)], \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

здесь $f_j = f_j(z_1 \cos \varphi, z_1 \sin \varphi, z_1 z_2, \dots, z_1 z_{n-1}, \mu)$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Затем в области

$$\left\{ (z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \varphi) : \left| \sum_{k=3}^n (b_{1k} \sin \varphi - b_{2k} \cos \varphi) z_{k-1} + \frac{1}{z_1} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi] \right| < \beta(\mu) \right\},$$

исключая независимую переменную t из системы (2.3.5) имеем

$$\frac{dz_i}{d\varphi} = R_i(z(\varphi), \varphi, \mu), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.3.6)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(z(\varphi), \varphi, \mu) &= \left[z_1 \left(\alpha + \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1} \right) + f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi \right] \cdot \\ &\cdot \left[-\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi] z_{j-1} - \frac{1}{z_1} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi] \right]^{-1}, \\ R_{i-1}(z(\varphi), \varphi, \mu) &= \left[-\alpha z_{i-1} + \sum_{j=3}^n b_{ij} z_{j-1} - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1} z_{i-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z_1} [f_i - z_{i-1} (f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi)] \right] \cdot \\ &\cdot \left[-\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi] z_{j-1} - \frac{1}{z_1} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi] \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{B}(\mu) = \begin{pmatrix} b_{33}(\mu) & b_{34}(\mu) & b_{35}(\mu) & \dots & b_{3n}(\mu) \\ b_{43}(\mu) & b_{44}(\mu) & b_{45}(\mu) & \dots & b_{4n}(\mu) \\ b_{53}(\mu) & b_{54}(\mu) & b_{55}(\mu) & \dots & b_{5n}(\mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n3}(\mu) & b_{n4}(\mu) & b_{n5}(\mu) & \dots & b_{nn}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Далее, рассмотрим матрицу $\frac{1}{\beta(\mu)} (\alpha(\mu) I_{n-1} - \tilde{B}(\mu))$,

$$\tilde{\sigma} = \sigma \left(\frac{1}{\beta(\mu)} (\alpha(\mu) I_{n-1} - \tilde{B}(\mu)) \right), \forall m \in Z, im\beta(\mu) \notin \tilde{\sigma}. \quad (2.3.7)$$

Введем в рассмотрение следующую систему

$$\frac{dz_{i-1}}{d\varphi} = R_{i-1}^0(z(\varphi), \varphi, \mu), \quad i = \overline{3, n}. \quad (2.3.8)$$

Лемма 2.3.2. Пусть выполняется условия (2.3.7). Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что система уравнений (2.3.8) не имеет ненулевых 2π – периодических решений в области $|z(\varphi)| \leq \delta_0$.

Нас интересует условия существования 2π – периодических решений системы (2.3.6). Задача о существовании 2π –периодических решений системы (2.3.6) эквивалентна существованию решения интегральных уравнений вида

$$z_i(\varphi) = z_i(2\pi) + \int_0^\varphi R_i(z_1(s), z_2(s), \dots, z_{n-1}(s), s, \mu) ds, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.3.9)$$

в пространстве $C[0, 2\pi]$ – непрерывных на отрезке $[0, 2\pi]$ вектор – функции $z(\varphi) = (z_1(\varphi), z_2(\varphi), \dots, z_{n-1}(\varphi))$, т.е., существованию нулей вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(z, \mu)(\varphi) = z(\varphi) - z(2\pi) - \int_0^\varphi R(z(s), s, \mu) ds. \quad (2.3.10)$$

Векторное поле (2.3.10) определено в замкнутой области

$$\overline{\Omega(\delta)} = \left\{ (z(\varphi)) : \sum_{j=2}^{n-1} |z_j(\varphi)|^2 \leq \delta_0, \quad \|z_1(\varphi)\| \leq \delta \right\}.$$

Лемма 2.3.3. Пусть $\alpha(\mu) + i\beta(\mu) \in \sigma(A(\mu))$, $\alpha(\mu) \neq 0$, $\beta(\mu) > 0$ и $\pm it \notin \sigma(\alpha(\mu)I_{n-1} - \tilde{B}(\mu))$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Тогда существует $\delta_1 > 0$, такое, что вполне непрерывное векторное поле (2.3.10) удовлетворяет условию: $\Phi_\lambda(z, \mu)(\varphi) \neq 0$, для любого $z(\varphi) \in \dot{\Omega}(\delta_1)$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

Здесь векторное поле $\Phi_\lambda(z, \mu)(\varphi)$ имеет вид

$$\Phi_\lambda(z, \mu)(\varphi) = z(\varphi) - z(2\pi) - \int_0^\varphi R_\lambda(z(s), s, \mu) ds, \quad (2.3.11)$$

где $R_{1,\lambda}(z(\varphi), \varphi, \mu)$ и $R_{i-1,\lambda}(z(\varphi), \varphi, \mu)$, $i \geq 3$ имеет вид

$$R_{1,\lambda}(z(\varphi), \varphi, \mu) = \frac{C_1(z(\varphi), \varphi, \mu)}{D(z(\varphi), \varphi, \mu)}, R_{i-1,\lambda}(z(\varphi), \varphi, \mu) = \frac{C_2(z(\varphi), \varphi, \mu)}{D(z(\varphi), \varphi, \mu)}, i \geq 3.$$

Здесь приняты следующие обозначения для числителей и знаменателей:

$$C_1(z(\varphi), \varphi, \mu) = z_1(\alpha + \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1}) + \lambda(f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi),$$

$$C_2(z(\varphi), \varphi, \mu) = -\alpha z_{i-1} + \sum_{j=3}^n b_{ij} z_{j-1} - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1} z_{i-1} + \\ + \frac{\lambda}{z_1} [f_i - z_{i-1}(f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi)], \quad i \geq 3,$$

$$D(z(\varphi), \varphi, \mu) = -\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi] z_{j-1} - \frac{\lambda}{z_1} [f_1 \sin \varphi - f_2 \cos \varphi].$$

Из леммы 2.3.3 следует, что нуль является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля (2.3.11), и векторные поля $\Phi_1(z, \mu)(\varphi)$ и $\Phi_0(z, \mu)(\varphi)$ гомотопны. Это означает, что их индексы вращения одинаковы. Рассчитаем индекс вращения поля. Рассматривая семейство векторных полей (2.3.11) при $\lambda = 0$, получаем:

$$\Phi_0(z, \mu)(\varphi) = z(\varphi) - z(2\pi) - \int_0^\varphi R_0(z(s), s, \mu) ds, \quad (2.3.12)$$

где

$$R_{1,0}(z(\varphi), \varphi, \mu) = \frac{z_1(\alpha + \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1})}{-\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi] z_{j-1}}, \\ R_{i-1,0}(z(\varphi), \varphi, \mu) = \left[-\alpha z_{i-1} + \sum_{j=3}^n b_{ij} z_{j-1} - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1} z_{i-1} \right] \cdot \\ \cdot \left[-\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi] z_{j-1} \right]^{-1}, \quad i \geq 3.$$

Теперь найдем вращения векторного поля $\Phi_0(z, \mu)(\varphi)$ на границе $\dot{\Omega}(\delta)$.

Лемма 2.3.4. Пусть $\pm im \notin \sigma(\alpha(\mu)I_{n-1} - \tilde{B}(\mu))$, $m \in Z$, тогда $\Phi_0(z, \mu)(\varphi) \neq 0$, для любой функции $z(\varphi) \in C[0, 2\pi]$ и $\text{ind}_\theta(\Phi_0(z, \mu)(\varphi)) = \text{sign}(\det(\alpha(\mu)I_{n-1} - \tilde{B}(\mu)))$.

Вычисление вращения вполне непрерывного векторного поля

Теорема 2.3.1. Пусть $\alpha(\mu) + i\beta(\mu) \in \sigma(A(\mu))$, $\alpha(\mu) \neq 0$, $\beta(\mu) > 0$ и $\pm im\beta(\mu) \notin \sigma(\alpha(\mu)I_{n-1} - \tilde{B}(\mu))$, $\forall m \in Z$. Тогда нулевая точка – изолированная особая точка векторного поля $(\Phi(\rho, z_j, \mu)(\varphi))$ и, следовательно, определен индекс $\gamma((\Phi(\rho, z_j, \mu)(\varphi)), 0)$ и для индекса справедливо

$$\gamma((\Phi(\rho, z_j, \mu)(\varphi)), 0) = \text{sign}(\alpha(\mu) \det(A(\mu))).$$

2.4. Доказательство основных утверждений

Доказательство леммы 2.2.1. От противного, т.е. пусть для любого $\delta > 0$, существует вектор – функция $(r(\varphi), v(\varphi)) \in \dot{S}(\delta, v_0)$, что выполняется $(\Phi_\lambda(r, v, \mu))(\varphi) = 0$.

В частности, $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, тогда существует вектор – функция $(r_n(\varphi), v_n(\varphi))$ из границы $\dot{S}(\frac{1}{n}, v_0)$, что векторное поле $(\Phi_{\lambda_n}(r_n, v_n, \mu))(\varphi)$ равно нулю, т.е.

$$\begin{cases} r_n(\varphi) = r_n(2\pi) + \int_0^\varphi R_{1\lambda_n}(r_n(s), v_n(s), s, \mu) ds, \\ v_n(\varphi) = v_n(2\pi) + \int_0^\varphi R_{2\lambda_n}(r_n(s), v_n(s), s, \mu) ds. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Без ограничения общности можно предполагать, что возможные следующие случаи:

1. Для любого k существует $n > k$, что решение $r_n(\varphi) \not\equiv 0$ или $\|r_n(\varphi)\| > 0$.
2. Существует такое k , что $r_n(\varphi) \equiv 0$ для любого $n > k$.

Первый случай:

Введя обозначение $r_n(\varphi) = \rho_n U_n(\varphi)$, где $U_n(\varphi) = \frac{r_n(\varphi)}{\|r_n(\varphi)\|}$, $\rho_n = \|r_n(\varphi)\|$, имеем

$$U_n(\varphi) = U_n(2\pi) + \int_0^\varphi \frac{R_{1\lambda_n}(\rho_n U_n(s), v_n(s), s, \mu)}{\rho_n} ds, \quad (2.4.2)$$

Здесь подынтегральные функции $R_{1\lambda_n}(\rho_n U_n(\varphi), v_n(\varphi), \varphi, \mu)$ имеют вид

$$R_{1\lambda_n}(\rho_n U_n(\varphi), v_n(\varphi), \varphi, \mu) = \frac{\alpha(\mu)\rho_n U_n(\varphi) + \lambda_n[f_1(*) \cos \varphi + f_2(*) \sin \varphi]}{-\beta(\mu) - \frac{\lambda_n}{\rho_n U_n(\varphi)}[f_1(*) \sin \varphi + f_2(*) \cos \varphi]},$$

где

$$f_j(*) = f_j(\rho_n U_n(\varphi) \cos \varphi, v_n(\varphi) \sin \varphi, \rho_n U_n(\varphi) v_n(\varphi), \mu), j = 1, 2, 3.$$

Отметим, что $U_n(\varphi) > 0, \varphi \in [0, 2\pi]$.

Из определения функции $U_n(\varphi)$, равенства (2.4.2) и представления функции $R_{1\lambda}$ следует, что последовательность функций $U_n(\varphi)$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому в силу теоремы Арцела [93] из последовательности $U_n(\varphi)$ можно выделить подпоследовательность $U_{n_j}(\varphi)$, такую, что $U_{n_j}(\varphi) \rightarrow U^*(\varphi)$, при $j \rightarrow \infty$. Так как

$$U_{n_j}(\varphi) = U_{n_j}(2\pi) + \int_0^\varphi \frac{R_{1\lambda_{n_j}}(\rho_{n_j} U_{n_j}(s), v_{n_j}(s), s, \mu)}{\rho_{n_j}} ds, \quad (2.4.3)$$

и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\rho_{n_j}} R_{1\lambda_{n_j}}(\rho_{n_j} U_{n_j}(s), v_{n_j}(s), s, \mu) + \frac{\alpha(\mu) U_{n_j}(\varphi)}{\beta(\mu)} \right] = 0,$$

то в равенстве (2.4.3) переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$U^*(\varphi) = U^*(2\pi) + \int_0^\varphi a U^*(s) ds, \text{ где } a = -\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}. \quad (2.4.4)$$

Решение уравнения (2.4.4) имеет вид $U^*(\varphi) = e^{a\varphi} U^*(0)$, причем $U^*(0) = U^*(2\pi)$. Но это противоречит условию $a \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что первый случай невозможно.

Второй случай: если $r_n(\varphi) \equiv 0$, то функция $v_n(\varphi)$ удовлетворяет условию $\|v_n(\varphi)\| = v_0, v_0 > 0$ и является решением интегрального уравнения

$$v_n(\varphi) = v_n(2\pi) + \int_0^\varphi R_{2\lambda_n}(\rho_n U_n(s), v_n(s), s, \mu) ds,$$

где

$$R_{2\lambda_n}(\rho_n U_n(\varphi), v_n(\varphi), \varphi, \mu) = \frac{[\gamma(\mu) - \alpha(\mu)]v_n(\varphi)}{-\beta(\mu)}.$$

Следовательно функция $v_n(\varphi)$ является решением линейного интегрального уравнения

$$v_n(\varphi) = v_n(2\pi) + \int_0^\varphi b v_n(s) ds,$$

где

$$b = \frac{\gamma(\mu) - \alpha(\mu)}{-\beta(\mu)}.$$

Решение данного уравнения имеет вид $v_n(\varphi) = e^{b\varphi} v_n(0)$. Так как $v_n(\varphi)$ 2π - периодическая функция и $b \neq 0$, то $v_n(0) = 0$, а это противоречит условию, что $\|v_n(\varphi)\| = v_0, v_0 > 0$. Полученное противоречие докажет, что и второй случай не имеет места. Таким образом лемма 2.2.1 доказано.

Доказательство леммы 2.2.2. Мы выше доказали, что $(\Phi_0 x)(\varphi) \neq 0$, $x(\varphi) \neq 0$. Рассмотрим семейство векторных полей вида

$$(\Phi_\lambda x)(\varphi) = x(\varphi) - x(2\pi) - \int_0^\varphi Bx(s) ds - \lambda \int_\varphi^{2\pi} Bx(s) ds, 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (2.4.5)$$

Покажем, что при всех $0 \leq \lambda \leq 1$ векторное поле (2.4.5) не обращается в ноль для всех ненулевых функций $x(\varphi) \in C[0, 2\pi]$. Действительно, если $(\Phi_\lambda x)(\varphi) \equiv 0$ для некоторого $0 \leq \lambda \leq 1$ и $x(\varphi)$ - ненулевая функция из $C[0, 2\pi]$, т.е

$$x(\varphi) = x(2\pi) + \int_0^\varphi Bx(s) ds + \lambda \int_\varphi^{2\pi} Bx(s) ds, \quad (2.4.6)$$

то в равенстве (2.4.6) последовательно полагая $\varphi = 2\pi$ и затем $\varphi = 0$, имеем

$$\int_0^\varphi Bx(s)ds = 0, x(0) = x(2\pi). \quad (2.4.7)$$

Аналогично предыдущим действиям, дифференцируя, имеем

$$x'(\varphi) = (1 - \lambda)Bx(\varphi). \quad (2.4.8)$$

Здесь анализируем значения λ при $\lambda = 1$ и $\lambda < 1$. Следовательно, имеем:

- а) При $\lambda = 1$, из уравнения (2.4.8) имеем $x(\varphi) \equiv x(0)$. Далее, из первого равенства (2.4.7), следует

$$2\pi Bx(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $x(\varphi) \equiv 0$, что противоречит нашему предположению.

- б) При $0 \leq \lambda < 1$. Из выше приведенных рассуждений следует, что $im \in \sigma((1 - \lambda)B), m \in Z$. А это противоречит условию $im \notin \sigma(B), m \in Z$.

Таким образом, мы доказали, что семейства векторных полей $(\Phi_\lambda x)(\varphi)$ не обращается в нуль на границе любого шара положительного радиуса с центром в нуле пространства $C[0, 2\pi]$. Следовательно, $ind_\theta(\Phi_0) = ind_\theta(\Phi_1)$.

Вычислим индекс $ind_\theta(\Phi_1)$ векторного поля

$$(\Phi_1 x)(\varphi) = x(\varphi) - \left(x(2\pi) + \int_0^{2\pi} Bx(s)ds \right).$$

Оператор $A_1 x = x(2\pi) + \int_0^{2\pi} Bx(s)ds$ векторного поля $(\Phi_1 x)(\varphi)$ действует из пространства $C[0, 2\pi]$ в подпространства постоянных функций. Поэтому в силу леммы Лере–Шаудера индекс $ind_\theta(\Phi_1)$ поля $(\Phi_1 x)(\varphi)$ совпадает с индексом одномерного векторного поля [69]

$$\Psi(u) = -2\pi Bu, \quad u \in R.$$

Так как векторные поля $(\Phi_1 x)(\varphi)$ и $(\Phi_0 x)(\varphi)$ гомотопные, то тогда индекс

$$ind_\theta(\Psi) = \gamma(\Psi) = \gamma(\Phi_0) = sign(det B).$$

Лемма 2.2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.2. Из обозначение (2.2.5) имеем

$$\Delta(\mu) = a_3(\mu) - a_1(\mu)a_2(\mu) = 2\alpha(\mu) \left[\beta^2(\mu) + (\alpha(\mu) + \gamma(\mu))^2 \right], \quad (2.4.9)$$

отсюда следует, что при $\mu_k = \mu_0 - \delta_k^-$, $\mu'_k = \mu_0 + \delta_k^+$, $\Delta(\mu_k)\Delta(\mu'_k) < 0$, следовательно, $\alpha(\mu_k)\alpha(\mu'_k) < 0$, $k = 1, 2, 3 \dots$. Так как из докозательства леммы 2.2.2 видно, что $ind_\theta(\Psi) = \gamma(\Psi) = \gamma(\Phi_0) = sign(ab)$, тогда $a(\mu)b(\mu) = \frac{\alpha(\mu)(\gamma(\mu) - \alpha(\mu))}{\beta^2(\mu)}$, и отсюда следует, что $ind_\theta(\Psi) = \gamma(\Psi) = \gamma(\Phi_0) = sign(\alpha(\mu))$.

На основе леммы 2.2.1 вытекает, что нуль является изолированной особой точкой вполне непрерывного векторного поля (2.2.10) при $\mu_k = \mu_0 - \delta_k^-$, $\mu'_k = \mu_0 + \delta_k^+$ ($k = 1, 2, 3 \dots$), $\delta_k^- \rightarrow 0$, $\delta_k^+ \rightarrow 0$ [47]. Следовательно, определены индексы $ind[0, (\Phi(r, v, \mu_k)(\varphi))]$ и $ind[0, (\Phi(r, v, \mu'_k)(\varphi))]$ векторных полей и $ind[0, (\Phi(r, v, \mu_k)(\varphi))] \neq ind[0, (\Phi(r, v, \mu'_k)(\varphi))]$, тогда число μ_0 называют *точкой смены индекса*.

Так как в силу следствия леммы 2.2.2, $\alpha(\mu_k)\alpha(\mu'_k) < 0$, тогда векторные поля $(\Phi_0(r, v, \mu_k)(\varphi))$, $(\Phi_0(r, v, \mu'_k)(\varphi))$ не гомотопны на $\dot{S}(\delta_0, v_0)$ при всех достаточно малых и положительных $\delta_0 > 0$, $v_0 > 0$. Поэтому $\exists \mu': \mu' \in [\mu_k, \mu'_k]$, для которых $\exists (r(\varphi, \mu'), v(\varphi, \mu')) \in \dot{S}(\delta_0, v_0)$, при которых $(\Phi_0(r, v, \mu')(\varphi)) = 0$. Это означает, что векторное поле имеет нуль на границе. Таким образом, нами получено существование решений $(r(\varphi, \mu'), v(\varphi, \mu')) \in \dot{S}(\delta_0, v_0)$ для (2.2.8). Нули этого векторного поля будут 2π - периодическими решениями скалярного дифференциального уравнения (2.2.8).

Доказательство леммы 2.3.2. От противного. Пусть существует решение $z^k(\varphi)$, такое, что $0 < \|z^k(\varphi)\|_{C[0, 2\pi]} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ и $z^k(2\pi) = z^k(0)$. Далее, обозначая через $r^k = \|z^k(\varphi)\|_{C[0, 2\pi]}$, $z^k(\varphi) = r^k W^k$, имеем

$$\frac{dW^k}{d\varphi} = \frac{(\tilde{B}(\mu) - \alpha(\mu) I_{n-1})W^k(\varphi) - r^k Q(W^k(\varphi))}{-\beta(\mu) + r^k \sum_{j=3}^n [b_{2j} \cos \varphi - b_{1j} \sin \varphi] W_{j-1}^k(\varphi)}.$$

Здесь $\|W^k(\varphi)\|_{C[0,2\pi]} = 1$.

Интегрируя, имеем

$$W^k(\varphi) - W^k(0) = \int_0^\varphi \frac{(\tilde{B}(\mu) - \alpha(\mu) I_{n-1})W^k(s) - r^k Q(W^k(s))}{-\beta(\mu) + r^k \sum_{j=3}^n [b_{2j} \cos \varphi - b_{1j} \sin \varphi] W_{j-1}^k(s)} ds$$

Из определения функций $W^k(\varphi)$ и представления функций $R_{i-1}^0(r^k W^k(\varphi), \varphi, \mu)$ следует, что последовательность функций $W^k(\varphi)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому в силу теоремы Арцела из последовательности $W^k(\varphi)$ можно выделить подпоследовательность $W_j^k(\varphi)$, такую, что $W_j^k(\varphi) \rightarrow W^*(\varphi)$, при $j \rightarrow \infty$.

$$W^*(\varphi) - W^*(0) = -\frac{1}{\beta(\mu)} \int_0^\varphi (\tilde{B}(\mu) - \alpha(\mu) I_{n-1}) W^*(s) ds.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dW^*(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{\beta(\mu)} (\alpha(\mu) I_{n-1} - \tilde{B}(\mu)) W^*(\varphi).$$

Из этого уравнения следует, что $im \in \sigma(\alpha(\mu) I_{n-1} - \tilde{B}(\mu))$, это противоречит условию (2.3.7). Лемма 2.3.2 доказана.

Доказательство леммы 2.3.3. От противного, т.е. пусть для любого $\delta > 0$, существует вектор – функция $z(\varphi) \in \dot{\Omega}(\delta_1)$, что выполняется $\Phi(z, \mu)(\varphi) = 0$.

В частности, $\delta = \delta_k = \frac{1}{k}$, тогда существует вектор – функция $z^k(\varphi) \in \dot{\Omega}(\delta_k)$, такое, что векторное поле $\Phi_{\lambda_k}(z^k, \mu)(\varphi)$ равно нулю, т.е.

$$\begin{cases} \frac{dz_1^k}{d\varphi} = R_{1,\lambda_k}(z_1^k, \dots, z_{n-1}^k, \varphi, \mu), \\ \frac{dz_{i-1}^k}{d\varphi} = R_{i-1,\lambda_k}(z_1^k, \dots, z_{n-1}^k, \varphi, \mu), \end{cases} \quad z^k(2\pi) = z^k(0). \quad (2.4.9)$$

Здесь нужно отметить, что граница области $\dot{\Omega}\left(\frac{1}{k}\right)$ имеет вид

$$a) \quad \max_{\varphi} |z_1^k(\varphi)| = \frac{1}{k} \text{ и } \max_{\varphi} \sqrt{|z_2^k(\varphi)|^2 + \dots + |z_n^k(\varphi)|^2} \leq \delta_0.$$

$$\text{б) } \max_{\varphi} |z_1^k(\varphi)| < \frac{1}{k} \text{ и } \max_{\varphi} \sqrt{|z_2^k(\varphi)|^2 + \dots + |z_n^k(\varphi)|^2} = \delta_0.$$

Без ограничения общности можно предполагать, что возможны следующие случаи:

1. $\max_{\varphi} \sqrt{|z_2^k(\varphi)|^2 + \dots + |z_n^k(\varphi)|^2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty;$
2. $\max_{\varphi} \sqrt{|z_2^k(\varphi)|^2 + \dots + |z_n^k(\varphi)|^2} \geq \delta_* > 0;$

Первый случай: пусть имеет место случай 1), тогда проведя замену $z_1^k(\varphi) = \rho_k W_1^k(\varphi)$, $\rho_k = \|z_1^k(\varphi)\|$ из системы (2.4.9) имеем

$$\frac{dW_1^k}{d\varphi} = R_{1,\lambda_k}(\rho_k W_1^k, z_2^k, \dots, z_{n-1}^k, \varphi, \mu), \quad (2.4.10)$$

Отметим, что $\max_{\varphi} \|W_k(\varphi)\| = 1$. Из определения функций $W_1^k(\varphi)$, уравнения (2.4.10) и представления функций $R_1(\rho_k W_1^k, z_2^k, \dots, z_{n-1}^k, \varphi, \mu)$ следует, что последовательность функции $W_1^k(\varphi)$ равномерно ограничена и равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому в силу теоремы Арцелла [93] из последовательности $W_1^k(\varphi)$ можно выделить подпоследовательность $W_1^{k_j}(\varphi)$, такую, что $W_1^{k_j}(\varphi) \rightarrow W_1^*(\varphi)$, при $j \rightarrow \infty$. Так как

$$\frac{dW_1^{k_j}}{d\varphi} = R_{1,\lambda_k}(\rho_{k_j} W_1^{k_j}, z_2^{k_j}, \dots, z_{n-1}^{k_j}, \varphi, \mu), \quad (2.4.11)$$

и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\rho_{k_j}} R_{1,\lambda_k}(\rho_{k_j} W_1^{k_j}, z_2^{k_j}, \dots, z_{n-1}^{k_j}, \varphi, \mu) + \frac{\alpha(\mu) W_1^{k_j}(\varphi)}{\beta(\mu)} \right] = 0$$

то в равенстве (2.4.11) переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{dW_1^*(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)} W_1^*(\varphi), \quad (2.4.12)$$

Решение данного уравнения имеет вид $W_1^*(\varphi) = e^{-\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}\varphi} W_1^*(0)$. Так как $W_1^*(2\pi) = W_1^*(0)$, тогда $\left(e^{-\frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}\varphi} - 1\right) W_1^*(0) = 0$. Отметим, что $\alpha(\mu) \neq 0$ и $\beta(\mu) > 0$ то $z_1^*(0) = 0$, а это противоречит условию леммы.

