

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ТАДЖИКСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

На правах рукописи

УДК 534.8, 621.3.082.4

Абдурахмонов Абдурахмон Абдулкадимович

**ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОЛЯ
ТЕМПЕРАТУРЫ И ГЕНЕРАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В ПЛЕНКАХ
ДИЭЛЕКТРИКОВ В ПОЛЕ НЕПРЕРЫВНОГО ГАРМОНИЧЕСКИ МО-
ДУЛИРОВАННОГО ПУЧКА ИОНОВ**

Специальность: 1.3.8. – физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

**на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук**

Научный руководитель:

**Член-корреспондент НАНТ,
доктор физико-математических наук,
профессор Салихов Т.Х.**

Душанбе – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
ГЛАВА I. Литературный обзор.	12
1.1 Теплофизические аспекты взаимодействия пучка ионов с диэлектрическими материалами.....	12
1.2. Основные определения и описания тепловых волн.....	21
1.3. Особенности возбуждения и распространение температурных волн прямоугольной формы	22
1.4. Анализ существующих работ по нелинейным температурным вол- нам.....	29
ГЛАВА II. Влияние тепловой нелинейности на формирование стационарного температурного поля тонких пленок диэлектриков в поле пучка ионов.....	34
Введение.....	34
2.1. Влияние температурной зависимости теплофизических величин и степени черноты на температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов.....	34
2.2. Влияние температурной зависимости теплофизических величин и степень черноты подложки на температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов в воздухе и вакууме.....	43
2.3. Влияние термостатированной подложки на температурное поле диэлектрических пленок и подложки в поле непрерывного пучка ионов.....	51
2.4. Влияние тепловой нелинейности теплофизических величин и степени черноты на температурное поле тонких пленок полиимида в поле непрерывного пучка протонов.....	54
ГЛАВА III. Особенности возбуждения линейных и нелинейных тепловых Волн в пленках диэлектриков при облучение гармонически модулирован- ным ионным пучком.....	58
3.1. Теплофизическая модель задачи.....	58
3.2. Решение системы уравнений для линейной составляющей колебания температуры.....	61
3.3. Решение системы уравнений для основной гармоники нелинейного	

колебания температуры.....	65
3.4. Решение системы уравнений для второй гармоники нелинейного колебания температуры.....	71
ГЛАВА IV. Особенности возбуждения линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках и твердой подложке при облучении гармонически модулированным ионным пучком.....	80
4.1. Теплофизическая модель задачи.....	80
4.2. Решение системы уравнений для линейной составляющей колебания температуры.....	83
4.3. Решение системы уравнений для основной гармоники нелинейного колебания температуры.....	86
4.4. Решение системы уравнений для второй гармоники нелинейного колебания температуры.....	91
Заключения и основные выводы.....	96
Литература.....	99

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Очевидно, что современные методы технологии радиационного материаловедения позволяют получать материалы, необходимые для нужд науки и техники, включая микро- и наноэлектронику. Вместе с тем, в процессе облучения исходного классического материала потоком заряженных частиц с различными энергиями и плотностями тока происходит целый ряд неравновесных процессов, откуда и возникает необходимость детального и всестороннего исследования механизмов развития этих процессов. Между тем, известно, что процесс передачи энергии потока заряженных частиц в образец сопровождается существенным нагревом её поверхностного слоя, а накопленная при этом тепловая энергия распространяется по всему объему образца по диффузионному закону. В этой связи особенности формирования стационарного и нестационарного температурного поля при облучении непрерывным или другим видом импульса ионного пучка исследованы достаточно подробно [1-11]. Как было показано в [12-16], возможны случаи, когда падающий пучок ионов изменяется по гармоническому закону с частотой ω . Очевидно, что в этом случае в конденсированных средах возбуждаются тепловые волны, особенности генерации и распространения которых достаточно полно изложены в обзорах [17,18] и монографиях [19-23]. Подчеркнем, что в этом случае в среде наряду линейной волной возбуждается и нелинейная тепловая волна. Тогда для изучения особенностей генерации этих волн становится важным учет температурной зависимости теплофизических параметров исследуемой среды, которую принято называть тепловой нелинейностью (ТН) [24,25]. Отметим, что в [26-32] решены подобные задачи по фотоакустике и оказалось, что в этом случае в среде генерируются нелинейные колебания температуры, как на частоте ω , так и на удвоенной частоте (вторая гармоника). Следовательно, теоретическое исследование особенностей генерации линейной и нелинейной тепловых волн в пленках диэлектриках модулированным пучком ионов является весьма актуальной задачей.

Степень изученности проблемы, теоретическая и методологическая основа исследования. Анализ существующих литературных данных показывает, что к настоящему времени достаточно хорошо развиты линейные теории генерации тепловых волн и отсутствуют какие-либо работы, посвященные генерации нелинейной тепловой волны модулированным пучком ионов. Также оказалось не исследованным влияние тепловой нелинейности на формирование стационарного температурного поля в пленках диэлектриках при облучение непрерывным пучком ионов.

Целью работы является исследование влияния тепловой нелинейности на формирование стационарного поля температуры, а также создание теории генерации линейных и нелинейных тепловых волн в пленках диэлектриков гармонически модулированным ионным пучком.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие основные задачи:

-исследование особенностей формирования стационарного поля температуры в пленках диэлектриков на подложке и без нее, находящиеся в воздухе с учетом тепловой нелинейности теплофизических величин и степени черноты образца при облучении непрерывном потоком ионов;

-создание теории генерации линейных и нелинейных тепловых волн в пленках диэлектриков гармонически модулированным ионным пучком;

-исследование особенностей генерации линейных и нелинейных тепловых волн в плёнках диэлектрика, прикреплённых на подложке и находящихся в воздухе гармонически модулированным ионным пучком.

Научная новизна работы состоит в том, что для диэлектрических пленок на подложке и без нее впервые:

-исследовано влияние тепловой нелинейности теплофизических величин и степени черноты на формирование стационарного температурного поля в поле непрерывного потока ионов;

-разработана теория генерации линейной и нелинейной тепловых волн в пленках диэлектриков, обусловленной тепловой нелинейностью теплофи-

зических величин и степени черноты образца посредством гармонически модулированного потока ионов;

-предложена теория возбуждения линейной и нелинейной тепловых волн в пленках диэлектриков на подложке, вызванного температурной зависимостью теплофизических величин и степенью черноты образца, посредством гармонически модулированного потока ионов.

