Министерство образования и науки
Республики Таджикистан
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Абдухаминов Мунъим Абдумамадович

# НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ НАИЛУЧШИМИ СОВМЕСТНЫМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ И УСРЕДНЁННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ГЛАДКОСТИ В $L_2$ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

**Д И С С Е Р Т А Ц И Я**
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана, доктор физико-
математических наук, профессор
М.Ш. Шабозов

**Д У Ш А Н Б Е – 2023**

# Содержание

# Введение

**Актуальность темы исследования.** При решении ряда экстремальных задач теории приближения функций в последнее время часто применяют различные модификации классической характеристики гладкости функции – её модуля непрерывности. В большинстве случаев это продиктовано спецификой рассматриваемых задач и позволяет получить новые содержательные результаты. Так, для определения эффективных характеристик гладкости функции в работах Z.Ditzian, V.Totik [50], К.В.Руновского [22], Н.Н.Пустовойтова [21], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и В.И.Забутной [54] рассматривались различные способы осреднения конечных разностей, а в работах В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой [1], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [5], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [42] и других авторов рассматривались модификации конечных разностей, основанные на применении сглаживающих операторов, например, оператора Стеклова вместо обычного оператора сдвига $T_h(f,x) = f(x+h)$.

Данная диссертационная работа посвящена применению одной из характеристик гладкости функций, рассмотренной ранее в упомянутой работе Руновского [22], свойства которой более подробно изучены в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [5] в метрике пространства $L_2$. В диссертационной работе результаты К.В.Руновского [22], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [5] обобщаются и распространяются на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных, вычисляются точные верхние грани наилучших совместных приближений на различных классов функций, находятся точные значения $n$-поперечников указанных классов функций. Следует отметить, что экстремальными задачами приближения классов периодических функций в различных банаховых пространствах в разное время занимались

А.Н.Колмогоров [51], С.М.Никольский [20], С.Б.Стечкин [25], Н.П.Корнейчук [12–15], В.К.Дзядык [8], Н.И.Черных [32, 33], Л.В.Тайков [28, 29], В.В.Арестов, Н.И.Черных [49], В.И.Иванов [9, 10], В.А.Юдин [46], А.А.Лигун [18, 19], А.Г.Бабенко [2], Ю.Хуссейн [48], С.Б.Вакарчук [4–6], М.Ш.Шабозов [34–36, 55], Г.А.Юсупов [47] и многие другие. В теории приближения задача совместного (или одновременного) приближения функций и их производных изучена сравнительно мало, а аналогичные задачи для наилучшего совместного полиномиального приближения функций и их производных находятся на стадии разработки. Всё же следует отметить, что экстремальные задачи наилучшего совместного приближения гладких функций сплайн-функциями и их соответствующими производными изучены Н.П.Корнейчуком [16]. Для наилучшего совместного приближения функций тригонометрическими полиномами некоторые результаты получены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [5], а для аналитических в единичном круге функций экстремальные задачи совместного приближения изучены в работе М.Ш.Шабозова, Г.А.Юсупова и Дж.Дж.Заргарова [44].

**Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами.** Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2015-2020 гг. и на 2021-2025 гг. по теме “Теория аппроксимации функций”.

**Цель исследования.** Хорошо известно, что интерес к полиномам и их свойствам проявили математики, занимавшиеся вопросами теории приближений. При выборе аппарата для приближенного представления функций они, как правило, останавливались на алгебраических и тригонометрических полиномах благодаря простоте их структуры и широким аппроксимационным возможностям. В последнее время выяснилось, что полиномы не только в задачах наилучшего приближения функций играют главенствующую роль, но и с таким же успехом применяются в экстремальных задачах наилучшего совместного приближения функций и их последовательных производных.

Основной целью диссертационной работы является точное решение различных экстремальных задач наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами классов функций в пространстве $L_2$ на периоде в терминах как обычного среднего значения характеристики гладкости Руновского, так и в терминах ее взвешенного $L_p$-среднего при $0 < p \leq \infty$.

**Задачи исследования.** В соответствии с поставленной целью выделяются следующие задачи:

- найти точную верхнюю грань отношения величины наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами и характеристикой гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$;
- найти явную константу в неравенстве Джексона–Стечкина между наилучшим среднеквадратическим совместным приближением тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным $L_p$-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка $m$ с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- решить экстремальную задачу отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой $\Psi$;
- вычислить точные значения $n$-поперечников некоторых классов функций из $L_2$, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике $L_p$ $(0 < p \leq \infty)$.

**Основные методы исследования.** В работе широко используются методы решения экстремальных задач теории аппроксимации функций в нормированных пространствах, а также современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания в различных функциональных пространствах.

**Научная новизна исследований.** В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдено точное значение верхней грани отношения величины наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами и характеристики гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)},\ r\in\mathbb{N}$;
- найдена явная константа в неравенстве Джексона – Стечкина между наилучшим среднеквадратическим совместным приближением тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным $L_p$-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка $m$ с произвольным весом и $0<p\le\infty$;
- решена экстремальная задача отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой $\Psi$;
- вычислены точные значения различных $n$-поперечников некоторых классов функций из $L_2$, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике $L_p$ $(0<p\le\infty)$.

**Положения, выносимые на защиту:**

- основные теоремы о точных оценках наилучшего совместного приближения функций тригонометрическими полиномами, скорости сходимости которых определяются посредством характеристики гладкости Руновского порядка $m$;

- теоремы о явных константах в неравенстве Джексона – Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратического совместного приближения тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным $L_p$-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка $m$ с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- теоремы о решении экстремальных задач отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых заданной мажорантой;
- теоремы о точных значениях $n$-поперечников некоторых классов функций из $L_2$, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике $L_p$ $(0 < p \leq \infty)$.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы их доказательства можно применять при решении экстремальных задач функций комплексного переменного, принадлежащих пространствам Харди и Бергмана. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика».

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016-2023 гг.);

- международной научной конференции “Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.);
- международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- международной научной конференции “Теория приближения и её применение” (Днепро, Украина, 16-19 сентября 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы теории дифференциальных уравнений” (Душанбе, 26 сентября 2020 г.);
- международной научной конференции “Актуальные проблемы современной математики” (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- международной конференции “Современные проблемы теории чисел и математического анализа” (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

**Публикации по теме диссертации.** Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 12 научных работах, из них 5 статей опубликовано в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 7 – в материалах международных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 69 наименований, занимает

70 страницу машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

# Глава I. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и усредненными характеристиками в пространстве $L_2$

В этой главе излагаются некоторые результаты по наилучшим среднеквадратическим приближениям дифференцируемых периодических функций $f(x)$ тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 = L_2[0, 2\pi]$. Прежде чем излагать наши основные результаты, приведем краткий исторический обзор результатов по исследуемой тематике и покажем ход ее развития для обоснования выбора темы диссертационной работы. Задачи наилучшего приближения периодических функций в пространстве $L_2$ исследовались, например, в работах Н.И. Черных [32, 33], Л.В.Тайкова [28, 29], С.Б.Вакарчука [3–6, 54], А.А.Лигуна [18, 19], В.В.Шалаева [45], М.Ш.Шабозова [34–44, 56, 57] и многих других. В последнее время в задачах наилучшего полиномиального приближения функций в пространстве $L_2$ используются различные модификации модуля непрерывности (см., например, работы [1, 4–7, 22–26, 31–40, 54] и приведенную там литературу).

Характеристика гладкости Руновского $\Lambda_m(f,t)$ [22] в экстремальных задачах наилучшего полиномиального приближения $f \in L_2$ впервые была использована С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [5]. Наиболее общим результатом этой работы является следующее общее двустороннее неравенство [5]

$$\frac{1}{\mathcal{A}_{n,m,r,p}(g,t)} \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^t \Lambda_m^p(f^{(r)},\tau) g(\tau) d\tau\right\}^{1/p}} \leq \frac{1}{\inf\limits_{n \leq k < \infty} \mathcal{A}_{k,m,r,p}(g,t)}, \quad (1.0.1)$$

где

$$\mathcal{A}_{k,m,r,p}(g,h)=\left(k^{rp}\int\limits_0^t J_{1,m}^p(k\tau)g(\tau)d\tau\right)^{1/p},$$

$$J_{1,m}(k\tau)=\left\{\frac{1}{k\tau}\int\limits_0^{k\tau}(1-\cos\tau)^m d\tau\right\}^{1/2}.$$

Наша цель — найти точное значение величины в средней части неравенства (1.0.1) и распространить полученный результат на случай совместного приближения функций и их промежуточных производных.

Результаты, изложенные в этой главе, опубликованы в работах [60, 62, 63, 64].

## § 1.1. Общие сведения. Предварительные факты и основные определения и обозначения

Тригонометрическим рядом называется ряд следующего вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos kx+b_k\sin kx\big). \tag{1.1.1}$$

Здесь $x$ – вещественное переменное, числовые коэффициенты $a_0$, $a_k$, $b_k$, $k\in\mathbb{N}$ — произвольные числа, которые не зависят от переменного $x$. Всюду далее будем предполагать, что они действительные числа. Но, если они являются комплексными числами, то мы можем рассматривать действительную и мнимую части тригонометрического ряда (1.1.1) отдельно. Все слагаемые ряда (1.1.1) $2\pi$-периодические функции, а потому изучение указанного ряда достаточно провести на любом отрезке длины $2\pi$, например на отрезке $[0,2\pi]$ или $[-\pi,\pi]$. Отметим, что если рассмотреть комплексный ряд

$$\frac{1}{2}\,a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k-ib_k\big)z^k \tag{1.1.2}$$

на единичной окружности $z=e^{ix}, |z|=1$, то ряд (1.1.1) представляет собой действительную часть ряда (1.1.2).

Конечная тригонометрическая сумма

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\,\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}\big(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\big) \tag{1.1.3}$$

называется тригонометрическим полиномом порядка не выше $n$. Множество всех тригонометрических полиномов $T_n(x)$ вида (1.1.3) обозначим символом $\mathcal{T}_{2n+1}$. При этом, если $|\alpha_n|+|\beta_n|\neq 0$, то говорят, что тригонометрический полином (1.1.3) имеет точный порядок $n$. Очевидно, что каждый тригонометрический полином (1.1.3) есть действительная часть обычного (степенного) многочлена

$$\mathrm{P}_n(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k$$

при $c_k := \alpha_k - i\beta_k, \quad z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Заметим, что система функций

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{1.1.4}$$

ортогональна на любом отрезке длины $2\pi$, поскольку

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx} dx = \begin{cases} 0, \ m \neq n; \\ 2\pi, \ m = n. \end{cases}$$

Ряд Фурье по системе ортогональных функций (1.1.4) для заданной периодической функции $f(x)$, определенной, например, на интервале $(-\pi, \pi)$, имеет вид

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{ikx}, \tag{1.1.5}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \dots . \tag{1.1.6}$$

Положим

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \ b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \ k \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.1.7}$$

так, что

$$c_k = \frac{1}{2}\big(a_k - ib_k\big), \ c_{-k} = \frac{1}{2}\big(a_k + ib_k\big), k \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.1.8}$$

Группируя в (1.1.5) члены с номерами $\pm k$, запишем указанный ряд в виде

$$c_0 + \big(c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}\big) + \ldots + \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big) + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}\big) + c_0$$

или, принимая во внимание формулы (1.1.8), получаем следующее выражение для вещественной части ряда:

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots . \tag{1.1.9}$$

Так как ортогональность двух функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$ (с одинаковой нормой) влечет за собой ортогональность пары $\varphi_1+\varphi_2$, $\varphi_1-\varphi_2$, то легко видеть, что система

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{1.1.10}$$

ортогональна на любом отрезке длины $2\pi$. Таким образом, ряд (1.1.9) будет рядом Фурье функции $f(x)$ $(-\pi \le x \le \pi)$ по системе функций (1.1.10).

Последовательность функций (1.1.10) называется тригонометрической системой, а (1.1.4) — комплексной тригонометрической системой. Числа $a_k(f)$, $b_k(f)$ называют коэффициентами Фурье, а числа $c_k(f)$ — комплексными коэффициентами Фурье функции $f$.

