В диссертационный совет 6D.KOA-105
при Таджикском национальном университете
(734025, г. Душанбе, проспект Рудаки, 17)

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Каримзода Мехрубона Маткарима на тему «Методы анализа и проектирования динамических систем с переключениями в задачах исследования циклических явлений», представленную на соискание ученой степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования). – Душанбе, 2026. – 148 с.

1. Соответствие темы и содержания диссертации паспорту научной специальности. В паспорте научной специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования) предусмотрено исследование вопросов, связанных с разработкой математических моделей, методов, алгоритмов и программных средств анализа и проектирования сложных объектов и систем, а также с применением вычислительных технологий в процессах моделирования и исследования. С этой точки зрения тема, цель и задачи диссертации, разработанные автором математические методы, алгоритмы и программный комплекс соответствуют основным направлениям научной специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования), в частности пунктам 1, 8, 9 и 11–17 паспорта научной специальности.

2. Актуальность темы исследования. Современное развитие информационных технологий, математического моделирования и систем автоматизированного проектирования непосредственно связано с необходимостью разработки эффективных методов анализа сложных динамических объектов, функционирование которых сопровождается изменением структуры, режимов движения и законов управления. Особое место среди таких объектов занимают динамические системы с переключениями, математические модели которых широко используются при исследовании технических, информационных и управляющих процессов.

Важной задачей при исследовании подобных систем является определение условий возникновения периодических режимов, анализ устойчивости движений, построение фазовых портретов и выявление особенностей поведения траекторий в окрестности границ переключения. Существенные трудности возникают при исследовании негладких и кусочно-линейных динамических систем, для которых применение традиционных методов анализа не всегда обеспечивает получение необходимых характеристик динамического поведения. Это обусловливает необходимость разработки специализированных математических методов, вычислительных алгоритмов и программных средств для исследования таких систем.

В связи с этим разработка методов математического моделирования и компьютерного анализа динамических систем с переключениями, определение условий существования периодических решений и предельных

циклов, исследование точек контакта и скользящих решений, а также создание алгоритмов и программных средств для автоматизированного анализа представляют собой актуальную научно-техническую задачу.

Диссертационная работа Каримзода Мехрубона Маткарима направлена на решение указанной задачи. В работе исследованы условия существования периодических решений в двумерных системах, возникновения бифуркации Андронова–Хопфа в трёхмерных системах, особенности динамики кусочно-линейных и негладких моделей, точки контакта с линией переключения и скользящие решения по Филиппову. Наряду с теоретическими исследованиями разработаны соответствующие вычислительные алгоритмы и программные средства, предназначенные для компьютерного анализа рассматриваемых динамических систем.

Таким образом, актуальность диссертационной работы определяется необходимостью совершенствования математического, алгоритмического и программного обеспечения исследования динамических систем с переключениями. Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение и могут быть использованы при решении задач математического моделирования и автоматизированного проектирования сложных динамических объектов.

3. Научная новизна диссертационной работы. Научная новизна диссертационной работы заключается в разработке и развитии математических методов, вычислительных алгоритмов и программных средств для автоматизированного исследования циклических явлений в динамических системах с переключениями.

В работе предложен комплексный подход к исследованию двумерных и трёхмерных динамических систем, основанный на сочетании аналитических, качественных и численных методов. Для двумерных дифференциальных систем с главной однородной частью исследованы условия существования периодических решений с применением принципа изменения индекса. Для трёхмерных систем установлены условия возникновения бифуркации Андронова–Хопфа.

Существенным результатом является разработка подхода к анализу негладких и кусочно-линейных динамических систем, позволяющего исследовать фазовые траектории, определять точки контакта с линией переключения и анализировать условия прохождения решений через границу переключения. Рассмотрены скользящие решения в смысле Филиппова и получены соответствующие расчётные соотношения.

Для дифференциальной системы второго порядка с линией переключения в виде окружности определены условия существования и классификации точек контакта, исследованы особенности поведения фазовых траекторий и установлены условия существования предельного цикла. Получены аналитические условия возникновения дополнительных точек контакта и рассмотрены случаи касания второго порядка.

В работе также исследована возможность применения аналога формулы Лиувилля–Остроградского к рассматриваемому классу негладких

динамических систем, включая условия существования соответствующего предельного отношения для функции Вронского.