Практическая значимость. Выражения для температурного поля в диэлектрических пленках позволяют определить пространственное распределение температуры этих систем при их облучении непрерывным потоком ионов. Предложенная теория генерации линейных и нелинейных тепловых волн позволяют определить теплофизические величины и степень черноты этих систем, а также их термические коэффициенты.

Выносимые на защиту положения:

-аналитические выражения для описания стационарного температурного поля диэлектрических пленок без подложки и с подложкой при их облучении непрерывным потоком ионов;

-аналитические выражения для амплитуды и фазы линейной тепловой волны, возбуждаемой гармонически модулированным ионным пучком в пленках диэлектриков без подложки и с подложкой;

-аналитические выражения для амплитуды и фазы основной гармоники возбуждаемой нелинейной тепловой волны гармонически модулированным ионным пучком в пленках диэлектриков без подложки и с подложкой;

-выражения, описывающие особенности генерации второй гармоники нелинейной тепловой волны гармонически модулированным ионным пучком в пленках диэлектриков без подложки и с подложкой;

Достоверность результатов обеспечивается корректностью исходных линейных и нелинейных уравнение теплопроводности для облучаемых и не облучаемых слоев диэлектрика и граничные условия к ним, а также использованием существующих методов их решения.

Апробация. Основные результаты были доложены на: 10 международной теплофизической школы «Теплофизические исследования и измерения при контроле качества вещества, материалов и изделий» (Душанбе, 2016); международной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния» (Душанбе, ноябрь, 2017); международной конференции «О применение дифференциальных уравнений в прикладных задачах» (Душанбе, ноябрь, 2021); симпозиуме физиков Таджикистана, посвященном 85-летию академика Р. Марупова (Душанбе, ноябрь, 2021); международной научно-практической конференции «Современные проблемы физики и химии полимеров» (Душанбе, октябрь, 2023); VI международной научной конференции «Вопросы физической и координационной химии» (Душанбе, май, 2024); международной научно-теоретической конференции «Развитие новых направлений в науке: современное состояние и перспективы»; IX международной научной конференции «Современные проблемы физики» (Душанбе, октябрь, 2024); международной научной конференции «Физические и технические науки в пространстве СНГ: проблемы и перспективы развития» (Душанбе, ноябрь 2024); научных семинарах лаборатории физики конденсированных сред НИИ ТНУ.

Личный вклад соискателя заключается в его непосредственном участии в поиске теоретического и экспериментального материала, формулировке математических моделей сформулированных задач и получении их решений; все численные расчеты выполнены лично соискателем.

Публикации. Результаты научных работ опубликованы в 11 статьях и 8 тезисах докладов в материалах международных и республиканских конференций, в том числе 8 в рецензируемых журналах из Перечня ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Содержание работы изложено на 111 страницах, включая 28 рисунков и список литературы из 112 наименований.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и основные задачи работы, показана научная новизна и перечислены основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава является обзорной и состоит из четырех параграфов. В параграфе 1.1 выполнен анализ теплофизических аспектов взаимодействия пучка ионов с диэлектрическими материалами. Подробно изложены результаты, полученные для случая прямоугольной формы импульса ионов. Параграф 1.2 посвящен определению и описанию особенностей распространения тепловых волн в конденсированных средах. В параграфе 1.3 изложены особенности возбуждения и распространения температурных волн прямоугольной формы в конденсированных средах. В параграфе 1.4 выполнен краткий анализ существующих работ по нелинейным температурным волнам.

Выводы по литературному обзору. Из обзора литературы следует, что к настоящему времени отсутствуют:

- 1) теоретические исследования по вкладу тепловой нелинейности в установление стационарного температурного поля в диэлектрических пленках;
- 2) теория генерации линейных и нелинейных тепловых волн в пленках диэлектриков посредством гармонически модулированного пучка ионов.

Решению этих задач и посвящена настоящая диссертационная работа.

Вторая глава посвящена теоретическому исследованию влияния температурной зависимости теплофизических величин и степени черноты на особенности формирования стационарного поля температуры в диэлектрических пленках без подложки и с подложкой при их облучении непрерывным ионным пучком и состоит из четырех параграфов. В параграфе 2.1 теоретически исследовано влияние температурной зависимости теплофизических величин и степени черноты на температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов для случая когда:

- 1) облучение образца проводится на воздухе;
- 2) образец прикреплен на массивной подложке, вторая поверхность которой погружена в воду, а облучение проводится в вакууме;

- 3) образец находится на подложке и облучение проводится на воздухе;
- 4) образец находится на подложке и облучение проводится в вакууме.

В параграфе 2.2 исследовано влияние температурной зависимости теплофизических величин и степени черноты подложки на температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов в воздухе и вакууме. Учет температурной зависимости коэффициента теплопроводности подложки существенно влияет на формирование ТП в системе образец – подложка при непрерывном облучении пучком ионов на воздухе и в вакууме. Для всех рассмотренных случаев получены аналитические выражения для ТП образца и подложки, а также система взаимосвязанных нелинейных алгебраических уравнений для опорных температур. Путем численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений установлены нелинейность зависимости температуры облучаемой поверхности системы образец-подложка, а также тыловой стороны этой системы от параметров падающего пучка ионов. В параграфе 2.3 исследовано влияние термостатированной подложки на температурное поле диэлектрических пленок и подложки в поле непрерывного пучка ионов, где получены аналитические выражения для температурного поля диэлектрического образца, прикрепленного на массивную подложку, вторая сторона которой погружена в воду, а облучение проводится в воздухе. Обнаружена нетривиальная зависимость температуры облученной поверхности образца от параметров потока ионов.

В параграфе 2.4 теоретически исследовано влияние тепловой нелинейности теплофизических величин, степени черноты и коэффициент теплоотдачи на температурное поле тонких пленок полиимида в поле непрерывного пучка протонов. Проведены сравнение с экспериментом и получено удовлетворительное совпадение результатов теории с экспериментом.

Глава третья посвящена разработке теории генерации линейного и нелинейного тепловой волны в диэлектрических пленках без подложки при облучении гармонически модулированным ионным пучком и состоит из трех параграфов. В параграфе 3.1 сформулирована теплофизическая модель зада-

чи, где учитывая малость длины пробега ионов в пленке R по сравнению с её толщиной L , написана система нелинейных уравнений теплопроводности для нестационарного поля температуры и набор граничных условий к ним. Возмущение температуры в данном слое представлено в виде суммы локально-равновесной, линейных и нелинейных частей, а нелинейная составляющая колебания в виде суммы колебаний на основной и второй гармониках. Далее для этих величин составлены необходимые системы линейных уравнений и граничные условия к ним. Тем самым, сформулированная задача распадается на четыре подзадачи: стационарное поле температуры, линейная тепловая волна и нелинейные тепловые воланы на основных и вторых гармониках.