Второй случай: так как $\max_{\varphi} |z_1^k(\varphi)| = \frac{1}{k} \rightarrow 0$, при $k \rightarrow \infty$, то

$\max_{\varphi} \sqrt{|z_2^k(\varphi)|^2 + \dots + |z_n^k(\varphi)|^2} \geq \delta_* > 0$ и является решением уравнения

$$\frac{dz_{i-1}^k}{d\varphi} = R_{i-1}^0(z_1^k, \dots, z_{n-1}^k, \varphi, \mu), \quad i \geq 3, \quad (2.4.13)$$

где

$$\begin{aligned} R_{i-1}^0(z_1^k, \dots, z_{n-1}^k, \varphi, \mu) = \\ = \frac{\sum_{j=3}^n b_{ij} z_{j-1}^k - \alpha z_{i-1}^k - z_{i-1}^k \sum_{j=3}^n [b_{1j} \cos \varphi + b_{2j} \sin \varphi] z_{j-1}^k}{-\beta - \sum_{j=3}^n [b_{1j} \sin \varphi - b_{2j} \cos \varphi] z_{j-1}^k}. \end{aligned}$$

Из леммы 2.3.2 вытекает, что уравнения (2.4.13) не имеет ненулевых 2π – периодических решений при $\max_{\varphi} \sqrt{|z_2^k(\varphi)|^2 + \dots + |z_n^k(\varphi)|^2} \geq \delta_* > 0$. Таким образом лемма 2.3.3 доказана.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

В данной главе диссертационной работы исследуются дифференциальные уравнения второго порядка с линией переключения, представляющие собой кусочно-линейные динамические системы, широко используемые при моделировании негладких и гибридных динамических процессов [109-111]. Основное внимание уделяется качественному анализу таких систем, а также изучению условий возникновения и существования периодических решений.

Негладкие модели с кусочно-линейными и модульными нелинейностями широко применяются при описании различных физических, технических и биологических процессов, в которых динамика системы изменяется при достижении определённых пороговых значений фазовых переменных. Наличие линии переключения приводит к нарушению гладкости правой части уравнения, что существенно усложняет как аналитическое, так и численное исследование поведения решений. В частности, для таких систем классические методы теории гладких динамических систем оказываются недостаточными и требуют существенной модификации.

В данной главе рассматривается класс кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка с заданной линией переключения. Для исследуемых моделей проводится качественный анализ фазовых портретов, изучаются особенности траекторий вблизи линии переключения и состояний равновесия. Особое внимание уделяется условиям возникновения предельных циклов и их устойчивости.

Наряду с аналитическим исследованием в главе проводится численный анализ фазовых портретов негладких двумерных систем. Для реализации вычислительных экспериментов и визуализации результатов разработан специализированный программный пакет, предназначенный для численного исследования периодических процессов, построения фазовых портретов и анализа параметров в кусочно-линейных системах. Использование про-

граммных средств позволяет существенно расширить возможности исследования и подтвердить полученные теоретические результаты.

Таким образом, данная глава объединяет методы качественного анализа, приближённые и численные подходы, а также компьютерное моделирование, что обеспечивает всестороннее исследование динамики негладких систем второго порядка с линией переключения и позволяет получить новые научные результаты.

Изложенные в данной главе результаты опубликованы в работах [4-А - 6-А, 9-А, 10-А, 12-А].

3.1. Постановка задачи

«Изучение динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями второго порядка, играет важную роль в теоретической и прикладной математике. Особый интерес вызывают системы дифференциальных уравнений с линией переключения, которые встречаются в различных физических, инженерных и биологических приложениях» [6,15].

«В таких системах поведение траекторий может значительно меняться в зависимости от их расположения относительно линии переключения, что приводит к сложным динамическим эффектам, таким как появление предельных циклов. При исследовании предельных циклов в системах с разрывными правыми частями возникают определённые трудности. Названные трудности, в первую очередь, связаны с поведением решений на линии сшивания и обнаружением точек контакта» [37].

Цель главы заключается в разработке аналитических и численных методов для качественного анализа динамики кусочно-линейных систем. В рамках этого направления рассматриваются два основных типа моделей, отличающихся структурой правой части и механизмом переключения между режимами. Каждому типу посвящён отдельный параграф главы.

В 3.2 исследуется кусочно-линейное дифференциальное уравнение, в котором правая часть зависит от модуля производной, что приводит к сшиванию двух линейных уравнений. Основное внимание уделяется выводу

аналога формулы Лиувилля – Остроградского для таких систем. Приводится разложение решение по экспоненциально – колебательным функциям, осуществляется переход между режимами при пересечении линии переключения, и изучается поведение определителя Вронского при переходе через границу раздела. Получены условия, при которых аналог классической формулы сохраняет свою структуру даже в случае разрывной динамики.

В 3.3 рассматривается другой тип кусочно-линейного уравнения, в котором переключение между линейными режимами осуществляется при пересечении окружности в фазовом пространстве. Здесь основное внимание сосредоточено на возникновении предельного цикла и описании условий его существования. Анализируется процесс сшивания траекторий, исследуется точки контакта с линией переключения, а также поведение траекторий вблизи особых точек. Построены фазовые портреты, иллюстрирующие возможные сценарии устойчивого и неустойчивого поведения. Установлены параметры системы, при которых возникает предельный цикл, и определены условия его устойчивости или неустойчивости. Опираясь на полученные результаты, разработан новый программный комплекс для построения искоемых фазовых портретов. Использован язык программирования Java. В комплексе программ использованы аналитические формулы представления решения линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, в данной главе проводится комплексное исследование двух структурно различных кусочно-линейных систем, направленное на выявление ключевых свойств их динамики, построение фазовых портретов и разработку аналитических методов, адаптированных к разрывной природе правой части. Полученные результаты расширяют классически применяемые методы качественной теории дифференциальных уравнений и могут быть использованы для анализа широкого круга прикладных задач. Следует отметить, что рассмотренные в 1.5 прикладные модели механических, биологических, популяционных и экономических процессов естественным образом приводят к дифференциальным уравнениям второго порядка с кусочно-

линейной правой частью и линией переключения. Именно такие структуры лежат в основе инерционной модели популяционной динамики с эффектом перенаселения, а также модели накопления капитала с пороговым механизмом инвестирования. Это подтверждает, что исследуемый в настоящей главе класс систем не является абстрактным, а отражает реальные механизмы функционирования сложных динамических объектов, что и обосновывает актуальность и прикладную значимость последующего анализа.

3.2. Об одном аналоге теоремы Лиувилля – Остроградского для кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1 y' + b_1 y = 0, \quad (3.2.1)$$

где a_1, b_1 – являются константами. Уравнение (3.2.1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_2 - b_1 x_1. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Пусть $x^{(1)}(t) = (x_{11}(t), x_{21}(t))^T$ и $x^{(2)}(t) = (x_{12}(t), x_{22}(t))^T$ решения системы (3.2.2). Тогда для определителя Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{vmatrix},$$

справедливо формула Остроградского–Лиувилля $W(t) = W(0)e^{-a_1 t}$. Из этого представления следует, что, если $W(0) \neq 0$ то величина $\frac{W(t)}{W(0)}$ не зависеть от выбора начальных значение решений $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, а зависеть только от значения момента t . В частности, если начальные значения решений оставаясь не зависимым векторами и стремятся к точкам, принадлежащим одному лучу то существует предел $\frac{W(t)}{W(0)}$. В работе [65] исследовано существование предельных циклов в окрестности состояний равновесий негладких динамических систем вида

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0, \quad (3.2.3)$$

здесь a, b, c - являются константами. Уравнение (3.2.3) при $\lambda = 0$ “склеивается” из двух линейных уравнений

$$y'' + (a + c)y' + by = 0, \quad \text{если } y' > 0 \quad (3.2.4)$$

и

$$y'' + (a - c)y' + by = 0, \quad \text{если } y' \leq 0 \quad (3.2.5)$$

В свою очередь при $\lambda = 0$ уравнение (3.2.3) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 - bx_1 - c|x_2|, \end{cases} \quad (3.2.6)$$

а уравнения (3.2.4) и (3.2.5) эквивалентны соответственно системам

$$\begin{cases} \frac{dx_1^+}{dt} = x_2^+, \\ \frac{dx_2^+}{dt} = -(a + c)x_2^+ - bx_1^+, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1^-}{dt} = x_2^-, \\ \frac{dx_2^-}{dt} = -(a - c)x_2^- - bx_1^-, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

Следует отметить, что уравнение (3.2.3) является нелинейным, но в тоже время в каждой полуплоскости $y' \geq 0$ и $y' \leq 0$ совпадает с линейным дифференциальным уравнением второго порядка (3.2.1) с коэффициентами $a_1 = a + c$ и $a_2 = a - c$ соответственно. Основная цель является получение аналога формулы Остроградского – Лиувилля для нелинейного уравнения (3.2.3). Из представления (3.2.3) следует, что не применима формула Остроградского – Лиувилля. Введем в рассмотрение $\mu_1^\pm$ и $\mu_2^\pm$ корни характеристических уравнений

$$\mu^2 + (a \pm c)\mu + b = 0, \quad (3.2.9)$$

соответствующие, уравнениям (3.2.4) и (3.2.5):

$$\mu_1^\pm = -\frac{1}{2} \left((a \pm c) - \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b} \right),$$

$$\mu_2^\pm = -\frac{1}{2}\left((a \pm c) + \sqrt{(a \pm c)^2 - 4b}\right).$$

В дальнейшем будем предполагать, что $4b > \max\{(a - c)^2, (a + c)^2\}$. Это означает, что корни $\mu_1^\pm$ и $\mu_2^\pm$ характеристических уравнений (3.2.9) комплексные, т.е.

$$\mu_1^\pm = \alpha^\pm + i\beta^\pm, \quad \mu_2^\pm = \alpha^\pm - i\beta^\pm,$$

где $\alpha^\pm = -\frac{1}{2}(a \pm c)$, $\beta^\pm = -\frac{1}{2}\sqrt{(a \pm c)^2 - 4b}$. Тогда решения системы (3.2.7) и (3.2.8) имеют представление

$$\begin{cases} x_1^+(t) = e^{\alpha^+ t}(C_1 \cos \beta^+ t + C_2 \sin \beta^+ t), \\ x_2^+(t) = e^{\alpha^+ t}[(C_1 \alpha^+ + C_2 \beta^+) \cos \beta^+ t + (C_2 \alpha^+ - C_1 \beta^+) \sin \beta^+ t], \end{cases} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{cases} x_1^-(t) = e^{\alpha^- t}(D_1 \cos \beta^- t + D_2 \sin \beta^- t), \\ x_2^-(t) = e^{\alpha^- t}[(D_1 \alpha^- + D_2 \beta^-) \cos \beta^- t + (D_2 \alpha^- - D_1 \beta^-) \sin \beta^- t], \end{cases} \quad (3.2.11)$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 – произвольные постоянные.

Обозначим через $x_1^+(t) = (x_{11}^+(t), x_{21}^+(t))^T$ – решение системы (3.2.7), при $0 \leq t \leq t_1$, $x_1^-(t) = (x_{11}^-(t), x_{21}^-(t))^T$ – решение системы (3.2.8), при $t > t_1$, удовлетворяющее условиям $x_{11}^+(t_1) = x_{11}^-(t_1)$, $x_{21}^+(t_1) = x_{21}^-(t_1) = 0$. Аналогично второй решений $x_2^+(t) = (x_{12}^+(t), x_{22}^+(t))^T$ – решение системы (3.2.7), при $0 \leq t \leq t_2$, $x_2^-(t) = (x_{12}^-(t), x_{22}^-(t))^T$ – решение системы (3.2.8), при $t > t_2$, удовлетворяющее условию $x_{12}^+(t_2) = x_{12}^-(t_2)$, $x_{22}^+(t_2) = x_{22}^-(t_2) = 0$. Особо отметим, что под обозначением t_1 и t_2 имеется в виду момент времени, при котором решения $x_1^+(t)$ и $x_2^+(t)$ пересекают вещественную ось.

По этим решениям составим определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}^+(t) & x_{12}^+(t) \\ x_{21}^+(t) & x_{22}^+(t) \end{vmatrix}, \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_2, \quad (3.2.12)$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}^+(t) & x_{12}^-(t) \\ x_{21}^+(t) & x_{22}^-(t) \end{vmatrix}, \quad \text{при } t_2 \leq t \leq t_1, \quad (3.2.13)$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}^-(t) & x_{12}^-(t) \\ x_{21}^-(t) & x_{22}^-(t) \end{vmatrix}, \quad \text{при } t > t_1, \quad (3.2.14)$$

Особый интерес представляет определитель (3.2.13), в дальнейшем ее назовем «переходным». Что касается определителей (3.2.12) и (3.2.14), то для них формула Остроградского – Лиувилля реализуется. Здесь t_1 и t_2 момент времени, при котором решения $x_1^+(t)$ и $x_2^+(t)$ пересекают линию переключения. Подробно остановимся на изучении оценки времени движения по траектории решений. Для этого находим те значения C_1 и C_2 , при которых решение (3.2.10) уравнения (3.2.4) при $t = 0$, удовлетворяло бы условиям $x_{11}^+(0) < 0$ и $x_{12}^+(0) = 0$. В частности имеем, $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{\alpha^+}{\beta^+}$. С учетом, найденных C_1 и C_2 , получим

$$\begin{cases} x_{11}^+(t) = e^{\alpha^+ t} \left(-\cos \beta^+ t + \frac{\alpha^+}{\beta^+} \sin \beta^+ t \right), \\ x_{21}^+(t) = e^{\alpha^+ t} \left(\frac{\alpha^+}{\beta^+} \alpha^+ + \beta^+ \right) \sin \beta^+ t. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

Теперь нужно найти такое значение t при котором траектория решения (3.2.15) пересечёт линию переключения $x_2 = 0$. Имеем

$$x_{21}^+(t) = e^{\alpha^+ t} \left(\frac{\alpha^+}{\beta^+} \alpha^+ + \beta^+ \right) \sin \beta^+ t = 0.$$

Следовательно, $\sin \beta^+ t = 0$. Наименьшим положительным решением данного уравнения будет $t_1 = \frac{\pi}{\beta^+}$. Таким образом, траектория решения пересечёт линию переключения при $t_1 = \frac{\pi}{\beta^+}$. Найдем координаты точки пересечения $\left(e^{\alpha^+ \frac{\pi}{\beta^+}}, 0 \right)$.

Наряду с решением $x_1^+(t) = (x_{11}^+(t), x_{21}^+(t))^T$ рассмотрим решение $x_2^+(t) = (x_{12}^+(t), x_{22}^+(t))^T$ соответствующее значениям постоянных $C_1 = -1$, $C_2 > \frac{\alpha^+}{\beta^+}$. Заметим, что $(x_{12}^+(t), x_{22}^+(t)) = (-1, C_2 \beta^+ - \alpha^+)$.

Аналогично, с учётом значений постоянных C_1 и C_2 , получим

$$\begin{cases} x_{12}^+(t) = e^{\alpha^+ t} (-\cos \beta^+ t + C_2 \sin \beta^+ t), \\ x_{22}^+(t) = e^{\alpha^+ t} [(C_2 \beta^+ - \alpha^+) \cos \beta^+ t + (C_2 \alpha^+ + \beta^+) \sin \beta^+ t]. \end{cases}$$

Далее, нужно найти такое значение t_2 , при котором решение $x_2^+(t) = (x_{12}^+(t), x_{22}^+(t))^T$ пересечёт линию переключения. Имеем

$$e^{\alpha^+ t} [(C_2 \beta^+ - \alpha^+) \cos \beta^+ t + (C_2 \alpha^+ + \beta^+) \sin \beta^+ t] = 0.$$

Следовательно,

$$(C_2 \beta^+ - \alpha^+) \cos \beta^+ t + (C_2 \alpha^+ + \beta^+) \sin \beta^+ t = 0.$$

Наименьшим положительным решением данного уравнения будет

$$t_2 = \frac{1}{\beta^+} \left(\arctg \left(\frac{\alpha^+ - C_2 \beta^+}{C_2 \alpha^+ + \beta^+} \right) + \pi \right).$$

Ниже на рисунке 3.2.1 приведена геометрическая иллюстрация точки пересечения

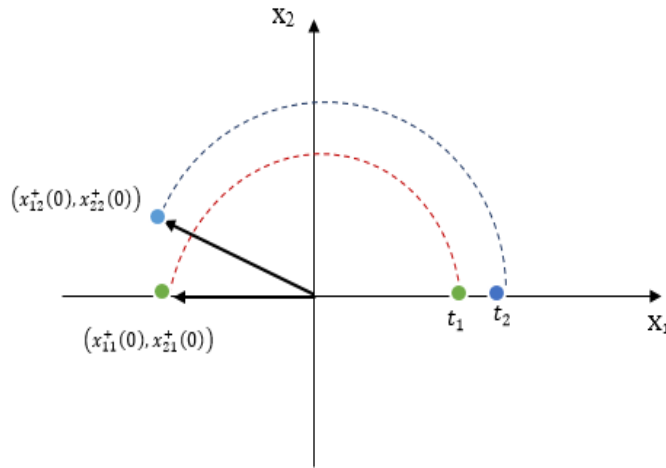


Рисунок 3.2.1 – Геометрическая схема перехода траектории через линию переключения (составлено автором)

Решение $x_1^-(t) = (x_{11}^-(t), x_{21}^-(t))^T$ системы (3.2.8), при $t > t_1$, удовлетворяющее начальным условиям $x_{11}^-(t_1) = x_{11}^+(t_1)$, $x_{21}^-(t_1) = 0$ является продолжением решения $x_1^+(t) = (x_{11}^+(t), x_{21}^+(t))^T$ системы (3.2.7). Таким образом, решение $x_2^-(t) = (x_{12}^-(t), x_{22}^-(t))^T$ системы (3.2.8) при $t \geq t_2$, удовлетворяющее начальным условиям $x_{12}^-(t_2) = x_{12}^+(t_2)$, $x_{22}^-(t_2) = 0$ является продолжением решения $x_2^+(t) = (x_{12}^+(t), x_{22}^+(t))^T$ системы (3.2.7).

Аналогичным способом найдем решение для нижней полуплоскости, которому начало траектории совпадало с концом предыдущего решения. Пусть $t^* = t - t_1$, тогда

$$\begin{cases} x_{11}^-(t) = e^{\alpha^- t} (D_1 \cos \beta^- t^* + D_2 \sin \beta^- t^*), \\ x_{21}^-(t) = e^{\alpha^- t^*} [(D_1 \alpha^- + D_2 \beta^-) \cos \beta^- t^* + (D_2 \alpha^- - D_1 \beta^-) \sin \beta^- t^*], \end{cases} \quad (3.2.16)$$

и

$$\begin{cases} x_{12}^-(t) = e^{\alpha^- t^*} (D_1 \cos \beta^- t^* + D_2 \sin \beta^- t^*), \\ x_{22}^-(t) = e^{\alpha^- t^*} [(D_1 \alpha^- + D_2 \beta^-) \cos \beta^- t^* + (D_2 \alpha^- - D_1 \beta^-) \sin \beta^- t^*], \end{cases} \quad (3.2.17)$$

При $t^* = t - t_1 = 0$ для решения (3.2.16) значения D_1 и D_2 примут вид

$$D_1 = 1 > 0, D_2 = -\frac{\alpha^-}{\beta^-}.$$

Аналогично верхней полуплоскости, найдем такое значение t_3 для нижней полуплоскости, при котором траектория решения $x_1^-(t) = (x_{11}^-(t), x_{21}^-(t))^T$ и $x_2^-(t) = (x_{12}^-(t), x_{22}^-(t))^T$ заново пересекут линию переключения.

С учетом, найденных D_1 и D_2 , получим

$$\begin{cases} x_{11}^-(t) = e^{\alpha^-(t-t_1)} \left(\cos \beta^-(t-t_1) - \frac{\alpha^-}{\beta^-} \sin \beta^-(t-t_1) \right), \\ x_{21}^-(t) = e^{\alpha^-(t-t_1)} \left(-\frac{\alpha^-}{\beta^-} \alpha^- - \beta^- \right) \sin \beta^-(t-t_1). \end{cases} \quad (3.2.18)$$

Имеем

$$e^{\alpha^-(t-t_1)} \left(-\frac{\alpha^-}{\beta^-} \alpha^- - \beta^- \right) \sin \beta^-(t-t_1) = 0.$$

Решением данного уравнения будет $t_3 = t_1 + \frac{\pi}{\beta^-}$. Далее, найдя первую координату точки пересечения, имеем $x_{11}^-(t_3) = e^{\frac{\alpha^-}{\beta^-} \pi}$, $x_{21}^-(t_3) = 0$.

Теперь рассмотрим решение $x_2^-(t) = (x_{12}^-(t), x_{22}^-(t))^T$ соответствующее значениям постоянных $D_1 = 1 > 0, D_2 < -\frac{\alpha^-}{\beta^-}$. С учетом значениям постоянных D_1 и D_2 получим

$$\begin{cases} x_{12}^-(t) = e^{\alpha^- t^*} (\cos \beta^- t^* + D_2 \sin \beta^- t^*), \\ x_{22}^-(t) = e^{\alpha^- t^*} [(\alpha^- + D_2 \beta^-) \cos \beta^- t^* + (D_2 \alpha^- - \beta^-) \sin \beta^- t^*], \end{cases} \quad (3.2.19)$$

Имеем

$$e^{\alpha^- t^*} [(\alpha^- + D_2 \beta^-) \cos \beta^- t^* + (D_2 \alpha^- - \beta^-) \sin \beta^- t^*] = 0.$$

Наименьшим положительным решением данного уравнения будет

$$t_4 = \frac{1}{\beta^-} \left(\arctg \left(\frac{\alpha^- + D_2 \beta^-}{\beta^- - D_2 \alpha^-} \right) + \pi \right) t_1.$$

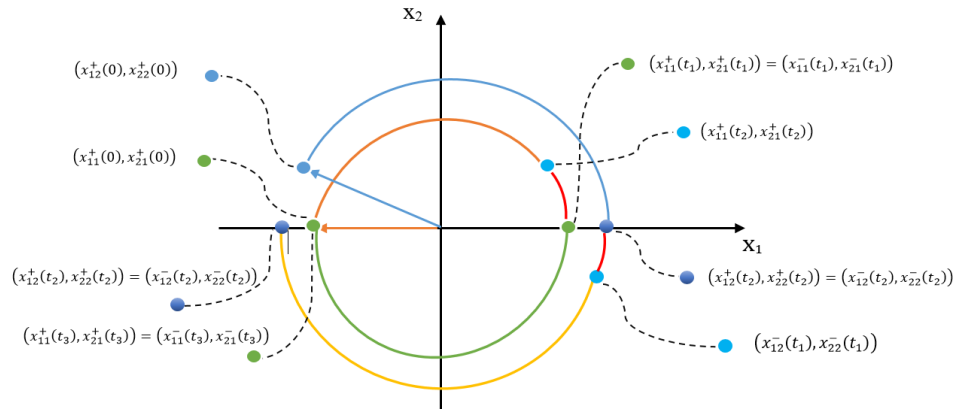


Рисунок 3.2.2 – Переход решения через линии переключения при комплексно – сопряжённых корнях характеристического уравнения (составлено автором)

Теорема 3.2.1. Предположим, что корни уравнения (3.2.9) являются комплексно-сопряженными т.е. $4b > (a \pm b)^2$. Существует предел

$$\Phi(t) = \lim_{c_2 \rightarrow \frac{\alpha^+}{\beta^+}} \frac{W(t)}{W(0)}$$

с учётом вариации t по формулам (3.2.12 - 3.2.14). Тогда для уравнения (3.2.3) применима формула Остроградского – Лиувилля.