Особого внимания с технической точки зрения заслуживает разработка вычислительных алгоритмов и программного комплекса для автоматизированного анализа динамических систем с переключениями. Разработанные программные средства позволяют осуществлять численное интегрирование, построение фазовых портретов, проверку параметрических условий, определение точек контакта, секторное разделение фазовой области и исследование отображения Пуанкаре.

Разработка программного средства подтверждена соответствующим свидетельством, представленным в приложении диссертации.

Таким образом, научная новизна работы с технической точки зрения определяется развитием математического, алгоритмического и программного обеспечения автоматизированного исследования динамических систем с переключениями, а также возможностью использования полученных результатов при решении задач моделирования и проектирования сложных динамических объектов.

4. Достоверность полученных результатов исследования. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается корректным применением методов математического моделирования, качественной теории дифференциальных уравнений, топологических методов, принципа изменения индекса Лере–Шаудера, теории Андронова–Хопфа, теоремы Пуанкаре–Бендиксона, метода Филиппова для систем с разрывной правой частью, а также современных численных методов исследования динамических систем.

Полученные результаты представлены в виде теорем, лемм, аналитических условий, расчётных соотношений и вычислительных алгоритмов. Теоретические положения сопровождаются математическими обоснованиями, а результаты качественного исследования подтверждаются численными экспериментами и построенными фазовыми портретами.

Применение численного метода Рунге–Кутты четвёртого порядка, алгоритмов анализа фазовых траекторий и отображения Пуанкаре обеспечивает возможность сопоставления аналитических результатов с данными компьютерного моделирования. Разработанные программные средства позволяют проводить вычислительные эксперименты для различных значений параметров исследуемых систем.

Таким образом, достоверность результатов диссертационной работы основывается на сочетании теоретических методов исследования, математического обоснования полученных положений и их численной проверки с использованием разработанных вычислительных алгоритмов и программных средств.

5. Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, обсуждения результатов, заключения, списка использованной литературы и приложений. Структура диссертации соответствует поставленной цели и последовательности решения сформулированных научных задач. Общий объём диссертации составляет 148

страниц. Библиографический список включает 121 источник. Работа содержит 3 таблицы и 12 рисунков. Объём основного текста позволяет раскрыть постановку задач, теоретические результаты и их программную реализацию.

Введение диссертационной работы содержит необходимые сведения, характеризующие исследование. В нем обоснована актуальность выбранной темы, определены степень разработанности проблемы, цель и задачи исследования, объект и предмет исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методы исследования, основные положения, выносимые на защиту, достоверность результатов, личный вклад автора, апробация и публикации.

Первая глава диссертации посвящена моделированию периодических явлений в динамических системах. В данной главе рассматриваются теоретические основы исследования периодических процессов и динамических систем. Анализируются вопросы моделирования периодических явлений, свойства решений дифференциальных систем и возможности применения формулы Лиувилля–Остроградского.

В первой главе также рассматриваются кусочно-линейные динамические модели с линией переключения. Изучаются особенности поведения фазовых траекторий при переходе между различными областями фазового пространства и формируется теоретическая база для дальнейшего исследования систем с переключениями.

Рассматриваемые в первой главе положения логически связаны с последующими результатами диссертационной работы и позволяют перейти от общих вопросов периодических явлений к исследованию конкретных классов гладких и негладких динамических систем.

Во второй главе исследуются периодические решения с помощью топологических методов. Вначале рассматриваются двумерные системы с главной однородной частью. Автор использует изменение индекса для установления условий существования периодического движения. Существенным является переход от свойств векторного поля к заключению о поведении решений.

Далее исследуются трёхмерные системы и условия возникновения явления Андронова–Хопфа. Анализируется зависимость линейной части системы от параметров и соответствующее изменение её спектральных характеристик. Полученные условия связывают алгебраические характеристики модели с качественной перестройкой движения.

Представленные во второй главе результаты имеют теоретическое значение и являются основой для последующего исследования циклических явлений в более сложных системах с переключениями.

Третья глава диссертационной работы посвящена исследованию систем с переключениями и является одной из основных частей диссертации. В начале главы рассматривается вопрос об аналоге формулы Лиувилля–Остроградского для исследуемого класса систем. При соответствующих ограничениях на параметры системы определяется существование предельного отношения функции Вронского, что позволяет использовать полученные соотношения при анализе поведения решений.