В параграфе 3.2 получено решение системы уравнений для линейной составляющей колебания температуры. Из полученного решения следует, что частотная зависимость амплитуды линейного составляющего возбуждаемой тепловой волны в облучаемом слое $\propto \omega^{-1}$, в то время как для не облучаемого слоя $\propto \omega^{-3/2}$. В параграфе 3.3 получено решение системы уравнений для основной гармоники нелинейного колебания температуры, которое описывает все особенности возбуждения основной гармоники нелинейной тепловой волны. В заключительной части рассмотрен случай, когда обе части пленки выполнены из одного и того же материала и было установлено, что частотные зависимости амплитуды возбуждаемой основной гармоники нелинейной тепловой волны определяется выражениями $\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \approx \frac{C_1}{\omega} + \frac{C_2}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega^{5/2}}$ - для облучаемого слоя и $\Phi_{1N(2)}(x, \omega) \approx \frac{K_1}{\omega} + \frac{K_2}{\omega^{3/2}} + \frac{K_3}{\omega^2}$ для второй части, где величины C_i и K_i являются константами.

В параграфе 3.4 получены общие выражения, описывающие все особенности возбуждения второй гармоники нелинейной тепловой волны. Здесь же рассмотрен случай, когда обе части пленки состоит из одного материала и найдено, что частотная зависимость амплитуды возбуждаемой второй гар-

моники тепловой волны в облучаемой и не облучаемой частях подчиняются закономерностям $\Phi_{2N(1)}(x, \omega) \sim \frac{A_1}{\omega^2} + \frac{A_2}{\omega^3}$ и $\Phi_{2N(2)}(x, \omega) \sim \frac{H_1}{\omega^2} + \frac{H_2}{\omega^3} + \frac{H_3}{\omega^4}$ соответственно. Здесь A_i и H_i коэффициенты, которые зависят от теплофизических параметров обоих слоев образца и их термических коэффициентов.

Четвертая глава посвящена разработке теории генерации линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках с подложкой при облучении тем же гармонически модулированным ионным пучком. Описанию теплофизической модели задачи посвящён параграф 4.1, где исходным является система из трех нелинейных уравнений теплопроводности для соответствующих слоев. Так же как в предыдущей главе, здесь получены системы уравнений для локально-равновесной, линейных и нелинейных частей, а также набор граничных условий, необходимых для решения этих систем. Решение линейной задачи получено в параграфе 4.2 и обнаружено, что в облучаемом слое частотная зависимость амплитуды линейной составляющей возбуждаемой тепловой волны $\propto \omega^{-1}$, а для двух не облучаемых слоев $\propto \omega^{-3/2}$.

В параграфе 4.3 получено решение системы уравнений для основной гармоники нелинейного колебания температуры, которые описывают все особенности возбуждения этой гармоники нелинейной тепловой волны. Решение системы уравнений для второй гармоники нелинейного колебания температуры получено в параграфе 4.4, которое описывает все особенности возбуждения второй гармоники нелинейной тепловой волны.

ГЛАВА I. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

Введение. Известно, что длина пробега заряженных ионов в диэлектриках составляет порядка $R \sim 10^{-8} \text{ м}$, тогда время тепловой релаксации – время перехода из нестационарного состояния в стационарное для этого слоя $\tau_{\chi} = L^2 / \chi$ составляет $\sim 10^{-9} - 10^{-12} \text{ с}$. Для твердых диэлектриков с толщиной $L \sim 1 \text{ мм}$ это время $\sim 0.1 \text{ с}$. Следовательно, при облучении пучком заряженных частиц с длительностью $\tau \gg \tau_{\chi}$ система достаточно быстро переходит в локально-равновесное состояние и возникает необходимость установления основных параметров этого состояния, включая пространственное распределение температуры. Особенностью этой задачи является то, что при этом чрезвычайно важным становится учет температурной зависимости коэффициента теплопроводности $\kappa(T)$ системы. Между тем, известно, что при этом и одновременно функцией температуры становятся степень черноты $A(T)$ материала и его коэффициент теплоотдачи $h(T)$. Другой весьма интересной задачей является генерация тепловых волн в этих системах. Решение этой задачи становится особенно актуальным в связи с тем, что поток ионов также может быть модулирован гармоническим образом [12-16]. Различные особенности возбуждения и распространения тепловых волн достаточно подробно описаны в монографии [19] и обзорах [17,18]. В этой связи в данной главе, в основном, изложим те результаты, которые получены в последние годы и имеют прямое отношение к рассматриваемой нами проблеме. Следует отметить, что в диэлектриках основным механизмом переноса тепла является фоновый, что является весьма существенным при исследовании распространения тепловых волн в среде.

1.1. Теплофизические аспекты взаимодействия пучка ионов с диэлектрическими материалами

Этому вопросу посвящено достаточно большое количество, как экспериментальных, так и теоретических работ (см., например [1-11] и приведен-

ную там литературу). Согласно [4], формирование поля температуры описывается уравнением теплопроводности с источником

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{EJ\varphi(t)}{ZeR}, \quad (1.1.1)$$

где ρ , C_p и κ - соответственно, плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала образца, E - начальное значение энергии падающего иона с плотностью тока J , Z и R - заряд в единицах заряда электрона и длина пробега иона в веществе, $\varphi(t)$ - функция, описывающая временной профиль импульса потока ионов [4]. Ниже, следуя [3], рассмотрим случай, когда временной профиль импульса ионов является прямоугольным.

