В диссертационный совет 6D.KOA-105
при Таджикском национальном университете
(г. Душанбе, проспект Рудаки, 17)

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Института математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана, кандидат физико-математических наук
_____ Рахимзода А.О.
«07» февраля 2026 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Института математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана

на диссертационную работу Каримзода Мехрубона Маткарима на тему «Методы анализа и проектирования динамических систем с переключениями в задачах исследования циклических явлений», представленную на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования)

1. Соответствие темы и содержания диссертации паспорту научной специальности. Тема и содержание диссертационной работы соответствуют паспорту научной специальности 6D060202 – Системы автоматизации проектирования. Связь со специальностью определяется разработкой математических моделей, аналитических и численных методов вычислительного эксперимента, алгоритмов компьютерного анализа и комплекса проблемно-ориентированных программ. Полученные результаты относятся к математическому, алгоритмическому и программному обеспечению исследования динамических объектов и могут применяться при решении задач автоматизированного проектирования.

2. Актуальность темы исследования. Математическими объектами диссертационного исследования являются двумерные системы с главной однородной частью, многомерные системы с линейной составляющей и малым нелинейным возмущением, а также два класса кусочно-линейных

уравнений второго порядка: с модульной нелинейностью по первой производной при нулевом значении параметра и с переключением линейных законов движения на окружности фазовой плоскости.

Для двумерных и трёхмерных систем исследование направлено на выявление условий возникновения периодических решений в окрестности состояния равновесия при изменении параметра. Для систем с непрерывной, но негладкой правой частью актуально обобщение условий бифуркации Андронова – Хопфа за пределы классических требований к гладкости.

Для рассматриваемых кусочно-линейных уравнений существенны согласование решений отдельных подсистем, анализ пересечений и касаний границы переключения и установление условий существования предельных циклов. Модели с разрывными правыми частями требуют отдельного рассмотрения продолжения решений на границе переключения с использованием подходов, развитых А. Ф. Филипповым.

Модели с переключениями применяются в теории автоматического управления, механике, экономике, биологии и других областях прикладных наук. Актуальность работы определяется сочетанием качественных, топологических и численных методов анализа указанных объектов с разработкой алгоритмов построения фазовых портретов и выбора параметров моделей. Это соответствует задачам математического моделирования и систем автоматизации проектирования, ориентированным на исследование и формирование требуемых циклических режимов.

3. Степень обоснованности научных положений, выводов и предложений, приведённых в диссертации. Методическую основу исследования составляют качественная теория дифференциальных уравнений, топологический анализ, математическое моделирование и методы исследования негладких систем. В диссертации представлены формулировки теоретических утверждений, условия их применимости и изложение соответствующих доказательных построений. Для кусочно-линейных моделей используются явные решения отдельных подсистем и анализ их поведения относительно линии переключения.

Сопоставление аналитических условий с вычисленными траекториями позволяет проверять согласованность теоретических результатов и программной реализации в рассмотренных примерах. Вычислительный эксперимент дополняет математическое обоснование и служит средством изучения поведения модели при изменении параметров.

4. Научная новизна исследования и достоверность полученных результатов. Научную новизну работы определяет совокупность результатов, связывающих условия возникновения периодических движений с аналитическим и численным исследованием конкретных классов негладких систем. К основным результатам относятся следующие положения:

- для двумерной динамической системы с главной однородной частью сформулированы условия бифуркации периодических решений с применением принципа смены топологического индекса. Значение результата состоит в использовании качественных характеристик векторного поля для исследования периодических движений.
- для исследуемых динамических систем третьего порядка и $n \geq 3$ получены условия возникновения периодических решений при непрерывной зависимости линейной части от параметра и выполнении условий малости нелинейного возмущения. Эти результаты развивают топологический подход к бифуркационному анализу в рамках принятых предположений.
- для кусочно-линейных моделей разработаны подходы к согласованию решений в областях с различными законами движения. Рассмотрен аналог формулы Лиувилля – Остроградского с учётом перехода через линию переключения, исследованы точки контакта и получены достаточные условия существования предельного цикла для рассматриваемой системы.
- аналитические построения доведены до алгоритмов определения точек контакта, анализа секторной структуры, построения фазовых траекторий и исследования циклических режимов. Создан программный комплекс, объединяющий численное моделирование и визуализацию результатов.