Ряд (1.1.9) или что то же самое — тригонометрический ряд (1.1.1) с коэффициентами (1.1.7) называют рядом Фурье функции $f$, а ряд (1.1.5) с коэффициентами (1.1.6) называют комплексным рядом Фурье функции $f$.

Всюду далее через $L_2 := L_2[-\pi,\pi]$ (или $L_2 := L_2[0,2\pi]$) обозначим множество $2\pi$-периодических функций $f(x)$, интегрируемых с квадратом на отрезке $[-\pi,\pi]$ (или $[0,2\pi]$), то есть множество $2\pi$-периодических функций $f$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx\right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1.11}$$

Предположим, что функция $f(x)$ имеет формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big). \tag{1.1.12}$$

Тогда, пользуясь тождеством Парсеваля, в силу ортогональности систем функций $\{\sin kx, \cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ из (1.1.12) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k^2(f) + b_k^2(f)\big). \tag{1.1.13}$$

Таким образом требование конечности нормы (1.1.11) равносильно сходимости числового ряда справа в равенстве (1.1.13). Всюду далее, ради краткости, полагаем

$$\rho_0^2(f) = \frac{a_0^2(f)}{2}; \quad \rho_k^2(f) := a_k^2(f) + b_k^2(f), \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.1.14}$$

и, пользуясь которыми, запишем равенство (1.1.13) коротко в виде

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2(f). \tag{1.1.15}$$

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу: среди всех полиномов $T_n(x) \in \mathcal{T}_{2n+1}$ найти тот, который реализует точную нижнюю грань в задаче на минимум:

$$E_n(f)_2 := \inf\big\{\|f - T_n\|_2 : T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}\big\}. \tag{1.1.16}$$

Полином $T_n^0(x)$, который реализует нижнюю грань в правой части равенства (1.1.16), называется полиномом наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in L_2$. Хорошо известно ([27, с.25-26]), что единственным полиномом $T_n^0(x)$, который доставляет минимум (или инфимум) в правой части (1.1.16), является $n$-я частная сумма $S_n(f)$ ряда (1.1.12):

$$S_n(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big), \tag{1.1.17}$$

причем

$$E_n(f)_2 = \big\|f - S_n(f)\big\|_2 = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} \rho_k^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{1.1.18}$$

Здесь, ради полноты изложения, исходя из комплексной формы ряда Фурье, приводим аналог равенства (1.1.18). Предположим, что функция $f$ разложена в комплексный ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt. \tag{1.1.19}$$

**Лемма 1.1.1.** *Среди всех комплексных полиномов вида*

$$p_{n-1}(x) = \sum_{|k|\le n-1} d_k e^{ikx}$$

*величине* (1.1.16) *минимальное значение доставляет частичная сумма комплексного ряда Фурье (1.1.19):*

$$S_{n-1}(f,x) = \sum_{|k|\le n-1} c_k(f) e^{ikx}.$$

*При этом*

$$E^2_{n-1}(f)_2 := 2\sum_{|k|\ge n} \left|c_k(f)\right|^2 = \sum_{k=n}^{\infty}\Big(a_k^2(f)+b_k^2(f)\Big) = \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(f). \qquad (1.1.20)$$

Доказательством этой леммы является следствие утверждения [27, с.25-26], а потому здесь не приводится.

Через $L_2^{(r)}\big(r \in \mathbb{Z}_+, L_2^{(0)} = L_2\big)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывны, а $r$-е производные $f^{(r)}(x) \in L_2$, то есть удовлетворяют условию

$$\left\|f^{(r)}\right\|_2 = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(r)}(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} < \infty. \qquad (1.1.21)$$

Записав функцию $f$ в комплексном виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \qquad (1.1.22)$$

и дифференцируя $r$-раз ряда (1.1.22), будем иметь

$$f^{(r)}(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (ik)^r c_k(f) e^{ikx}. \qquad (1.1.23)$$

Применяя равенство Парсеваля, из (1.1.23) получаем

$$\left\|f^{(r)}\right\|_2^2 = 2\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty} k^{2r}\left|c_k(f)\right|^2 =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\big\{|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\big\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f). \qquad (1.1.24)$$

Последнее равенство означает, что конечность нормы (1.1.21) равносильно сходимости числового ряда в правой части (1.1.24). Очевидно, что

$$E_{n-1}^2\big(f^{(r)}\big)_2 := \inf\big\{\|f^{(r)} - T_{n-1}\|_2^2 : T_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}\big\} =$$

$$= \big\|f^{(r)} - S_{n-1}^{(r)}(f)\big\|_2^2 = \big\|f^{(r)} - S_{n-1}(f^{(r)})\big\|_2^2 =$$

$$= 2\cdot\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\Big\{\big|c_k(f)\big|^2 + \big|c_{-k}(f)\big|^2\Big\} = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f). \qquad (1.1.25)$$

Далее нам понадобится следующее общеизвестное утверждение.

Для произвольной функции $f \in L_2$ справедливо неравенство [27]

$$E_{n-1}(f)_2 \le n^{-r} E_{n-1}\big(f^{(r)}\big)_2. \qquad (1.1.26)$$

Для функции $f_0(x) = a\cos(nx + \varphi)$, где $a, \varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, неравенство (1.1.26) обращается в равенство. Легко вычислить, что для любого $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \in [0, r]$, $r \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2 = \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s}\rho_k^2(f). \qquad (1.1.27)$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.1.1.** *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$. Тогда справедливо следующее точное неравенство:*

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \le n^{-(r-s)} E_{n-1}\big(f^{(r)}\big)_2. \qquad (1.1.28)$$

*Неравенство (1.1.28) точно в том смысле, что оно для функции*

$$f_0(x) = a\cos(nx + \varphi), \quad a, \varphi \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

*обращается в равенство.*

**Доказательство.** В самом деле, учитывая (1.1.25) из (1.1.27) имеем:

$$E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2=\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\rho_k^2(f)=\sum_{k=n}^{\infty}k^{-2(r-s)}\cdot k^{2r}\rho_k^2(f)\le$$

$$\le n^{-2(r-s)}\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)=n^{-2(r-s)}E_{n-1}^2\big(f^{(r)}\big)_2. \tag{1.1.29}$$

Требуемое неравенство (1.1.28) вытекает из (1.1.29). Докажем точность неравенства (1.1.28). Так как для любого $s\in[0,r]$

$$f_0^{(s)}(x)=an^s\cos\Big(nx+\varphi+\frac{s\pi}{2}\Big),$$

$$E_{n-1}^2\big(f_0^{(s)}\big)_2=\sum_{k=n}^{\infty}k^{2s}\rho_k^2(f_0)=n^{2s}a^2, \tag{1.1.30}$$

то, учитывая равенства

$$E_{n-1}^2(f_0^{(r)})=\sum_{k=n}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f_0)=n^{2r}a^2, \tag{1.1.31}$$

в силу (1.1.30), получаем

$$E_{n-1}^2\big(f_0^{(s)}\big)_2:=a^2n^{2s}=n^{-2(r-s)}\cdot(n^{2r}a^2)=n^{-2(r-s)}E_{n-1}^2\big(f_0^{(r)}\big)_2.$$

Этим точность неравенства (1.1.28) установлена и тем самым доказана теорема 1.1.1.

Если функция $f\in L_2$, то символом $\Delta_h^m f(x)$ обозначим конечную разность $m$-го порядка функции $f\in L_2$ с шагом $h$:

$$\Delta_h^m f(x):=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{m}{k}f(x+kh)$$

и найдём норму разности $m$-го порядка в $L_2$:

$$\big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\|_2=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f(x+kh)\Big|^2dx\right\}^{1/2}.$$

Равенством

$$\omega_m(f,t)_2:=\sup\big\{\big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\|_2:|h|\le t\big\} \tag{1.1.32}$$

определим модуль непрерывности $m$-го порядка функции $f \in L_2$. Исходя из комплексного вида ряда Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

найдем явный вид модуля непрерывности (1.1.32). Найдем конечную разность $m$-го порядка функции $f(x)$

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} f(x + lh) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ik(x+lh)} \right\} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} \left\{ \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \big(e^{ikh}\big)^l \right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} (1 - e^{ikh})^m. \tag{1.1.33}$$

Применяя тождество Парсеваля к равенству (1.1.33), находим норму разности $m$-го порядка функции $f \in L_2$:

$$\big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\|_2^2 = 2 \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2 \cdot \big|1 - e^{ikh}\big|^{2m} = 2^{m+1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \big|c_k(f)\big|^2 \cdot (1 - \cos kh)^m =$$

$$= 2^{m+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \big\{|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\big\} \cdot (1 - \cos kh)^m. \tag{1.1.34}$$

Исходя из очевидного соотношения

$$2\big\{|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\big\} = \rho_k^2(f) \equiv a_k^2(f) + b_k^2(f),$$

равенство (1.1.34) запишем в конечном виде

$$\big\|\Delta_h^m f(\cdot)\big\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m. \tag{1.1.35}$$

Так как для функции $f \in L_2^{(r)}, \rho_k^2\big(f^{(r)}\big) = k^{2r} \rho_k^2(f)$, то из (1.1.35) для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем:

$$\big\|\Delta_h^m f^{(r)}(\cdot)\big\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2\big(f^{(r)}\big) \cdot (1 - \cos kh)^m =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m. \tag{1.1.36}$$

Теперь из формулы (1.1.32) для любой функции $f \in L_2^{(r)}$ получаем общий вид модуля непрерывности $m$-го порядка производной $f^{(r)} \in L_2$ :

$$\omega_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 := 2^m \sup_{|h| \le t} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1-\cos kh)^m \right\}. \tag{1.1.37}$$

## § 1.2. Усреднённые характеристики гладкости и решения некоторых экстремальных задач в $L_2$

При решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций в последнее время применяют различные модификации классической характеристики гладкости функций – их модулей непрерывности, порожденными конечно-разностными сдвигами функций. Полученные такими способами обобщенные модули гладкости во многих случаях учитывают специфику рассматриваемых задач и позволяют получить новые содержательные результаты (см., например, работы [1, 5, 6, 21, 22, 26, 39] и приведенную в них литературу).

Исходя из равенства (1.1.35), введем в рассмотрение усредненную характеристику гладкости функции $f \in L_2$ :

$$\Lambda_m(f,t)_2 := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|_2^2 dh \right\}^{1/2}, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.2.1}$$

Из равенств (1.1.37) и (1.2.1), для любого $t \in \mathbb{R}_+$ вытекает неравенство

$$\Lambda_m(f,t)_2 = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^m(f) \right\|_2^2 dh \right\}^{1/2} \leq \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \omega_m^2(f,h)_2 dh \right\}^{1/2} \leq \omega_m(f,t)_2. \tag{1.2.2}$$

Далее, для $k, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}_+$ положим

$$J_{k,m}(t) := \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right\}^{1/2}. \tag{1.2.3}$$

Сделав замену переменных, легко проверить, что

$$J_{k,m}(t) = J_{1,m}(kt). \tag{1.2.4}$$

Далее условимся, что в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ всегда предполагается, что $f \neq const$. В этом контексте имеет место следующая

**Теорема 1.2.1.** *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$ $r > s$, *и* $0 < t \le 2\pi$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)}, t/n\big)_2} = \frac{1}{2^{m/2} J_{1,m}(t)}. \tag{1.2.5}$$

**Доказательство.** Пусть $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in [0, r-1]$. Так как

$$\big\|\Delta_h^m f^{(s)}\big\|_2^2 = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m,$$

то в силу равенств (1.2.1) запишем

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 := \frac{2^m}{t} \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m dh =$$

$$= 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t (1 - \cos kh)^m dh \right\} = 2^m \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) J_{1,m}(kt) \ge$$

$$\ge 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt) = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \cdot k^{2s} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt).$$

Пользуясь последним равенством, получаем

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 \ge 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2(r-s)} \cdot k^{2s} \rho_k^2(f) J_{1,m}^2(kt) \ge$$

$$\ge 2^m \min_{k \ge n} \Big\{ k^{2(r-s)} J_{1,m}^2(kt) \Big\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} k^{2s} \rho_k^2(f) =$$

$$= 2^m \min_{k \ge n} \Big\{ k^{2(r-s)} J_{1,m}^2(kt) \Big\} \cdot E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{1.2.6}$$