Доказательство теоремы 3.2.1. Выше было отмечено, что для определителей Вронского (3.2.12) и (3.2.14) имеет место формула Остроградского – Лиувилля, т.е.

$$\frac{W(t)}{W(0)} = e^{-(a+c)t}, \quad \text{при } 0 < t \leq t_2, \quad (3.2.20)$$

$$\frac{W(t)}{W(0)} = e^{-(a-c)t}, \quad \text{при } t > t_1, \quad (3.2.21)$$

Продифференцировав определитель Вронского (3.2.13), получим

$$\dot{W}(t) = -aW(t) - cW_1(t),$$

где

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} x_{11}^+(t) & x_{12}^-(t) \\ x_{21}^+(t) & -x_{22}^-(t) \end{vmatrix}.$$

Отсюда интегрируя, имеем

$$W(t) - W(t_2) = -a \int_{t_2}^t W(s) ds - c \int_{t_2}^t W_1(s) ds, \quad \text{при } t_2 < t \leq t_1.$$

Следовательно,

$$\frac{W(t) - W(t_2)}{W(0)} = a \int_{t_2}^t \frac{W(s)}{W(0)} ds - c \int_{t_2}^t \frac{W_1(s)}{W(0)} ds.$$

Предположим, что $\frac{W(s)}{W(0)} < M_1$ и $\frac{W_1(s)}{W(0)} < M_2$, тогда

$$\left| \frac{W(t)}{W(0)} - \frac{W(t_2)}{W(0)} \right| \leq |a|M_1(t - t_2) + |c|M_2(t - t_2) \leq (t - t_2)(|a|M_1 + |c|M_2).$$

Из условия

$$\begin{cases} x_{12}^-(t_2) = x_{12}^+(t_2), \\ x_{22}^-(t_2) = x_{22}^+(t_2). \end{cases}$$

следует, что определитель $W(t_2)$ при $0 < t \leq t_2$ совпадает (равно) с определителями $W(t_2)$ при $t_2 < t \leq t_1$, тогда с учетом тождества (3.2.20), имеем

$$\frac{W(t_2)}{W(0)} = e^{-(a+c)t_2}.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(t) = \lim_{c_2 \rightarrow \frac{\alpha^+}{\beta^+}} \frac{W(t)}{W(0)} \leq e^{-(a+c)t_2}.$$

Теорема 3.2.1. доказана.

3.2.1. Численное построение фазового портрета и геометрическая интерпретация формулы Лиувилля – Остроградского

Для иллюстрации теоретических результатов, полученных в 3.2, было выполнено моделирование фазового портрета нелинейного дифференциального уравнения второго порядка вида (3.2.3), которое эквивалентно кусочно-линейной системе первого порядка (3.2.6). Численное интегрирование системы (3.2.6) проводилось методом Рунге – Кутты четвёртого порядка с фиксированным шагом по времени. Выбор данного метода обусловлен его высокой точностью и устойчивостью при исследовании динамических систем.

Построение фазового портрета. Фазовый портрет строился в фазовой плоскости (x_1, x_2) . В качестве начальных условий рассматривались линейно независимые векторы

$$x^{(1)}(t) = (x_{11}(t), x_{21}(t))^T, \quad x^{(2)}(t) = (x_{12}(t), x_{22}(t))^T,$$

причём расстояние между начальными условиями выбралось достаточно большим, чтобы наглядно прослеживалось деформация фазовых траекторий во времени. Особо отметим, что фазовая плоскость разделена линией переключения $x_2 = \lambda$, на две полуплоскости, в каждой из которых система совпадает с линейными дифференциальными уравнениям второго порядка (3.2.4) и (3.2.5). При переходе траектории через линию переключения происходит смена коэффициентов системы, что соответствует кусочно – линейному характеру уравнения.

Геометрическая интерпретация формулы Лиувилля – Остроградского. Для двух решений $x^{(1)}(t) = (x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t))$ и $x^{(2)}(t) = (x_1^{(2)}(t), x_2^{(2)}(t))$ системы (3.2.6) на фазовой плоскости был построен параллелограмм с вершинами

$$O = (0,0), A = x^{(1)}(t), B = x^{(2)}(t), C = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t).$$

Таким образом, одна вершина параллелограмма всегда совпадает с началом координат, а его стороны задаются векторами решений системы. Площадь данного параллелограмма равна абсолютному значению определителя Вронского. В анимационном режиме на фазовой плоскости наблюдается деформация параллелограмма во времени, что позволяет наглядно проследить изменение величины $W(t)$.

Численные результаты. Численные эксперименты показали, что при выполнении условия

$$4b > \max\{(a+b)^2, (a-b)^2\},$$

характеристические корни соответствующих линейных систем являются комплексно – сопряжёнными. В этом случае наблюдается экспоненциальное

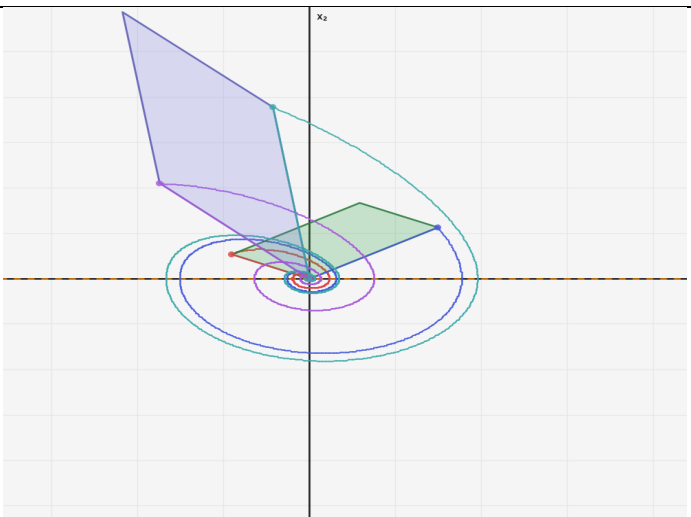
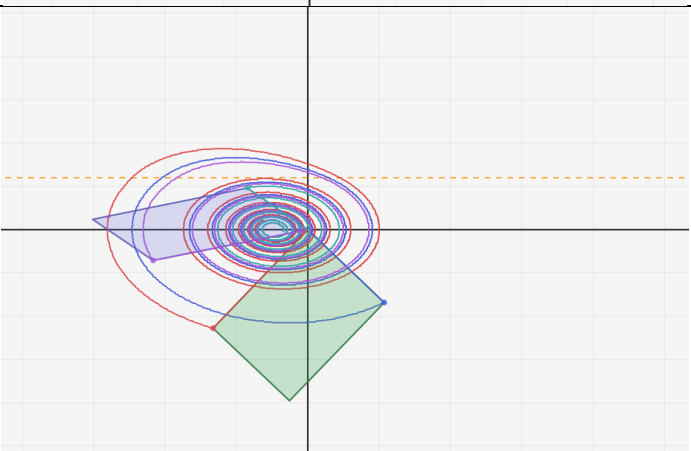
изменение площади параллелограмма, согласующееся с формулой Лиувилля – Остроградского.

При прохождении траекторий через линию переключения $x_2 = \lambda$ происходит временное нарушение классической формулы Лиувилля – Остроградского, однако в предельном смысле, при сближении начальных условий решений, имеет место существование предела

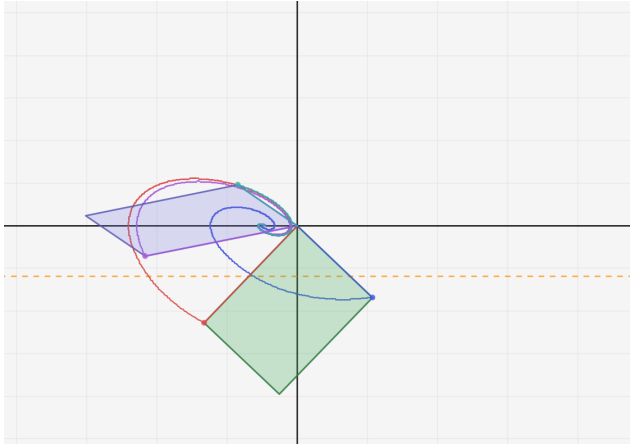
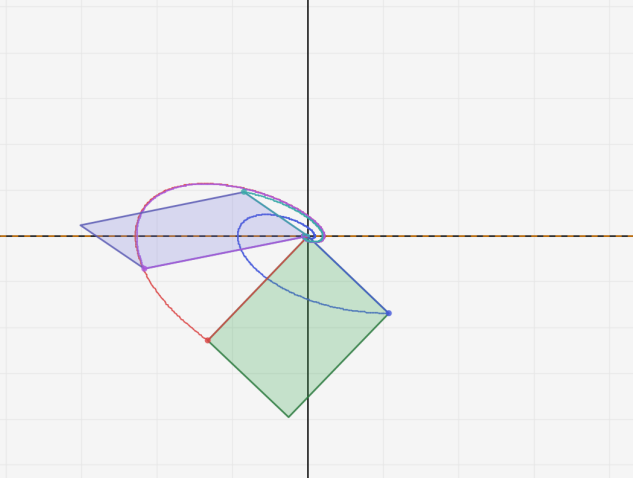
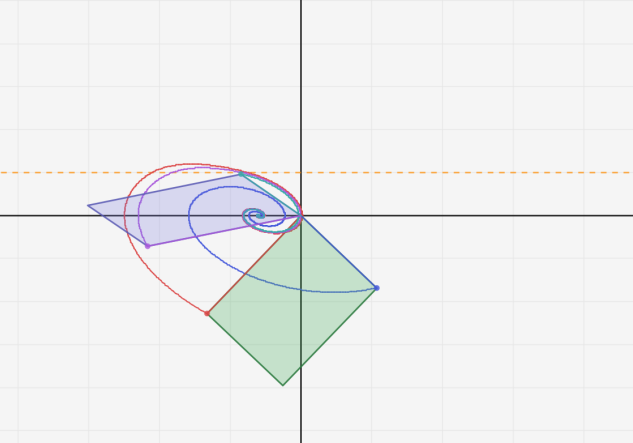
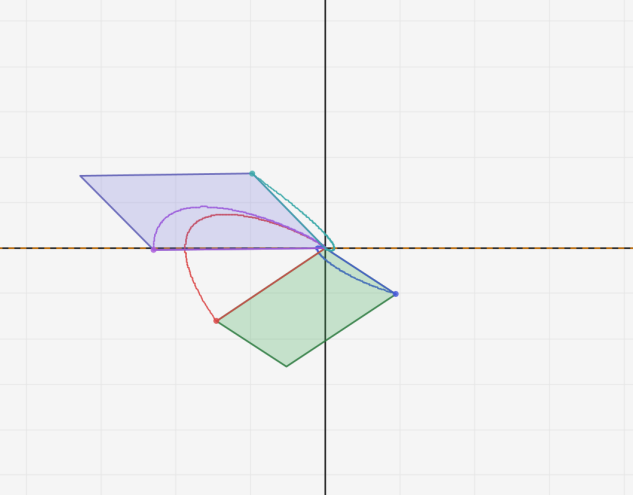
$$\Phi(t) = \lim_{c_2 \rightarrow \frac{\alpha^+}{\beta^+}} \frac{W(t)}{W(0)} \leq e^{-(a+c)t_2},$$

что подтверждает справедливость аналога формулы Лиувилля – Остроградского для уравнения (3.2.3).

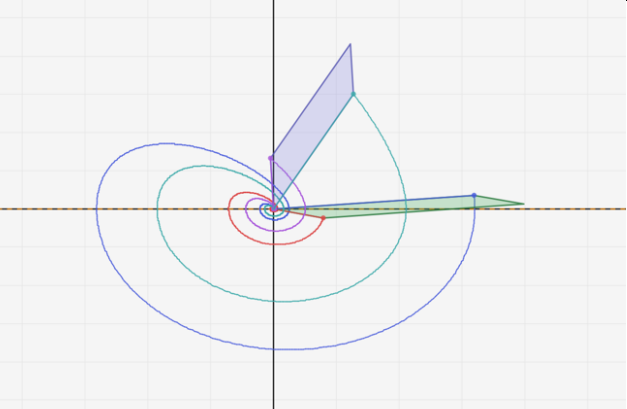
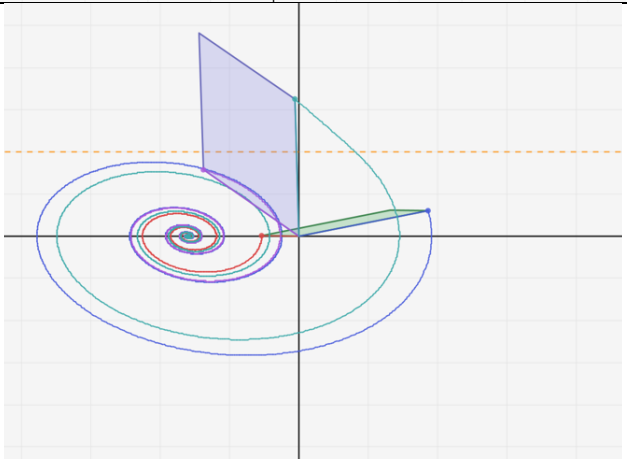
Таблица 3.2.1. Подбор коэффициентов и фазовые портреты

a	b	c	λ	Фазовые портреты
0,50	1,0	0,40	0,00	
0,50	1,0	0,40	0,60	

Продолжение таблицы 3.2.1.

0,50	1,0	0,40	-0,60	
0,90	1,0	0,30	0,00	
1,20	1,0	0,60	0,50	
1,60	1,0	0,20	0,00	

Продолжение таблицы 3.2.1.

0,80	1,50	0,70	0,00	
1,10	1,00	0,80	1,00	

Источник: Разработано и усовершенствовано автором [9 – А].

3.3. Моделирование возникновения предельного цикла дифференциального уравнения второго порядка с линией переключения

В этом параграфе рассматривается кусочно-линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + g(y, y') = 0, \quad (3.3.1)$$

где

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1 (y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2 (y - c_2), & h(y, y') < 0, \end{cases} \quad (3.3.2)$$

здесь $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in R$, $r \neq 0$ и a_i , b_i , c_i – вещественные числа, $i = 1, 2$.

«Окружность, описываемая равенством $h(y, y') = 0$, является линией переключения. Заметим, что функция $g(y, y')$ на линии $h(y, y') = 0$ в общем случае имеет разрыв. Дифференциальное уравнение вида (3.3.1), где $g(y, y')$ определяется равенством (3.3.2), называют "сшитым" или "склеенным" диф-

ференциальным уравнением. Как известно, многие прикладные задачи приводят к рассмотрению подобных сшитых систем» [6,15].

Уравнение (3.3.1) эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -g(x_1, x_2), \end{cases} \quad (3.3.3)$$

где $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Траектории системы (3.3.3) в областях $G_1 = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) > 0\}$ и $G_2 = \{(x_1, x_2): h(x_1, x_2) < 0\}$ определяются решениями линейных систем

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -a_1 x_2 - b_1(x_1 - c_1) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

и

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -a_2 x_2 - b_2(x_1 - c_2), \end{cases} \quad (3.3.5)$$

соответственно. На линии сшивания $h(x_1, x_2) = 0$ траектория системы (3.3.3) доопределяется в зависимости от поведения решений указанных линейных систем.

Описание процесса сшивания и анализ точек контакта. Нас интересует случай, когда коэффициенты a_i и b_i удовлетворяют условиям $4b_i > a_i^2$, $i = 1, 2$. Это означает, что корни характеристических уравнений, соответствующих системам (3.3.4) и (3.3.5), являются комплексными числами.

Ниже проведен полный анализ процесса сшивания траекторий системы (3.3.3) в точках линии переключения $h(x_1, x_2) = 0$ и получены условия существования предельных циклов в зависимости от значений коэффициентов системы (3.3.3).

На первоначальном этапе исследуем поведение траекторий дифференциального уравнения вида

$$x'' + ax' + b(x - c) = 0. \quad (3.3.6)$$

Имеем

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - b(x_1 - c). \end{cases} \quad (3.3.7)$$

относительно заданной линии $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2$. Здесь, коэффициенты a и b удовлетворяют условию $4b > a^2$.

«Пусть $(x_1(t), x_2(t))$ – решение системы (3.3.7). Рассмотрим траекторию решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3.3.7), которая проходит через точку $(x_1(0), x_2(0))$. Если траектория решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3.3.7), проходящая через точку $(x_1(0), x_2(0))$ окружности $h(x_1, x_2) = 0$, в этой точке не касается этой окружности, то говорят, что окружность в точке $(x_1(0), x_2(0))$ не имеет контакта с траекториями системы (3.3.7). Если же эта траектория касается окружности, то мы будем говорить, что окружность в точке $(x_1(0), x_2(0))$ имеет контакт с траекторией системы (3.3.7)» [6,15]. Для анализа области, где отсутствует контакт окружности $h(x_1, x_2) = 0$ с системой (3.3.7), рассмотрим функцию:

$$f(t) = h(x_1(t), x_2(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - r^2. \quad (3.3.8)$$

Функция (3.3.8) описывает расстояние между точкой $(x_1(t), x_2(t))$ траектории системы и окружности $h(x_1, x_2) = 0$, что позволяет исследовать условия наличия или отсутствия контакта. Нетрудно видеть, что производные $f'(t)$ и $f''(t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2x_2(t)[(1-b)x_1(t) - ax_2(t) + bc], \\ f''(t) &= 2(ax_2(t) + b(x_1(t) - c))[ax_2(t) + (b-1)x_1(t) - bc] \\ &\quad - 2x_2(t)[a(-ax_2(t) - b(x_1(t) - c)) + (b-1)x_2(t)]. \end{aligned}$$

Продолжая вычисления, найдём также производную третьего порядка. Дифференцируя выражение для второй производной $f''(t)$, получаем:

$$f'''(t) = 2x_2''[x_1 + x_2'] + 4x_2'[x_2 + x_2''] + 2x_2[x_2' + x_2'''],$$

где

$$x_2''' = a(2b - a^2)x_2 + b(b - a^2)(x_1 - c).$$

Предположим, что при $t = 0$ имеется точка $(x_1(0), x_2(0))$, для которой $f(0) = 0$. Ниже на рисунке 3.3.1 отражено место расположения этой точки.

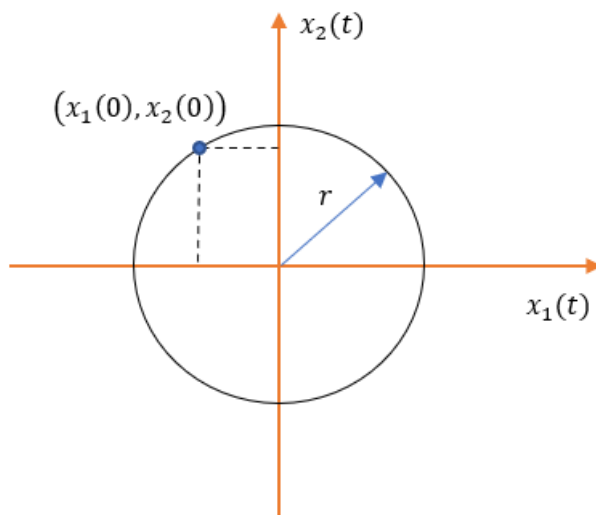


Рисунок 3.3.1 – Геометрическое представление начального условия и радиуса r в фазовом пространстве (составлено автором)

Применительно к этому случаю могут возникать различные сценарии, в частности, случай, когда $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$, имеем

$$\begin{cases} x_1^2(0) + x_2^2(0) - r^2 = 0, \\ 2x_2(0)[(1-b)x_1(0) - ax_2(0) + bc] = 0. \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Нетрудно видеть, что $(x_1(0), x_2(0)) = (\pm r, 0)$ являются решениями данной системы. Кроме этих решений система (3.3.9) может иметь решение $(x_1(0), x_2(0))$, где $x_2(0) \neq 0$. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Коэффициенты системы (3.3.7) удовлетворяют условию $|c| > \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, и это условие эквивалентно тому, что окружность $h(x_1, x_2) = 0$ во всех точках, за исключением точек $(-r, 0)$ и $(r, 0)$, не имеет контакта с системой (3.3.7).

Случай 2. Коэффициенты системы (3.3.7) удовлетворяют условию $|c| < \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, тогда окружность $h(x_1, x_2) = 0$, помимо точек $(-r, 0)$ и $(r, 0)$, имеет контакт с системой (3.3.7) в двух точках $A_1(x_1, x_2)$ и $B_1(x_1, x_2)$.

Случай 3. Пусть коэффициенты системы (3.3.7) удовлетворяют условию $|c| = \frac{r}{b}\sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, тогда окружность $h(x_1, x_2) = 0$, помимо точек $(-r, 0)$ и $(r, 0)$, имеет контакт с системой (3.3.7) в единственной точке $C(x_1, x_2)$.

На рисунке 3.3.2 приведены геометрические интерпретации случаев 1-3.

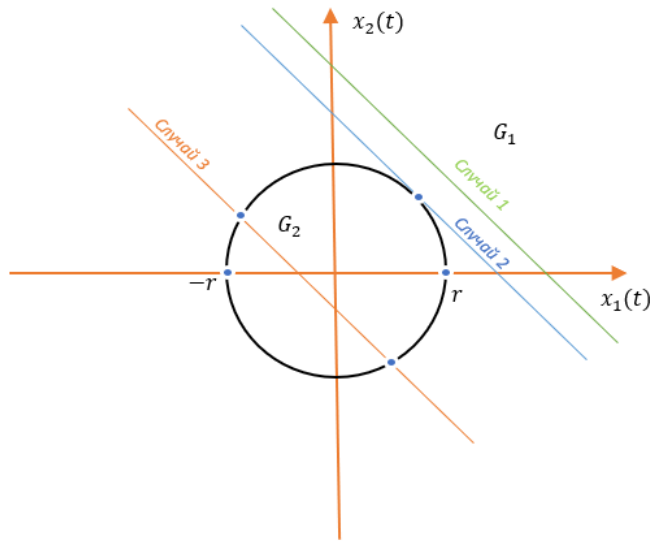


Рисунок 3.3.2 – Все возможные варианты точки контакта (составлено автором)

Анализируем случай 1. В этом случае только точки $(-r, 0)$ и $(r, 0)$ окружности являются точками контакта с траекторией системы (3.3.7), а именно справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3.1. Пусть $|c| > \frac{r}{b} \sqrt{a^2 + (1-b)^2}$. Тогда все точки окружности $h(x_1, x_2) = 0$, отличные от точек $(\pm r, 0)$, не имеют контакта с системой (3.3.7). Кроме того, при $c > 0$ ($c < 0$) функция $h(x_1(t), x_2(t))$, $h(x_1(0), x_2(0)) = 0$ при возрастании t возрастает (убывает), если $x_2(0) > 0$ и убывает (возрастает), если $x_2(0) < 0$.