Достоверность полученных результатов подкрепляется сопоставлением аналитических выводов с результатами численного моделирования в пределах принятых предположений и рассмотренных примеров.

5. Научное, практическое, экономическое и социальное значение результатов диссертации. Теоретическая значимость исследования заключается в развитии качественных и топологических методов анализа систем, для которых смена режима движения требует специального рассмотрения. Прикладное значение результатов обусловлено возможностью использовать полученные расчётные соотношения в программных процедурах исследования и выбора параметров динамических моделей.

Практическую ценность представляет программная реализация методов анализа кусочно-линейных систем. Возможности построения фазовых портретов, вычисления траекторий и определения контактов с линией переключения создают основу для воспроизводимых вычислительных экспериментов. Программные средства могут использоваться при исследовании моделей с пороговыми механизмами и при предварительном выборе параметров, обеспечивающих интересующий динамический режим.

Возможный экономический эффект связан с сокращением объёма ручных вычислений и перебора параметров. Образовательное значение исследования состоит в наглядном сопоставлении аналитических условий и фазовых траекторий; оно определяет социальную направленность использования результатов в учебной деятельности.

6. Степень достоверности результатов исследования и их обоснованность. Численная часть исследования опирается на метод Рунге – Кутты четвёртого порядка с обнаружением событий переключения. Для кусочно-линейных моделей используются явные решения отдельных подсистем и анализ их поведения относительно линии переключения. Сопоставление аналитических условий с вычисленными траекториями позволяет оценивать согласованность теоретических положений и программной реализации в рассмотренных примерах.

Применяемые методы качественной теории дифференциальных уравнений и топологического анализа обеспечивают математическое обоснование результатов в рамках сформулированных в работе предположений. Численные эксперименты дополняют это обоснование.

7. Практическое применение результатов и экономическая эффективность. Результаты исследования и программный пакет внедрены в научную и учебную деятельность механико-математического факультета Таджикского национального университета и в деятельность Института математики имени академика А. Джураева Национальной академии наук Таджикистана; соответствующие акты включены в приложения диссертации. Также приведены сведения о свидетельстве № 227 от 6 марта 2025 года о регистрации компьютерной программы «О новом алгоритме построения фазовых портретов кусочно-линейных дифференциальных уравнений».

Результаты целесообразно использовать в исследованиях нелинейных колебаний и систем автоматического регулирования, при разработке проблемно-ориентированных средств моделирования и в преподавании

математического моделирования, дифференциальных уравнений и нелинейной динамики. При переносе алгоритмов на новые модели необходимо учитывать геометрию линии переключения и условия применимости соответствующих теоретических утверждений.

Возможная экономическая эффективность применения программных средств связана с сокращением объёма ручных вычислений и перебора параметров.

8. Личный вклад автора в исследование. Личный вклад соискателя заключается в получении основных научных результатов, исследовании качественных свойств динамических систем, обосновании теоретических положений и разработке их программной реализации. В совместных публикациях вклад автора чётко определён и отражает его непосредственное участие в выполнении диссертационного исследования.

9. Публикация научных результатов в рецензируемых журналах и их соответствие. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 13 научных работах, из которых 5 статей размещены в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан, и 8 работ – в материалах научных конференций и других изданиях. Публикации отражают основные научные результаты диссертации и соответствуют её тематике. Результаты исследования прошли апробацию на научных семинарах и международных конференциях.

10. Оценка содержания диссертации и её полноты. Структура и объём диссертации. Согласно сведениям автореферата, диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы из 121 источника и приложений. Общий объём составляет 148 страниц; работа содержит 3 таблицы и 12 рисунков. Последовательность изложения предусматривает переход от теоретических предпосылок к новым результатам, а затем к алгоритмам и программной реализации.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, охарактеризована степень её научной разработанности, сформулированы цель и задачи исследования, определены объект и предмет исследования. Представлены используемые методы, раскрыты научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Приведены основные положения, выносимые на защиту, сведения о

достоверности и апробации результатов исследования, публикациях автора, а также структуре и объёме диссертационной работы.