В [6] доказано, что при любых $l \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}_+$, такое, что $0 < t \le 2\pi$,

$$\min_{k \ge n} k^{2l} J_{1,m}^2(kt) = n^{2l} J_{1,m}^2(nt),$$

учитывая которое, из (1.2.6) получаем неравенство

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)}, t\big)_2 \ge 2^m \cdot n^{2(r-s)} J_{1,m}^2(nt) \cdot E_{n-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2$$

или, что то же самое,

$$\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2 \geq 2^{m/2}\cdot n^{(r-s)}J_{1,m}(nt)E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{1.2.7}$$

Заменяя здесь $t$ на $t/n$, запишем

$$\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2 \geq 2^{m/2}\cdot n^{(r-s)}J_{1,m}(t)E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{1.2.8}$$

Так как полученное неравенство верно для любой функции $f\in L_2^{(r)}$, то из него сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (1.2.5):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2}\leq\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(t)}. \tag{1.2.9}$$

Для получения аналогичной оценки снизу заметим, что для рассмотренной ранее нами функции $f_0(x)=a\cos(nx+\varphi)\in L_2^{(r)}$, для которой в силу первого равенства в соотношении (1.2.6)

$$\Lambda_m\big(f_0^{(r)},t\big)_2 = 2^{m/2}a\,n^rJ_{1,m}(nt) \tag{1.2.10}$$

и равенств (1.1.30) имеет место оценка снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2}\geq\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f_0^{(r)},t/n\big)_2}=$$

$$=\frac{n^{r-s}\cdot a\cdot n^s}{2^{m/2}\cdot an^r\cdot J_{1,m}(t)}=\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(t)}. \tag{1.2.11}$$

Требуемое равенство (1.2.5) получаем из сравнения оценки сверху (1.2.9) с оценкой снизу (1.2.11), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Отметим, что из теоремы 1.2.1 при $s=0$ получаем результат С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [6, с. 219]:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^rE_{n-1}(f)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},t/n\big)_2}=\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(t)}.$$

**Следствие 1.2.1.** *В условиях теоремы 1.2.1 при $t=\pi$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},\pi/n\big)_2}=\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}. \tag{1.2.12}$$

**Доказательство.** В самом деле, из равенства (1.2.5) при значении $t=\pi$ имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Lambda_m\big(f^{(r)},\pi/n\big)_2}=\frac{1}{2^{m/2}J_{1,m}(\pi)}. \tag{1.2.13}$$

Но так как

$$J_{1,m}(\pi)=\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi(1-\cos t)^m dt\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{2^m}{\pi}\int\limits_0^\pi\sin^{2m}\frac{t}{2}dt\right\}^{1/2}=\left\{\frac{2^{m+1}}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2m}t dt\right\}^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{2^m}{\pi}\cdot\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{m!}\right\}^{1/2}, \tag{1.2.14}$$

где $\Gamma(u)$ — гамма-функция Эйлера, и поскольку

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

то, подставляя эти формулы в правую часть (1.2.14), имеем:

$$J_{1,m}(\pi)=\left\{\frac{2^m}{\pi}\cdot\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\pi\cdot\frac{1}{m!}\right\}^{1/2}=\left\{\frac{(2m-1)!!}{m!}\right\}^{1/2}.$$

Учитывая последнюю формулу, получаем равенство (1.2.12).

Следствие 1.2.1 доказано.

**Следствие 1.2.2.** *В условиях теоремы 1.2.1 справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_1(f^{(r)},t/n)}=\frac{1}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc}t)}}. \tag{1.2.15}$$

**Доказательство.** Следует отметить, что равенство (1.2.15) при $s = 0$ ранее установлено С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [6, с. 218], так что (1.2.15), являясь следствием теоремы 1.2.1, одновременно является обобщением результата С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной, упоминавшегося выше.

Докажем равенство (1.2.15). Полагая в (1.2.5) $m = 1$, получаем

$$J_{1,1}^2(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t (1-\cos h)dh = 1 - \frac{\sin t}{t} = 1 - \operatorname{sinc} t. \tag{1.2.16}$$

Учитывая равенство (1.2.16), имеем (1.2.15), чем и завершаем доказательство следствия 1.2.2.

Если в (1.2.15) положить $t = \pi$, то получим

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}\,E_{n-1}(f^{(s)})}{\Lambda_1(f^{(r)}, \pi/n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

## § 1.3. Неравенство Джексона – Стечкина

Одна из основных задач теории аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами может быть сформулирована таким образом: дана периодическая функция, требуется выяснить, какой точности приближения можно добиться, аппроксимируя ее по заданной норме банахова пространства полиномами $T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Другими словами, требуется найти или дать хорошие оценки величины наилучшего приближения $E_{n-1}(f)$ по заданному порядку гладкости модулей непрерывности. Решение этой задачи дает неравенство Джексона – Стечкина для модулей непрерывности $m$-го порядка ($m \in \mathbb{N}$). Напомним, что под неравенствами Джексона – Стечкина понимают неравенства, в которых величина наилучшего приближения функции

$$E_{n-1}(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_{n-1})_X$$

конечномерным подпространством $\mathfrak{N}_{n-1}$ нормированного пространства X оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции $f(x)$ или некоторую ее производную $f^{(r)}(x)$, например, через $\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_X$ или $\omega_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)$:

$$E_{n-1}(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_{n-1})_X \le \frac{\chi}{n^r}\Lambda_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_X,$$

$$E_{n-1}(f)_X := E(f, \mathfrak{N}_{n-1})_X \le \frac{\chi}{n^r}\omega_m\big(f^{(r)}, \pi/n\big)_X,$$

где $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+$, $\chi$ — константа, которая не зависит от $n, r, f$, а зависит только от числа $m \in \mathbb{N}$.

В рассматриваемом нами случае $\mathfrak{N}_{n-1} := \mathcal{T}_{2n-1}$ — подпространство тригонометрических полиномов, $X := L_2 = L_2[-\pi, \pi]$ — гильбертово пространство.

Заметим, что, в силу основного свойства характеристики гладкости

$\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)$, имеет место неравенство

$$\Lambda_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2\le\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2,$$

а потому из доказанного в предыдующем параграфе следствия 1.2.1 сразу получаем неравенство Джексона – Стечкина с явной константой

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2\le\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\,\omega_m\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_2. \tag{1.3.1}$$

Здесь константа Джексона – Стечкина

$$\chi:=\chi(m)=\frac{1}{2^{m/2}}\left\{\frac{m!}{(2m-1)!!}\right\}^{1/2} \tag{1.3.2}$$

является точным при $m=1$ и $r=0$. Это следует из результата Н.И.Черных [32] с точной константой $\chi=1/\sqrt{2}$. При остальных $m,r\in\mathbb{N}$ вопрос о точности неравенство (1.3.1) остаётся открытым.

Далее найдены точные константы в неравенствах типа Джексона – Стечкина для характеристик гладкости $\Lambda_m(f)$, $m\in\mathbb{N}$, определенных при помощи усреднения нормы конечных разностей первого порядка функций $f$ в $L_2$. Введем обозначение

$$\operatorname{sinc}t:=\left\{\frac{\sin t}{t},\ \text{если}\ t\ne0;\ 1,\ \text{если}\ t=0\right\}.$$

Условимся под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную измеримую суммируемую функцию $\varphi(t)$, не эквивалентную нулю на этом отрезке. В этих предположениях имеет место следующая

**Теорема 1.3.1.** *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$, $0<h\le3\pi/(4n)$, $\varphi$ – весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{2}\cdot n^r\cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc}nt\big)^{p/2}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.3}$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что для параметра $p$, удовлетворяющего условию $0 < p \le \infty$, функционал $\|\Lambda_1\|_p$ в знаменателе дроби в левой части (1.3.3) определен соотношением

$$\|\Lambda_1\|_p \ = \begin{cases} \left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2 \ \varphi(t)dt\right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \max\limits_{0\le t\le h} \Lambda_1(f^{(r)}, t)_2, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

При этом указанный функционал при $1 \le p \le \infty$ является нормой на подпространстве $L_2^{(r)}$, не содержащем константы. Переходим к доказательству равенства (1.3.3). Воспользуясь равенством (1.2.1) при $m = 1$ и учитывая, что $J_{1,1}^2(kt) = 1 - \operatorname{sinc} kt$ для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, запишем

$$\Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 \ = \ 2\sum_{k=1}^{\infty} \ k^{2r}\rho_k^2(f)J_{1,1}^2(kt) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1 - \operatorname{sinc} kt) \ge 2\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1 - \operatorname{sinc} kt). \tag{1.3.4}$$

Учитывая тот факт [28, с. 135], что при $0 < nt \le 3\pi/4$

$$\max\Big\{|\operatorname{sinc} u| : u \ge nt\Big\} = \operatorname{sinc} nt,$$

$$\min\Big\{(1 - \operatorname{sinc} u) : u \ge nt\Big\} = 1 - \max_{u\ge nt} \sin c u = 1 - \operatorname{sinc} nt,$$

продолжим неравенство (1.3.4)

$$\Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2 \ge 2\sum_{k=n}^{\infty} k^{2r}\rho_k^2(f)(1 - \operatorname{sinc} kt) \ge$$

$$\ge 2n^{2r}(1 - \operatorname{sinc} nt)\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) = 2n^{2r}(1 - \operatorname{sinc} nt)E_{n-1}^2(f)_2.$$

Отсюда

$$\Lambda_1(f^{(r)}, t)_2 \ge \sqrt{2}\, n^r \sqrt{1 - \operatorname{sinc} nt} \cdot E_{n-1}(f)_2.$$

Возведя обе части полученного неравенства в степень $p$ $(0 < p \leq \infty)$, умножив на весовую функцию $\varphi$ и интегрируя по отрезку $[0, h]$, будем иметь

$$\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \sqrt{2}\, n^r \cdot E_{n-1}(f)_2 \left(\int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}. \tag{1.3.5}$$

Из неравенства (1.3.5) вытекает оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (1.3.3):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r\, E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.6}$$

Для получения оценки снизу указанной величины рассмотрим функцию $g_0(x) := \sin nx$, очевидно принадлежащую классу $L_2^{(r)}$. Используя формулы (1.1.18) и (1.3.4), получаем

$$E_{n-1}(g_0)_2 = 1,\ \Lambda_1\big(g_0^{(r)}, t\big)_2 = \sqrt{2}\, n^r \sqrt{1 - \operatorname{sinc} nt}. \tag{1.3.7}$$

Учитывая равенство (1.3.7), запишем

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^r\, E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(f^{(r)}, t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{\sqrt{2}\, n^r\, E_{n-1}(g_0)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p\big(g_0^{(r)}, t\big)_2\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big(1 - \operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.8}$$

Требуемое равенство (1.3.3) вытекает из сопоставления неравенств (1.3.6) и (1.3.8), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.3.1.

**Теорема 1.3.2.** *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < p \le \infty$. *Тогда при любом* $h \in (0, 3\pi/(4n)]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}}. \tag{1.3.9}$$

**Доказательство.** В левой части равенства (1.3.9), полагая $f^{(s)} = g$, получаем $f^{(r)} = g^{(r-s)}$, а потому из условия $f \in L_2^{(r)}$ вытекает, что $g \in L_2^{(r-s)}$. Но тогда, учитывая равенство (1.3.3), получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)_2\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}} = \sup_{g\in L_2^{(r-s)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\, E_{n-1}(g)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_1^p(g^{(r-s)}, t)_2\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{p/2}\ \varphi(t)\, dt\right)^{1/p}},$$

откуда и вытекает утверждение теоремы 1.3.2.

Из теоремы 1.3.2 следует ряд утверждений.