Далее исследуется динамическая система, линия переключения которой задается уравнением окружности $h(x_1, x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - r^2 = 0$.

Внутри и вне указанной окружности система описывается различными линейными дифференциальными уравнениями.

Автор подробно исследует точки контакта траекторий с линией переключения. Показано, что точки $(\pm r, 0)$ являются характерными точками контакта, а существование дополнительных точек определяется взаимным расположением окружности и соответствующей прямой.

Получены аналитические условия, позволяющие классифицировать возможные случаи расположения точек контакта в зависимости от параметров системы.

Исследовано значение второй производной функции, характеризующей положение траектории относительно линии переключения, что позволяет определить характер касания и установить условия касания второго порядка.

Важное место занимает исследование устойчивости соответствующих фокусов. Автором введена величина

$$\gamma = \frac{a_1}{b_1(1-c_1)(1-b_1(1-c_1))} - \frac{a_2}{b_2(1-c_2)(1-b_2(1-c_2))},$$

с помощью которой определяется характер устойчивости рассматриваемого фокуса. На основе проведенного качественного анализа и теоремы Пуанкаре–Бендиксона доказано существование предельного цикла при выполнении соответствующих параметрических условий.

В последующих разделах третьей главы рассматриваются **скользящие решения в смысле Филиппова**. Исследуются условия $(\Delta h, f_1)(\Delta h, f_2) < 0$, характеризующие возможность возникновения скользящего движения вдоль линии переключения.

Получена формула для коэффициента, определяющего соответствующую комбинацию векторных полей:

$$\lambda = \frac{(1-b_1)x_1 - a_1 x_2 + b_1 c_1}{(b_2 - b_1)x_1 + (a_2 - a_1)x_2 + b_1 c_1 - b_2 c_2}.$$

Данные результаты позволяют описывать поведение решений непосредственно на линии переключения и являются существенными для качественного исследования негладких динамических систем.

В третьей главе рассматривается также секторное разделение фазового пространства и предлагаются алгоритмы анализа различных вариантов прохождения решения через линию переключения.

Отдельный раздел третьей главы посвящен разработанному программному комплексу для исследования динамических систем с переключениями. Программные средства позволяют выполнять численное решение систем дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка, строить фазовые портреты, автоматически проверять параметрические условия, определять точки контакта, осуществлять секторное разделение фазового пространства и исследовать отображение Пуанкаре.

Таким образом, разработанный программный комплекс обеспечивает практическую реализацию предложенных в диссертации теоретических и алгоритмических подходов.

В приложении представлен документ, подтверждающий регистрацию разработанной программы, что является достаточным подтверждением практической реализации программной части проведенного исследования.

Заключение диссертационной работы содержит основные научные результаты, полученные в ходе исследования. Выводы соответствуют поставленным цели и задачам и логически следуют из содержания диссертационной работы. Основные результаты диссертации обладают научной новизной, имеют теоретическое и практическое значение и получили отражение в публикациях автора.

6. Теоретическая и практическая значимость исследования определяется тем, что полученные в диссертации результаты развивают методы исследования динамических систем с переключениями, негладких и кусочно-линейных дифференциальных систем.

Установленные условия существования периодических решений, предельных циклов, точек контакта и скользящих решений могут использоваться при дальнейшем исследовании более широких классов динамических систем с изменяющейся структурой.

Теоретические результаты, связанные с двумерными системами с главной однородной частью, трехмерными системами и системами с линией переключения, могут быть использованы в дальнейших исследованиях по качественной теории дифференциальных уравнений, математическому моделированию и анализу нелинейных динамических процессов.

Практическая значимость исследования определяется разработкой алгоритмов и программного комплекса, обеспечивающих автоматизацию ряда этапов исследования систем с переключениями.

Разработанное программное обеспечение предоставляет возможность вводить параметры исследуемой системы, осуществлять численное решение дифференциальных уравнений, строить фазовые траектории, проверять необходимые условия, определять точки контакта с линией переключения, исследовать характер прохождения траекторий через нее и выполнять качественный анализ полученных результатов.

Предложенные методы и программные средства могут быть использованы при моделировании технических, управляющих и других динамических объектов, математические модели которых описываются кусочно-заданными или переключаемыми дифференциальными системами.