В первой главе рассмотрены теоретические и методологические основы моделирования нелинейных динамических систем. Представлены подходы к качественному анализу стационарных и периодических решений, исследованию фазовых портретов и локальных бифуркаций. Рассмотрение гладких и негладких моделей задаёт основу для выбора методов дальнейшего исследования.

Во второй главе исследуются условия возникновения периодических решений в окрестности состояния равновесия. Рассматриваются два класса динамических систем.

Двумерная динамическая система с главной однородной частью

$$\begin{cases} x' = P(x, y, \lambda), \\ y' = Q(x, y, \lambda). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь P, Q – функции, непрерывные по совокупности переменных (x, y, λ), $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$. Выполняются условия

$$P(0, 0, \lambda) \equiv Q(0, 0, \lambda) \equiv 0$$

$$|P(x, y, \lambda)| + |Q(x, y, \lambda)| > 0$$

при $|x| + |y| > 0$, $\lambda \in \Lambda$.

Для двумерной системы (1) с главной однородной частью сформулированы условия бифуркации периодических решений с применением принципа смены топологического индекса. Значение результата состоит в использовании качественных характеристик векторного поля для исследования периодических движений.

Динамическая система

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а правая часть имеет вид

$$F(x, \mu) = A(\mu)x + \omega(x, \mu)$$

Матрица $A(\mu) = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, является квадратной матрицей порядка n. Нелинейное возмущение удовлетворяет условию

$$\frac{|\omega(x, \mu)|}{|x|} \to 0 \text{ при } |x| \to 0.$$

Для исследуемых систем вида (2) получены условия возникновения периодических решений при непрерывной зависимости линейной части от параметра и выполнении условий малости нелинейного возмущения. Существенной особенностью главы является использование топологических методов при ослабленных требованиях к гладкости в пределах сформулированных в работе предположений.

Третья глава посвящена кусочно-линейным системам второго порядка с линией переключения. Основными математическими объектами этой части исследования являются следующие уравнения.

Кусочно-линейное уравнение с модульной нелинейностью

$$y'' + ay' + by + c|y' - \lambda| = 0 \tag{3}$$

рассматриваемое при $\lambda = 0$, где a, b, c — вещественные числа.

Уравнение второго порядка с переключением на окружности

$$y'' + g(y, y') = 0 \tag{4}$$

где

$$g(y, y') = \begin{cases} a_1 y' + b_1(y - c_1), & h(y, y') > 0, \\ a_2 y' + b_2(y - c_2), & h(y, y') < 0. \end{cases}$$

Здесь $h(y, y') = y^2 + (y')^2 - r^2$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, а a_i, b_i, c_i – вещественные числа, $i = 1,2$. Граница переключения задаётся условием $h(y, y') = 0$.

При исследовании кусочно-линейных моделей рассматриваются сшивание решений в областях с различными законами движения, поведение траекторий при пересечении и касании линии переключения и изменение определителя Вронского. Рассмотрен аналог формулы Лиувилля – Остроградского с учётом перехода через линию переключения, исследованы точки контакта и получены достаточные условия существования предельного цикла для рассматриваемой системы.

Для модели с окружностью переключения (4) рассматривается её секторное разбиение. Анализ включает скользящие режимы в трактовке Филиппова. Теоретические результаты реализованы в программном комплексе на языке Java, предназначенном для построения фазовых портретов и проведения вычислительных экспериментов.

11. Соответствие оформления диссертации требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан. Диссертационная работа по структуре, содержанию и оформлению соответствует требованиям Порядка

присуждения учёных степеней, утверждённого постановлением Правительства Республики Таджикистан от 28 августа 2026 года № 591, а также действующим нормативным требованиям ВАК при Президенте Республики Таджикистан.

12. Соответствие научной квалификации соискателя искомой учёной степени. Получение теоретических результатов, разработка алгоритмов и их программная реализация характеризуют научную квалификацию соискателя. Личный вклад автора и совокупность полученных результатов свидетельствуют о соответствии его научной квалификации искомой учёной степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования).

Автореферат последовательно раскрывает цель и задачи работы, её научную новизну, содержание глав, основные результаты и возможности их использования.