**Следствие 1.3.1.** *В условиях теоремы 1.3.2 при* $p = 2$, $\varphi \equiv 1$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s} E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left\{\int\limits_0^h \Lambda_1^2(f^{(r)}, t)_2\ dt\right\}^{1/2}} = \left\{\frac{n}{2(nh - \mathrm{Si}(nh))}\right\}^{1/2}, \tag{1.3.10}$$

*где* $\mathrm{Si}(t) = \int\limits_0^t \operatorname{sinc} u du$ — *интегральный синус.*

*В частности, из (1.3.10) при $h = \pi/(2n)$ получаем*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} \Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2 dt\right)^{1/2}} = \frac{n^{-(r-s)+1/2}}{\sqrt{\pi - 2\mathrm{Si}(\pi/2)}}. \tag{1.3.11}$$

**Следствие 1.3.2.** *В условиях теоремы 1.3.2 при $p = 2$, $\varphi(t) = t$ имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{h} t\,\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2\, dt\right)^{1/2}} = \frac{2}{h}\left\{1 - \left(\frac{2}{nh}\cdot\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2}. \tag{1.3.12}$$

*В частности, из (1.3.12) при $h = \pi/(2n)$ вытекает равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s-1}E_{n-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/(2n)} t\,\Lambda_1^2(f^{(r)},t)_2\, dt\right)^{1/2}} = \frac{4}{\sqrt{\pi^2-4}}. \tag{1.3.13}$$

Заметим, что из равенства (1.3.11) при всех $s = 0, 1, \ldots, r$ следует неравенство типа Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\pi - \mathrm{Si}(\pi/2)}}\cdot\frac{1}{n^{r-s+1/2}}\cdot\Lambda_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{2n}\right),$$

а из (1.3.13) получаем

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\pi^2-4}}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Lambda_1\left(f^{(r)},\frac{\pi}{2n}\right).$$

## § 1.4. Неравенства типа Джексона – Стечкина для усреднённой с весом характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)}, t\big)_2$ на классах функций $L_2^{(r)}, r \in \mathbb{N}$

В этом параграфе мы докажем по существу основные теоремы первой главы, которые в дальнейшем играют существенную роль при доказательстве теорем о поперечниках во второй главе.

Отметим, что для функции $f(x) \in L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) её промежуточные производные $f^{(s)}(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1;\ r \in \mathbb{N};\ r \geq 2)$ наравне с самой функцией $f(x)$ и её $r$-й производной $f^{(r)}(x)$ также принадлежат пространству $L_2$. Этот факт вытекает из следующего неравенства Колмогорова для промежуточных производных $f^{(s)}(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, r-1,\ r \geq 2,\ r \in \mathbb{N})$ функции $f(x) \in L_2^{(r)}$:

**Теорема Колмогорова [17, с.127].** *Если* $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$, *то имеет место неравенство*

$$\|f^{(s)}\|_2 \leq \|f\|_2^{1-s/r} \cdot \|f^{(r)}\|_2^{s/r}, \quad s = 1, 2, \ldots, r-1.$$

*Знак равенства здесь имеет место для функций* $f(x) = \gamma \cos m(t+\alpha)$, $\gamma, \alpha \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$.

Представляет несомненный интерес изучение поведения наилучших приближений $E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, r;\ r \in \mathbb{N})$ на самом классе $L_2^{(r)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$. Другими словами, требуется найти точное значение следующей экстремальной величины:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\big\}. \tag{1.4.1}$$

Ясно, что для решения сформулированной задачи (1.4.1) нужно предварительно получить неравенство типа Джексона – Стечкина для усредненной с заданной весовой функцией характеристику гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2$, из которой можно было бы получить информацию о подклассе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$.

Имеет место следующее общее утверждение.

**Теорема 1.4.1.** *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$, $0 < p \leq \infty$, $h \in (0, 2\pi/n]$, $\varphi$ *— весовая на* $[0,h]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}\, n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.4.2)$$

**Доказательство.** Воспользуемся неравенством (1.2.7), где доказано, что для любых $m,n,r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ имеет место неравенство

$$\Lambda_m\big(f^{(r)},t\big)_2 \geq 2^{m/2}\ n^{r-s}\ J_{1,m}(nt)\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2.$$

Возведя обе части последнего неравенства в степень $p$ $(0 < p \leq \infty)$, затем, умножая на весовую функцию $\varphi$ и интегрируя по отрезку $[0,h]$ $(0 < h \leq 2\pi)$, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt \geq 2^{pm/2}\cdot n^{p(r-s)} E_{n-1}^p\big(f^{(s)}\big)_2 \int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p} \geq 2^{m/2} n^{r-s} E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Так как последнее неравенство верно для любой функции $f(x) \in L_2^{(r)}$, то из него вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.4.2):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2} n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leq \frac{1}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \qquad (1.4.3)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части (1.4.3), рассмотрим ранее введенную нами функцию

$$f_0(x) = a\cos(nx+\varphi) \in L_2^{(r)},$$

для которой, в силу равенств (1.1.30) и первого равенства из (1.2.6), имеют место равенства

$$E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2 = a\ n^s, \qquad \Lambda_m\big(f_0^{(r)},t\big)_2 = 2^{m/2}\ n^r J_{1,m}(nt)a.$$

Используя эти равенства, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{2^{m/2}n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} \geq \frac{2^{m/2}n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f_0^{(r)},t\big)_2\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\ \varphi(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{1.4.4}$$

Таким образом, требуемое равенство (1.4.2) следует из сопоставления (1.4.3) и (1.4.4), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

В качестве следствий из теоремы 1.4.1 вытекают приведенные в предыдущем параграфе результаты и следующее утверждение

**Следствие 1.4.1.** *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r>s$, $0<p\leq\infty$, $0<h\leq 2\pi/n$ *и* $\varphi\equiv 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{n^{r-s-1/p}E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\ dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{2^{m+\frac12}\left(\int\limits_0^{nh}\left(\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2} dt\right)^{1/p}}. \tag{1.4.5}$$

**Доказательство.** В самом деле, в предположении $\varphi(t)\equiv 1$ в знаменателе правой части равенства (1.4.2) имеем

$$\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)dt\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^{nh} J_{1,m}^p(t)dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}(1-\cos\tau)^m d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{2^{mp/2}}{n}\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t}\sin^{2m}\frac{\tau}{2}d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{2^{mp+p/2}}{n}\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}=$$

$$=\frac{2^{(m+1/2)}}{n^{1/p}}\cdot\left(\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}. \tag{1.4.6}$$

Пользуясь равенством (1.4.6), из (1.4.2) получаем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{2^{m/2}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)dt\right)^{1/p}}=$$

$$=\frac{n^{1/p}}{2^{m+\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{nh}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^{t/2}\sin^{2m}\tau d\tau\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}}.$$

Поделив обе части последнего равенство на число $n^{1/p}$, приходим к равенству (1.4.5), чем и завершаем доказательство следствия 1.4.1.

В завершении данного параграфа отметим, что при некотором жестком ограничении относительно весовой функции $\varphi$ утверждения вышеприведенных теоремы 1.4.1 и следствия 1.4.1 в частном случае $s = 0$ и $1/r \le p \le 2$ ранее были получены в работе С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной [6]. Кроме того, следует отметить, что приведенная выше общая теорема 1.4.1, является своеобразным обобщением аналогичного утверждения, ранее доказанного для модуля непрерывности $m$-го порядка $\omega_m\big(f^{(r)}, t\big)_2$ в работе М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова [43], на случай характеристики гладкости $\Lambda_m\big(f^{(r)}, t\big)_2$.

## § 1.5. Решение экстремальной задачи (1.4.1) для некоторых классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой $\Psi$

Теоремы, доказанные нами в предыдущем параграфе, обеспечивают возможность решить общую экстремальную задачу отыскания верхней грани наилучших совместных приближений функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\big\}, \tag{1.5.1}$$

при всех значениях $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ для некоторых классов функций $\mathfrak{M}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$, задаваемых мажорантами $\Phi(h)$ и $\Psi(h)$. Используя определение характеристики гладкости $\Lambda_m(f)$ $(m \in \mathbb{N})$, введём в рассмотрение следующие классы функций.

Пусть $\Phi(u)$, где $u \in (0, 2\pi]$, есть непрерывная возрастающая функция, такая, что $\lim\limits_{u\to+0} \Phi(u) = \Phi(0) = 0$. Символом $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ имеет место неравенство

$$\Lambda_1(f^{(r)}, \tau) \le \Phi(\tau).$$

Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$, где $r \in \mathbb{N}$, $0 < p \le \infty$, $\Phi$ — некоторая мажоранта, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $r$-го порядка $f^{(r)}$ при любом $0 < \tau \le 2\pi$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^\tau \Lambda_1^p(f^{(r)}, t)dt \le \Phi^p(\tau).$$

Пусть $0 < h \le 3\pi/(4n)$. Исходя из результата теоремы 1.4.1, символом

$$\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi) := \mathcal{F}_p^{(r)}\big(\Lambda_m, \varphi\big)_2 := \mathcal{F}_p^{(r)}\big(\Lambda_m, \varphi, h\big)_2,$$

$r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $\varphi(t)$ — весовая на $[0, h]$ функция, обозначим множество функций $f(x) \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих ограничению

$$\left( \int\limits_0^h \Lambda_m^p \big(f^{(r)}, t\big)_2 \, \varphi(t) \, dt \right)^{1/p} \leq 1.$$

Обозначим через $t_*$ величину аргумента функции $\operatorname{sinc} \tau$, при котором она достигает на множестве $(0, 2\pi]$ своего наименьшего значения. Очевидно, что $t_*$ — наименьший положительный корень уравнения

$$t = tg\, t \quad (4.49 < t_* < 4.51)$$

(см., например, [5]). Следуя работе [5], полагаем

$$(1 - \operatorname{sinc} \tau)_* := \begin{cases} 1 - \operatorname{sinc} \tau, & \text{если } 0 \leq \tau \leq t_*; \\ 1 - \operatorname{sinc} t_*, & \text{если } t_* \leq \tau < \infty. \end{cases}$$

Приведём теперь решение экстремальной задачи (1.5.1) для класса $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$, пользуясь результатом следствия 1.3.1

**Теорема 1.5.1.** *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $r > s$ и мажоранта $\Phi$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi\big(\pi/(2n)\big)} \geq \left\{ \frac{\pi (1 - \operatorname{sinc} n\tau)_*}{\pi - 2} \right\}^{1/2}. \tag{1.5.2}$$

*Тогда при всех $s = 0, 1, \ldots, r-1$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) = \sup\left\{ E_{n-1}(f^{(s)}) : f \in W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi) \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{1.5.3}$$

*Множество мажорант $\Phi$, удовлетворяющих условию (1.5.2), не пусто.*

**Доказательство.** Из равенства (1.2.5) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)}) \le \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \frac{\Lambda_1(f^{(r)}, t/n)}{\sqrt{2(1-\operatorname{sinc} t)}}.$$

Полагая здесь $t = \pi/2$ и учитывая определение класса $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$, запишем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (1.5.3):

$$\mathcal{E}^{(s)}_{n-1}\big(W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big) \le \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{1.5.4}$$

Для получения соответствующей оценки снизу указанной величины введём в рассмотрение функцию

$$\mathcal{F}_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin nx,$$

для которой

$$\|\mathcal{F}_0\| = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{1.5.5}$$

Покажем, что если функция $\Phi$ удовлетворяет условию (1.5.2), то функция $\mathcal{F}_0$ принадлежит классу $W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$. С этой целью, используя формулу [6, с. 219, формула (2.10)]

$$\Lambda_1(f^{(r)}, \tau) = \left\{2\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}\, \rho_k^2(f)\, J_{1,1}^2(k\tau)\right\}^{1/2}$$

для функции $\mathcal{F}_0$ при любом $\tau \in (0, 2\pi]$, получаем

$$\Lambda_1(\mathcal{F}_0^{(r)}, \tau) = n^r \left\{2(1-\operatorname{sinc} n\tau)_*\right\}^{1/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^r}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) =$$

$$= \left\{\frac{\pi(1-\operatorname{sinc} n\tau)_*}{\pi-2}\right\} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \le \Phi(\tau).$$

Этим доказано, что $\mathcal{F}_0 \in W^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ и, так как для функции $\mathcal{F}_0$ при всех $s = 0, 1, \ldots, r$

$$\mathcal{F}_0^{(s)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} \cdot \frac{1}{n^{r-s}}\, \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(nx + \frac{s\pi}{2}\right),$$

и в силу формулы (1.1.27)

$$E_{n-1}\big(\mathcal{F}_0^{(s)}\big)=\sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{1.5.6}$$

то, используя (1.5.6), запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big)\geq E_{n-1}\big(\mathcal{F}_0^{(s)}\big)=\sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}}\cdot\frac{1}{n^{r-s}}\cdot\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{1.5.7}$$

Сопоставляя оценки сверху (1.5.4) с оценками снизу (1.5.7) получаем требуемое равенство (1.5.3).