Случай прямоугольной формы импульса ионов. В этом случае для расчета температурного поля в образце использовано одномерное нелинейное уравнение теплопроводности [3,33] вида

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \phi \rho D(x) \cdot f(t), \quad (1.1.2.)$$

где ϕ - флюенс частиц за один импульс облучения, $D(x) = \frac{E}{R} \Theta(R-x)$, $f(t)$ - функция с периодом t_0 , удовлетворяющая условию $\int_0^\tau f(t) dt = 1$, где τ - длительность одного импульса облучения ($\tau \leq t_0$). Облучение образца проводилось импульсами ионами железа (Fe^+) со средней энергией ионов $E = 70 \text{ кэВ}$, частотой следования $\nu = 20 \text{ Гц}$, длительностью $\tau = 500 \text{ мкс}$, а также средней плотностью тока пучка в импульсе $J = 2 \text{ мА/см}^2$ и средним зарядом иона $Z_{Fe^+} = 1,76$. Проективный пробег ионов в образце рассчитывался с помощью программы TRIM [34] и составлял величину $R \sim 200 \text{ \AA}$. Образцы окиси магния MgO прижимались пружинами к кристаллодержателю, который крепится на массивном металлическом основании с водяным охлаждением. Гранич-

ные условия на облученной и тыльной сторонах образца написаны в виде [35]

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = A(T)\sigma(T(0,t)^4 - T_0^4), \\ \kappa \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = -\frac{1}{R_c}(T(L,t) - T_0), \end{cases} \quad (1.1.3)$$

где $A(T)$ - коэффициент черноты граничной поверхности $x=0$, σ - постоянная Стефана-Больцмана, R_c - термическое сопротивление контакта (измеряемое в $K \cdot c^3 / z$) между образцом и металлом. Для прямоугольного импульса ионного облучения, представленного на рис.1.1, можно положить, что

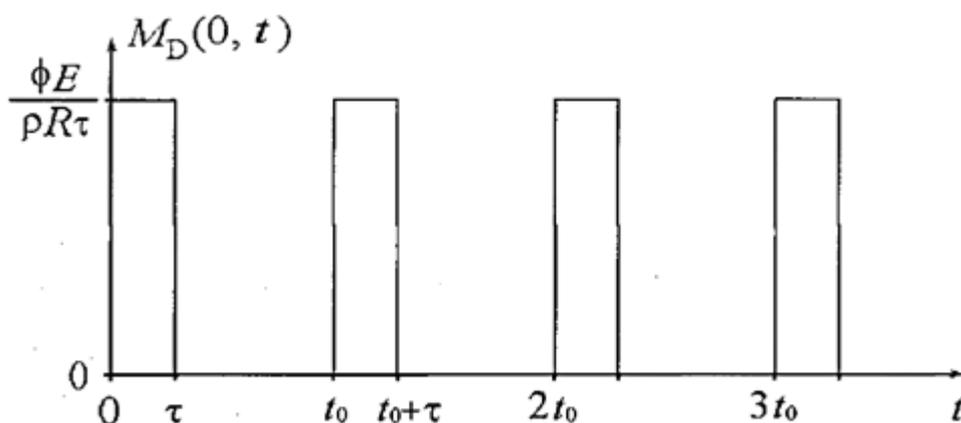


Рис. 1.1. Временная зависимость мощности поглощенной дозы $M_D(x,t)$ в области облучения.

$$f(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} [\Theta(t - kt_0) - \Theta(t - \tau - kt_0)]. \quad (1.1.3)$$

Существенная нелинейность краевой задачи не позволяет найти аналитическое решение. Поэтому авторы оценили, что повышение температуры за один импульс облучения составляет $\Delta T = 0.08 - 0.14 K$, т.е. является достаточно малым. Учитывая этот факт, авторы пренебрегли температурной зависимостью теплофизических величин и нашли численное решение линейного уравнения. Это позволило им рассмотреть квазистационарный случай, когда среднее за импульс поле температур не изменяется со временем. В этом случае уравнение (1.1.2) и соотношение (1.1.3) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\kappa(U) \frac{\partial U}{\partial x}) = -\nu \phi D(x), \quad (1.1.4)$$

$$U = \langle T \rangle; \langle f \rangle = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} f(x,t) dt, \quad t_0 = 1/\nu - \text{период импульсов облучения}$$

$$\begin{cases} \kappa_0 \frac{\partial U(0)}{\partial x} = A_0 \sigma(U_0^4 - T_0^4), \\ \kappa_L \frac{\partial U(L)}{\partial x} = -(U_L - T_0)/R_c, \end{cases} \quad (1.1.5)$$

где $U_0 = U(0)$; $U_L = U(L)$; $\kappa_0 = \kappa(U_0)$; $\kappa_L = \kappa(U_L)$, $A_0 = A(U_0)$.

Интегрирование уравнения (1.1.4) с учетом первого соотношения системы (1.1.5) приводит к уравнению

$$\kappa(U) \cdot \frac{\partial U(x)}{\partial x} = A_0 \sigma(U_0^4 - T_0^4) - \phi \nu \int_0^x d\xi \cdot D(\xi). \quad (1.1.6)$$

Из соотношения (1.1.6) в точке $x=L$ с учетом второго граничного условия (1.1.5) получено уравнение, связывающее средние за период облучения температуры U_0 и U_L :

$$U_L = T_0 + R_c [\phi \nu \int_0^L dx \cdot D(x) - A(U_0) \sigma(U_0^4 - T_0^4)]. \quad (1.1.7)$$

Зная зависимость теплопроводности от температуры, легко проинтегрировать уравнение (1.1.6). Авторы обнаружили, что коэффициент теплопроводности MgO в области температур от 300 до 1100 К аппроксимируется зависи-

мостью $\kappa(T) = a + \frac{b}{T}$, где a, b находятся из соотношений $a = \frac{T_2 \kappa_2 - T_1 \kappa_1}{T_2 - T_1}$,

$b = T_1 T_2 (\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{T_2 - T_1})$, где $\kappa_1 = \kappa(T_1)$, $\kappa_2 = \kappa(T_2)$. При $T_1 = 300K$, $T_2 = 1100K$ ими полу-

чены $a = -1,075 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см} \cdot K)$, $b = 2 \cdot 10^9 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см})$. Выполняя интегрирование уравнения (1.1.6) с учетом выражения $\kappa(T)$, авторы получили выражение

$$a(U - U_0) + b \cdot \ln\left(\frac{U}{U_0}\right) = [A_0 \sigma(U_0^4 - T_0^4)x - \phi \nu \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\xi \cdot D(\xi)]. \quad (1.1.8)$$

Оказалось, что для рассматриваемого случая знание зависимости теплопроводности от температуры не является обязательным и тогда можно

принять эту величину постоянной. Тогда уравнение (1.1.6) после интегрирования принимает вид

$$U(x) = U_0 - \frac{1}{\kappa_0} [A_0 \sigma(U_0^4 - T_0^4)x - \phi \nu \int_0^x d\zeta \int_0^\zeta d\xi \cdot D(\xi)]. \quad (1.1.9)$$