Далее, исследуем поведение траектории системы (3.3.7) в точках $(\pm r, 0)$ относительно линии переключения. Интерес представляют условия, при которых, траектории решений касаются с окружностью $h(x_1, x_2) = 0$. Чтобы охарактеризовать тип касания (то есть выяснить, как именно траектория «прикасается» к окружности), необходимо исследовать вторую производную $f''(t)$ в этих точках. Так как $f''(0) = 2b(x_1(0) - c)[(b-1)x_1(0) - bc]$, то в точках касания $(-r, 0)$ и $(r, 0)$ имеем $f''(0) \neq 0$, если $|c| \neq r$. А именно, справедлива

Лемма 3.3.2. Пусть $|c| > \frac{r}{b} \sqrt{a^2 + (1-b)^2}$, $|c| \neq r$ и $(x_1(t), x_2(t))$ – решение системы (3.3.7) удовлетворяет условию $(x_1(0), x_2(0)) = (r, 0)$ или

$(x_1(0), x_2(0)) = (-r, 0)$. Тогда функция $f(t)$, определенная равенством (3.3.8), удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и $f''(0) \neq 0$.

Доказательство. Если $x_1(0) = \pm r$ и $x_2(0) = 0$, то $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и $f''(0) = 2b(\pm r - c)[\pm r(b - 1) - bc]$.

Так как $b > 0$, $|c| \neq r$ и $b|c| > r\sqrt{a^2 + (1 - b)^2} \geq r|1 - b|$, то $f''(0) \neq 0$.

Лемма 3.3.2 доказана.

Вернёмся к изучению поведения траектории кусочно-линейной системы (3.3.3). Так как $4b_i > a_i^2$, $i = 1, 2$, тогда решения систем (3.3.4) и (3.3.5) имеют, соответственно, представления

$$\begin{cases} x_1^+(t) = e^{\alpha_1 t}(D_1 \cos \beta_1 t + D_2 \sin \beta_1 t) + c_1, \\ x_2^+(t) = e^{\alpha_1 t}[(\alpha_1 D_1 + \beta_1 D_2) \cos \beta_1 t + (\alpha_1 D_2 - \beta_1 D_1) \sin \beta_1 t], \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_1^-(t) = e^{\alpha_2 t}(K_1 \cos \beta_2 t + K_2 \sin \beta_2 t) + c_2, \\ x_2^-(t) = e^{\alpha_2 t}[(\alpha_2 K_1 + \beta_2 K_2) \cos \beta_2 t + (\alpha_2 K_2 - \beta_2 K_1) \sin \beta_2 t]. \end{cases}$$

где $\alpha_i = -\frac{a_i}{2}$, $\beta_i = \sqrt{4b_i - a_i^2}$, $i = 1, 2$, и D_1, D_2, K_1, K_2 - произвольные постоянные.

Будем предполагать, что $r = 1$ и коэффициенты системы (3.3.3) удовлетворяют условиям $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Более подробно проследим за поведением траектории кусочно-линейной системы (3.3.3), когда

$$|c_i| > \frac{1}{b_i} \sqrt{a_i^2 + (1 - b_i)^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.3.10)$$

Дополнительно предположим, что $0 < c_1 < 1 < c_2$. Эти условия вместе с условиями (3.3.10) эквивалентны следующим соотношениям:

$$\frac{1}{b_1} \sqrt{a_1^2 + (1 - b_1)^2} < c_1 < 1, \quad c_2 > \max \left\{ \frac{1}{b_2} \sqrt{a_2^2 + (1 - b_2)^2}, 1 \right\}. \quad (3.3.11)$$

Из условий (3.3.11) следует, что $1 - b_i(1 - c_i) \neq 0$, $i = 1, 2$ и, следовательно, определено число

$$\gamma = \frac{a_1}{b_1(1 - c_1)(1 - b_1(1 - c_1))} - \frac{a_2}{b_2(1 - c_2)(1 - b_2(1 - c_2))}.$$

Лемма 3.3.3. Пусть выполнены условия (3.3.11). Тогда особая точка $(1,0)$ системы (3.3.3) является неустойчивым фокусом, если $\gamma < 0$, и является устойчивым фокусом, если $\gamma > 0$.

Доказательство леммы 3.3.3. Для доказательства леммы 3.3.3 достаточно рассмотреть траекторию решения $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3.3.7) с начальными условиями $(x_1(0), x_2(0)) = (\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Решение $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3.3.7), введя обозначения $q(t) = x_1(t)$, имеем $x_2(t) = q'(t)$. Разложим функцию $q(t)$ в виде ряда

$$q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 \frac{t^2}{2!} + q_3 \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad (3.3.12)$$

где, $q_0 = q(0) = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $q_1 = q'(0) = \varepsilon$, $q_2 = q''(0)$,

Тогда, для функции $q'(t)$ имеем

$$q'(t) = q_1 + q_2 t + q_3 \frac{t^2}{2!} + q_4 \frac{t^3}{3!} + \dots. \quad (3.3.13)$$

Очевидно, что $(q(0))^2 + (q'(0))^2 = 1$. Требуется найти такое значение $t = t(\varepsilon) \neq 0$, при котором

$$(q(t(\varepsilon)))^2 + (q'(t(\varepsilon)))^2 = 1. \quad (3.3.14)$$

С учетом равенств (3.3.13) и (3.3.14) получим

$$((q(t))^2 - q_0^2)((q'(t))^2 - q_1^2) = 0. \quad (3.3.15)$$

Исходя из (3.3.12) и (3.3.13) равенство (3.3.15) можно переписать в виде

$$2q_1(q_0 + q_2) + [q_1(q_1 + q_3) + q_2(q_0 + q_2)]t + \\ + \left[q_3 \left(\frac{1}{3} q_0 + q_2 \right) + q_1 \left(\frac{1}{3} q_4 + q_2 \right) \right] t^2 + \dots = 0. \quad (3.3.16)$$

Так как $q_0 = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$, $q_1 = \varepsilon$, следующей задачей является нахождение значений коэффициентов $q_2, q_3, q_4, \dots$. Для этого, разлагая $q_0 = 1 - (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2})$ в ряд, получим $q_0 = 1 - \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2^2} \varepsilon^4 + \frac{3}{2^3} \varepsilon^6 + \dots$.

Чтобы найти $q_3, q_4, \dots$, из уравнения (3.3.6) возьмём производную порядка $(k + 2), k \geq 1$. Имеем, $x^{(k+2)} + ax^{(k+1)} + bx^{(k)} = 0, k \geq 1$.

Так как $x(t) = q(t)$, справедливо следующее равенство

$$q^{(k+2)}(t) + aq^{(k+1)}(t) + bq^{(k)}(t) = 0, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, коэффициенты (3.3.16) определяются следующим образом

$$q_{k+2} + aq_{k+1} + bq_k = 0, \quad k \geq 1.$$

Что касается q_2 , его можно найти из уравнения (3.3.6), $q_2 = -aq_1 - b(q_0 - c)$.

Итак, получим искомые значения коэффициентов

$$q_0 = 1 - \varepsilon_1, \quad q_1 = \varepsilon, \quad q_2 = -b(1 - c) - a\varepsilon + b\varepsilon_1,$$

$$q_3 = ab(1 - c) + (a^2 - b)\varepsilon - ab\varepsilon_1,$$

$$q_4 = b(1 - c)(b - a^2) - a(a^2 - 2b)\varepsilon + b(a^2 - b)\varepsilon_1.$$

При $t = t(\varepsilon) = \varepsilon(t_0 + t_1\varepsilon + t_2\varepsilon^2 + \dots)$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, поставляя найденные значения коэффициентов в (16), имеем

$$2(1 - b(1 - c)) + [-b(1 - c)(1 - b(1 - c))]t_0 = 0.$$

Отсюда $t_0 = \frac{2}{b(1-c)}$. Проводя несложные алгебраические преобразования найдем значение t_1 из соотношения

$$\begin{aligned} -2a + [b(1 - c)a - a(1 - b(1 - c)) + ab(1 - c)]t_0 \\ + [-b(1 - c)(1 - b(1 - c))]t_1 + ab(1 - c) \left[\frac{1}{3} - b(1 - c) \right] t_0^2 = 0. \end{aligned}$$

С учетом значения t_0 , имеем $t_1 = -\frac{2a}{3b^2(1-c)^2(1-b(1-c))}$. Следовательно,

$$t(\varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{2}{b(1-c)} - \varepsilon \frac{2a}{3b^2(1-c)^2(1-b(1-c))} + \dots \right).$$

Найденные, подставляя в (3.3.13), получим

$$q'(t(\varepsilon)) = -\varepsilon \left(1 - \frac{2a}{3b(1-c)(1-b(1-c))} \varepsilon - \dots \right).$$

Данную процедуру можно реализовать для системы с переключением (3.3.3). Тогда решения $(x_{11}(t), x_{21}(t))$ и $(x_{12}(t), x_{22}(t))$ систем (3.3.4),

(3.3.5), соответственно, удовлетворяют условиям $(x_{11}(0), x_{21}(0)) = (x_{12}(0), x_{22}(0)) = (\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \varepsilon)$. Следовательно, $(x_{11}(t), x_{21}(t)) = (q_1(t), q_1'(t))$ и $(x_{12}(t), x_{22}(t)) = (q_2(t), q_2'(t))$. Таким образом, значения функций $q_1'(t_1(\varepsilon))$, $q_2'(t_2(\varepsilon))$ примут вид

$$q_1'(t_1(\varepsilon)) = -\varepsilon \left(1 - \frac{2a_1}{3b_1(1-c_1)(1-b_1(1-c_1))} \varepsilon - \dots \right),$$

$$q_2'(t_2(\varepsilon)) = -\varepsilon \left(1 - \frac{2a_2}{3b_2(1-c_2)(1-b_2(1-c_2))} \varepsilon - \dots \right),$$

где

$$t_1(\varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{2}{b_1(1-c_1)} - \varepsilon \frac{2a_1}{3b_1^2(1-c_1)^2(1-b_1(1-c_1))} + \dots \right),$$

$$t_2(\varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{2}{b_2(1-c_2)} - \varepsilon \frac{2a_2}{3b_2^2(1-c_2)^2(1-b_2(1-c_2))} + \dots \right).$$

Из представлений функций $q_1'(t_1(\varepsilon))$ и $q_2'(t_2(\varepsilon))$ следует:

а) если $q_1'(t_1(\varepsilon)) < q_2'(t_2(\varepsilon))$, то

$$\frac{a_1}{b_1(1-c_1)(1-b_1(1-c_1))} < \frac{a_2}{b_2(1-c_2)(1-b_2(1-c_2))};$$

б) если $q_1'(t_1(\varepsilon)) > q_2'(t_2(\varepsilon))$, то

$$\frac{a_1}{b_1(1-c_1)(1-b_1(1-c_1))} > \frac{a_2}{b_2(1-c_2)(1-b_2(1-c_2))}.$$

Лемма 3.3.3 доказана.

На рисунке 3.3.3 приведены фазовые портреты, иллюстрирующие возникновение устойчивого и неустойчивого фокусов, согласно утверждению леммы 3.3.3.

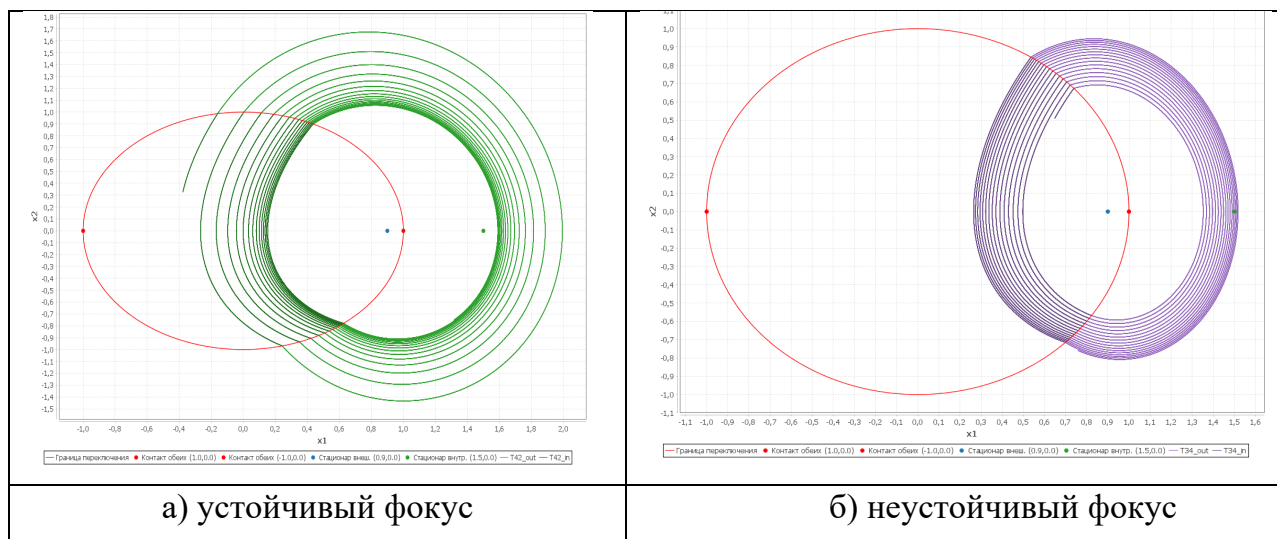


Рисунок 3.3.3 - Фазовые портреты, возникновение устойчивого и неустойчивого фокусов (составлено автором)

Из леммы 3.3.3 и условий (3.3.11) следует, что решение $(x_1(t), x_2(t))$, которое запускается из окрестности особой точки $(-1, 0)$ всегда приближается к особой точке $(1, 0)$.

Условия существования предельного цикла. Теперь сформулируем основной результат.

Теорема 3.3.1. Пусть выполнены условия (3.3.11) и $\gamma < 0$. Тогда система (3.3.3) имеет предельный цикл.

Доказательство теоремы 3.3.1. Из леммы 3.3.3 следует, что особая точка $(-1, 0)$ является устойчивым фокусом. Поведение решений относительно точки $(1, 0)$ составляют неустойчивый фокус. Лемма 3.3.1 обеспечивает того, что все решения в верхнем полуплоскости ($x_2 > 0$) возрастают и в нижнем полуплоскости ($x_2 < 0$) убывают. Отсюда в силу теоремы Пуанкаре – Бендиксона [96,117,118] следует существования предельного цикла у системы (3.3.3).

Приступим к этапу подборки коэффициентов. В частном случае, если коэффициенты системы (3.3.3) задать в виде $a_1 = 0.14$, $b_1 = 2$, $c_1 = \pm 0.9$, $a_2 = -0.6$, $b_2 = 0.89$, $c_2 = \pm 1.5$, $r = 1$, то искомый фазовый портрет примет вид

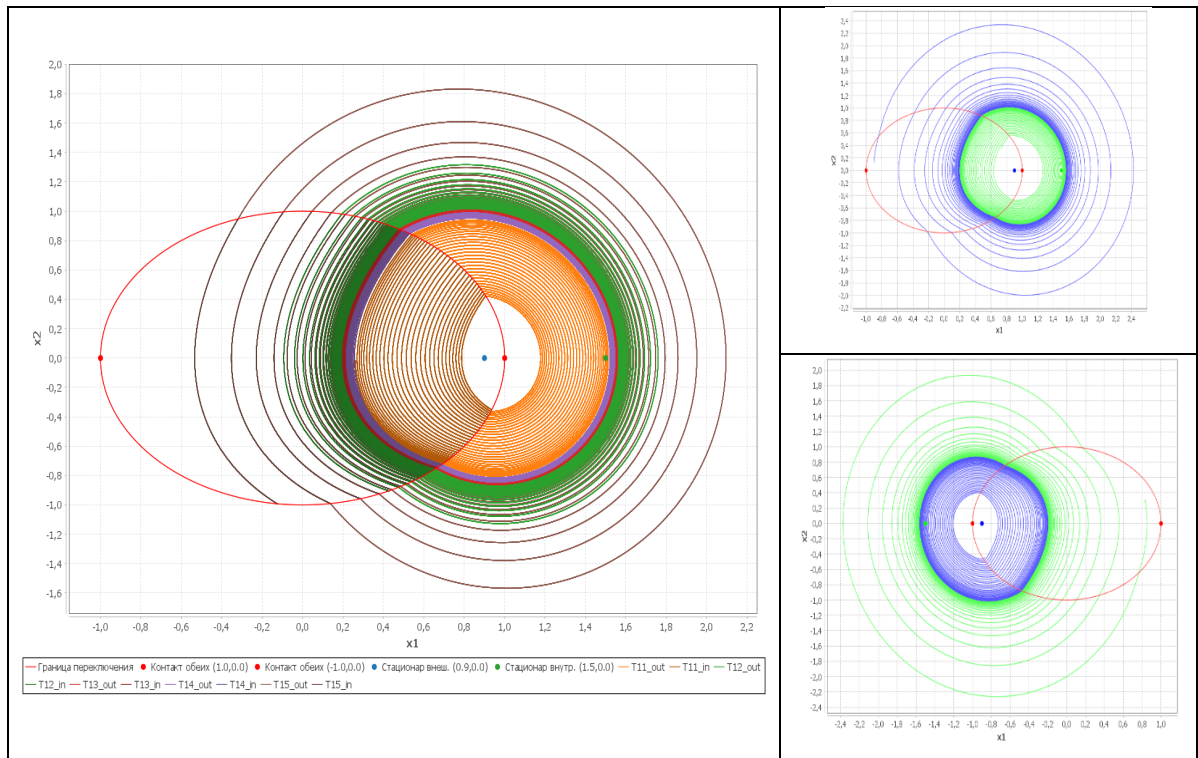


Рисунок 3.3.4 – Предельный цикл (составлено автором)

На рисунке 3.3.4 иллюстрировано возникновение предельного цикла [114-115].

3.4. Исследование скользящих решений в кусочно-линейной системе с разрывной правой частью

При исследовании дифференциальных уравнений с разрывной правой частью важную роль играет метод Филиппова [95]. Этот метод представляет собой общий подход к анализу дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, то есть уравнений, для которых правая часть не является непрерывной функцией на всей фазовой плоскости. «В классической постановке рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнения вида

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n, \quad (3.4.1)$$

в которой функция $f(x)$ имеет разрывы на некотором множестве $G = \{x \in R^n: h(x) = 0\}$, называемом линией переключения или поверхностью разрыва. В областях $h(x) > 0$ и $h(x) < 0$ функция $f(x)$ предполагается непрерывной, а на множестве G – допускает скачок значений.

Классические методы теории дифференциальных уравнений не применимы к таким системам, поскольку в точках G нарушается условие Липшица и не выполняется требования единственности решений. Для преодоления этой трудности А.Ф. Филиппов предложил рассматривать не само уравнение, а соответствующее дифференциальное включение, которое задаёт множество допустимых направлений движения траектории в точках разрыва:

$$\dot{x} \in F(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \overline{\text{conv}}\{f(y): y \in B_\delta(x) \setminus N\},$$

Здесь $\overline{\text{conv}}$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества возможных значений правой части $f(y)$ в окрестности точки x , а N – множества меры нуль. Таким образом, в каждой точке линии переключения рассматривается выпуклое множество всех возможных векторов скоростей, к которым стремятся правые части системы с обеих сторон поверхности $h(x) = 0$. Решением в смысле Филиппова называется абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая включению $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ почти всюду на своей области определения. Такое обобщение обеспечивает существование решений даже в негладких системах и позволяет описывать скользящие режимы – движения траекторий вдоль линии переключения» [95].

«Метод Филиппова широко применяется при анализе кусочно-линейных систем, где фазовая плоскость разделена на области действия различных линейных уравнений. Ключевая идея метода заключается в выявлении областей, где направления траекторий системы противоположны или расходятся друг от друга, что позволяет определить зоны возможного скользящего режима на линии переключения» [112-114].

Теперь применим данный метод непосредственно к кусочно-линейной системе второго порядка, определённой системами (3.3.4) и (3.3.5). Особое внимание уделим случаю, когда линия переключения представляет собой окружность $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$. Как показано ранее, этот метод позволяет корректно описывать движение траекторий на границе областей, в том числе выявлять режимы скольжения.

В динамических системах с разрывной правой частью существенную роль играет поведение траекторий на поверхности переключения

$$h(x_1, x_2) = 0.$$

«Если векторные поля системы по обе стороны поверхности направлены таким образом, что притягивают траекторию к этой поверхности, то возникает характерный для негладких систем режим скольжения. Метод Филиппова позволяет строго определить условия его существования и задать динамику движения вдоль поверхности» [116].

Условия возникновения режима скольжения.

Рассмотрим кусочно-линейную систему второго порядка (3.3.3). Градиент функции переключения имеет вид $\Delta h = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$. Далее обозначим правой части системы (3.3.4) и (3.3.5), соответственно, через

$$f_1(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a_1 x_2 - b_1(x_1 - c_1) \end{pmatrix} \text{ и } f_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a_2 x_2 - b_2(x_1 - c_2) \end{pmatrix}.$$

Согласно методу Филиппова, режим скольжения возникает тогда, когда векторные поля с обеих сторон линии переключения направлены навстречу друг другу, т.е.,

$$(\Delta h, f_1)(\Delta h, f_2) < 0.$$

Вычисляя скалярные произведения, имеем

$$(\Delta h, f_i) = 2x_2[(1 - b_i)x_1 - a_i x_2 + b_i c_i], i = 1, 2.$$

Таким образом, условие возникновения режима скольжения примет вид

$$[(1 - b_1)x_1 - a_1 x_2 + b_1 c_1][(1 - b_2)x_1 - a_2 x_2 + b_2 c_2] < 0. \quad (3.4.2)$$

На участках линии переключения, удовлетворяющих условию (3.4.2), движение траектории системы описывается полем

$$x' = (1 - \lambda)f_1(x) + \lambda f_2(x),$$

где коэффициент λ определяется из условия $(\Delta h, x') = 0$. Следовательно,

$$\lambda = \frac{(\nabla h(x), f_1(x))}{(\nabla h(x), f_1(x) - f_2(x))}.$$

Подставляя значения выражения $(\Delta h, f_i)$ имеем

$$\lambda = \frac{(1 - b_1)x_1 - a_1x_2 + b_1c_1}{(b_2 - b_1)x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + b_1c_1 - b_2c_2}, \quad (3.4.3)$$

и, соответственно,

$$1 - \lambda = \frac{(1 - b_2)x_1 - a_2x_2 + b_2c_2}{(b_2 - b_1)x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + b_1c_1 - b_2c_2}. \quad (3.4.4)$$

Коэффициент λ определяется как параметр выпуклой комбинации двухвекторных полей и вычисляется из условия ортогональности результирующего поля нормали к поверхности переключения. Значение $0 < \lambda < 1$ является критерием существования режима скольжения, в этом случае траектория удерживается на поверхности и движется вдоль неё, формируя филипповское эквивалентное поле. Значения $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ соответствуют переходу движения полностью под управлением одного из режимов, а $\lambda < 0$ или $\lambda > 1$ свидетельствуют об отсутствии скольжения. Таким образом, коэффициент λ служит точным прогностическим индикатором динамики системы в окрестности поверхности переключения и является фундаментальным элементом метода Филиппова.

Пусть параметры системы примут такие значения $a_1 = 1$, $b_1 = 0.3$, $c_1 = \pm 0.2$, $a_2 = 0.5$, $b_2 = 0.8$, $c_2 = \pm 0.1$, $r = 1$.

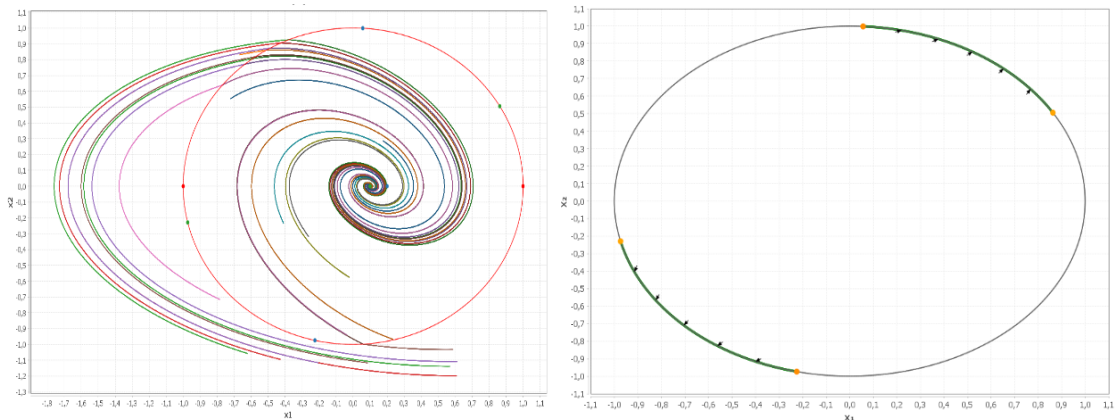


Рисунок 3.4.1 – Дуга скольжения на окружности переключения $h(x_1, x_2) = 0$ (составлено автором)

В следующем параграфе проводится подробный анализ этих участков, исследуются знаки первых и вторых производных $h'(t)$ и $h''(t)$, формулируются леммы и условия, при которых система (3.3.3) имеет предельный цикл.