В [6, с.229] доказано, что условию (1.5.2) удовлетворяет, например, функция

$$\Phi_*(t)=t^{1/(\pi-2)},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.5.1.

**Теорема 1.5.2.** *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r>s$, $0<p\leq\infty$. Если для любых значений $\tau\in(0,2\pi]$ и $n\in\mathbb{N}$ мажоранта $\Phi$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(\tau)}{\Phi^p(\pi/n)}\geq\frac{\int\limits_0^{n\tau}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt}{\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt}, \tag{1.5.8}$$

*то имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big)_2=\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc}t\big)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{1.5.9}$$

*При этом множество мажорант $\Phi$, удовлетворяющих ограничению (1.5.8), не пусто.*

**Доказательство.** Если в равенстве (1.4.2) полагать $m=1$, $\varphi(t)\equiv1$,

$h = \pi/n$, то имеем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\int\limits_0^{\pi/n} J_{1,1}^p(nt)\,dt\right\}^{-1/p}. \tag{1.5.10}$$

Поскольку $J_{1,1}(t) = \sqrt{1-\operatorname{sinc} t}$, то из (1.5.10) находим

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}\cdot E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)_2\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}. \tag{1.5.11}$$

Так как равенство (1.5.11) верно для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, то из него следует неравенство

$$E_{n-1}(f^{(s)})_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}}\cdot \frac{\left(\int\limits_0^{\pi/n} \Lambda_1^p\big(f^{(r)},t\big)_2 dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^{\pi} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right)^{1/p}}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)$, получаем оценку сверху величины $\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big)$:

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\big)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-s-1/p}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right\}^{-1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{1.5.12}$$

Для получения оценки снизу искомой величины введём в рассмотрение функцию

$$\mathcal{F}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-1/p}} \left(\int\limits_0^{\pi} (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos nx.$$

Так как для этой функции

$$\|\mathcal{F}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{r-1/p}} \left( \int_0^{\pi} (1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{1.5.13}$$

то для того, чтобы $\mathcal{F}_1 \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$ нужно доказать, что при выполнении условия (1.5.8) для любого $\tau \in (0, 2\pi]$ имеет место неравенство

$$\int_0^{\tau} \Lambda_1^p(f_1^{(r)}, t) dt \le \Phi^p(\tau). \tag{1.5.14}$$

В [6, с. 233] доказано, что для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_{2n+1}$ при любом $\tau \in (0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$\Lambda_1(T_n^{(r)}, \tau) \le \sqrt{2}\, n^r (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{1/2} \cdot \|T_n\|,$$

откуда следует, что

$$\int_0^{\tau} \Lambda_1^p(T_n^{(r)}, t) dt \le 2^{p/2}\, n^{rp} \int_0^{\tau} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{p/2} dt \cdot \|T_n\|^p. \tag{1.5.15}$$

Так как $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{T}_{2n+1}$, то из (1.5.15) с учётом (1.5.13) и (1.5.8), получаем

$$\int_0^{\tau} \Lambda_1^p(\mathcal{F}_1^{(r)}, t) dt \le 2^{p/2}\, n^{rp} \int_0^{\tau} \big(1-\operatorname{sinc} nt\big)^{p/2} dt \|\mathcal{F}_1^{(r)}\|^p =$$

$$= 2^{p/2}\, n^{rp-1} \int_0^{n\tau} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \cdot \frac{1}{2^{p/2}\, n^{rp-1}} \left( \int_0^{\pi} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \frac{\int_0^{n\tau} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt}{\int_0^{\pi} \big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt} \cdot \Phi^p\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \Phi^p(\tau),$$

и неравенство (1.5.14) доказано, и функция $\mathcal{F}_1 \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)$.

Поскольку для $s=0,1,2,\ldots,r-1$

$$\mathcal{F}_1^{(s)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(nx+\frac{s\pi}{2}\right),$$

то в силу формулы (1.1.27) имеем

$$E_{n-1}(\mathcal{F}_1^{(s)})=\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Пользуясь последним равенством, запишем оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\Big(W_p^{(r)}(\Lambda_1,\Phi)\Big)\ge E_{n-1}\big(\mathcal{F}_1^{(s)}\big)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}\,n^{r-s-1/p}}\left(\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt\right)^{-1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \qquad (1.5.16)$$

Требуемое равенство (1.5.9) получаем из сравнения неравенств (1.5.12) и (1.5.16).

Известно [6, с. 233], что мажоранта

$$\widetilde{\Phi}(t):=t^{\alpha/p},\quad \text{где }\ \alpha:=\frac{\pi}{\int\limits_0^{\pi}\big(1-\operatorname{sinc} t\big)^{p/2}dt},\quad \big(1+p/2<\alpha<1+p\big)$$

удовлетворяет условию (1.5.8). Теорема 1.5.2 доказана.

В завершении данного параграфа вычислим точное значение экстремальной задачи (1.5.1) в случае, когда $\mathfrak{M}\equiv\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(h)_2$. Справедлива следующая

**Теорема 1.5.3.** *Пусть $n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r>s$, $h\in(0,3\pi/(4n)]$, $\varphi(t)$ — весовая на $(0,h]$ функция. Тогда при любых $m\in\mathbb{N}$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi)\big)_2=2^{-m/2}\,n^{-(r-s)}\left\{\int\limits_0^{h}J_{1,m}^{p}(nt)\varphi(t)\,dt\right\}^{-1/p}. \qquad (1.5.17)$$

**Доказательство.** В самом деле, из неравенства (1.4.3) для произвольной функции $f(x)\in L_2^{(r)}$ вытекает

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2\leq\frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s}}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{1.5.18}$$

Из (1.5.18) в предположении $f(x)\in\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi)$ имеем

$$E_{n-1}\big(f^{(s)}\big)_2\leq\frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s}}\cdot\frac{1}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}},$$

откуда сразу получаем оценку сверху величины в левой части (1.5.1):

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi)_2\big)_2\leq 2^{-m/2}\cdot n^{-(r-s)}\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{-1/p}. \tag{1.5.19}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу той же величины вводим в рассмотрение функцию

$$f_1(x)=\frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r}}\cdot\frac{\cos x}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}.$$

Для функции $f_1(x)$, согласно равенству (1.1.27) и правой части определения $\Lambda_m(f^{(r)},t)_2$ в соотношении (1.2.6), запишем:

$$E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big)_2=\frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s}}\cdot\frac{1}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}}, \tag{1.5.20}$$

$$\Lambda_m\big(f_1^{(s)},t\big)_2=\frac{1}{2^{m/2}\cdot n^{r-s}}\cdot\frac{J_{1,m}(nt)}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)\,dt\right)^{1/p}},$$

$$\int_0^h \Lambda_m^p\big(f_1^{(s)},t\big)_2\varphi(t)dt=1. \qquad (1.5.21)$$

Равенство (1.5.20) означает, что функция $f_1(x)\in\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi)$. Учитывая этот факт, запишем нужную оценку снизу

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{p,m}^{(r)}(\varphi)\big)_2\geq E_{n-1}\big(f_1^{(s)}\big)_2=2^{-m/2}\cdot n^{-(r-s)}\left(\int_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt\right)^{-1/p}. \qquad (1.5.22)$$

Доказательство теоремы 1.5.3 завершается сопоставлением оценки сверху (1.5.19) с оценкой снизу (1.5.22). Из теоремы 1.5.3 вытекает ряд следствий.

**Следствие 1.5.1.** *Пусть $m=1$, $n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r>s$, $0<h\leq 3\pi/(4n)$, $0<p\leq\infty$, $\varphi(t)$ — неотрицательная на $[0,h]$ функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{p,1}^{(r)}(\varphi)\big)_2=\frac{n^{-(r-s)}}{\sqrt{2}\left(\int_0^h(1-\operatorname{sinc}nt)^{p/2}\cdot\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}. \qquad (1.5.23)$$

*Из (1.5.23), в частности, при $p=2$, $\varphi(t)\equiv 1$, получаем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(1)\big)_2=\left\{\frac{n}{2(nh-\mathrm{Si}(nh))}\right\}^{1/2}\cdot n^{-(r-s)}. \qquad (1.5.24)$$

*В свою очередь, из (1.5.24) при $h=\pi/(2n)$ имеем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(1)\big)_2=\frac{n^{-(r-s)+1/2}}{\sqrt{\pi-2\mathrm{Si}(\pi/2)}}.$$

**Следствие 1.5.2.** *При выполнении условий теоремы 1.5.3 при $p=2$, $\varphi(t)=t$ имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\big(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}(t)\big)_2=n^{-(r-s)}\cdot h^{-1}\left\{1-\left(\frac{2}{nh}\sin\frac{nh}{2}\right)^2\right\}^{-1/2},$$

*из которого, в частности, при $h=\pi/(2n)$ получаем*

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}\left(\mathcal{F}_{2,1}^{(r)}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)_2=\frac{1}{\sqrt{\pi^2-4}}\cdot\frac{1}{n^{r-s-1}}.$$

# Глава II. Поперечники классов функций в метрике пространства $L_2$

## § 2.1. Определение поперечников и классов функций

Прежде всего отметим, что изложенные в этой главе результаты полностью опубликованы в работах автора [59, 62, 64, 65, 68].

Основной целью исследования настоящей главы является вычисление значений различных поперечников для классов функций, возникающих естественным образом из результатов, полученных в параграфах 1.4 и 1.5.

Прежде чем сформулировать результаты о поперечниках, напомним необходимые понятия и определения, используемые в дальнейшем. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторый класс функций из $L_2$ и пусть $\mathcal{L}_n \subset L_2$ — некоторое подпространство размерности $n$. Величину

$$E_n\big(\mathfrak{N}\big) = \sup\big\{E_n(f) : f \in \mathfrak{N}\,\big\} = \sup\Big\{\inf\big\{\|f-g\| : g \in \mathcal{L}_n\big\} : f \in \mathfrak{N}\,\Big\} \qquad (2.1.1)$$

называют наилучшим приближением класса $\mathfrak{N}$ подпространством $\mathcal{L}_n \subset L_2$ и она характеризует отклонение класса $\mathfrak{N}$ от подпространства $\mathcal{L}_n$ в метрике пространства $L_2$. Если обозначить через $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ множество всех линейных непрерывных операторов $A : L_2 \to \mathcal{L}_n$, действующих из $L_2$ в произвольном заданном подпространстве $\mathcal{L}_n \in L_2$ размерности $n$, то возникает задача: найти величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) = \inf\Big\{\sup\big\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\big\} : A \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\} \qquad (2.1.2)$$

и указать оператор $A^* \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$, реализующий точную нижнюю грань

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) = \sup\big\{\|f - A^* f\| : f \in \mathfrak{N}\big\}.$$

Если в $\mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)$ выделить класс $\mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)$ операторов $A$ линейного проектирования на подпространство $\mathcal{L}_n$, то есть таких, что $Af = f$ при условии $f \in \mathcal{L}_n$, то принято рассматривать величину

$$\mathcal{E}_n^{\perp}(\mathfrak{N}) = \inf\Big\{\sup\big\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\big\} : A \in \mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\}. \tag{2.1.3}$$

Напомним определения поперечников, значения которых будут вычислены в этой главе для некоторых конкретных классов $\mathfrak{N}$ функций.

Поперечником в смысле А.Н. Колмогорова [51] класса функций $\mathfrak{N}$ называется величина

$$d_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\big\{E_n(\mathfrak{N}) : \mathcal{L}_n \in L_2\big\} =$$

$$= \inf\Big\{\sup\Big\{\inf\{\|f - g\| : g \in \mathcal{L}_n\} : f \in \mathfrak{N}\Big\} : \mathcal{L}_n \in L_2\Big\}, \tag{2.1.4}$$

где нижняя грань рассматривается сначала по всем функциям, принадлежащим $n$-мерному подпространству $\mathcal{L}_n \subset L_2$, а затем по всем подпространствам заданной размерности $n$.