Для точки $x = L$ из (1.1.9) получено другое уравнение, связывающее значения U_0 и U_L :

$$U_L = U_0 - \frac{1}{\kappa_0} [A_0 \sigma(U_0^4 - T_0^4)L - \phi \nu \int_0^L d\zeta \int_0^\zeta d\xi \cdot D(\xi)]. \quad (1.1.10)$$

После подстановки выражения (1.1.7) в левую часть (1.1.10) получено нелинейное алгебраическое уравнение для средней температуры U_0 на облученной поверхности образца

$$U_0 - \frac{(L - R_c \kappa_0)}{\kappa_0} \cdot A_0 \sigma(U_0^4 - T_0^4) = T_0 - \frac{\phi \nu}{\kappa_0} \int_0^L dx \left[\int_0^x d\xi D(\xi) - R_c \kappa_0 D(x) \right]. \quad (1.1.11)$$

Выражение (1.1.9) дает распределение среднего температурного поля в диэлектрике. Авторами выполнен расчет профиля средней по импульсу облучения температуры в образце MgO при облучении электронным пучком (средняя энергия электронов $E = 178,7 \text{ кэВ}$; частота следования импульсов $\nu = 50 \text{ Гц}$; флюенс электронов $\phi \sim 5,57 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$.) и пучком ионов железа (Fe^+).

Для электронного пучка величина $D(x)$ рассчитывалась по схеме, предложенной в [36]. На рис. 1.2 представлена форма продольного распределения дозы падающего электронного облучения в образце MgO . На рис. 1.3.-1.5. представлены пространственные распределения среднего температурного поля в образце MgO для разных значений термического сопротивления контакта R_c при облучении электронным и ионным пучками. Тем самым авторы показали, что средняя температура образца при в диапазоне изменения термического сопротивления $R_c \sim 10^{-7} \div 10^{-3}$ (ед. СГС) слабо зависит от вида имплантера и практически одинакова для электронного и ионного облучений.

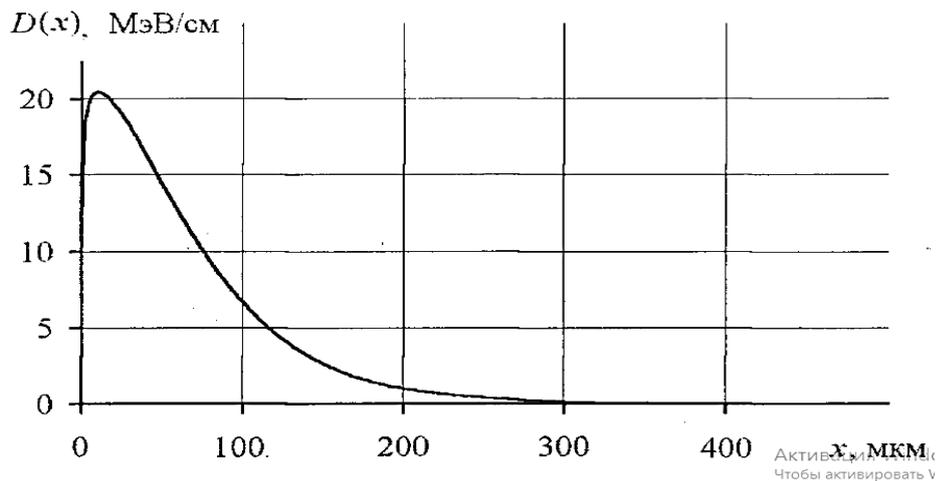


Рис. 1.2. Продольное распределение дозы электронного облучения в образце MgO .

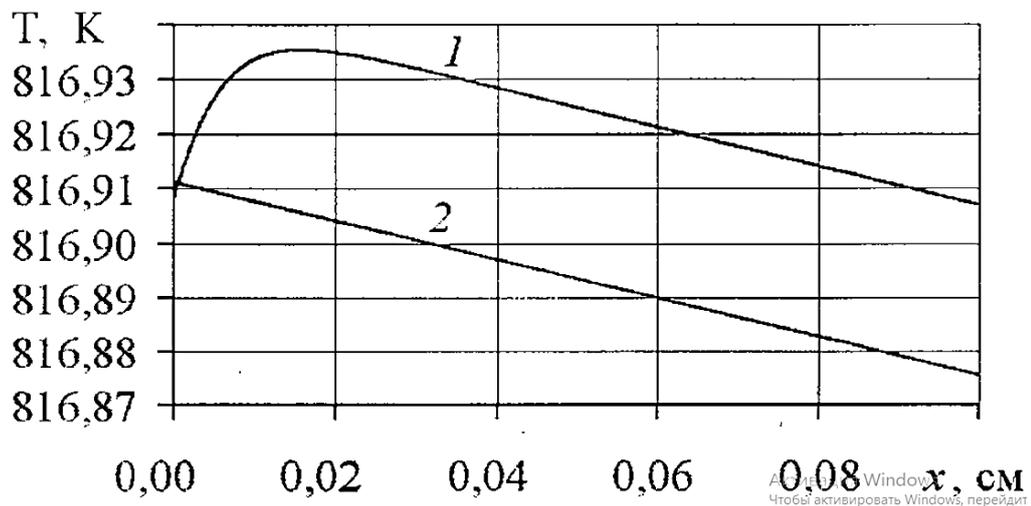


Рис. 1.3. Пространственное распределение температурного поля в образце MgO с термическим сопротивлением $R_c = 1 \cdot 10^{-3}$ (ед. СГС):

1- электронный пучок; 2- ионный пучок.

Параметры электронного пучка выбирались так, чтобы энергия, вносимая электронным пучком, была такой же, как и в случае ионного облучения, параметры которого описаны выше.