3.5. Качественный анализ и секторные разделения дифференциального уравнения второго порядка с переключением

В 3.3 рассматривался случай, когда для системы с круговой линией переключения $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$ у линейных систем (3.3.4) и (3.3.5) имеются точно две общие точки контакта $(\pm r, 0)$. В данном параграфе проводится полный качественный разбор всех остальных конфигураций контакта с окружностью $h(x_1, x_2) = 0$, вводится секторное разбиение окружности и формулируются достаточные признаки существования предельного цикла.

Здесь предполагается, что $r = 1$ и коэффициенты системы (3.3.3) удовлетворяют условиям $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Введем обозначение $\Delta_i = \frac{1}{b_i} \sqrt{a_i^2 + (1 - b_i)^2}$, $i = 1, 2$. Тогда для систем (3.3.4) и (3.3.5) перечислим все возможные случаи, им соответствует следующая таблица.

Таблица 3.5.1. Конфигурации контактов, секторное разделение и число секторов

Условие для коэффициентов системы (3.3.4)	Контакты для системы (3.3.4)	Условие для коэффициентов системы (3.3.5)	Контакты для системы (3.3.5)	Секторы
$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 > \Delta_2$	0	2
$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 > \Delta_2$	0	3
$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 > \Delta_2$	0	4
$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 = \Delta_2$	1	3
$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 = \Delta_2$	1	4
$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 = \Delta_2$	1	5
$ c_1 > \Delta_1$	0	$ c_2 < \Delta_2$	2	4
$ c_1 = \Delta_1$	1	$ c_2 < \Delta_2$	2	5
$ c_1 < \Delta_1$	2	$ c_2 < \Delta_2$	2	6

Источник: Разработано и усовершенствовано автором [4 – А].

В зависимости от того, какие дуги возникают при выполнении условий таблицы 3.5.1, направление движения в этих дугах определяется знаком $f'(0)$ (см. 3.3).

Таблица 3.5.2. Графическое представление случаев таблицы 3.5.1 (с направлением пересечения дуг)

Условия	График
Пусть выполнены условия 1 таблицы 3.5.1.	Базовые контакты ($\pm 1, 0$)
Пусть выполнены условия 2 таблицы 3.5.1.	Базовые контакты ($\pm 1, 0$) (3.3.4) контакты ($h > 0$)
Пусть выполнены условия 3 таблицы 3.5.1.	Базовые контакты ($\pm 1, 0$) (3.3.4) контакты ($h > 0$)
Пусть выполнены условия 4 таблицы 3.5.1.	Базовые контакты ($\pm 1, 0$) (3.3.5) контакты ($h < 0$)

Продолжение таблицы 3.5.2.

Пусть выполнены условия 5 таблицы 3.5.1.	
Пусть выполнены условия 6 таблицы 3.5.1.	
Пусть выполнены условия 7 таблицы 3.5.1.	
Пусть выполнены условия 8 таблицы 3.5.1.	
Пусть выполнены условия 9 таблицы 3.5.1.	

Источник: Разработано и усовершенствовано автором [4 – А].

3.6. О новом программном пакете для задач моделирования предельных циклов дифференциального уравнения второго порядка с переключением

В данном параграфе представлен программный пакет, реализующий методы 3.3 – 3.5 для качественного анализа предельных циклов систем второго порядка с линией переключения $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$. Пакет предназначен для поиска и визуализации предельных циклов, построения секторного разделения, формирования и численного исследования отображения Пуанкаре, а также для автоматического создания иллюстраций, аналогичных рисункам к таблице 3.5.1. В данном программном пакете построено секторное разделение границы линии переключения и маркировка направлений траекторий решений на дугах, автоматический поиск точек контакта для систем (3.3.4) и (3.3.5) на окружности радиуса r , численное интегрирование траекторий (с обработкой событий пересечения линия переключения) и визуализация фазовых портретов и поиск существования предельного цикла.

Архитектура и реализация программного пакета. Разработанное настольное приложение реализовано на Java SE с использованием Swing для пользовательского интерфейса и JFreeChart для интерактивной визуализации фазовых портретов. Приложение состоит из графической и вычислительной подсистем. Вычислительное ядро инкапсулирует обе линейные подсистемы второго порядка для областей и алгоритм событийного интегрирования с переключением на границе $h(x_1, x_2) = 0$. Интегрирование траекторий выполняется явной схемой Рунге – Кутты 4 – го порядка с детектором события: смена знака $h(x_1, x_2)$ между узлами инициирует уточнение момента пересечения и переключение в альтернативную подсистему. Одновременно вычисляются геометрические ориентиры: общие точки контакта $(\pm r, 0)$, дополнительные точки контакта и стационарные точки соответствующих систем. Графическая подсистема формирует интерактивный фазовый портрет на плоскости (x_1, x_2) . Направление движения визуализируется короткими

стрелками вдоль кривых. Постановка задачи с точки зрения пользовательского взаимодействия реализована максимально напрямую.

Метод динамического определения предельных циклов для кусочно-линейного дифференциального уравнения с линией переключения. Для решения поставленной задачи был разработан численный метод определения особых точки и в окрестности данной точки возникновения предельного цикла у системы (3.3.3). В качестве критерия точности используется метод сшивания решение из двух областей. В ходе исполнения алгоритма производится два цикла вычислений: первый цикл отвечает за численное решение $(x_1(t), x_2(t))$ системы (3.3.3) в интервале $t \in [0, T]$; второй цикл отвечает за построение линии переключения относительно решению системы (3.3.3).

Алгоритмическая структура программной реализации рассмотренных методов, включая построения фазового портрета системы (3.3.3) и сшивание решений, полученных в различных областях фазовой плоскости, представлена в параграфе 3.7.

3.6.1. Численное интегрирование кусочно-линейной системы с линией переключения

Математическое моделирование динамики кусочно-линейных систем, содержащих разрыв правой части на линии переключения, представляет собой важный инструмент анализа качественного поведения решений дифференциальных уравнений второго порядка. В этом параграфе рассматривается система (3.3.3) с линией переключения $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0$. Как нам известно, что в точках линии $h(x_1, x_2) = 0$ правая часть системы имеет разрыв, вследствие чего система относится к классу «сшитых» дифференциальных уравнений Филиппова [96].

Для численного анализа система записывается в виде двухмерной системы первого порядка вида (3.3.4) и (3.3.5). Таким образом, на фазовой плоскости траектории эволюционируют по законам двух различных линейных систем. В частном случае, если коэффициенты системы (3.3.4) и (3.3.5) задать в виде $a_1 = 0.14$, $b_1 = 2$, $c_1 = \pm 0.9$, $a_2 = -0.6$, $b_2 = 0.89$, $c_2 =$

± 1.5 , $r = 1$, то условие $4b_i > a_i^2$ выполняется для $i = 1, 2$. Следовательно, линейные подсистемы обладают комплексными характеристическими корнями. Это означает, что фазовые траектории каждой из подсистем являются фокусами, причём устойчивость или неустойчивость определяется знаком коэффициента при x_2 . В частности, для внешней системы (3.3.4) $a_1 > 0$, тогда траектории стремятся к спиральному аттрактору, а для внутренней системы (3.3.5) $a_2 < 0$, тогда траектории являются расходящимися спиралями. Именно взаимодействие этих двух разно – устойчивых фокусных динамик при наличии линии переключения приводит к возникновению предельного цикла.

Метод Рунге – Кутты 4-го порядка для системы (3.3.3). Построение численных траекторий выполняется с использованием метода Рунге – Кутты четвёртого порядка. Для двумерной системы первого порядка

$$x' = F(x), \quad x = (x_1, x_2)^T,$$

шаг схемы имеет вид

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_n), \\ k_2 &= F\left(x_n + \frac{l}{2}k_1\right), \\ k_3 &= F\left(x_n + \frac{l}{2}k_2\right), \\ k_4 &= F(x_n + lk_3), \end{aligned}$$

а приближение следующего состояния определяется формулой

$$x_{n+1} = x_n + \frac{l}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (3.6.1)$$

Ключевая особенность применения метода Рунге – Кутты 4-го порядка к системе (3.3.3) заключается в том, что на каждом под шаг необходимо определять принадлежность точки G_1 или G_2 , что определяет выбор коэффициентов $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$. Таким образом, метод Рунге – Кутты адаптируется к разрывной структуре правой части, и каждая стадия k_i вычисляется по либо подсистеме (3.3.4), либо подсистеме (3.3.5), в зависимости от величины $h(x_1, x_2)$.

Пример численного шага для заданных параметров. Рассмотрим точку $x_0 = (1.2, 0.3)$. Поскольку выполняется условие $1.2^2 + 0.3^2 = 1.53 > 1$, эта точка принадлежит области G_1 . Следовательно, движение в данной области описывается подсистемой (3.3.4) с параметрами $a_1 = 0.14$, $b_1 = 2$, $c_1 = 0.9$. Для дальнейшего анализа вычислим:

$$k_1 = (x_2, -0.14x_2 - 2(x_1 - 0.9)).$$

Подставляя $x_0 = (1.2, 0.3)$, получаем $k_1 = (0.3, -0.642)$. Отсюда определяем k_2, k_3, k_4 :

$$k_2 = (0.29679, -0.64455), k_3 = (0.29678, -0.64452), k_4 = (0.293, -0.647).$$

При этом значение $l = 0.01$. Постановка полученных результатов в (3.6.1) даёт

$$x_1 \approx 1.2030 - 0.00001, x_2 \approx 0.2936 - 0.00002.$$

Траектория медленно приближается к внешнему фокусу по спирали, что согласуется с его устойчивым характером.

Для заданных коэффициентов выполняется условия теоремы: коэффициент демпфирования внешней подсистемы положителен $a_1 = 0.14 > 0$, а внутренней – отрицательный $a_2 = -0.6$. Во внутренней области фазовые траектории удаляются от неустойчивого равновесия, тогда как во внешней области они приближаются по спирали к устойчивому фокусу соответствующей подсистемы. При достижении траекторией линии переключения $h = 0$ происходит переход из области G_2 в область G_1 . В энергетической интерпретации отрицательное демпфирование во внутренней области соответствует поступлению энергии в систему, а положительное демпфирование во внешней области – её рассеянию.

Это механизм самовозбуждения колебаний, приводящий к возникновению единственного устойчивого предельного цикла. Численные траектории, построенные методом Рунге – Кутты 4 – го порядка, демонстрируют, что решение, расширяясь по спирали внутри области G_2 и приближаясь к окружности, после пересечения линии переключения переходит в режим внешней системы, где спирали начинают сжиматься, однако не достигают фокуса из –

за повторного возврата в G_2 , вследствие чего точки пересечения со линией переключения стабилизируются и траектория выходит на замкнутый предельный цикл. Результат соответствует классическому сценарию возникновения колебаний в системах Филиппова.

Для коэффициентов $a_1 = 0.14$, $b_1 = 2$, $c_1 = \pm 0.9$, $a_2 = -0.6$, $b_2 = 0.89$, $c_2 = \pm 1.5$, $r = 1$ полученные результаты подтверждают, что кусочно-линейная система обладает единственным устойчивым предельным циклом [120-121]. Метод Рунге – Кутты четвертого порядка обеспечивает высокую точность численного интегрирования даже в присутствии разрывов правой части, корректно отслеживает точки пересечения линии переключения и позволяет получать надёжные фазовые портреты, подтверждающие теоретические результаты.

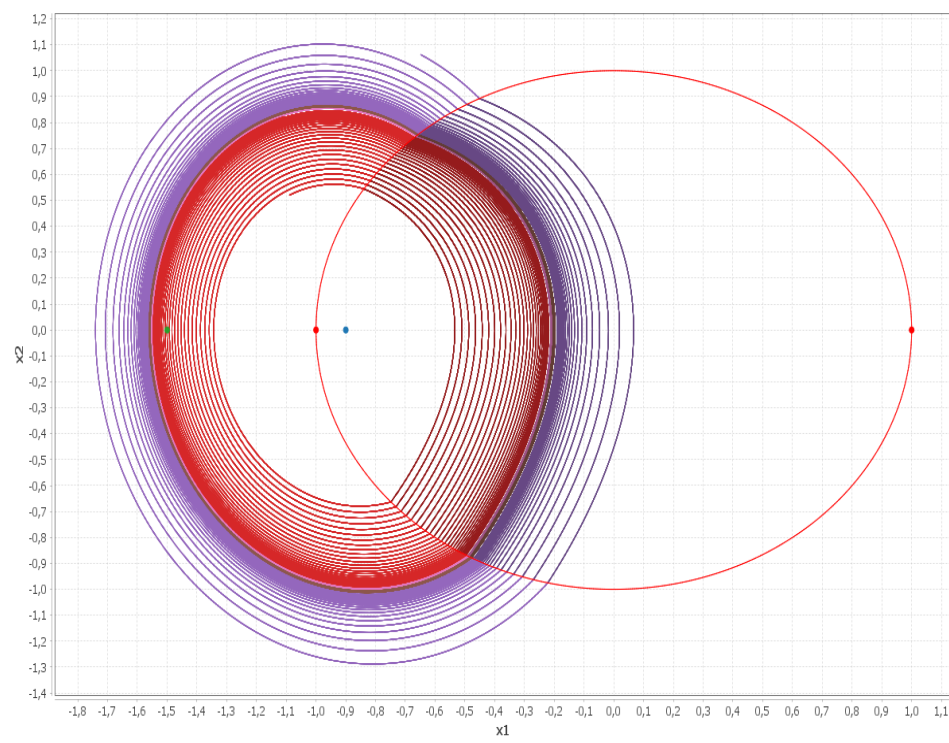


Рисунок 3.6.2 – Предельный цикл, когда $c_1 = -0.9$, $c_2 = -1.5$ (составлено автором)

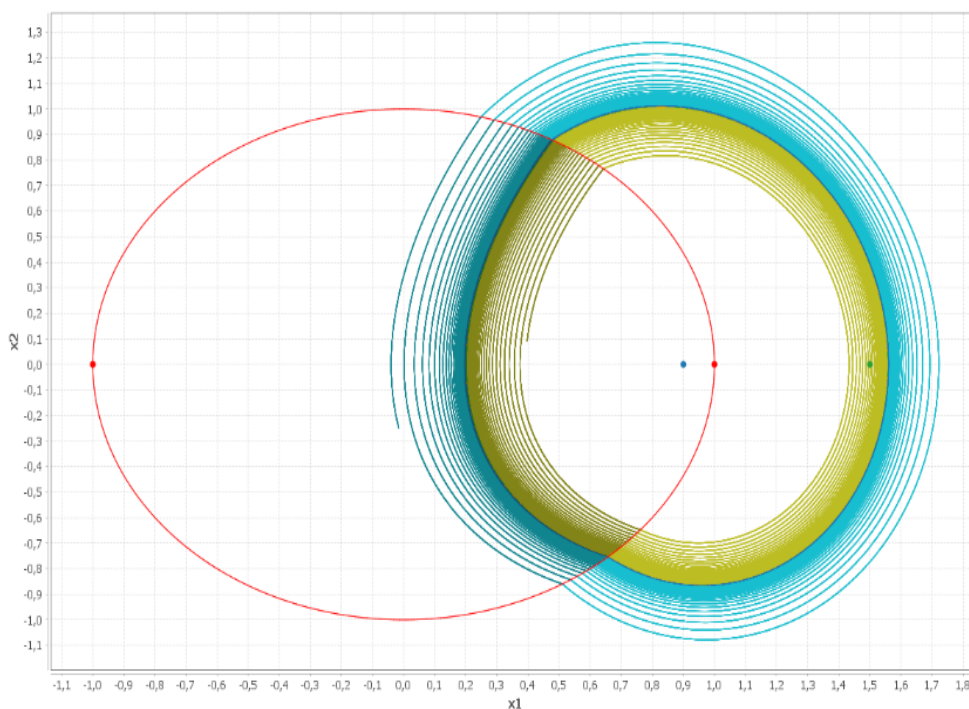


Рисунок 3.6.3 – Предельный цикл, когда $c_1 = 0.9$, $c_2 = 1.5$ (составлено автором)

3.7. Структура и описание алгоритмов программного пакета

В настоящем разделе представлены основные алгоритмы и ключевые фрагменты программной реализации, непосредственно связанные с полученными научными результатами. Их назначение состоит в проведении вычислительных экспериментов, визуализации решений и сопоставлении результатов численного моделирования с полученными аналитическими зависимостями.

При проектировании программных средств выделены два взаимосвязанных направления исследования. Первое связано с вычислением характеристик решений кусочно-линейных дифференциальных уравнений, описываемых формулой Лиувилля-Остроградского и её обобщениями. Второе относится к анализу кусочно-линейных уравнений второго порядка с окружностью в качестве линии переключения. В рамках этого направления рассматриваются особенности фазовых траекторий и динамические эффекты, обусловленные сменой линейных подсистем при переходе между областями фазовой плоскости.

Программная реализация предусматривает вычисление фундаментальных матриц решений, определителей Вронского и экспоненциальных зави-

симостей, установленных в теоретической части работы, сопоставление этих величин позволяет исследовать выполнение полученных соотношений в численных расчётах с учётом условий переключения. Графические средства обеспечивают построение фазовых портретов, отображение отдельных траекторий и численное исследование предельных циклов, Совместное представление вычисляемых характеристик и фазовых траекторий позволяет проследить связь между параметрами модели и характером движения

Отдельная задача программной реализации состоит в обработке переходов через линию переключения. Для её решения предусмотрены алгоритмы определения моментов пересечения траекторий с окружностью, а также вычисления и классификации точек контакта. Эти процедуры необходимы для корректного выбора действующей подсистемы и согласования участков траектории. Их применение позволяет исследовать изменения фазового портрета при варьировании параметров и сопоставлять наблюдаемые режимы движения с теоретическими условиями существования предельных циклов.

Возможность изменения коэффициентов уравнений позволяет использовать программные средства для воспроизведения приведённых в диссертации вычислительных экспериментов и исследования дополнительных наборов параметров в пределах рассматриваемых моделей. Такой подход обеспечивает сопоставимость результатов и позволяет оценивать, насколько выявленные особенности движения сохраняются при изменении характеристик системы.

Представленные программные средства связывают аналитическое исследование с численным моделированием. Их использование позволяет иллюстрировать теоретические выводы, анализировать конкретные режимы движения и проверять согласованность вычислительных результатов с установленными свойствами решений.

Алгоритм программной реализации формулы Лиувилля-Остроградского. Теоретической основой алгоритма служит теорема 3.2,1,

устанавливающая закон изменения определителя Вронского для рассматриваемой кусочно-линейной системы второго порядка. Программная реализация направлена на вычисление этого определителя и сопоставление его численных значений с зависимостью, заданной теоремой, при этом учитываются смена подсистем и соответствующие условия перехода через линию переключения. Результаты расчёта используются анализа изменения вронскиана и графического представления полученных зависимостей.

На её основе разработан следующий алгоритм программной реализации.

- Блок исходных данных:

Задаются параметры систем:

- a, b, c – коэффициенты дифференциального уравнения (3.2.4);
- λ – параметр сдвига линии переключения;
- Δt – шаг интегрирования;
- t_{max} – время моделирования;
- Блок интерфейса:
 - Формируется графическая оболочка программы на основе библиотеки Swing;
 - В центральной области окна отображается фазовая плоскость;
 - В левой панели управления реализован ввод параметров системы a, b, c, λ , шага Δt и времени моделирования t_{max} ;
 - Реализован обработчик щелчка мышью по фазовой плоскости, иницирующий задание начальных условий для двух пар решений;
- Блок численного интегрирования:
 - Для каждой пары начальных условий выполняется численное интегрирование системы методом Рунге – Кутты четвёртого порядка;
 - Интегрирование осуществляется пошагово с шагом Δt на интервале $0 \leq t \leq t_{max}$;

- Полученные значения решений сохраняются для последующей визуализации;
- Блок вычисления определителя Вронского:
 - Для двух линейно независимых решений на каждом шаге вычисляется определитель Вронского;
 - Для внутренней области применяется система (3.3.4), для внешней области система (3.3.5);
- Блок геометрической интерпретации:
 - На фазовой плоскости строится параллелограмм с вершинами

$$O = (0,0), A = x^{(1)}(t), B = x^{(2)}(t), C = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t).$$
 площадь которого равна $|W(t)|$;
 - Параллелограмм обновляется в процессе анимации, что обеспечивает наглядную иллюстрацию формулы Лиувилля – Остроградского;
- Блок визуализации:
 - На фазовой плоскости одновременно отображаются:
 - фазовые траектории двух решений;
 - векторы решений, выходящие из начала координат;
 - параллелограмм, соответствующий текущему значению $W(t)$;
 - координатные оси и линия переключения;

Ниже на рисунке 3.7.1 показано блок – схема этого алгоритма.

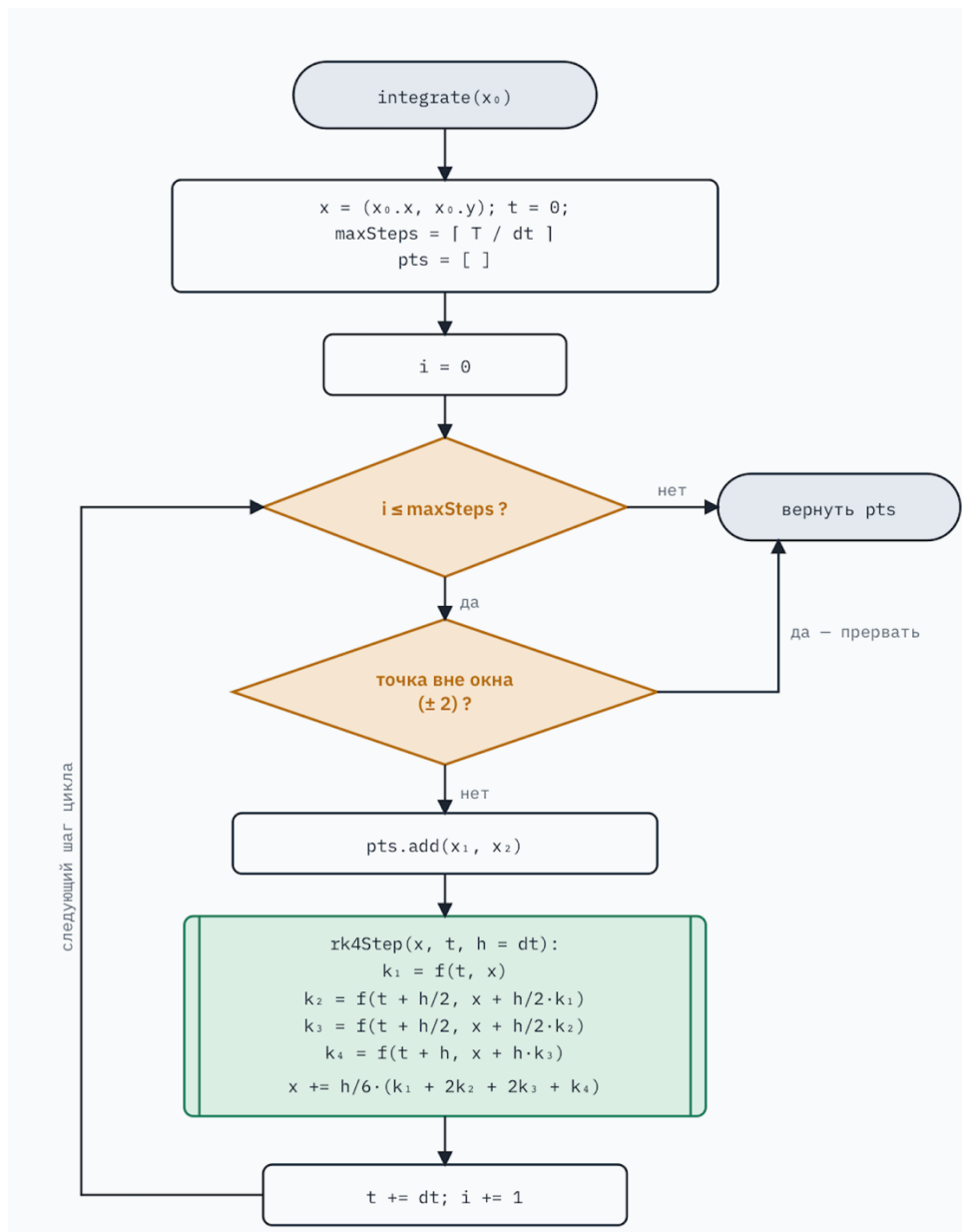


Рисунок 3.7.1 - Блок – схема алгоритма программной реализации формулы Лиувилля – Остроградского (составлено автором)

Алгоритм построения фазового портрета кусочно-линейной дифференциальной системы второго порядка с линией переключения. Леммы (3.3.1) и (3.3.2) позволяют выявить стационарное решение для системы (3.3.1) и определить тип особой точки для системы (3.3.1) в виде следующего алгоритма:

- Блок исходных данных:

Задаются параметры систем:

- a_1, b_1, c_1 – коэффициенты системы (3.3.4);
- a_2, b_2, c_2 – коэффициенты системы (3.3.5);

- r – радиус границы переключения;
- t_{max} – время моделирования;
- Блок интерфейса:
 - Формируется графическая оболочка программы (Swing);
 - В центральной области выводится график фазового портрета на основе библиотеки JFreeChart;
 - В правой части создаётся панель управления параметрами (ввод коэффициентов системы, выбор аналитического/численного решения, слайдер времени t_{max} ;
 - Реализован обработчик щелчка мышью на фазовой плоскости, который инициирует построение траектории из заданной начальной точки;
- Блок построения границы переключения:
 - Строится окружность радиуса r , разделяющая фазовую плоскость на две области действия систем;
 - Вычисляются точки контакта траекторий с границей и стационарные точки для обеих систем по аналитическим формулам

$$T_{x_1}(a_1, b_1, c_1), T_{x_2}(a_2, b_2, c_2), (c_1, 0), (c_2, 0).$$
 - Точки добавляются на фазовый портрет с цветовой маркировкой;
- Блок вычисления аналитического решения:
 - Для каждой системы определяются решения в виде

$$x(t) = c + e^{\alpha t}(d_1 \cos(\beta t) + d_2 \sin(\beta t)),$$

$$y(t) = c + e^{\alpha t}((\alpha d_1 + \beta d_2) \cos(\beta t) + (\alpha d_2 - \beta d_1) \sin(\beta t)),$$
 где $\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$.
 - Для внутренней области применяется система (3.3.4), для внешней области система (3.3.5);
 - Решения строятся пошагово с шагом Δt ;
- Блок численного вычисления

- При выборе численного метода используется интегратор Dormand – Prince из библиотеки Apache Commons Math;
- В зависимости от принадлежности точки внутренней или внешней области интегратор решает уравнения:

$$x'' + ax' + b(x - c) = 0.$$

- Для каждой траектории организован пошаговый вывод точек на фазовую плоскость с использованием таймера;
- Реализован плавный показ поведения траектории;
- Для каждого режима вычисляются случаи 1-3.
- На графике отображаются траектории движения системы, стационарные точки, граница переключения и предельные циклы.
- Интерфейс позволяет изменять параметры и наблюдать изменение фазового портрета в реальном времени.