Если исходить из наилучшего линейного приближения $\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})$, то величину

$$\delta_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\{\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) : \mathcal{L}_n \in L_2\} =$$

$$= \inf\Bigg\{\inf\{\sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{A}(L_2, \mathcal{L}_n)\} : \mathcal{L}_n \in L_2\Bigg\}, \tag{2.1.5}$$

называют линейным поперечником. Рассматривают также проекционный поперечник

$$\Pi_n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\Bigg\{\inf\Big\{\sup\{\|f - Af\| : f \in \mathfrak{N}\} : A \in \mathcal{A}^{\perp}(L_2, \mathcal{L}_n)\Big\} : \mathcal{L}_n \in L_2\Bigg\}.$$

Величина

$$d^n(\mathfrak{N}, L_2) = \inf\Big\{\sup\{\|f\| : f \in \mathfrak{N} \cap L_n\} : \mathcal{L}^n \subset L_2\Big\}, \tag{2.1.6}$$

где $\inf$ берется по всем подпространствам $\mathcal{L}^n$ коразмерности $n$, называется $n$-поперечником по Гельфанду.

Пусть $S$ — единичный шар в $L_2$. Величина

$$b_n(\mathfrak{N}, L_2) = \sup\{\sup\{\mathfrak{N} \cap \mathcal{L}_{n+1} \supset \varepsilon s \cap \mathcal{L}_{n+1} : \varepsilon > 0\} : \mathcal{L}_{n+1} \subset L_2\} \qquad (2.1.7)$$

называется $n$-поперечником по Бернштейну.

Так как пространство $L_2$ является гильбертовым, то имеют место соотношения

$$b_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) \leq d^n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) \leq d_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) = \delta_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big) = \Pi_n\big(\mathfrak{N}, L_2\big)\,. \qquad (2.1.8)$$

Первое неравенство $b_n(\mathfrak{N}, X) \leq d^n(\mathfrak{N}, X)$ справедливо для любого банахова пространства $X$, и его можно найти в монографии А.Пинкуса [52, с.19], а все остальные в книге В.М.Тихомирова [30, с.239].

## § 2.2. Значение $n$-поперечников некоторых классов функций

Точные значение вышеперечисленных $n$-поперечников вычислим для некоторых классов функций, определение которых дано в пятом параграфе первой главы, и класса функций $W_p^{(r)}(\varphi_*;\Phi)$ $(\varphi_*(t)=t)$, определение которого приведем в данном параграфе.

Символом $W_p^{(r)}(\varphi_*;\Phi) := W_p^{(r)}(\Lambda_1,\varphi_*;\Phi)$ обозначим классы функций $f(x)\in L_2^{(r)}$, у которых производные $r$-го порядка $f^{(r)}(x)$ при любых $0<p\le\infty, r\in\mathbb{N}$ и $h\in(0,2\pi]$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h t\Lambda_1^p(f^{(r)},t)_2\,dt\le\Phi^p(h).$$

Справедлива следующая

**Теорема 2.2.1.** *Пусть $r\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$, $\varphi_*(t)=t$. Если для любых $h\in(0,2\pi]$ и $n\in\mathbb{N}$ мажоранта $\Phi$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)}\ge\frac{\int\limits_0^{nh} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt}{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt},\tag{2.2.1}$$

*то имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi_*,\Phi\big);L_2\Big)=\lambda_{2n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi_*,\Phi\big);L_2\Big)=E_{n-1}\Big(W_p^{(r)}\big(\varphi_*,\Phi\big)\Big)_2=$$

$$=\frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}}\cdot\left\{\int\limits_0^{\pi} t\left(1-\operatorname{sinc} t\right)^{p/2}dt\right\}^{-1/p}\Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big),\tag{2.2.2}$$

*где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из $n$-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$ и $\Pi_n(\cdot)$, а*

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}):=\sup\big\{E_{n-1}(f):f\in\mathfrak{M}\big\}.$$

*Множество мажорант $\Phi$, удовлетворяющих условию (2.2.1), не пусто.*

**Доказательство.** Из неравенства (1.3.6) для произвольной функции $f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)$, полагая $h = \pi/n$, запишем оценку сверху величины её наилучшего приближения на всем классе функций:

$$E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big)_2 = \sup\big\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big\} \leq$$

$$\leq \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \cdot \left\{\int_0^{\pi} t\left(1 - \operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt\right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.3)$$

Отсюда, учитывая соотношения (2.1.8), запишем

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi); L_2\big) \leq \lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi); L_2\big) \leq$$

$$\leq E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big)_2 \leq \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{\int_0^{\pi} t\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right\}^{-1/2} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.2.4)$$

С целью получения оценки снизу указанных $n$-поперечников в подпространстве тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_{2n+1}$, рассмотрим шар

$$S_{2n+1} := \left\{T_n \in \mathcal{T}_{2n+1} : \|T_n\|_2 \leq \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi} t\big(1 - \operatorname{sinc} t\big)^{p/2} dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

и покажем справедливость включения $S_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)$. В самом деле, пусть $T_n$ — произвольный полином из $S_{2n+1}$. Используя левую часть формулы (1.3.4) для $0 < nt \leq \pi$, запишем

$$\Lambda_1\big(T_n^{(r)}, t\big)_2 = 2\sum_{k=1}^{n} k^{2r} \rho_k^2(T_n)(1 - \operatorname{sinc} kt) \leq$$

$$\leq 2n^{2r}(1 - \operatorname{sinc} nt) \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2(T_n) = 2n^{2r}(1 - \operatorname{sinc} nt) \cdot \big\|T_n\big\|_2^2,$$

откуда, учитывая условия (2.2.1), при любых $r \in \mathbb{N}, 0 < p \leq \infty$ и $h \in (0, 2\pi]$ получаем

$$\left(\int_0^{h} t\, \Lambda_1^p\big(T_n^{(r)}, t\big)_2 dt\right)^{1/p} \leq \sqrt{2} \cdot n^r \|T_n\|_2 \cdot \left(\int_0^{h} t\left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot n^{r-2/p} \cdot \|T_n\|_2 \left( \int\limits_0^h t \left(1 - \operatorname{sinc} nt\right)^{p/2} dt \right)^{1/p} =$$

$$= \left( \int\limits_0^{nh} t \left(1 - \operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt \right)^{1/p} \left( \int\limits_0^{\pi} t \left(1 - \operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt \right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \Phi(h).$$

Следовательно, шар $S_{2n+1}$ принадлежит классу $W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)$. Учитывая формулу (2.2.1) и определение бернштейновского $n$-поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых экстремальных величин

$$\lambda_{2n-1}\left(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi); L_2\right) \geq \lambda_{2n}\left(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi); L_2\right) \geq b_{2n}\left(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi); L_2\right) \geq$$

$$\geq b_{2n}\left(S_{2n+1}; L_2\right) \geq \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \int\limits_0^{\pi} t \left(1 - \operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.2.5}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.2.4) с оценкой снизу (2.2.5), получаем требуемое равенство (2.2.2). Легко показать, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (2.2.1), не пусто. Условию (2.2.1) удовлетворяет, например, функция $\Phi^*(t) := t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha := \frac{\pi^2}{\int\limits_0^{\pi} t(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} d\tau}. \tag{2.2.6}$$

Для функции $\Phi^*(t)$ условие (2.2.1) имеет следующий вид:

$$\left(\frac{nh}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{\int\limits_0^{nh} t \left(1 - \operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt}{\int\limits_0^{\pi} t \left(1 - \operatorname{sinc} t\right)^{p/2} dt}. \tag{2.2.7}$$

Полагая $u := nh$, где $0 \leq u < \infty$, и используя формулу (2.2.6), из (2.2.7) получаем неравенство

$$u^{\alpha} \geq \alpha \pi^{\alpha-2} \int\limits_0^{u} t(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt, \tag{2.2.8}$$

которое ещё требуется доказать. Сначала найдём границы изменения величины $\alpha$, то есть вычислим оценки сверху и снизу числа $\alpha$. При получении оценки сверху воспользуемся неравенством

$$1 - \operatorname{sinc} t > (t/\pi)^2, \tag{2.2.9}$$

где $0 < t < \pi$, доказательство которого приведено в [6, с. 234]. Используя неравенство (2.2.9), из (2.2.6) имеем

$$\alpha := \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2}} < \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,\left(\frac{t}{\pi}\right)^p dt} = \frac{1}{\int\limits_0^1 t^{p+1} dt} = p+2. \tag{2.2.10}$$

С другой стороны, из геометрических соображений очевидно, что для любого $t \in (0,\pi)$ выполняется неравенство $\operatorname{sinc} t > 1 - t/\pi$, а потому из соотношения (2.2.6) получаем обратное неравенство

$$\alpha > \frac{\pi^2}{\int\limits_0^\pi t\,\left(\frac{t}{\pi}\right)^{p/2} dt} = 2 + \frac{p}{2}. \tag{2.2.11}$$

Из неравенств (2.2.10) и (2.2.11) следует, что при любом $p \in (0, +\infty]$ число $\alpha$ имеет следующие границы значений:

$$2 + \frac{p}{2} < \alpha < 2 + p. \tag{2.2.12}$$

Исходя из формулы (2.2.8), рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(u) := u^\alpha - \alpha\pi^{\alpha-2}\int\limits_0^u t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \tag{2.2.13}$$

и докажем, что на положительной полуоси $0 \le u < \infty$ она является неотрицательной. Рассуждения приведём для трёх случаев в зависимости от изменения переменной $u$:

а) $u \in [0, \pi]$;  б) $u \in [\pi, 2\pi]$;  в) $u \in [2\pi, +\infty]$.

а) Пусть $u \in [0, \pi]$. Поскольку при $t \in [0, \pi]$ имеет место неравенство $\sin t > t - t^3/6$, то из (2.2.13) следует, что

$$\varphi(u) \geq u^{\alpha} - \alpha\pi^{\alpha-2} \int\limits_0^u t(t^2/6)^{p/2} dt = u^{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha\pi^{\alpha-2}}{6^{\,p/2}} \cdot u^{p+2-\alpha}\right). \qquad (2.2.14)$$

Из формул (2.2.12) и (2.2.14) следует, что при $u \to 0+0$ функция $\varphi(u)$ принимает лишь положительные значения.

Покажем, что на всём интервале $(0, \pi)$ функция $\varphi(u)$ является положительной. С этой целью применим метод рассуждения от противного, предполагая, что существует некоторая точка $\eta \in (0, \pi)$, при переходе аргумента $u$ через которую функция $\varphi(u)$ меняет свой знак. Учитывая равенство (2.2.6), из соотношения (2.2.13) получаем $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Отсюда, в силу теоремы Ролля следует, что производная первого порядка

$$\varphi^{'}(u) = \alpha\, u^{\alpha-1} - \alpha\pi^{\alpha-2} \cdot u\,(1 - \operatorname{sinc} u)^{p/2} =$$
$$= \alpha\,\pi^{\alpha-2} \cdot u\, \left(\left(\frac{u}{\pi}\right)^{\alpha-2} - (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2}\right) \qquad (2.2.15)$$

должна иметь на интервале $(0, \pi)$ не менее двух различных нулей. Из (2.2.15) следует, что столько различных нулей на $(0, \pi)$ и в тех же точках должна иметь функция

$$\varphi_1(u) = \left(\frac{u}{\pi}\right)^{(\alpha-2)2/p} - 1 + \operatorname{sinc} u\,. \qquad (2.2.16)$$

Из формулы (2.2.16) получаем $\varphi_1(0) = \varphi_1(\pi) = 0$, а потому функция $\varphi_1(u)$ должна иметь на отрезке $[0, \pi]$ не менее четырёх различных нулей. Представляем функцию $\varphi_1(u)$ в виде

$$\varphi_1(u) = \frac{\varphi_2(u)}{u},$$

где

$$\varphi_2(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\, u^{1+(\alpha-2)2/p} - u + \sin u. \qquad (2.2.17)$$

Из сказанного выше следует, что в силу представления (2.2.17) функция $\varphi_2(u)$ на отрезке $[0,\pi]$ также должна иметь не менее четырёх различных нулей. На основании теоремы Ролля заключаем, что производная первого порядка

$$\varphi_2'(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\big(1+(\alpha-2)2/p\big)u^{(\alpha-2)2/p} - 1 + \cos u \tag{2.2.18}$$

должна обращаться в нуль на интервале $(0,\pi)$ не менее чем в трёх различных точках. Так как $\varphi_2'(0)=0$, то на основании той же теоремы Ролля производная второго порядка

$$\varphi_2''(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\big(1+(\alpha-2)2/p\big)(\alpha-2)2/p\, u^{(\alpha-2)2/p-1} - \sin u \tag{2.2.19}$$

должна иметь на $(0,\pi)$ не менее трёх различных нулей. Учитывая левую часть неравенства (2.2.12), из соотношения (2.2.19) получаем $\varphi_2''(0)=0$. Это значит, что производная третьего порядка

$$\varphi_2'''(u) = \pi^{(2-\alpha)2/p}\big(1+(\alpha-2)2/p\big)\times$$

$$\times(\alpha-2)2/p((\alpha-2)2/p-1)\, u^{(\alpha-2)2/p-2} - \cos u \tag{2.2.20}$$

должна обращаться в нуль на $(0,\pi)$ не менее чем в трёх различных точках. На основании равенства (2.2.20) получаем, что функция $u^{(\alpha-2)2/p-2}$ является положительной выпуклой вниз и монотонно убывающей на $(0,\pi)$. Учитывая поведение функции $\cos u$ на этом же интервале, заключаем, что на основании формулы (2.2.20) функция $\varphi_2'''(u)$ может иметь на интервале $(0,\pi)$ не больше двух различных нулей. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (2.2.8) в случае а).