Другим, весьма важным, аспектом является определение величины термического сопротивления контакта диэлектрик – металл. Очевидно, что для этого необходимо произвести табуляцию функции $R_c(T)$ из решения

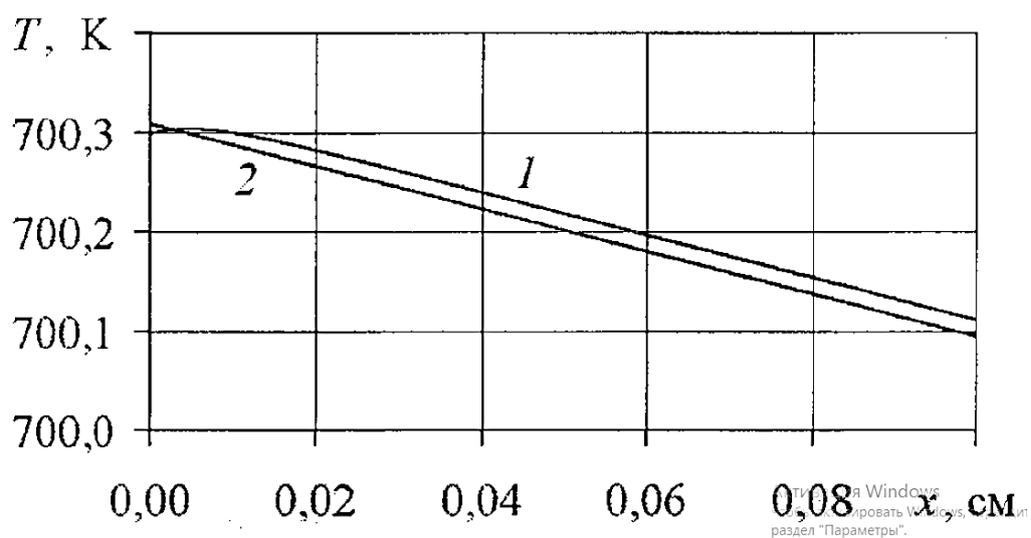


Рис. 1.4. Пространственное распределение температурного поля в образце MgO с термическим сопротивлением $R_c = 1 \cdot 10^{-4}$ (ед. СГС):
1- электронный пучок; 2- ионный пучок.

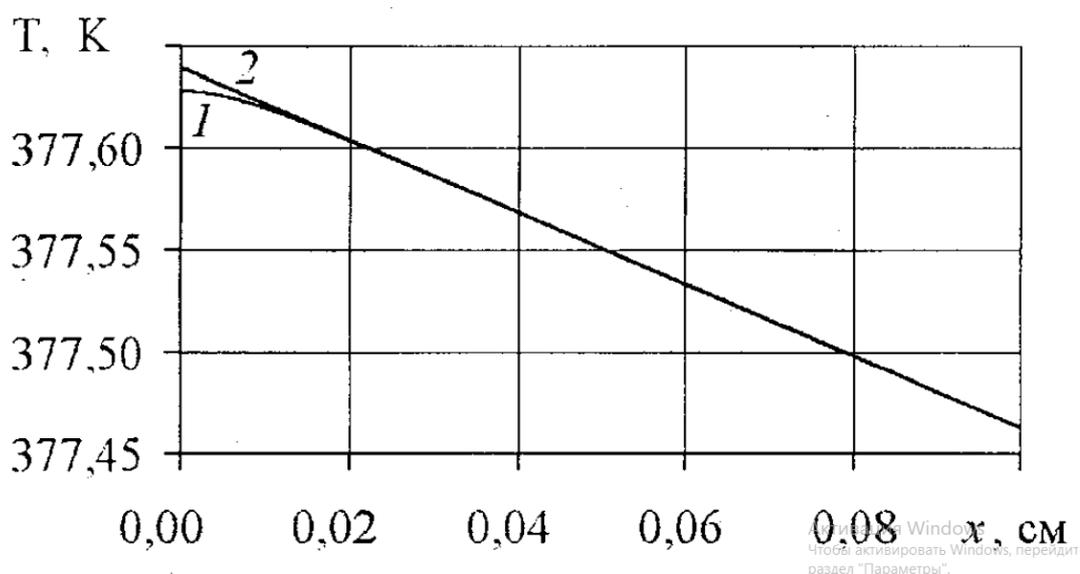


Рис. 1.5. Пространственное распределение температурного поля в образце MgO с термическим сопротивлением $R_c = 1 \cdot 10^{-5}$ (ед. СГС):
1- электронный пучок; 2- ионный пучок.

уравнения (1.1.11). Такая зависимость получена авторами и для поверхности образца MgO , представленная на рис. 1.6.

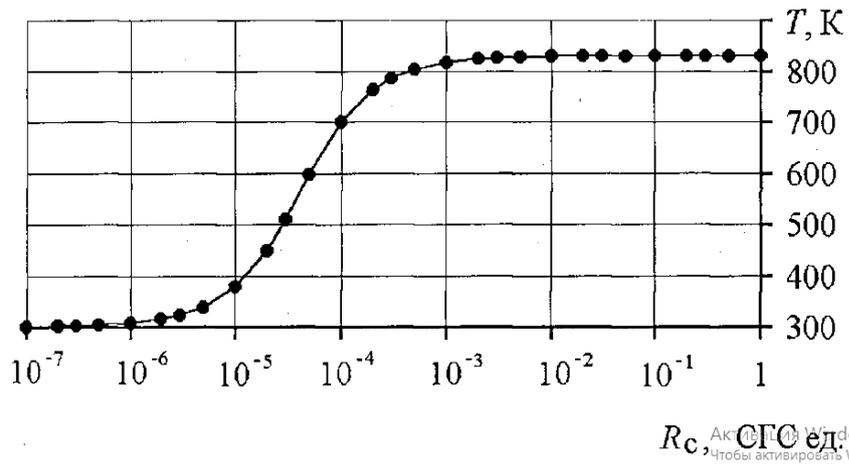


Рис. 1.6. Зависимость температуры облучаемой поверхности образца MgO от термического сопротивления контакта MgO - подложка.