Таким образом, программа реализует алгоритм численного – аналитического построения фазовых портретов кусочно-линейных систем второго порядка с переключением.

Структура реализованного алгоритма и взаимодействие внутренних и внешних подсистем представлены на рис. 3.7.2.

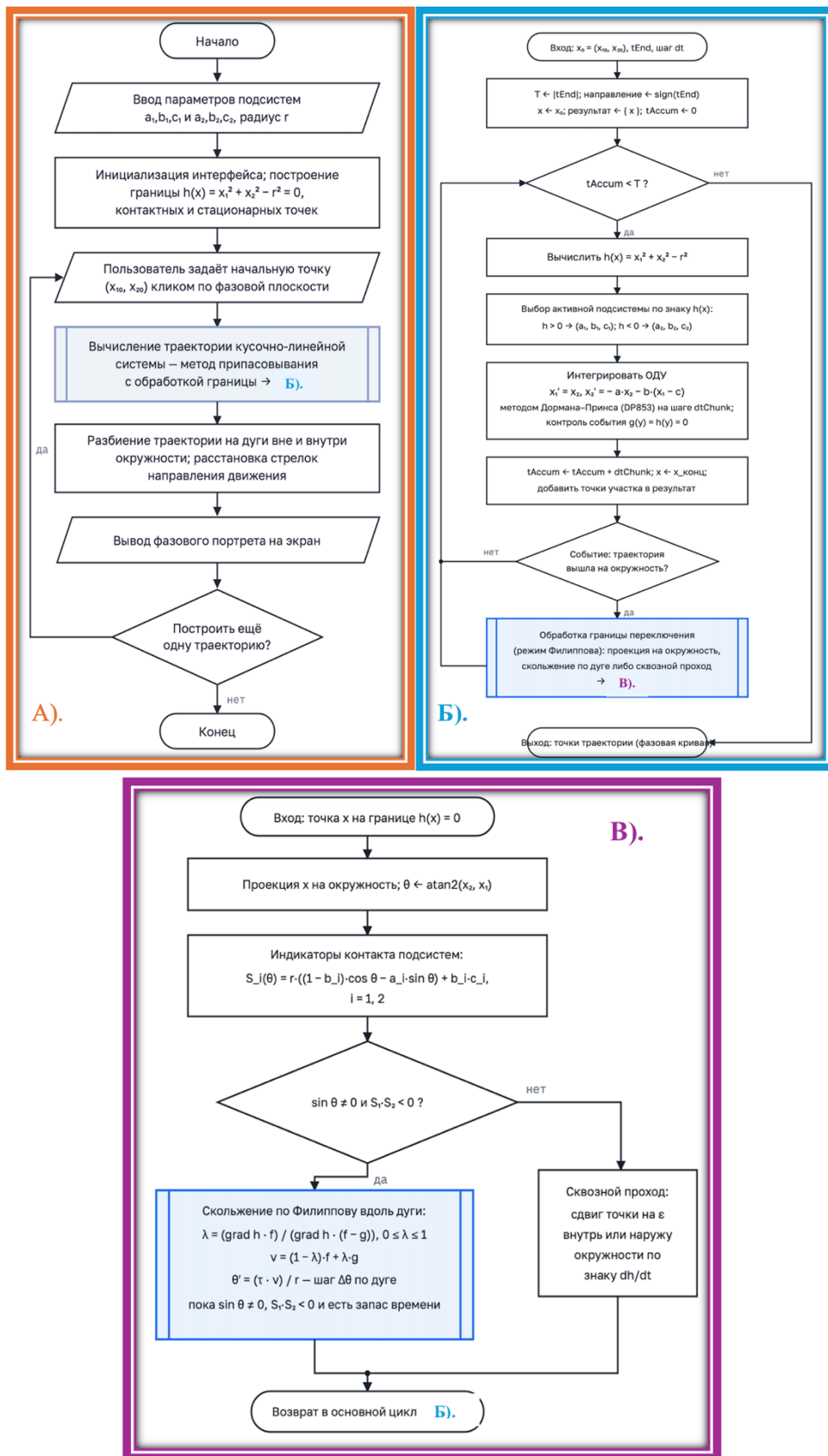


Рисунок 3.7.2 – Блок – схема алгоритма построения фазового портрета кусочно-линейной системы второго порядка с окружностью переключения (составлено автором)

3.7.1. Программная реализация алгоритмов численного исследования динамических систем

А). Программная реализация численного исследования системы (3.2.6)

Программная реализация на языке Java предназначена для численного исследования системы с модульной нелинейностью, построения фазовых траекторий и анализа определителя $W(t)$, образованного двумя решениями. Вычислительная часть связывает математическую модель с её графическим представлением: параметры системы задают векторное поле, метод Рунге–Кутты формирует последовательности фазовых точек, а полученные координаты используются для вычисления $W(t)$ и его логарифмического представления. Далее рассматриваются пять основных фрагментов программы и последовательность выполняемых ими операций.

Основные вычислительные фрагменты программного комплекса

Проверка условия на параметры. Перед интерпретацией результатов численного эксперимента проверяется соотношение между коэффициентами системы:

$$4b > \max\{(a - c)^2, (a + c)^2\}.$$

Фрагмент 1 – Проверка аналитического условия

```
private boolean isConditionMet() {  
    double left = 4.0 * b;  
    double m = Math.max(sq(a - c), sq(a + c));  
    return left > m; }
```

Сначала в переменной *left* вычисляется левая часть неравенства, равная $4b$. Затем вспомогательный метод *sq*, возвращающий квадрат своего аргумента, применяется к выражениям $a - c$ и $a + c$. Метод *Math.max* выбирает большее из двух значений и сохраняет его в переменной *m*.

На заключительном шаге оператор *return left > m* возвращает значение *true*, если строгое неравенство выполнено, и *false* в противном случае. Поэтому равенство левой и правой частей также относится к невыполнению условия. Результат проверки используется для вывода сообщения о

выбранных параметрах; сама проверка не запрещает продолжение численного расчёта.

Математический смысл условия состоит в одновременной отрицательности дискриминантов характеристических многочленов линейных частей системы по обе стороны линии переключения:

$$D_- = (a - c)^2 - 4b < 0, \quad D_+ = (a + c)^2 - 4b < 0.$$

Следовательно, обе линейные части имеют комплексно-сопряжённые собственные значения. Проверка характеризует тип собственных значений, и сама по себе не устанавливает устойчивость всей системы.

Формирование правой части системы. Исследуемая динамическая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_2 - \lambda|. \end{cases}$$

Её правая часть реализована методом *f*, который возвращает двухкомпонентный массив производных фазовых координат.

Фрагмент 2 – Вычисление векторного поля

```
double[] f(double t, double[] x) {  
    double x1 = x[0];  
    double x2 = x[1];  
    double dx1 = x2;  
    double dx2 = -a * x2 - b * x1 - c * Math.abs(x2 - lambda);  
    return new double[]{dx1, dx2};}
```

На первом шаге из массива *x* извлекаются текущие координаты: элемент *x*[0] соответствует x_1 , а элемент *x*[1] - x_2 . Далее переменной *dx1* присваивается значение второй координаты, что непосредственно реализует первое уравнение системы.

Затем вычисляется *dx2*. Слагаемые $-a * x_2$ и $-b * x_1$ образуют линейную часть второго уравнения, а выражение $-c * \text{Math.abs}(x_2 - \text{lambda})$ задаёт модульную нелинейность. В завершение значения *dx1* и *dx2* объединяются в массив, который передаётся процедуре численного интегри-

рования. Параметр t сохраняется в интерфейсе метода, хотя правая часть данной автономной системы явно от времени не зависит.

Оператор *Math.abs* автоматически учитывает положение фазовой точки относительно прямой $x_2 = \lambda$. При $x_2 \geq \lambda$ второе уравнение системы принимает вид

$$x_2' = -bx_1 - (a + c)x_2 + c\lambda,$$

а при $x_2 < \lambda$ имеет вид

$$x_2' = -bx_1 - (a - c)x_2 - c\lambda.$$

При ненулевом λ эти выражения задают аффинные подсистемы, то есть содержат постоянные слагаемые. На линии $x_2 = \lambda$ их значения совпадают, поэтому векторное поле непрерывно, хотя его производная по второй координате при $c \neq 0$ меняется скачком.

Численное интегрирование методом Рунге–Кутты. Переход от текущего состояния к следующему выполняется классической схемой Рунге–Кутты четвёртого порядка. Метод *rk4Step* получает массив координат x , текущее время t и шаг интегрирования h .

Фрагмент 3 – Реализация метода Рунге–Кутты четвёртого порядка

```
void rk4Step(double[] x, double t, double h) {
    double[] k1 = f(t, x);
    double[] xt = new double[2];
    xt[0] = x[0] + 0.5 * h * k1[0];
    xt[1] = x[1] + 0.5 * h * k1[1];
    double[] k2 = f(t + 0.5 * h, xt);
    xt[0] = x[0] + 0.5 * h * k2[0];
    xt[1] = x[1] + 0.5 * h * k2[1];
    double[] k3 = f(t + 0.5 * h, xt);
    xt[0] = x[0] + h * k3[0];
    xt[1] = x[1] + h * k3[1]; double[] k4 = f(t + h, xt);
    x[0] = x[0] + h / 6.0 * (k1[0] + 2 * k2[0] + 2 * k3[0]
    + k4[0]); x[1] = x[1] + h / 6.0 * (k1[1] + 2 * k2[1] + 2 *
    k3[1] + k4[1]);}
```

Сначала вычисляется вектор $k1$, равный значению правой части в текущей точке. Затем создаётся временный массив xt , в который записывается предварительная оценка состояния после половины шага с использованием $k1$. Вызов $f(t + 0.5 * h, xt)$ даёт второй вектор $k2$.

На следующем этапе промежуточное состояние вновь вычисляется относительно исходного массива x , но уже по вектору $k2$. Это позволяет получить уточнённую оценку $k3$ в середине шага. После этого по $k3$ строится оценка состояния в конце полного шага и вычисляется $k4$.

Новые значения обеих координат формируются по взвешенной комбинации четырёх оценок. Для вектора состояния $X_n = (x_{1,n}, x_{2,n})$ формула перехода записывается следующим образом:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Векторы $k1 - k4$ содержат значения производных, поэтому множитель h вводится при вычислении промежуточных состояний и окончательного приращения. Метод изменяет переданный массив x непосредственно; отдельный массив нового состояния не возвращается. При каждом обращении к f модульный член вычисляется заново для соответствующей промежуточной точки.

Четвёртый порядок точности классической схемы относится к участкам с достаточно гладкой правой частью. При пересечении линии $x_2 = \lambda$ этот порядок нельзя автоматически переносить на весь расчёт, поскольку при $c \neq 0$ правая часть имеет излом. В приведённой реализации используется постоянный шаг без отдельной локализации пересечения. Для оценки точности вблизи линии переключения следует сопоставлять результаты, полученные при уменьшении шага.

Построение численной фазовой траектории. Для получения последовательности фазовых точек метод *integrate* многократно вызывает *rk4Step*, начиная с заданного начального состояния $x0$. Величина dt определяет шаг, а $tmax$ – заданный временной горизонт T .

Фрагмент 4 – Цикл интегрирования и сохранения координат

```
List<Point2D.Double> integrate(Point2D.Double x0) {  
    List<Point2D.Double> pts = new ArrayList<>();  
    double[] x = {x0.x, x0.y};  
    double t = 0.0;  
    int maxSteps = (int) Math.ceil(tmax / dt);  
    for (int i = 0; i <= maxSteps; i++) {  
        if (x[0] < X_MIN - 2 || x[0] > X_MAX + 2 ||  
            x[1] < Y_MIN - 2 || x[1] > Y_MAX + 2)  
            break;  
        pts.add(new Point2D.Double(x[0], x[1]));  
        rk4Step(x, t, dt);  
        t += dt; }  
    return pts;}
```

Сначала создаётся список *pts*, в который будут записываться рассчитанные точки. Координаты начального состояния копируются в массив *x*, а текущее время принимается равным нулю. Затем определяется целое число $N = \lceil T/dt \rceil$, хранящееся в переменной *maxSteps*; округление вверх выполняет метод *Math.ceil*.

В начале каждой итерации проверяется положение текущей точки относительно области визуализации, расширенной на две единицы по каждой координате. При выходе за эти границы оператор *break* завершает цикл. Если точка остаётся в допустимой области, в список *pts* добавляется новый объект *Point2D.Double* с текущими значениями координат.

После сохранения точки выполняется один шаг *RK4*, а переменная *t* увеличивается на *dt*. Такой порядок сохраняет в списке начальное состояние и последующие состояния на равномерной временной сетке. Возвращённый список используется для отрисовки траектории; её соседние точки соединяются отрезками.

Поскольку условие цикла имеет вид $i \leq \text{maxSteps}$, при отсутствии досрочного выхода сохраняется $N + 1$ точка с индексами от нуля до N . Последняя сохранённая точка соответствует времени $t_N = N \cdot dt$, которое мо-

жет превышать T менее чем на один шаг. В последней итерации также вычисляется ещё одно состояние, но в список оно уже не включается. Таким образом, фрагмент ограничивает расчёт числом итераций и пространственной областью, а не проверкой точного равенства текущего времени величине T .

Вычисление определителя и его логарифмического представления.

Две траектории, рассчитанные из разных начальных состояний с одинаковым шагом, хранятся в списках u и v . Для текущего индекса анимации программа выбирает по одной точке из каждого списка и вычисляет определитель соответствующих фазовых векторов.

Фрагмент 5 – Вычисление текущего времени и определителя

```
double[] currentTimeAndW() {
    if (u == null || v == null)
        return new double[]{0.0, 0.0};
    int n = Math.min(u.size(), v.size());
    if (n < 2)
        return new double[]{0.0, 0.0};
    int i = Math.min(idx, n - 1);
    Point2D.Double A = u.get(i);
    Point2D.Double B = v.get(i);
    double W = det(A, B);
    double t = i * canvas.dt;
    return new double[]{t, W};
}
private static double det(Point2D.Double A,
    Point2D.Double B) {return A.x * B.y - A.y * B.x;}
```

На первом этапе проверяется наличие обеих траекторий. Если один из списков не создан либо общая доступная длина меньше двух точек, метод возвращает служебную пару нулей. Такой возврат обозначает отсутствие данных для отображения и не является результатом вычисления определителя по двум решениям.

Затем определяется общая длина n , равная меньшему из размеров списков. Индекс i ограничивается значением $n - 1$, что позволяет выбирать

точки только из общей части траекторий. Из списков извлекаются векторы $A = (A_1, A_2)$ и $B = (B_1, B_2)$, относящиеся к одному узлу временной сетки.

Метод *det* вычисляет разность перекрёстных произведений координат:

$$W(t_i) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1.$$

Абсолютная величина этого определителя равна площади параллелограмма, построенного на векторах A и B с общим началом в начале координат. Знак определителя задаёт ориентацию пары векторов. Текущее время восстанавливается по формуле $t_i = i \cdot dt$, после чего метод возвращает массив $\{t, W\}$. В существующей реализации график обновляется по первой паре решений при изменении индекса анимации.

В рассматриваемом фрагменте $W(t)$ представляет собой определитель двух решений исходной системы с модульной нелинейностью. Его отождествление с вронскианом решений одной линейной однородной системы и применение классической формулы Лиувилля–Остроградского требуют дополнительных предпосылок. Само вычисление $\det(A, B)$ этих предпосылок не проверяет.

Для графического анализа предусмотрен обычный и логарифмический режимы. Преобразование значений выполняется в классе *WChartPanel* следующим продолжением пятого фрагмента:

Продолжение фрагмента 5 – Подготовка значений для графика

```
List<Double> ys = new ArrayList<>(ws.size());
for (double w : ws) {
    if (!logMode) ys.add(w);
    else ys.add(Math.log(Math.abs(w) + 1e-12));}
```

Сначала создаётся список *ys*, предназначенный для ординат графика. Затем последовательно перебираются значения *w* из списка *ws*. Если флаг *logMode* выключен, каждое значение переносится в *ys* без изменения, и по этим данным отображается $W(t)$.

При включённом логарифмическом режиме вычисляются модуль $\text{Math.abs}(w)$ и натуральный логарифм Math.log . Перед логарифмированием

ем к модулю добавляется малая положительная величина, поэтому фактически отображаемая функция имеет вид

$$L_{\varepsilon}(t) = \ln(|W(t)| + \varepsilon), \quad \varepsilon = 10^{-12}.$$

Добавление ε исключает обращение к логарифму нуля: при $W(t) = 0$ получается конечное значение $\ln \varepsilon$. Когда $|W(t)|$ существенно больше ε , функция $L_{\varepsilon}(t)$ приближает $\ln|W(t)|$. Вблизи нуля график отражает регуляризованное выражение, что необходимо учитывать при интерпретации его значений.

Соответствие программных фрагментов этапам алгоритма. Рассмотренные фрагменты раскрывают вычислительное содержание блок-схемы алгоритма. Блок ввода задаёт параметры a, b, c, λ , шаг dt , временной горизонт T и начальные состояния; блоку проверки аналитического условия соответствует метод *isConditionMet*. Формирование векторного поля выполняет метод f , а один переход к следующему состоянию - *rk4Step*. Метод *integrate* объединяет эти операции в цикл «проверка границ – сохранение текущей точки – вычисление следующего состояния – увеличение времени – проверка счётчика». После расчёта двух траекторий методы *currentTimeAndW* и *det* обеспечивают выбор синхронных точек и вычисление $W(t)$; завершающий блок подготавливает и отображает график определителя либо его логарифмического представления. Такое соответствие связывает каждый основной этап блок-схемы с конкретной вычислительной операцией программы.

Б). Программная реализация численного исследования системы с окружностью переключения

Вторая программа предназначена для численного исследования системы, состоящей из двух подсистем, действующих внутри и вне окружности. Основной класс *PhasePortrait* обеспечивает задание параметров и построение фазовых траекторий, класс *HelperClass* выполняет вычисления, а класс *FilippovCircleForm* определяет и отображает дуги скольжения. Вычислительная часть включает выбор активной подсистемы, поиск контактных точек,

обнаружение пересечения окружности и продолжение движения с учётом режима Филиппова. Далее рассматриваются основные фрагменты второй программы; их нумерация продолжает нумерацию фрагментов первой программы.

Функция переключения и правые части подсистем. Положение фазовой точки относительно окружности определяется функцией

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - r^2, \quad r > 0.$$

Если $h < 0$, точка находится внутри окружности, если $h > 0$ – вне её. Равенство $h = 0$ задаёт границу переключения. Для каждой области используется подсистема вида (3.3.4) и (3.3.5).

Коэффициенты с суффиксом *Out* относятся к внешней подсистеме, а с суффиксом *In* – к внутренней. Во второй программе параметр c задаёт сдвиг равновесия по первой координате и имеет иной смысл, чем коэффициент при модуле в первой программе.

Фрагмент 6 – Вычисление функции переключения и векторного поля

```
private double h(double[] x) { return x[0]*x[0] + x[1]*x[1]
- r*r; }
private static void linVectorField(double a, double b, double c, double[] y,
double[] yDot) {
    yDot[0] = y[1];
    yDot[1] = -a * y[1] - b * (y[0] - c);}
```

Сначала метод h вычисляет сумму квадратов фазовых координат и вычитает квадрат радиуса. Полученное значение используется для выбора области, поэтому извлекать квадратный корень на этом этапе не требуется. Далее метод *linVectorField* записывает в массив *yDot* значения двух производных: первая равна второй координате, а вторая определяется коэффициентами выбранной подсистемы.

Массив y содержит текущее состояние, тогда как *yDot* предназначен для результата вычисления правой части. При $b \neq 0$ равновесие отдельной подсистемы находится в точке $(c, 0)$. Эти же уравнения используются при инте-

гировании полной переключаемой системы и при независимом построении траекторий её подсистем.

Вычисление контактных точек на окружности. Контактная точка определяется равенством нулю производной функции h вдоль поля соответствующей подсистемы при условии $h = 0$. Подстановка правых частей системы даёт

$$\dot{h} = \nabla h \cdot F = 2x_2[(1 - b)x_1 - ax_2 + bc].$$

Из этого выражения следуют два вида кандидатов на контакт. Первый задаётся условием $x_2 = 0$ и даёт точки $(r, 0)$ и $(-r, 0)$, которые в основном окне программы отмечаются отдельно. Второй определяется пересечением окружности с прямой $(1 - b)x_1 - ax_2 + bc = 0$.

При $b \neq 1$ координата x_1 выражается через x_2 . После подстановки в уравнение окружности получается квадратное уравнение

$$A x_2^2 + B x_2 + C = 0,$$

$$A = a^2 + (1 - b)^2, \quad B = -2abc, \quad C = b^2c^2 - (1 - b)^2r^2.$$

Следующий фрагмент из метода *computeContactPoints* показывает вычисление дискриминанта и координат дополнительных контактных точек. Список *res* и переменные a, b, c, r определены в контексте исходного метода и класса. Для компактности приведено вычислительное ядро ветви $|1 - b| > \varepsilon$.

Фрагмент 7 – Вычисление дополнительных контактных точек

```
double denom = 1.0 - b;
double eps = 1e-12;
double A = a * a + denom * denom;
double B = -2.0 * a * b * c;
double C = b * b * c * c - denom * denom * r * r;
double D = B * B - 4.0 * A * C;
if (D < -eps) return res;
if (D < 0) D = 0;
double sqrtD = Math.sqrt(D);
double x2_1 = (-B + sqrtD) / (2.0 * A);
double x2_2 = (-B - sqrtD) / (2.0 * A);
double x1_1 = (a * x2_1 - b * c) / denom;
double x1_2 = (a * x2_2 - b * c) / denom;
```

Сначала величина $1 - b$ сохраняется в переменной *denom*, а затем формируются коэффициенты A, B и C . По ним вычисляется дискриминант $D = B^2 - 4AC$. Если D меньше отрицательного порога $-\varepsilon$, метод возвращает список без новых точек. Малое отрицательное значение D заменяется нулём, чтобы учесть возможную погрешность округления.