Рассмотрим теперь случай б). Из формулы (2.2.19) следует, что на отрезке $[\pi,2\pi]$ функция $\varphi_2''(u)$ принимает только положительные значения, то есть $\varphi_2'(u)$ является монотонно возрастающей на $[\pi,2\pi]$ функцией. Используя формулу (2.2.11), из соотношения (2.2.18) получаем

$$\varphi_2'(\pi) = \frac{2}{p}(\alpha - 2) - 1 > 0.$$

Следовательно, $\varphi_2'(u) > 0$ для любого $u \in [\pi, 2\pi]$, что означает монотонно возрастание функции $\varphi_2(u)$ на указанном множестве точек из $[\pi, 2\pi]$. Так как $\varphi_2(\pi) = 0$, то при значении $u \in (\pi, 2\pi]$ имеем $\varphi_2(u) > 0$. Но это означает, что на основании формул (2.2.15) – (2.2.17) при всех $u \in (\pi, 2\pi]$ $\varphi'(u) > 0$ и так как $\varphi(\pi) = 0$, то функция $\varphi(u)$ является положительной монотонно возрастающей функцией на полуинтервале $(\pi, 2\pi]$, а это в силу (2.2.13) означает выполнение неравенства (2.2.8) в случае б).

Рассмотрим случай в). Анализируя функцию (2.2.8) и учитывая неравенство (2.2.11), для любого значения $u \in [2\pi, +\infty)$ получаем оценку производной $\varphi_2'(u)$ снизу

$$\varphi_2'(u) \geq \pi^{(2-\alpha)2/p}\big(1 + \frac{2}{p}(\alpha - 2)\big) \min_{2\pi \leq u < \infty} u^{(\alpha-2)2/p} - 1 + \min_{2\pi \leq u < \infty} \cos u =$$

$$= 2\left\{2^{(\alpha-2)2/p-1}\big(1 + (\alpha - 2)2/p\big) - 1\right\} > 0.$$

Полученное неравенство означает, что $\varphi_2'(u)$ принимает положительные значения на множестве $[2\pi, \infty)$, то есть функция $\varphi_2(u)$ является монотонно возрастающей. Поскольку, как следует из формул (2.2.11) и (2.2.17),

$$\varphi_2(2\pi) = 2\pi\big(2^{(\alpha-2)2/p} - 1\big) > 0,$$

то производная $\varphi'(u)$, в силу (2.2.15) – (2.2.17), принимает только положительные значения на множестве точек из $[2\pi, \infty)$, то есть функция $\varphi(u)$ является монотонно возрастающей. Исследование пункта б) показывает, что $\varphi(2\pi) > 0$, то есть $\varphi(u) > 0$ для произвольного $u \in [2\pi, \infty)$, и неравенство (2.2.8) имеет место также в случае в). Теорема 2.2.1 полностью доказана.

## § 2.3. Точные значения $n$-поперечников классов $W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$

Пусть $n,m,r\in\mathbb{N}$, $h\in(0,3\pi/(4n)]$, $0<p\le\infty$, $\varphi$ – весовая на отрезке $[0,h]$ функция. Символом $W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$ $(W_p^{(0)}(\Lambda_m,\varphi;h):=W_p(\Lambda_m,\varphi;h))$ обозначим класс функций $f\in L_2^{(r)}$, у которых производные $r$-го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^h \Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\le\int\limits_0^h\varphi(t)dt.$$

**Теорема 2.3.1.** *Пусть $n,m,r\in\mathbb{N}$, $0<p\le\infty$ и $0<h\le 3\pi/(4n)$. Тогда имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big)=\lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big)=$$

$$=E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)\big)_2=\frac{1}{2^{m/2}\,n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\,\varphi(t)dt}\right\}^{1/p},\qquad(2.3.1)$$

*где функция $J_{1,m}(\cdot)$ определяется формулой (1.2.3), а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных $n$-поперечников.*

**Доказательство.** Используя неравенство (1.4.3) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$, получаем

$$E_{n-1}(f)_2\le\frac{1}{2^{m/2}\,n^r}\cdot\frac{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p(f^{(r)},t)_2\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}}{\left(\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.\qquad(2.3.2)$$

Отсюда, учитывая соотношение (2.1.8) между $n$-поперечниками и определение класса $W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$, запишем

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big)\le\lambda_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big)\le$$

$$\le d_{2n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big)\le E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)\big)_2\le$$

$$\le\frac{1}{2^{m/2}\,n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \tag{2.3.3}$$

Для получения аналогичных оценок снизу рассматриваемых $n$-поперечников на множестве $\mathcal{T}_{2n-1}\cap L_2$ рассмотрим шар

$$\tilde S_{2n+1}:=\left\{T_n\in\mathcal{T}_{2n-1}:\|T_n\|_2\le\frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\frac{\int\limits_0^h\varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt}\right)^{1/p}\right\}.$$

Из равенства

$$\Lambda_m^2\big(f^{(r)},t\big)_2=2^m\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}\rho_k^2(f)J_{1,m}^2(kt),$$

легко вытекающего из (1.2.1) и (1.2.4), для любого $T_n\subset\mathcal{T}_{2n-1}\cap L_2$ получаем

$$\Lambda_m^2\big(T_n^{(r)},t\big)_2=2^m\sum_{k=1}^{n}k^{2r}\rho_k^2(T_n)J_{1,m}^2(kt)\le$$

$$\le 2^m\max_{1\le k\le n}\big\{k^{2r}J_{1,m}^2(kt)\big\}\cdot\sum_{k=1}^{n}\rho_k^2(T_n)=2^m n^{2r}J_{1,m}^2(nt)\cdot\|T_n\|_2^2. \tag{2.3.4}$$

Возведя обе части неравенства (2.3.4) в степень $p/2$ $(0<p\le\infty)$, затем умножая на весовую функцию $\varphi$ и интегрируя по переменной $t$ в пределах от 0 до $h$ $(0<h\le 3\pi/(4n)]$, получаем

$$\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(T_n^{(r)},t\big)_2\varphi(t)dt\le 2^{mp/2}n^{rp}\cdot\|T_n\|_2^p\cdot\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt.$$

Отсюда для произвольного полинома $T_n\in\tilde S_{2n+1}$ имеем

$$\int\limits_0^h\Lambda_m^p\big(T_n^{(r)},t\big)_2\,\varphi(t)dt\le\int\limits_0^h\varphi(t)dt.$$

Этим включение $\tilde{S}_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h)$ доказано. Используя определение бернштейновского $n$-поперечника, запишем оценку снизу рассматриваемых $n$-поперечников

$$\lambda_{2n}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big) \geq b_{2n}\big(W_p^{(r)}(\Lambda_m,\varphi;h),L_2\big) \geq$$

$$\geq b_{2n}\big(\tilde{S}_{2n+1},L_2\big) \geq \frac{1}{2^{m/2}\,n^r}\left\{\frac{\int\limits_0^h \varphi(t)dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t)dt}\right\}^{1/p}. \qquad (2.3.5)$$

Требуемые равенства (2.3.1) получаем из соотношений (2.3.3) и (2.3.5), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

## § 2.4. Оценка модулей коэффициентов Фурье на классах функций

В теории приближения функций определённый интерес представляет вычисление точных значений модулей косинус- и синус-коэффициентов Фурье на различных классах функций (см., например, цитированную литературу в [6]). Доказанные в предыдущих пунктах теоремы 2.2.1 и 2.3.1 обеспечивают возможность решать аналогичную задачу на рассмотренных нами классах функций. Полученные результаты сформулируем в виде следствий указанных теорем.

**Теорема 2.4.1.** *Пусть выполнены все условия теоремы 2.2.1. Тогда имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\right\} =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int\limits_0^{\pi} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.4.1}$$

*где $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ соответственно косинус- и синус-коэффициенты Фурье.*

**Доказательство.** Представим коэффициент $b_n(f)$ в следующем виде

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos n\left(t+\frac{\pi}{2n}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(t-\frac{\pi}{2n}\right)\cos ntdt$$

и так как сдвиг по аргументу не выводит функцию $f$ из класса $W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)$, то очевидно, что

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\right\}.$$

Следовательно, достаточно рассмотреть одну из них. Докажем равенство (2.4.1) для косинус-коэффициентов Фурье $a_n(f)$. Так как

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big(f(t)-S_{n-1}(f,t)\big)\cos ntdt, \tag{2.4.2}$$

где $S_{n-1}(f)$ — частная сумма $(n-1)$-го порядка функции $f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)$, то, применяя неравенство Коши-Буняковского с учётом равенства (1.1.18), из (2.4.2) получаем

$$|a_n(f)| \leq \big\|f - S_{n-1}(f)\big\|_2 = E_{n-1}(f)_2.$$

Переходя в обеих частях полученного неравенства к верхним граням по всем функциям из рассматриваемого класса и учитывая соотношения (2.2.5), получаем оценку сверху

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big\} \leq E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\big)_2 =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^\pi t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.4.3}$$

Для получения аналогичной оценки снизу воспользуемся функцией

$$f_2(x) = \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^\pi t(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big) \cos nx,$$

которая, как легко проверить, принадлежит шару $S_{2n+1}$, введенному при доказательстве теоремы 2.2.1. Поскольку $S_{2n+1} \subset W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)$, то $f_2$ также принадлежит этому классу, а потому

$$\sup\Big\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\varphi_*, \Phi)\Big\} \geq |a_n(f_2)| =$$

$$= \frac{n^{2/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^\pi t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{1/p} \Phi\Big(\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.4.4}$$

Требуемое равенство (2.4.1) получаем из сопоставления неравенств (2.4.3) и (2.4.4), откуда и следует утверждение теоремы 2.4.1.

**Теорема 2.4.2.** *Пусть выполнены все условия теоремы 1.5.2. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\big\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big\} = \sup\big\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_1, \Phi)\big\} =$$

$$= \frac{n^{1/p-r}}{\sqrt{2}} \left\{ \int\limits_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (2.4.5)$$

**Теорема 2.4.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства*

$$\sup\left\{|a_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\right\} = \sup\left\{|b_n(f)| : f \in W_p^{(r)}(\Lambda_m, \varphi; h)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\, n^r} \left\{ \frac{\int\limits_0^h \varphi(t) dt}{\int\limits_0^h J_{1,m}^p(nt)\varphi(t) dt} \right\}^{1/p}. \qquad (2.4.6)$$

Доказательство теорем 2.4.2 и 2.4.3 не приводится, поскольку оба доказательства повторяют схему доказательства теоремы 2.4.1.