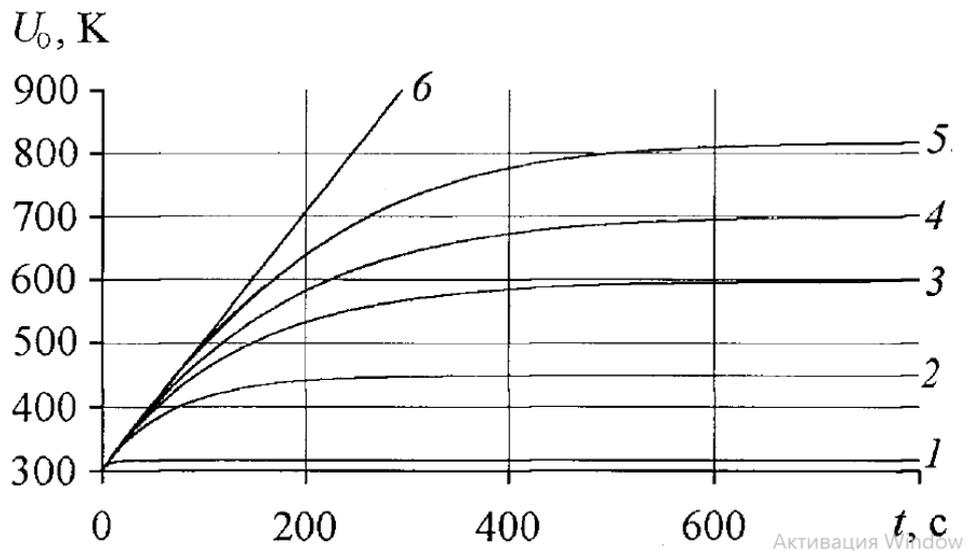


Рис. 1.7. Зависимости средней температуры на облучаемой поверхности образца MgO от времени облучения для разных термических сопротивлений контакта $R_c = 2 \cdot 10^{-6}$ (1), $2 \cdot 10^{-5}$ (2), $5 \cdot 10^{-5}$ (3), $1 \cdot 10^{-4}$ (4), $1 \cdot 10^{-3}$ (5) и $R_c = \infty$ (6). Здесь значение термического сопротивления взято в системе СГС и $[R_c] = \text{К} \cdot \text{с}^3 / \text{г}$.

Численное решение нелинейного уравнения теплопроводности (1.1.1) с начальным условием $T(x,0)=T_0$ и граничными условиями (1.1.3) позволяет описать процесс выхода температурного поля в образце на режим насыщения.

На рис. 1.7 представлена временная зависимость температуры облучаемой поверхности образца для разных значений термических сопротивле-

ний R_C . Прямая $R_C = \infty$ соответствует бесконечному термическому сопротивлению и отсутствию излучения с облученной поверхности, что соответствует простой аккумуляции энергии в образце.

Экспериментально измеренная температура насыщения на облучаемой поверхности образцов MgO , закрепленных на подложке из нержавеющей стали, $U_0 = 370K$. Авторы показали, что по известному значению температуры U_0 можно графически определить термическое сопротивление контакта R_C . Из выражение (1.11) для величины R_C справедливо формула

$$R_C = \frac{(U_0 - T_0) + \frac{1}{\chi_0} [\phi v \int_0^L dx \int_0^x d\xi \cdot D(\xi) - LA_0 \sigma (U_0^4 - T_0^4)]}{\phi v \int_0^L dx [D(x)] - A_0 \sigma (U_0^4 - T_0^4)}. \quad (1.1.12)$$

Авторы выполнили численный расчет величины R_C по формуле (1.1.12) и он оказался равным $R_C = 9,0 \cdot 10^{-6} K \cdot c^3 / z$, что существенно расходится с экспериментальным значением R_C , приведенным в работе [37]. Авторы справедливо считают, что это расхождение объясняется сильной зависимостью термического сопротивления R_C от величины относительной поверхности непосредственного контакта диэлектрик – металл. В работе [37] оксида магния на подложке получен напылением, что существенно увеличивает истинную площадь контакта по сравнению со случаем прижимания образца к подложке пружинами.

На основе теоретического расчета и анализа экспериментальных данных была предложена экспресс-методика определения термического сопротивления контакта образец – подложка при облучении материалов различных классов потоком заряженных частиц.

1.2. Основные определения и описания тепловых волн

Температурные волны – это периодическое изменение распределения температуры в среде, связанное с периодическими колебаниями плотности

тепловых потоков, поступающих в среду [17-23]. Существенное отличие этой волны от волн другой природы (электромагнитных, акустических) состоит в том, что оно испытывают сильное затухание при распространении согласно выражению

$$T(x, \omega) = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}} x} e^{i(\omega t - kx)} = T_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - kx)},$$

где $\delta = (2\chi/\omega)^{1/2}$ - глубина проникновения. Скорость распространения определяется выражением $\mathcal{S} = (2\chi\omega)^{1/2}$, т.е. для этих волн характерна значительная дисперсия - зависимость скорости распространения от частоты. Чем больше частота колебаний, тем быстрее температурные волны распространяются и затухают на меньших расстояниях. Температурная волна не переносит энергии. Среднее за период значение энергии, проходящей через неподвижную поверхность, равно нулю.

Температурные волны лежат в основе так называемого метода периодического нагрева и широко применяются для определения теплопроводности, теплоёмкости и других тепловых характеристик материалов [18,21,38-48]. Возможности метода особенно проявляются при изучении свойств образцов малых размеров, например, тонких плёнок толщиной сотни ангстрем. На основе этого метода созданы сканирующие тепловые микроскопы.

Изменение глубины проникновения температурной волны в зависимости от частоты лежит в основе тепловой дефектоскопии, применяемой для обнаружения отслоения покрытий, трещин, микрополостей и т.д. На регистрации нелинейных эффектов, т.е. дополнительных гармоник в спектре колебаний температуры вблизи температур критических явлений и фазовых переходов, основана тепловая спектроскопия. Это даёт возможность определения температурных коэффициентов тепловых параметров веществ: теплоёмкости, теплопроводности, плотности.

В зависимости от свойств исследуемых материалов и конкретной задачи в экспериментальных исследованиях используются температурные волны

широкого диапазона амплитуд и частот (от сотых долей герца до единиц килogerц). Для формирования температурных волн применяются методы нагрева проводниками с током, радиационный и излучением лазера. Для регистрации волн используются термопарные и фотометрические датчики.

Справедливости ради отметим, что в [18] достаточно подробно описаны различные особенности возбуждения одно- и двухмерных тепловых волн, а также экспериментальные работы, посвященные применению этих результатов для измерения теплофизических параметров конденсированных сред. В этой связи мы остановимся на тех работах, которые выполнены сравнительно недавно или существенно отличаются от случая, описанного в [18].

1.3. Особенности возбуждения и распространение температурных волн прямоугольной формы

Впервые этот вопрос теоретически был рассмотрен в известной книге Карлоу и Егера [22], на основе которой в [49,50] предложен импульсный метод измерения коэффициента температуропроводности. Метод основан на исследовании поведения фронтальной поверхности дискообразной пластины при воздействии на нее короткого энергетического импульса лазера или вспышки лампы. Он имеет преимущества в скорости, простоте формы исследуемых образцов, применимости для широкого ряда плохих и хороших проводников тепла. Последние годы этот метод достаточно эффективно развивался в работах тверской школы, возглавляемой профессором О.В. Малышкиной [51-62]. Для этой цели ими использован пироэлектрический эффект – генерация электрических зарядов в кристалле под действием теплового (инфракрасного) излучения. На наш взгляд благодаря им создан уникальный метод - пироэлектрический метод регистрации тепловой волны и измерение теплофизических параметров объемных несегнетоэлектрических материалов с малым коэффициентом теплопроводности.