Далее находятся два корня квадратного уравнения, соответствующие координатам $x2_1$ и $x2_2$. Первые координаты восстанавливаются по формуле

$$x_1 = \frac{ax_2 - bc}{1 - b}.$$

В полной реализации полученные координаты проверяются на конечность. Совпадающие корни не добавляются повторно, если расстояние между найденными точками меньше заданного допуска. Для внешней и внутренней подсистем метод вызывается с разными наборами коэффициентов.

При b , близком к единице, используется отдельная ветвь. Деление на $1 - b$ в ней заменяется прямым решением уравнения $-ax_2 + c = 0$.

Продолжение фрагмента 7 – Особый случай b около единицы

```
if (Math.abs(a) < eps) return res;
double x2 = c / a;
if (!Double.isFinite(x2)) return res;
double tmp = r * r - x2 * x2;
if (tmp < -eps) return res;
if (tmp < 0) tmp = 0;
double x1p = Math.sqrt(tmp);
double x1m = -x1p;
res.add(new double[]{x1p, x2});
if (Math.abs(x1p - x1m) > 1e-12) res.add(new double[]{x1m,
x2});
return res;
```

Если a достаточно далеко от нуля, вычисляется $x_2 = c/a$, после чего проверяется неотрицательность величины $r^2 - x_2^2$. Из её квадратного корня получаются две возможные первые координаты. При совпадении этих координат сохраняется одна точка. Если одновременно $b = 1$ и $a = 0$, исходный метод возвращает пустой список дополнительных точек: при $c \neq 0$

остаются общие точки $(\pm r, 0)$, а при $c = 0$ нормальная скорость равна нулю на всей окружности.

В классе *FilippovCircleForm* дополнительно применяется поиск контактных точек на угловой сетке: при смене знака соответствующей функции между соседними узлами положение корня оценивается линейной интерполяцией. Этот поиск используется при построении изображения; аналитический расчёт показывает геометрический смысл контактных точек.

Выбор активной подсистемы. Для интегрирования очередного участка траектории метод *odeForState* выбирает коэффициенты по знаку функции h в его начальной точке.

Фрагмент 8 – Выбор подсистемы по положению фазовой точки

```
private FirstOrderDifferentialEquations odeForState(final
double[] x) {
    final boolean outside = h(x) > 0;
    final double a = outside ? aOut : aIn;
    final double b = outside ? bOut : bIn;
    final double c = outside ? cOut : cIn;
    return new FirstOrderDifferentialEquations() {
        @Override public int getDimension() { return 2; }
        @Override public void computeDerivatives(double t,
double[] y, double[]
yDot) {
            linVectorField(a, b, c, y, yDot); } };}
```

На первом шаге вычисляется логическое значение *outside*. Оно равно *true*, если начальная точка участка расположена вне окружности. Затем условными операторами выбираются внешние или внутренние значения a, b и c .

После выбора коэффициентов создаётся объект *FirstOrderDifferentialEquations*. Метод *getDimension* сообщает интегратору, что состояние состоит из двух координат. Метод *computeDerivatives* передаёт выбранные коэффициенты и текущее состояние в *linVectorField*, который заполняет массив производных.

Выбранная подсистема сохраняется на всём интегрируемом участке. Переключение коэффициентов выполняется после остановки на окружности

и обработки режима движения. Если исходная точка уже лежит вблизи $h = 0$, основной цикл сначала рассматривает движение по границе и только затем формирует систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую очередной области фазового пространства.

Численное интегрирование и событие пересечения границы. Во второй программе используется адаптивный интегратор *DormandPrince853Integrator* из библиотеки Apache Commons Math. Он интегрирует выбранную подсистему и совместно с обработчиком событий локализует пересечение окружности. Поэтому алгоритм второй программы отличается от схемы с постоянным шагом RK4, применяемой в первой программе.

Фрагмент 9 – Настройка интегратора и обработчика пересечения

```
final DormandPrince853Integrator integ =
    new DormandPrince853Integrator(1.0e-12, 5.0e-4, 1e-
10, 1e-10);
integ.setInitialStepSize(5.0e-5);
integ.setMaxGrowth(1.5);
integ.setMinReduction(0.1);
final boolean[] hitCircle = new boolean[]{ false };
integ.addEventHandler(new EventHandler() {
@Override public void init(double t0, double[] y0, double t)
{}
@Override public double g(double t, double[] y) { return
h(y); }
@Override public Action eventOccurred(double t, double[] y,
boolean
increasing) {
hitCircle[0] = true;
return Action.STOP; }
@Override public void resetState(double t, double[] y)
{}
}, 1e-4, 1e-10, 2000);
```

Сначала задаются минимальный и максимальный внутренние шаги, а также абсолютная и относительная точности расчёта. В приведённой настройке максимальный шаг равен $5 \cdot 10^{-4}$, а обе точности - 10^{-10} . Затем устанавливаются начальный шаг и ограничения изменения его величины.

Обработчик события использует функцию $g(t, y)$, возвращающую значение $h(y)$. При обнаружении пересечения устанавливается флаг *hitCircle* и возвращается действие *STOP*. Благодаря этому интегратор завершает текущий участок у границы, после чего управление возвращается в основной цикл.

Последние три аргумента *addEventHandler* задают максимальный интервал проверки события, точность локализации времени корня и предельное число итераций поиска. Событийный механизм ориентирован на смену знака h . Касание без смены знака не обязано обнаруживаться этим же способом, поэтому вычисление контактных точек рассматривается отдельно.

При остановке по событию нельзя считать, что использована вся запрошенная длительность участка. Время обновляется по фактическому значению, возвращённому интегратором.

Продолжение фрагмента 9 – Учёт фактически пройденного времени

```
double dtChunk = Math.min(0.2, T - tAccum);
hitCircle[0] = false;
double[] xEnd = x.clone();
double tStop;
try {
    tStop = integ.integrate(odeForState(x), 0.0, x.clone(),
        dirSign * dtChunk, xEnd);
} catch (Exception ex) {
    out.add(new double[]{ x[0], x[1] });
    break;}
double advanced = Math.abs(tStop);
tAccum += advanced;
x = xEnd.clone();
```

Величина *dtChunk* ограничивает длительность очередного участка. После вызова *integrate* переменная *tStop* содержит фактически достигнутое локальное время. Его модуль добавляется к *tAccum*, а результат *xEnd* становится текущим состоянием. Знак *dirSign* определяет прямое или обратное направление времени. Поскольку подсистемы автономны, начало локального отсчёта каждого участка с нуля не изменяет исследуемые уравнения.

Проекция точки на окружность переключения. После обнаружения границы её уравнение может выполняться с небольшой численной невязкой. Метод `projectToCircle` уменьшает эту невязку, масштабируя обе координаты одним коэффициентом.

Фрагмент 10 – Коррекция координат на окружности

```
private void projectToCircle(double[] x) {  
    double rc = Math.hypot(x[0], x[1]);  
    if (rc > 1e-10) {  
        x[0] = x[0] / rc * r;  
        x[1] = x[1] / rc * r; }  
    double hCheck = h(x);  
    if (Math.abs(hCheck) > 1e-12) {  
        double factor = Math.sqrt(r * r / (x[0]*x[0] +  
x[1]*x[1]));  
        x[0] *= factor;  
        x[1] *= factor; }}
```

Сначала *Math.hypot* вычисляет текущий радиус *rc*. Если он больше заданного порога, обе координаты умножаются на r/rc . В результате направление ненулевого радиус-вектора сохраняется, а его длина становится равной r . Математически эта операция записывается как

$$x \leftarrow \frac{r}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} x, \quad x \neq 0.$$

Затем вычисляется контрольное значение *hCheck*. Если его модуль превышает 10^{-12} , выполняется дополнительное масштабирование. Полученная точка используется для определения угла и проверки типа движения на окружности. В исходной программе точка считается близкой к границе при $|h| < 10^{-8}$; этот допуск относится к невязке квадрата радиуса.

Проекция предназначена для ненулевых точек вблизи окружности при $r > 0$. В начале координат направление такой проекции не определено. В рассматриваемом алгоритме процедура вызывается после обнаружения окружности либо при старте в её окрестности.

Определение притягивающего и отталкивающего скольжения. Для анализа движения на окружности вводится угловая параметризация

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Производная h вдоль каждой подсистемы выражается через функцию S :

$$S_i(\theta) = r[(1 - b_i)\cos\theta - a_i\sin\theta] + b_i c_i,$$

$$H_i = \nabla h \cdot F_i = 2r\sin\theta S_i(\theta).$$

Положительная нормальная скорость означает движение в сторону увеличения h , а отрицательная – в сторону уменьшения h . Поэтому при $H_{out} < 0$ и $H_{in} > 0$ обе подсистемы направляют траектории к окружности и возникает притягивающее скольжение. При $H_{out} > 0$ и $H_{in} < 0$ поля направлены от окружности, что соответствует отталкивающему скольжению.

Фрагмент 11 – Классификация режима движения на границе

```
private int slidingType(double theta, int dirSign) {
    double sin = Math.sin(theta);
    if (Math.abs(sin) < 1e-9) return 0;
    double hOut = 2.0 * r * sin * S(theta, aOut, bOut,
cOut);
    double hIn = 2.0 * r * sin * S(theta, aIn, bIn, cIn);
    if (dirSign < 0) { hOut = -hOut; hIn = -hIn; }
    if (hOut < 0.0 && hIn > 0.0) return 1;
    if (hOut > 0.0 && hIn < 0.0) return -1;
    return 0;}
private double S(double theta, double a, double b, double c)
{
    return r * ((1.0 - b) * Math.cos(theta) - a *
Math.sin(theta)) + b * c;}
```

Сначала вычисляется $\sin \theta$. Вблизи точек $(\pm r, 0)$ этот синус обращается в нуль, поэтому программа возвращает тип 0. Затем рассчитываются нормальные скорости внешней и внутренней подсистем. Для обратного времени оба знака меняются на противоположные.

Далее выполняется сравнение знаков. Возврат 1 означает притягивающее скольжение в выбранном направлении времени, возврат -1 – отталкивающее. Если ни одно из строгих сочетаний знаков не выполнено, возвращается 0. Это значение объединяет сквозное прохождение и контактные случаи; само по себе оно не означает только пересечение.

При одинаковых ненулевых знаках нормальных скоростей траектория проходит через границу. При противоположных знаках возможно скольже-

ние. Таким образом, определение режима опирается на направление обоих полей относительно окружности, а не только на положение текущей точки.

Рассмотренные фрагменты раскрывают вычислительное содержание второй блок-схемы. Блок ввода задаёт коэффициенты внешней и внутренней подсистем, радиус окружности, начальную точку, время расчёта и параметры точности. Функция *h* определяет область, метод *computeContactPoints* находит контактные точки, а *odeForState* выбирает активную подсистему. Далее интегратор продвигает решение до конца временного участка либо до обнаружения события $h = 0$.

При достижении окружности метод *projectToCircle* уточняет координаты. Метод *slidingType* проверяет нормальные скорости и определяет режим движения. На притягивающей дуге процедура *slideAlongCircle* вычисляет вектор Филиппова и последовательно обновляет угол; после выхода из режима скольжения продолжается интегрирование соответствующей подсистемы. Методы *drawSlidingArcs* и *drawArcRuns* выделяют дуги для графического представления, а *solveLinearSystem* и *computeSubsystemTrajectory* обеспечивают независимое построение траекторий отдельных подсистем. Последовательность выполнения алгоритма второй программы представлена на рисунке 3.7.2.

В настоящем подразделе оставлены основные вычислительные фрагменты, необходимые для объяснения реализации математической модели, численного алгоритма и системы с окружностью переключения. Основные теоретические положения и результаты моделирования, использованные при разработке данного программного пакета, отражены в публикациях автора [4- А – 6 - А], [10 - А], [11 - А], [13 - А].

ОБСУЖДЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В диссертационной работе получен комплекс новых теоретических и прикладных результатов, направленных на развитие методов качественного и приближённого анализа бифуркационных явлений в негладких и кусочно-линейных динамических системах. Исследование охватывает как строгие математические доказательства существования периодических решений и предельных циклов, так и разработку эффективных алгоритмов их численного моделирования.

Во второй главе впервые для широкого класса двумерных, трёхмерных и n -мерных динамических систем с непрерывной, но не обязательно дифференцируемой правой частью получены необходимые и достаточные условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа. В отличие от классических формулировок, требующих дифференцируемости функций, здесь применён принцип смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля. Такой подход позволил обобщить теорему Андронова – Хопфа на случай систем с ограниченной гладкостью и существенно расширил область применимости топологических методов в теории бифуркаций.

На основе предложенного метода сформулированы и доказаны теоремы 2.1.1 и 2.1.2, описывающие критерии существования периодических решений для двумерных систем с главной однородной частью. Введено понятие бифуркационного значения параметра в терминах индекса векторного поля, что позволило выявить условия, при которых происходит смена устойчивости стационарного состояния и зарождение предельного цикла.

Дальнейшее развитие этот метод получил в теоремах 2.2.2 и 2.3.1, где принцип смены индекса применён к исследованию бифуркации Андронова – Хопфа в трёхмерных системах, а также в их n -мерных обобщениях. Было показано, что для систем размерности $n \geq 2$ бифуркационное поведение полностью определяется локальной структурой спектра матрицы в окрестности особой точки: если существует пара чисто мнимых собственных значений, а остальные имеют отрицательные вещественные части, то смена индек-

са векторного поля приводит к рождению периодического решения. Таким образом, доказано, что предложенный метод применим не только в низких размерностях, но и в общем n – мерном случае, что придаёт результатам универсальный характер.

Тем самым, в отличие от классических работ Л.С. Понтрягина [15] и А.А. Андропова, в диссертации доказательства выполнены без использования дифференциальных свойств правой части системы, что представляет собой новое направление в теории негладких бифуркаций. Полученные результаты обладают универсальностью и могут применяться к системам, содержащим разрывы, насыщения и другие нелинейные особенности.

В Главе 3 проведено исследование кусочно-линейного дифференциального уравнения второго порядка с линией переключения, представляющего важный пример негладкой системы.

Основные результаты включают:

- доказан аналог теоремы Лиувилля–Остроградского для кусочно-линейных систем, позволяющий вычислять инвариант Вронского при сшивании решений двух линейных подсистем;
- строго доказано существование устойчивости единственного стационарного решения в выделенной инвариантной области;
- получено условие существования предельного цикла (теорема 3.3.1), основанное на анализе знаков собственных значений и геометрии линии переключения;
- установлены типы особых точек (устойчивый и неустойчивый фокус) и построены соответствующие фазовые портреты, иллюстрирующие процесс рождения цикла при изменении параметров.

Особое значение имеет разработанный программный комплекс на языке Java (Swing, JFreeChart), реализующий численно – аналитический алгоритм моделирования предельных циклов. В нём используется метод сшивания решений из двух областей фазовой плоскости и визуализация траекторий решений в реальном времени. Этот инструмент подтвердил аналитические

результаты теорем 3.2.1 и 3.3.1 и позволил экспериментально исследовать динамику систем при различных параметрах.

Таким образом, получена взаимосвязь между аналитическими и вычислительными методами, обеспечивающая полное согласование теории и численного эксперимента.

Сравнение предложенных методов с классическими результатами показывает, разработанный в диссертации подход обладает более широкой применимостью. Он не требует гладкости правых частей и допускает исследование систем с разрывами, что особенно важно для физических, биологических и инженерных моделей с пороговыми эффектами.

Построенные критерии бифуркации и условия существования предельных циклов могут быть использованы при анализе процессов в системах автоматического управления, в электротехнических осцилляторах, моделях нейронной активности и химических реакциях с переключениями.

В результате проделанной работы сформирован новый методический подход, объединяющий топологические, аналитические и вычислительные методы исследования бифуркаций и предельных циклов. Разработанная теория обосновывает возможность существования периодических решений в негладких системах любой размерности и подкрепляется численным моделированием. Таким образом, полученные результаты во второй и третьей главах вносят существенный вклад в развитие качественной теории дифференциальных уравнений, расширяя её класс применимости на системы с непрерывными и кусочно-линейными правыми частями, и открывают перспективы дальнейшего применения в задачах математического и компьютерного моделирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны и обоснованы новые методы качественного и приближённого исследования бифуркаций и периодических решений в негладких, кусочно-линейных динамических системах различной размерности. Проведённое исследование охватывает как теоретические аспекты возникновения предельных циклов и бифуркаций Андронова–Хопфа, так и практические задачи их численного моделирования с использованием современных вычислительных технологий.

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- для двумерной динамической системы (2.1.1) с главной однородной частью, используя принцип смены топологического индекса особой точки вполне непрерывного векторного поля, получены необходимые и достаточные условия бифуркации периодических решений [2 - А];
- для динамической системы (2.2.1) в трехмерном фазовом пространстве, с помощью топологических методов (принцип смены индекса), при условии непрерывной зависимости от параметра линейной части системы, в терминах поведения коэффициентов найдены условия возникновения бифуркации Андронова – Хопфа [1 - А], [3 - А], [8 - А], [9 - А, 12 - А];
- предложен новый подход к аналитическому и численному исследованию бифуркаций в негладких системах (3.2.3) и (3.3.1), описываемых модульными и кусочно-линейными функциями, который обеспечивает построение фазовых портретов для основных типов негладких динамических систем [10 - А], [11 - А], [13 - А];
- получены расчетные формулы, описывающие периодические явления, возникающие в окрестности состояний равновесия динамических систем, модели которых включают модульные и кусочно-линейные функции [6 - А, 10 - А];

- создан новый программный комплекс, предназначенный для компьютерного моделирования и анализа предельных циклов негладких динамических систем с переключением [4 - А, 5 - А].

Полученные результаты обладают теоретической новизной и практической значимостью.

Теоретическая значимость работы заключается в разработке и обосновании математических моделей и методов анализа динамических систем с переключениями, предназначенных для исследования периодических и стационарных режимов в нелинейных и кусочно-линейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков. Полученные результаты развивают топологические и качественные методы теории динамических систем и расширяют классические представления теории бифуркаций применительно к негладким системам с разрывной структурой.

Особое значение имеет развитие подходов к исследованию циклических явлений в системах с переключениями, включая установление условий существования и устойчивости предельных циклов, а также анализ фазовой структуры вблизи линий переключения.

Научно-практическая значимость работы обусловлена тем, что полученные теоретические результаты доведены до уровня расчётных соотношений, алгоритмов и программных средств, пригодных для практического применения. На их основе разработан и реализован программный комплекс на языке Java, предназначенный для компьютерного моделирования, анализа динамических режимов и построения фазовых портретов систем с переключениями.

Разработанные методы и алгоритмы могут быть использованы при проектировании и исследовании широкого класса нелинейных динамических систем, включая модели с элементами переключения, возникающие в задачах механики, теории автоматического управления, электроники и других прикладных областях, где существенную роль играют циклические процессы.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Разработанные методы можно применить при исследовании систем автоматического регулирования, электрических и механических осцилляторов, биофизических и экономических процессов, а также при построении компьютерных моделей динамических систем с переключениями.

Предложенный топологический подход и численные алгоритмы могут служить основой для дальнейших исследований многомерных негладких систем, включая задачи синхронизации, хаотических режимов и бифуркций высших порядков.

Разработанный программный комплекс целесообразно использовать в учебном процессе при изучении курсов «Математическое моделирование», «Дифференциальные уравнения» и «Нелинейная динамика».

Таким образом, проведённое исследование представляет собой завершённую научную работу, содержащую как фундаментальные теоретические результаты, так и их программную реализацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Список использованных источников

- [1]. Агафонов С.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / С.А. Агафонов, Т.В. Муратова. - М.: Academia, 2018. - 352 с.
- [2]. Азизов Р. О периодических и ограниченных решениях систем трёх дифференциальных уравнений с однородными главными членами [Текст] / Р. Азизов // Диссертация, Душанбе. –1995.
- [3]. Андронов А.А. Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. -568 с.
- [4]. Андронов А.А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И., Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1967. - 488 с.
- [5]. Андронов А.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // Уч. зап. Горьк. ун-та. -1939. - вып. 6. -С. 3-24.
- [6]. Андронов А.А. Теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. -М.: Физ-матгиз, 1959. -568 с.
- [7]. Андронов А.А. Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра, и от негрубого предельного цикла [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // Математический сб. -1956. - Т. 40, вып. 2. - С. 179 - 224.
- [8]. Андронов А.А. Грубые системы [Текст] / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // Доклады АН СССР. -1937, -Т. 14. -№ 15. -С. 247-250.
- [9]. Арабов М.К. Анализ устойчивости особой точки квазилинейного уравнения второго порядка [Текст] / М.К. Арабов // Известия АН РТ. – 2015.–№1. –С. 42-49.
- [10]. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.И. Арнольд. -М.: Наука, 1978. - 304 с.

- [11]. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / В.И. Арнольд. -Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. -400 с.
- [12]. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / В.И. Арнольд // Регулярная и хаотическая динамика, 2000. -368 с.
- [13]. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / В.И. Арнольд, Ю.С. Ильяшенко // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). -М., -1985. -С. 7-149.
- [14]. Ахмедов Дж.Т. Периодические и ограниченные решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Дж.Т. Ахмедов // Диссертация, Душанбе. -2020.
- [15]. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости [Текст] / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. -М.: Наука, 1976. -496 с.
- [16]. Бахвалов Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. -М.: Наука, 1975. -632 с.
- [17]. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений [Текст] / Р. Беллман. -М.: ИЛ., 1954. -216 с.
- [18]. Биркгоф Дж. Динамические системы [Текст] / Дж. Биркгоф. -М.: ОГИЗ Гостехтеориздат, 1941. -320 с.
- [19]. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н.Н. Боголюбов. -М.: Гос. изд-во физико-мат. лит., 1974. - 504 с.
- [20]. Бойчук А.А. Периодические решения автономных систем в критических случаях [Текст] / А.А. Бойчук, В.А. Журавлев, В.Г. Чуйко // Укр. матем. журнал. -1990. -Т. 42.-№9. -С. 1180-1187.
- [21]. Брусин В.А. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров [Текст] / В.А. Брусин, Ю.И. Неймарк, М.И. Фейгин // Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика. -1963. - Т. 6. -№ 4. - С. 785 - 800.

- [22].Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений [Текст] / А.Д. Брюно. -М.: Наука, -1979. - 253 с.
- [23].Бугров Я.С. Высшая математика [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. -513 с.
- [24].Бутенин Н.В. Введение в теорию нелинейных колебаний [Текст] / Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. –М.: Наука, 1987. -382 с.
- [25].Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны [Текст] / Л.А. Вайнштейн. - М.: Радио и связь, 1988. -440 с.
- [26].Гарел Д.Колебательные химические реакции [Текст] / Д. Гарел, О. Гарел. –М.: Мир, 1986. -148 с.
- [27].Гребенников Е.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем [Текст] / Е.А. Гребенников, Ю.А. Рябов. -М.: Наука, 1979. - 431 с.
- [28].Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания динамические системы и бифуркации векторных полей [Текст] / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. -560 с.
- [29].Гулд Х. Компьютерное моделирование в физике [Текст] / Х. Гулд, Я Тобочник. -М.: Мир, 1990. -350 с.
- [30].Гулов А.М. Секторное разделение и анализ рождения предельных циклов в негладких динамических системах [Текст] / А.М. Гулов // Диссертация, Душанбе. -2018.
- [31].Дайсон Ф. Устойчивость и фазовые переходы [Текст] / Ф. Дайсон, Э. Монролл, М. Кац, М. Фишер. -М.: Мир, 1973. – 189 с.
- [32].Забрейко П.П. Вычисление индекса неподвижной точки векторного поля [Текст] / П.П. Забрейко, М.А. Красносельский. // СМЖ5. -1964. -№3. - С. 509-531.
- [33].Иванов А.П. Основы теории систем с трением [Текст] / А.П. Иванов. -М. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". Институт компьютерных исследования, 2011. -304 с.
- [34].Илолов М. Об абстрактных уравнениях с неограниченными нелинейностями и их приложения [Текст] / М. Илолов, Х.С. Кучакшоев // Доклады АН РТ.-2009.-Т. 428. -№ 3.- С. 310-312.