# Заключение

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдено точное значение верхней грани отношения величины наилучшего совместного приближения тригонометрическими полиномами и характеристики гладкости Руновского класса комплекснозначных функций $L_2^{(r)},\ r \in \mathbb{N}$;
- найдена точная константа в неравенстве Джексона – Стечкина между наилучшим среднеквадратическим совместным приближением тригонометрическими полиномами комплекснозначных функций и их взвешанным $L_p$-средним значением характеристики гладкости Руновского порядка $m$ с произвольным весом и $0 < p \leq \infty$;
- решена экстремальная задача отыскания верхней грани наилучших совместных приближений тригонометрическими полиномами классов функций из $L_2^{(r)}$, определяемых заданной мажорантой $\Psi$;
- вычислены точные значения различных $n$-поперечников некоторых классов функций из $L_2$, задаваемых усреднённым значением характеристики гладкости Руновского в метрике $L_p$ $(0 < p \leq \infty)$.

### Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять в экстремальных задачах теории приближения функций комплексного переменного аналитических в круге функций, принадлежащих пространствам Харди $H_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ и Бергмана $B_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

# Список литературы

## А) Список использованных источников

[1] *Абилов В.А., Абилова Ф.В.* Некоторые вопросы приближения $2\pi$-периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ // Матем. заметки. – 2004. – Т.76, №6. – С. 803–811.

[2] *Бабенко А.Г.* О неравенстве Джексона–Стечкина для наилучших $L^2$-приближений функций тригонометрическими полиномами // Теория приближений. Асимптотические разложения. Сборник статей. Тр. ИММ УрО РАН. – 2001. – Т.7, №1. – С. 30–46.

[3] *Вакарчук С.Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точных значениях их $n$-поперечников // Матем. заметки. – 2001. – Т.70, №3. – С. 334–345.

[4] *Вакарчук С.Б.* Неравенство типа Джексона и поперечники классов функций в $L_2$ // Матем. заметки. – 2006. – Т.80, №1. – С. 11–18.

[5] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве $L_2$ // Матем. заметки. – 2012. – Т.92, №4. – С. 497–514.

[6] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве $L_2$ и поперечники классов функций // Матем. заметки. – 2016. – Т.99, №2. – С. 215–238.

[7] *Васильев С.Н.* Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$. Теория приближений. Асимптотические разложения // Тр. ИММ УрО РАН. – 2001, №7. – С. 75–84.

[8] *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 514 с.

[9] *Иванов В.И., Смирнов О.И.* Константы Джексона и константы Юнга в пространствах $L_p$. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. 176 с.

[10] *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений периодических функций в работах С.Б.Стечкина и их развитие // Тр. ИММ УрО РАН. – 2010. – Т.16, №4. – С.5–15.

[11] *Козко А.И., Рождественский А.В.* О неравенстве Джексона в $L_2$ с обобщенным модулем непрерывности // Матем. сборник. – 2004. – Т.195, №8. – С. 3–46.

[12] *Корнейчук Н.П.* Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. – 1962. – Т.145. – С. 514–515.

[13] *Корнейчук Н.П.* Точные значения норм дифференцируемых периодических функций в метрике $L_2$ // Матем. заметки. – 1967. – Т.2, №6. – С.569–576.

[14] *Корнейчук Н.П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – Т.35, №1. – С.93–124.

[15] *Корнейчук Н.П.* О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Матем. заметки. – 1982. – Т.32, №5. – С.669–674.

[16] *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука. 1984. 342 с.

[17] *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.

[18] *Лигун А.А.* Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве $L_2$ // Матем. заметки. – 1978. – Т.24, №6. – С.785–792.

[19] *Лигун А.А.* Точные неравенства типа Джексона для периодических функций в пространстве $L_2$ // Матем. заметки. – 1988. – Т.43, №6. – С. 757–769.

[20] *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. матем. ин-та. АН СССР. – 1946. – Т.10, №5. – С.393–410.

[21] *Пустовойтов Н.Н.* Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усредненные разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сб. – 1997. – Т.188, №10. – С. 95–108.

[22] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространстве $L_p$, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1994. – Т.185, №8. – С. 81–102.

[23] *Руновский К.В.* Приближение средними Фурье и обобщенные модули гладкости // Матем. заметки. – 2016. – Т.99, №4. – С.574–587.

[24] *Сендов Б., Попов В.* Усредненные модули гладкости. М.: Мир, 1988. 328 с.

[25] *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН. СССР. Сер. матем. – 1951. – Т.15, №3. – С.219–242.

[26] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p$, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т.98, №3. – С.395–415.

[27] *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.

[28] *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из $L_2$ // Матем. заметки. – 1976. – Т.20, №3. – С. 433–438.

[29] *Тайков Л.В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из $L_2$ // Матем. заметки. – 1979. – Т.25, №2. – С.217–223.

[30] *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ. 1976. 304 с.

[31] *Тухлиев К.* О приближении периодических функций в $L_2$ и значениях поперечников некоторых классов функций // Модел. и анализ информ. систем. – 2015. – Т.22, №1. – С.127–143.

[32] *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$ // Матем. заметки. – 1967. – Т.2, №5. – С. 513–522.

[33] *Черных Н.И.* Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ с точной константой // Тр. МИАН. – 1992. – Т.198. – С.232–241.

[34] *Шабозов М.Ш.* Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки. – 2010. – Т.87, №4. – С.616–623.

[35] *Шабозов М.Ш.* Некоторые вопросы аппроксимации периодических функций тригонометрическими полиномами в $L_2$ // Чебышевский сб. – 2019. – Т.20, №4. – С. 385–398.

[36] *Шабозов М.Ш.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости функций в $L_2$ // Матем. заметки. – 2021. – Т.110, №.3. – С. 450–458.

[37] *Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в $L_2$ // Analysis Mathematics. – 2012. – V.38, №6. – PP. 147–159.

[38] *Шабозов М.Ш., Фарозова А.Д.* Точное неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т.2, №4. – С.311–319.

[39] *Шабозов М.Ш., Тухлиев К.* Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в $L_2$ // Матем. заметки. – 2013. – Т.94, №6. – С. 908–917.

[40] *Шабозов М.Ш., Шабозова А.А.* Некоторые точные неравенства типа Джексона – Стечкина для периодических дифференцируемых в смысле

Вейля функций в $L_2$ // Тр. ИММ УрО РАН. – 2019. – Т.25, №4. – С. 255–264.

[41] *Шабозов М.Ш., Шабозов О.Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди $H_2$ // Матем. заметки. – 2000. – Т.68, №5. – С.796–800.

[42] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в $L_2$ // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т.52, №6. – С. 1414–1427.

[43] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.* Наилучшие полиномиальные приближения в $L_2$ некоторых классов $2\pi$-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. – 2011. – Т.90, №5. – С. 764–775.

[44] *Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж.* О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. – 2021. – Т.27, №4. – С. 239–254.

[45] *Шалаев В.В.* О поперечниках в $L_2$ классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. – 1991. – Т.43, №1. – С.125–129.

[46] *Юдин В.А.* Многомерная теорема Джексона в $L_2$ // Матем. заметки. 1981. Т.29, №2. С.309–315.

[47] *Юсупов Г.А.* Точные неравенства типа Джексона – Стечкина и поперечники функциональных классов в $L_2$ // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – Вип. 2. – С.124–135.

[48] *Юссеф Х.* О наилучших приближениях функций и значениях поперечников классов функций в $L_2$ // Применение функ. анализа в теории приближений. Калининский гос. ун-т. Калинин. – 1988, – С. 100–114.

[49] *Arestov V.V., Chernykh N.I.* On the $L_2$-approximation of periodic function by trigonometric polynomials // Approximation and Function Space. North Holland. Amsterdam. – 1981. – PP.25–43.

[50] *Ditzian Z., Totik V.* Moduli of Smoothness. Springer Ser. Comput. Math. 9. New York: Springer, 1997.

[51] *Kolmogorov A.N.* Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math. – 1936. – V.37. – PP. 107–110.

[52] *Pinkus A.* $n$-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. 1985. 291 p.

[53] *Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I.* Widths of function classes from $L_2$ and exact constants in Jackson type inequalities // East J. Approx. – 2008. – V.14, №4. – PP.411–421.

[54] *Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh., Zabutnaya V.I.* Structural characteristics of functions from $L_2$ and the exact values of widths of some functional classes // Journal of Mathematical Sciences. – 2015. – V.206, №1. – PP. 97–114.

[55] *Shabozov M.Sh.* Exact Jackson-Stechkin-type inequalities for $2\pi$-periodic functions in $L_2$ and widths of some classes of functions // Ukr. Math. J. – 2012. – V.63, №10. – PP.1633–1639.

[56] *Shabozov M.Sh., Yusupov G.A.* Widths of Certain Classes of Periodic Functions in $L_2$ // Journal of Approx. Theory. – 2012. – V.164, Issue 1. PP. 869–878.

[57] *Shabozov M.Sh., Yusupov G.A., Temurbekova S.D.* $n$-widths of certain function classes defined by the modulus of continuity // Journal of Approx. Theory. – 2017. – V.215. – PP. 145–162.

## Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

### 1. В журналах, входящих в Перечень ВАК Российской Федерации

[58] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве $L_2$ // Известия вузов. Математика. – 2021, №10. – С. 78–91. (Перевод: *Shabozov M.Sh., Abduhaminov M.A.* Some Inequalities Between the Best Polynomial Approximations and Averaged

Finite-Difference Norms in Space $L_2$ // Russian Mathematics. – 2021, №65. – P. 69–81.)

[59] *Абдухаминов М.А.* О совместном приближении периодической функции и ее последовательных производных // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2019, №2(175). – С. 7–13.

[60] *Абдухаминов М.А.* О приближении периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2$ // Доклады АН РТ. – 2019. – Т.62, №9-10. – С. 503–510.

[61] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* Некоторые неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве $L_2$ и поперечники функциональных классов // Доклады АН РТ. – 2020. – Т.63, №3-4. – С. 146–160.

[62] *Абдухаминов М.А.* О задаче наилучшего совместного полиномиального приближения дифференцируемых периодических функций в $L_2$ // Доклады НАН Таджикистана. – 2022. – Т.65, № 7-8. – С. 445–450.

**В других изданиях:**

[63] *Абдухаминов М.А.* О приближении периодической функции и ее последовательных производных в $L_2$ // Материалы международной научной конференции “*Современные проблемы и приложения алгебры, теории чисел и математического анализа*”, посвященной 60-летию академика АН РТ, профессора З.Х.Рахмонова и члена-корреспондента АН РТ, профессора С.А.Исхокова (Душанбе, 13-14 декабря 2019 г.). – С. 37–40.

[64] *Абдухаминов М.А.* Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве $L_2$ // Материалы международной научной конференции “*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*”, посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С. 31–34.

[65] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* Точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в пространстве $L_2$ и поперечники функциональных классов // Материалы республиканской научно-практической конференции "*Современные проблемы теории дифференциальных уравнений*", посвященной 80-летию профессора М.Исмати и 20-летию развития естественных, точных и математических наук. (Душанбе, 26 сентября 2020 г.). – С. 237–244.

[66] *Абдухаминов М.А.* Наилучшее полиномиальное приближение в пространстве $L_2$ // Міжнародна наукова конференція "*Теорія наближень і її застосування*", присвячена 100-річчю з дня народження М.П.Корнейчука (Дніпро, Украіна, 16-19 вересня 2020 г.). – С. 30–31.

[67] *Абдухаминов М.А.* О неравенствах между наилучшими полиномиальными приближениями и усредненными нормами конечных разностей в $L_2$ // Материалы международной научной конференции "*Актуальные проблемы современной математики*", посвященной 80-летию профессора Т.Собира (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.). – С. 18–21.

[68] *Шабозов М.Ш., Абдухаминов М.А.* О наилучшем совместном приближение периодических функции в $L_2$ // Материалы международной конференции "*Современные проблемы теории чисел и математического анализа*", посвященной 80-летию профессора Д.Исмоилова (Душанбе, 29-30 апреля 2022 г.). – С. 10–13.

[69] *Абдухаминов М.А.* Наилучшее совместное полиномиальное приближение дифференцируемых периодических функций в $L_2$ // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 13–15.