13. Замечания и вопросы для научного обсуждения. При общей положительной оценке представленных результатов следует отметить следующие замечания:

– на с. 52 диссертации вместо «содержит пара чисто мнимых собственные значение» должно быть «содержит пару чисто мнимых собственных значений», а на с. 59 вместо «Таким образом лемма 2.2.1 доказано» - «Таким образом, лемма 2.2.1 доказана»;

– на с. 74 диссертации, в условии теоремы 3.2.1, вместо $4b > (a \pm b)^2$ должно быть $4b > (a \pm c)^2$ для обоих знаков, то есть $4b > max\{(a-c)^2, (a+c)^2\}$, что соответствует характеристическому уравнению (3.2.9).

Указанные замечания направлены на уточнение границ применимости и развитие полученных результатов. Они не изменяют положительной оценки научной направленности работы и её теоретической и практической значимости.

14. Заключение по диссертации. В целом, диссертация Каримзода Мехрубона Маткарима на тему «Методы анализа и проектирования динамических систем с переключениями в задачах исследования циклических явлений», представленная на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования), является завершённой самостоятельной научно-квалификационной работой, обладающей

внутренним единством и содержащей решение актуальной научной задачи развития математических методов и программных средств исследования циклических режимов динамических систем с переключениями. Научная новизна работы определяется полученными условиями возникновения периодических решений для рассмотренных классов систем, обоснованием методов анализа кусочно-линейных уравнений с использованием сшивания решений на линии переключения, а также разработкой алгоритмов автоматизированного моделирования и построения фазовых портретов. Теоретическая значимость результатов заключается в развитии качественных и топологических подходов к исследованию нелинейных и негладких динамических систем. Практическая значимость обусловлена доведением теоретических положений до расчётных соотношений, алгоритмов и программного комплекса, предназначенного для проведения вычислительных экспериментов и анализа циклических режимов. Обоснованность полученных результатов обеспечивается применением математических методов исследования, а их достоверность подкрепляется сопоставлением аналитических выводов с результатами численного моделирования. Разработанные методы и программные средства вносят вклад в развитие математического, алгоритмического и программного обеспечения систем автоматизации проектирования, что определяет соответствие содержания работы заявленной специальности.

По актуальности темы, научной новизне, обоснованности результатов, теоретической и практической значимости диссертация соответствует требованиям Порядка присуждения учёных степеней, утверждённого постановлением Правительства Республики Таджикистан от 28 августа 2026 года №591, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора философии (PhD) – доктора по специальности, а её автор, Каримзода Мехрубон Маткарим, заслуживает присуждения указанной учёной степени по специальности 6D060200 – Информатика (6D060202 – Системы автоматизации проектирования).

Отзыв подготовлен в соответствии с пунктами 72-78 Порядка присуждения ученых степеней, утвержденных постановлением Правительства Республики Таджикистан 28 августа 2026 года № 591.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук, заведующим отделом прикладной математики и механики Института математики имени академика А. Джураева НАН Таджикистана М.М. Кабиловым.

Отзыв обсужден и утверждён на заседании Института математики имени академика А. Джураева НАН Таджикистана (протокол № 42 от 28 октября 2026 года).

На заседании присутствовали: 31 человек.

Результаты голосования: за – 31 человек, против – нет, воздержавшиеся – нет.

Председатель заседания:
Главный научный сотрудник отдела алгебры, теории чисел и топологии, доктор физико-математических наук — У.Х. Каримов

Эксперт:
Заведующий отделом прикладной математики и механики, доктор физико-математических наук, доцент — М.М. Кабилов

Научный секретарь заседания:
Ученый секретарь ИМ НАНТ, кандидат физико-математических наук — А.С. Аминов

Подписи Каримова У.Х., Кабилова М.М. и Аминова А.С. заверяю.

Начальник отдела кадров ИМ НАНТ З. Юсупова

Юридический адрес ведущей организации:
734063, Республика Таджикистан,
город Душанбе, район Шохмансур, ул. С. Айни, 299/4.
Тел.: +992 (37) 225-80-89.
E-mail: datemitas@gmail.com; официальный сайт: https://mitas.tj

«03» 11 2026 г.