- [35].Ильин В.А. Математический анализ. Продолжение курса [Текст] / В.А. Ильин, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 1987. -358 с.
- [36].Йосс Ж. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций [Текст] / Ж. Йосс, Д. Джозеф. -М.: Мир, 1983. -304 с.
- [37].Каток А.Б. Введение в теорию динамических систем [Текст] / А.Б. Каток, Б. Хасселблат. -М.: МЦНМО, 2005. -454 с.
- [38].Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. - М.: Иностранной литературы, 1958. -475 с.
- [39].Колмагоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмагоров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1981. -543 с.
- [40].Колемаев В.А. Математическая экономика [Текст] / В.А. Колемаев. -М.: Выс. шк.,1998. -240 с.
- [41].Козякин В.С. Метод функционализация параметра в задаче о точках бифуркации [Текст] / В.С. Козякин, М.А. Красносельский // ДАН СССР. - 1980. - Т.254. - № 5. - С. 1061 - 1064.
- [42].Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Гостехиздат, 1956. -390 с.
- [43].Красносельский М.А. Векторные поля в плоскости [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Физматгиз, 1963. -248 с.
- [44].Красносельский М.А. Оператор сдвига по траектории дифференциальных уравнений [Текст] / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
- [45].Красносельский М.А. О вычислении вращения векторного поля на конечномерной сфере [Текст] / М.А. Красносельский // ДАН СССР. - 1966. -Т.101. -№3.
- [46].Красносельский М.А. Геометрические методы нелинейного анализа [Текст] / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. -М.: Наука, 1975. -512 с.
- [47].Красносельский А.М. Функционализация параметра и асимптотика циклов в бифуркации Хопфа [Текст] / М.А. Красносельский, Н.А. Кузнецов

- цов, М.Г. Юмагулов // Автоматика и телемеханика. – 1996. - Т.57. - №11. - С. 22 - 28.
- [48]. Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Г. Курош. -М.: Наука, 1968. -431 с.
- [49]. Лере Ж. Топология и функциональные уравнения [Текст] / Ж. Лере, Ю. Шаудер. -УМЫ, -1946.
- [50]. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. -М.: Наука, 1965. -520 с.
- [51]. Ляпунов А.М. Общие задача об устойчивости движения [Текст] / А.М. Ляпунов. -М.: ГИТТЛ, 1950. -472 с.
- [52]. Марри Д. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии [Текст] / Д. Марри. -М.: Мир, 1983. -397 с.
- [53]. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения [Текст] / И.Г. Малкин. М.: Наука, 1966. -532 с.
- [54]. Малкин К.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний [Текст] / К.Г. Малкин. М.: ГИТТЛ, 1949. -246 с.
- [55]. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [Текст] / И.Г. Малкин. М.: Гостехиздат, 1956. - 491 с.
- [56]. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний [Текст] / Л.И. Мандельштам. М.: Наука, 1972. -470 с.
- [57]. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения [Текст] / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. М.: Мир, 1980. -368 с.
- [58]. Медведев Н.В. Об одном принципе существования периодического решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве [Текст] / Н.В. Медведев // Математические заметки. -1968. -Т.4(1). - С.105-111.
- [59]. Митропольский Ю.А. Интегральные многообразия в нелинейной механике [Текст] / Ю.А. Митропольский, О.Б. Лыкова. -М.: Наука, 1973. - 512 с.

- [60]. Мищенко Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания [Текст] / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. - М.: Наука, 1975. -248 с.
- [61]. Морозов А.Д. О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа [Текст] / А.Д. Морозов // ПММ. -1989. -№5 (53) -С. 721-730.
- [62]. Мустафокулов Р. К теории положительных периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Р. Мустафокулов, Э. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. -1975. -Т. 18. -№10. -С. 7-10.
- [63]. Мухамадиев Э.М. О построении правильной направляющей функции для систем дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. -1970. -Т.190.-№4. -С. 777-779.
- [64]. Мухамадиев Э.М. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. -1970. -Т.194. -№3. -С.510-513.
- [65]. Мухамадиев Э.М. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // Уфим. мат. журн. -2014. -Т. 6. -№ 1. -С. 84-93.
- [66]. Мухамадиев Э. М. Анализ рождения предельных циклов одного класса нелинейной уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, А.М. Гулов, И.Д. Нуров // Вестник ВГУ, Воронеж. -2016. -№ 1. -С. 118–125.
- [67]. Мухамадиев Э.М. О разрешимости одного класса нелинейных уравнений с малым параметром в банаховом пространстве [Текст] / Э.М. Мухамадиев, А.Б. Назимов, А.Н. Наимов // Уфимский матем. журнал. - 2020.-Т. 12. -№ 3.-С. 67-70.
- [68]. Мухамадиев Э.М. О периодических и ограниченных решениях систем двух нелинейных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. –1976. –Т.19. –№3. -С.3-6.

- [69].Мухамадиев Э.М. Формула для вычисления вращения одного класса векторных полей [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН Тадж. ССР. –1977. –Т.20. -№5.-С.11-14.
- [70].Мухамадиев Э.М. Исследования по теории периодических и ограниченных дифференциальных уравнений [Текст] / Э.М. Мухамадиев // Диссертация. Душанбе. -1978.
- [71].Мухамадиев Э.М. К вычислению вращения конечномерных векторных полей [Текст] / Э.М. Мухамадиев // ДАН СССР. –1970. –Т.190. –№3. – С. 535 - 537.
- [72].Мухамадиев Э.М. Бифуркационные значения параметров в вариационных задачах [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.А. Красносельский, А.Б. Покровский // ДАН СССР. –1980. –Т.245. –№2. –С. 282 - 286.
- [73].Немыцкий В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М.:Наука, 1949.–552 с.
- [74].Нуров И.Д. Методы теории вращения векторных полей в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа [Текст] / И.Д. Нуров, М.Г. Юмагулов // Матем. моделирование и краев. задачи. – 2005. – №3. – С. 183-184.
- [75].Нуров И.Д. Исследования устойчивости состояния равновесия негладких динамических систем [Текст] / И.Д. Нуров, М.Ш. Халилова // ДАН РТ. – 2011. -Т. 54. – №10. – С. 815-820.
- [76].Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И.Г. Петровский. – М.: МГУ, 1984. – 296 с.
- [77].Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений [Текст] / В.А. Плисс. -М.: Наука, 1977. -303 с.
- [78].Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1982. -334 с.
- [79].Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения [Текст] / Л.С. Понтрягин. - М.: Едиториал УРСС, 2018. - 208 с.
- [80].Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями [Текст] / А. Пуанкаре. – М.: ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

- [81].Пуанкаре А. Избранные труды [Текст]/ А. Пуанкаре. М.: Наука, 1971. - Т.1.-771 с.
- [82].Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст] / Г.Ю. Ризниченко. -М.: Ижевск, 2002. -232 с.
- [83].Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии [Текст]/ Г.Ю. Ризниченко. -М.: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика, 2011. -558 с.
- [84].Ризниченко Г.Ю. Математическое и компьютерное моделирование первичных процессов фотосинтеза [Текст] / Г.Ю. Ризниченко, И.Б. Коваленко, А.М. Абатурова, Д.М. Устинин, А.Б. Рубин // Биофизика 54(1): - 2009. -С. 16–33.
- [85].Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости [Текст] / М. Розо. -М.: Наука, 1971. -288с.
- [86].Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика [Текст] / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М.: Наука, 1984.–304с.
- [87].Рубин А. Б. Биофизика. Том 2. Биофизика клеточных процессов 2-изд. [Текст] / А.Б. Рубин. -М.: Издательство МГУ, 2000. -468 с.
- [88].Рудин У. Основы математического анализа [Текст] / У. Рудин. -М.: Мир, 1976. – 320 с.
- [89].Сабиров Т.С. К вопросу об устойчивости малых периодических решений [Текст] / Т.С. Сабиров // Доклады Академии наук СССР. -1966. -Т. 167. -С. 755 - 757.
- [90].Свережев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ [Текст] / Ю.М. Свережев, Д.О. Логофет. -М.: Наука, 1979. -352 с.
- [91].Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра [Текст] / А.Н. Тихонов // Матем. сб., 22(64):2 (1948). -С. 193–204.
- [92].Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления [Текст] / В.И. Уткин. -М.: Наука, 1981. - 368 с.

- [93]. Ушно Д.С. Предельные циклы одной автономной системы с алгебраическими правыми частями [Текст] / Д.С. Ушно // Дифферен. уравнения. – 1991. –Т. 27. – №11. –С. 1915-1925.
- [94]. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений [Текст] / А.Ф. Филиппов. -М.: ЛЕНАНД, 2015. – 240 с.
- [95]. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст]/ А.Ф. Филиппов. -М.: ЛКИ. 2008. -240 с.
- [96]. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью [Текст] / А.Ф. Филиппов. – М.: Наука, 1985. - 223 с.
- [97]. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. -М.: Мир, 1970. -720 с.
- [98]. Шильников Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике [Текст] / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Часть 2. -М.– Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. -548 с.
- [99]. Юмагулов М.Г. Введение в теории динамических систем [Текст] / М.Г. Юмагулов. – СПб.: Лань, 2014. – 272 с.
- [100]. Diblik J. Some asymptotic properties of solutions of homogenous linear systems of ordinary differential equations [Text] / J. Diblik // J.Math.Anal. and Appl. -1992. -Т. 165. -№1. -p. 228-304.
- [101]. Gulov A. M. A software package for constructing phase portraits of dynamic systems [Text] / A.M. Gulov, Z.I. Sharifzoda // Certification: That they are the authors of the computer program of the from 21.06.2019y.
- [102]. Liang Z. Several problems on the global analysis of the polynomial differential systems [Text] / Z. Liang // J.Cent. China Norm. Univ. Natur. Sci. – 1991. –Т. 11. -№1. -p. 137-149.
- [103]. Liu D. Necessary and sufficient conditions of existence and uniqueness of limit cycles for a class of polynomial system [Text] / D. Liu // Acta Math. Sci. -1991. -Т. 11. -№1. -p. 65-71.

- [104]. Pontryagin L.S. Uber Auto Schwingungs systeme, dieden Hamiltons chen-nahelegen [Text] / L.S. Pontryagin // Phys. Zeitschriftder Sowjetunion. - 1934. -t.6. -h. 1-2.
- [105]. Wazewski T. Une methode topologique de l'examen du phenomene asymp-totique relativement aux equations differentielles ordinaires [Text] / T. Wazewski // Rent. Accad. Lincei. -1947. -№3. -p. 210-215.
- [106]. Welch S.C. A priori bounds and modal properties for periodic solutions to a class of ordinary differential equations [Text] / S.C. Welch // J. Math. Anal. and Appl. -1992. -T. 171. -№2. -p. 395-406.
- [107]. Yangian Y. A new method for the proof of the equace ness of limit cycles [Text] / Y. Yangian // Repts Inst. Math. -1991. -№2. -p. 1-6.
- [108]. Zabreiko P.P. Principles of uniform boundedness [Text] / P.P. Zabreiko, E.I. Smirnov // Math.Notes. -35:2 (1984). -p. 151-156.
- [109]. Simpson D.J.W. Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems. - London: Springer, 2010. – 289 p.
- [110]. Jeffrey M.R. Hidden dynamics: the mathematics of switching systems. – Cham: Springer, 2018. – 357 p.
- [111]. Leine R.I., Nijmeijer H. Dynamics and bifurcations of non-smooth mechani-cal systems. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. – 412 p.
- [112]. Guardia M., Seara T.M., Teixeira M.A. Generic bifurcations of low codi-mension of planar Filippov systems // Journal of Differential Equations. – 2011. – Vol. 250, No. 4. – P. 1967–2023.
- [113]. Murray J.D. Inertial and delayed effects in population dynamics [Text] / J.D. Murray // Mathematical Biology I: An Introduction. – Berlin: Springer, 2002. – p. 97–135.
- [114]. Gandolfo G. Nonlinear and threshold effects in economic dynamics [Text] / G. Gandolfo // Economic Dynamics. – Berlin: Springer, 2009. – p. 201–245.
- [115]. Llibre J., Zhang X. Limit cycles created by piecewise linear centers // Chaos. – 2019. – Vol. 29, No. 3. – Art. 033101.

- [116]. Buzzi C.A., Pessoa C., Torregrosa J. Piecewise linear differential systems with two zones // Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 254, No. 3. – P. 1274–1304.
- [117]. Novaes D.D., Teixeira M.A. Regularization of discontinuous vector fields // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2015. – Vol. 25, No. 1. – Art. 1550005.
- [118]. Simić S.N., Johansson K.H., Lygeros J., Sastry S. Hybrid limit cycles and hybrid Poincaré maps // Automatica. – 2002. – Vol. 38, No. 4. – P. 669–680.
- [119]. Williams C., Ames A.D. A Poincaré–Bendixson theorem for hybrid systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2020. – Vol. 65, No. 11. – P. 4633–4648.
- [120]. Dankowicz H., Schilder F. Recipes for continuation. – Philadelphia: SIAM, 2013. – 305 p.
- [121]. Beyn W.-J., Kleinkauf A. The numerical computation of invariant tori and limit cycles of piecewise smooth systems // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2014. – Vol. 34, No. 2. – P. 564–587.

2. Список публикаций соискателя учёной степени

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК при Президенте Республики Таджикистан:

- [1 - А]. Каримов М.М. О применении методов функционального анализа в задаче исследования бифуркаций нелинейной трехмерной системы. [Текст] / М.М. Каримов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2023. -№1. -С. 104-115.
- [2 - А]. Каримов М.М. Исследование бифуркации периодических решений для двумерной динамической системы с главной однородной частью [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // ДАН РТ. -2023. -Т.66. -№3-4. -С. 162-169.
- [3 - А]. Каримов М.М. Приложение принципа смены индекса к исследованию бифуркации Андронова – Хопфа [Текст] / М.М. Каримов // ДАН РТ. -2023. -Т.66. -№11-12. -С. 650-658.

- [4 - А]. Каримов М.М. О новом программном пакете для задач моделирования предельных циклов дифференциального уравнения второго порядка с переключением [Текст] / М.М. Каримов // Вестник Бохтарского государственного университета. Серия естественных наук. -2025. -№2. -С. 11-17.
- [5 - А]. Каримзода М.М. Компьютерные методы управления и автоматизации систем с переключением. [Текст] / М.М. Каримзода // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. -2026. -№1. -С. 58-68.

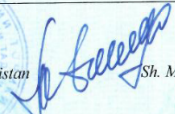
3. Материалы конференций и тезисы докладов:

- [6 - А]. Каримов М.М. Моделирование возникновения предельного цикла дифференциального уравнения второго порядка с линией переключения [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров //Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. -30 января – 4 февраля 2025 г. -С. 168-172.
- [7 - А]. Каримов М.М. Качественный анализ и фазовые траекторий динамики раковых клеток [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы, посвящённая 100-летию чл. корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева. -Уфа, 2021. -С. 170-171.
- [8 - А]. Каримов М.М. Об одном доказательстве теоремы Андронова – Хопфа методами функционального анализа [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы, посвященной памяти В.П. Маслова. Воронеж, - 2024. -С. 172-174.
- [9 - А]. Каримов М.М. Топологические методы исследования бифуркаций в трёхмерном пространстве [Текст] / М.М. Каримов, Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции Воронежской зимней математической школы “Современные методы теории функций и смежные проблемы”. Воронеж, - 2023. -С. 188-190.

- [10 - А]. Каримов М.М. Об одном аналоге теоремы Лиувилля – Остроградского для кусочно – линейного дифференциального уравнения второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной конференции “Современные методы теории краевых задач”. ВоГУ, МГУ имени М.В. Ломоносова, Математический институт имени В.А. Стеклова РАН. Воронеж, - 2022. -С. 211-213.
- [11 - А]. Каримов М.М. Анализ предельных циклов и численное моделирование в кусочно – линейных динамических системах [Текст] / М.М. Каримов, И.Д. Нуров, Р.И. Азизов // Материалы международной научно – практической конференции «Современные проблемы математического моделирования и её применения», посвящённая «2020-2040 годы, 20-летию изучения и развития естественных, точных и математических наук в области науки и образования» и «75–летию Таджикского национального университета». Душанбе, - 2024. -С. 59-62.
- [12 - А]. Каримов М.М. Обобщенная теорема Хопфа для системы дифференциальных уравнений третьего порядка [Текст] / М.М. Каримов, И.Д. Нуров // Материалы международной научно-практической конференции, посвященной «Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования», «75- летию заслуженного работника Таджикистана, чл. корр.НАНТ, д.ф.-м.н., профессора И.К. Курбанова» и «70-летию д.ф.-м.н., профессора Дж. С. Сафарова». г. Бохтар, - 2022. С. 97-98.
- [13 - А]. Каримов М.М. Качественный анализ существования циклов кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка [Текст] / Э.М. Мухамадиев, И.Д. Нуров, М.М. Каримов, М.З. Убайдов // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». Уфа, - 2025. С. 46-49.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

 ШАҲОДАТНОМА <i>дар бораи ба қайд гирифтани асарҳои илм, адабиёт ва санъат</i>	 CERTIFICATION <i>About registration of science Literature and art works</i>
08, 03 2025 № 224	08, 03 2025 № 224
Дода шуд ба: Каримов Меҳрубон Маткаримович дар хусуси он, ки ӯ муаллифи барномаи компютери «Оид ба алгоритми нави сохтани портретҳои фазавии муодилаҳои дифференсиалии қисман ҳаттӣ» мебошад.	Issued to: Karimov Mehrubon Matkarimovich, confirming, that he is the author of computer program «On a new algorithm for constructing phase portraits of piecewise linear differential equations».
Жанри асар: адабӣ	Genre of the work: literary
Забони асар: тоҷикӣ	Language of the work: Tajik
Асар иборат аст аз: 100 МБ	It consists of: 100 MB
Маълумоти иловагӣ: Тибқи моддаи 6-и Қонуни Ҷумҳурии Тоҷикистон «Дар бораи ҳуқуқи муаллиф ва ҳуқуқҳои вобаста ба он» асари мазкур объектҳои ҳуқуқи муаллиф мебошад.	Additional information: According to Article 6 of the Law on Copyright and related rights of the Republic of Tajikistan this work is protected by copyright.
Сардори шӯъбаи ҳуқуқ, ҳифзи ҳуқуқи муаллиф ва ҳуқуқҳои вобастаи Вазорати фарҳанги Ҷумҳурии Тоҷикистон  Ш. Маллаева	Head of Department of law, protection of copyright and related rights of the Ministry of culture of the Republic of Tajikistan  Sh. Mallaeva

Приложение 2. Акт о внедрении основных результатов диссертационного исследования в Таджикском национальном университете.



«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор ТНУ, д.ю.н., профессор
Насриддинзода Э.С.
2026 г.

АКТ

о внедрении основных результатов диссертационного исследования
Каримзода Мехрубон Маткарим
на тему

«Методы качественного и приближённого исследования бифуркаций
в динамических системах с переключениями»

Настоящий акт составлен в подтверждение того, что основные результаты диссертационной работы Каримзода Мехрубон Маткарим, выполненной на тему «Методы качественного и приближённого исследования бифуркаций в динамических системах с переключениями», внедрены и используются в научной и учебной деятельности механико-математического факультета Таджикского национального университета.

В ходе выполнения диссертационного исследования разработан программный пакет компьютерного моделирования, предназначенный для численного и качественного анализа динамических систем с линией переключения. Данный программный пакет обеспечивает моделирование кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка, построение фазовых портретов, исследование стационарных режимов, предельных циклов, а также анализ бифуркационных явлений в системах с переключениями.

Разработанные методы и программные средства позволяют проводить наглядное и эффективное исследование качественного поведения решений динамических систем, что имеет важное значение для задач теории дифференциальных уравнений, нелинейной динамики и математического моделирования. Полученные в диссертационной работе результаты обладают научной новизной и практической значимостью и могут быть использованы при решении широкого круга прикладных и теоретических задач.

Результаты диссертационного исследования и программный пакет применяются в учебном процессе при подготовке студентов, магистрантов и докторантов (PhD) по направлениям, связанным с математикой, прикладной математикой и физикой, а также используются при выполнении научно-исследовательских работ, курсовых, выпускных квалификационных и диссертационных исследований.

Использование разработанных методов и программного пакета способствует повышению качества учебного процесса, углублению понимания нелинейных динамических явлений, развитию навыков математического моделирования и численного анализа, а также повышению эффективности научных исследований.

На основании вышеизложенного подтверждается, что результаты диссертационной работы Каримзода М.М. и разработанный программный пакет внедрены в практическую деятельность и используются по назначению.

Декан механико – математического
факультета ТНУ, к.т.н., доцент

Председатель учёно – методического
совета механико – математического
факультета ТНУ, д.ф.-м.н., профессор



И.М. Саидзода

Ш.А. Хайруллохзода

**Приложение 3. Акт о внедрении программного пакета и результатов диссертационной работы в Институте математики имени академика А. Джураева
Национальной академии наук Таджикистана.**

АКАДЕМИЯИ МИЛЛИИ
ИЛМҲОИ ТОҶИКИСТОН
Институти математикаи
ба номи академик А. Ҷӯраев



НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
НАУК ТАДЖИКИСТАНА
Институт математики имени
академика А. Джураева

734063, ш. Душанбе, к. Айни 299/4, тел: (99237)2258089, URL:
<http://www.mitas.tj>, e-mail: datemintas@gmail.com

№ 31004/23 – “ 28 ” января 2026с

"УТВЕРЖДАЮ"

Директор института
математики имени академика
А. Джураева НАНТ

Рахмизода А.О.

« 28 » января 2026 г.

АКТ

о внедрении программного пакета и результатов диссертационной работы
Каримзода Мехрубон Маткарим на тему: «Методы качественного и
приближённого исследования бифуркаций в динамических системах с
переключениями»

Настоящий акт составлен в подтверждение того, что программный пакет и результаты диссертационной работы Каримзода Мехрубон Маткарим на тему «Методы качественного и приближённого исследования бифуркаций в динамических системах с переключениями» внедрены и используются в практической деятельности института. (в отделе «Прикладная математика и механика» и в отделе «Математическое моделирование»)

Разработанный в рамках диссертационной работы программный пакет предназначен для численного моделирования и качественного анализа динамических систем с линией переключения, включая кусочно-линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Программный пакет обеспечивает построение фазовых портретов, исследование стационарных режимов, автоматический поиск и анализ предельных циклов, а также определение точек контакта траекторий с линией переключения. Программный пакет разработан на основе методов и алгоритмов, предложенных в диссертационной работе, и имеет важное научное и прикладное значение для исследования бифуркационных явлений в динамических системах с переключениями. Его использование позволяет повысить наглядность и эффективность качественного и численного анализа исследуемых моделей.

Результаты диссертационной работы и программный пакет используются для проведения научно-исследовательских работ, подготовки научных публикаций, а также в учебном процессе при преподавании дисциплин, связанных с теорией дифференциальных уравнений, нелинейными динамическими системами и математическим моделированием.

Внедрение результатов диссертационной работы способствует повышению уровня научных исследований, совершенствованию методов анализа динамических систем с переключениями, а также улучшению качества подготовки обучающихся, включая студентов, магистрантов, докторантов (PhD) и соискателей.

Таким образом, программный пакет и результаты диссертационной работы Каримзода М.М. успешно применяются в практической деятельности организации и подтвердили свою научную и практическую значимость.

**Заместитель директора
по науке и образованию,
д.ф.-м.н., профессор**



Каримов О.Х.

АКТ
о внедрении программного пакета и результатов диссертационной работы
Каримзода Мехрубон Маткарим на тему: «Методы качественного и
приближенного исследования бифуркаций в динамических системах с
переключениями»

Настоящий акт составлен в подтверждение того, что программный пакет и результаты диссертационной работы Каримзода Мехрубон Маткарим на тему «Методы качественного и приближенного исследования бифуркаций в динамических системах с переключениями» внедрены и используются в практической деятельности института. (в отделе «Прикладная математика и механика» и в отделе «Математическое моделирование»)

Разработанный в рамках диссертационной работы программный пакет предназначен для численного моделирования и качественного анализа динамических систем с линией переключения, включая кусочно-линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Программный пакет обеспечивает построение фазовых портретов, исследование стационарных режимов, автоматический поиск и анализ предельных циклов, а также определение точек контакта траекторий с линией переключения. Программный пакет разработан на основе методов и алгоритмов, предложенных в диссертационной работе, и имеет важное научное и прикладное значение для исследования бифуркационных явлений в динамических системах с переключениями. Его использование позволяет повысить наглядность и эффективность качественного и численного анализа исследуемых моделей.