Диссертант для достижения поставленной цели сформулировал конкретные научные задачи.

Основная цель диссертационного исследования состоит в разработке методов анализа и проектирования систем с переключениями для исследования циклических явлений и периодических режимов в негладких динамических моделях, а также в создании алгоритмов и программных средств для их качественного и численного анализа.

Для достижения поставленной цели автором решены следующие основные задачи:

- исследованы двумерные системы с главной однородной частью и определены необходимые и достаточные условия существования периодических решений;
- исследованы трехмерные системы и определены условия возникновения явления Андронова–Хопфа на основе анализа коэффициентов системы и принципа изменения индекса;
- разработаны методы качественного и численного анализа фазовых портретов негладких, модульных и кусочно-линейных динамических систем;
- разработаны алгоритмы и программный комплекс для исследования систем с переключениями.

Основные положения, выносимые на защиту, непосредственно отражают содержание глав и разделов диссертационной работы и характеризуют личный вклад автора в решение поставленных научных задач.

По теме диссертационной работы соискателем опубликовано **13 научных работ**, в том числе **5 статей в научных журналах и 8 работ в материалах научных конференций**. Опубликованные научные работы отражают основные положения, результаты и содержание диссертационного исследования.

Наряду с отмеченными научными результатами и достоинствами диссертационной работы в ней имеются отдельные замечания и вопросы, которые целесообразно отметить в целях дальнейшего совершенствования исследования:

- В подразделе 3.6.1 при описании численного интегрирования кусочно-линейной системы с линией переключения следовало бы уточнить процедуру определения момента пересечения траекторией границы переключения и выбор шага интегрирования при использовании метода Рунге–Кутты четвёртого порядка.
- В разделе 3.7, посвящённом структуре и алгоритмам программного пакета, целесообразно было бы подробнее представить критерии точности вычислений и условия завершения алгоритмов при определении точек контакта и построении фазовых траекторий.
- При представлении результатов численного моделирования предельных циклов в подразделе 3.6.1 желательно было бы привести количественные характеристики вычислительных экспериментов, в частности погрешность замыкания траекторий и зависимость полученных результатов от шага интегрирования.

Указанные замечания не снижают научной ценности диссертационной работы и ее теоретической и практической значимости.

В целом диссертация Каримзода Мехрубона Маткарима представляет собой самостоятельную, завершенную научно-квалификационную работу, в которой решается актуальная задача разработки методов анализа и

проектирования динамических систем с переключениями для исследования циклических явлений.

Автором получены новые теоретические результаты, установлены условия существования периодических решений и предельных циклов, развиты методы исследования точек контакта и скользящих решений, разработаны вычислительные алгоритмы и программный комплекс для исследования динамических систем с переключениями.

Полученные научные результаты обладают новизной, теоретически обоснованы и имеют практическую значимость. Научные публикации соискателя отражают основные результаты диссертационного исследования.

Таким образом, диссертация Каримзода Мехрубона Маткарима на тему «Методы анализа и проектирования динамических систем с переключениями в задачах исследования циклических явлений» по содержанию, объему, научной новизне, теоретической и практической значимости соответствует требованиям Порядка присуждения ученых степеней, утверждённого постановлением Правительства Республики Таджикистан от 28 августа 2026 года №591, а её автор заслуживает присуждения ученой степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования).

Официальный оппонент:
доктор технических наук, доцент кафедры программирования и информационных систем Политехнического института Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими в городе Худжанде — Х.А. Худойбердиев

Подпись доктора технических наук, доцента Х.А. Худойбердиева заверяю:
Начальник управления кадров, делопроизводства и контроля исполнения Политехнического института Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими в городе Худжанде — М.Ш. Юсупова

ДОНИШКАДАИ ПОЛИТЕХНИКИИ ТТТ БА НОМИ АКАДЕМИК М.С. ОСИМИ ШАҲРИ ХУҶАНД
РАЁСАТИ КАДРҲО, КОРҲУЗОРӢ ВА НАЗОРАТИ ИҶРО

Юридический адрес организации:
735700, г.Худжанд, проспект И.Сомони, 226
Тел.: +992 (3422) 6-04-54, https://www.polytech.tj
E-mail: info@polytech.tj

«02» ноября 2026 г.