Вкратце приведём сущность предлагаемого этими авторами метода прямоугольной тепловой волны (Thermal Square Wave, TSW).

Зависимость пиротока от времени, т. е. его форма за один период модуляции теплового потока, рассчитывается по формуле

$$I(t) = \frac{S}{d} \int_0^d \gamma(x) \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} dx, \quad (1.3.1)$$

где γ - пироккоэффициент сегнетоэлектрика, d - его толщина, S - площадь электродов. Из (1.3.1) следует, что для определения формы пиротока необходимо знать нестационарное температурное поле в исследуемой среде. Авторы детектировали пироток посредством сегнетоэлектрического кристалла, на котором прикреплена пленка исследуемого образца и это привело к тому, что образец становился двух- или трехслойным.

В [58] решено уравнение теплопроводности для двухслойной системы, а затем вычислив интеграл в (1.3.1), для пиротока получено выражение [55]

$$I = \frac{S\beta_0 W_0 \gamma}{\rho C(d+h)} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2} \exp(in\omega\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{sh[\varphi_2 h]}{[ch(\varphi_1 d) + \frac{H_1}{\varphi_1} sh(\varphi_1 d)] sh(\varphi_2 h) + [\frac{k_1 H_1}{k_2 \varphi_2} ch(\varphi_1 d) + \frac{k_1 \varphi_1}{k_2 \varphi_2} sh(\varphi_1 d)] ch(\varphi_2 h)} \right\} \right\}, \quad (1.3.2)$$

где β_0 - коэффициент поглощения поверхности образца, W_0 - плотность мощности теплового потока, $H_1 = 4\beta_0 \sigma T_0^3 / k_1$ - потери излучением, $\varphi_m = (1+i)\sqrt{m\omega/2\chi}$, $m=1,2$. Выполнен численный расчет величины пиротока для $f = 10 \Gamma\text{ц}$ и трех следующих значений коэффициента температуропроводности образца $\chi_1 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, $\chi_1 = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\chi_1 = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ в широком диапазоне изменения величины d/h , где h - толщина подложки (сегнетоэлектрика). На рис. 1.8 (а, б, в) представлены результаты этого расчета. Из этих рисунков следует, что:

1. наличие пленки над сегнетоэлектриком приводит к изменению прямоугольности пиротоклика;
2. с ростом толщины пленки происходит уменьшение амплитуды импульсов пиротока;

3. для пленки с $\chi_1 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, которая соответствует металлическим пленкам, для всех значений величины d/h пироотклик остается в фазе с падающим ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ;

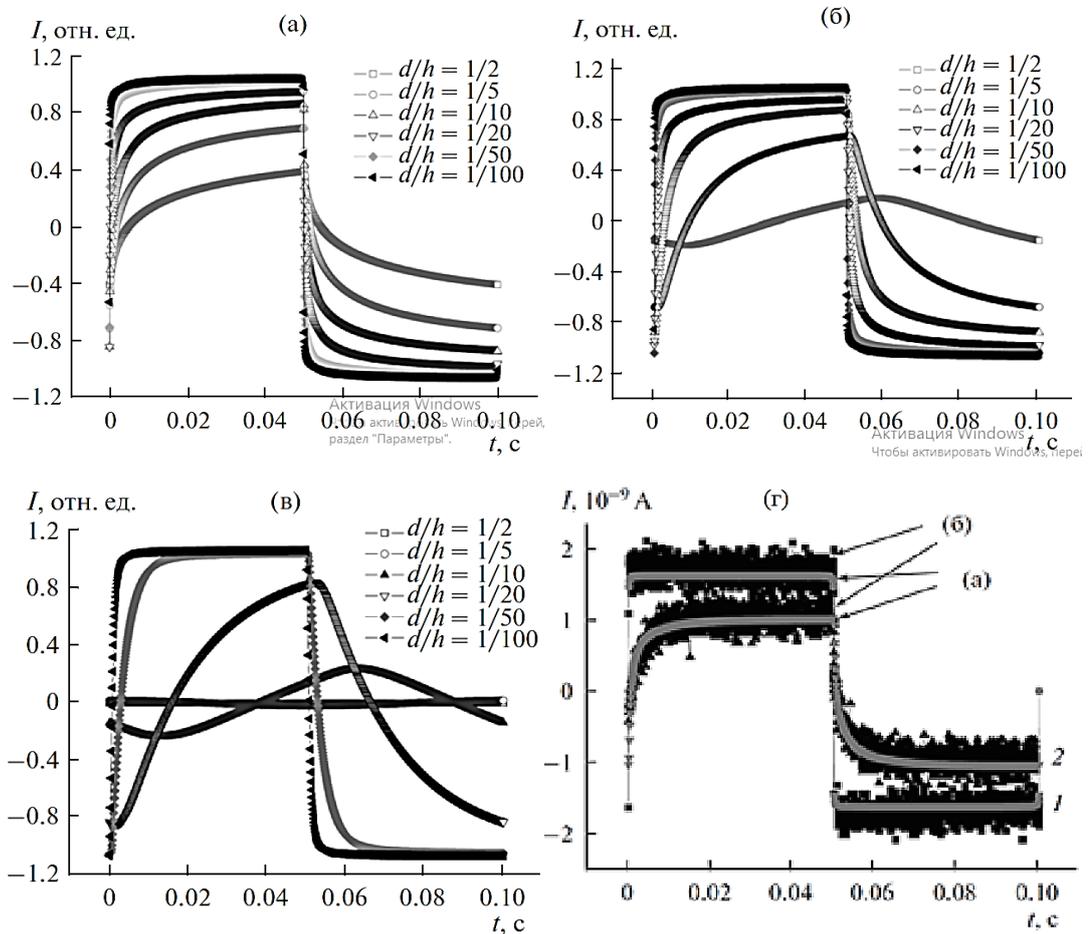


Рис. 1.8. Зависимость формы пироотклика системы от соотношения толщин диэлектрической пленки и сегнетоэлектрической подложки при различных коэффициентах тепловой диффузии пленки: $\chi_1 = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ (а), $\chi_1 = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ (б), $\chi_1 = 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$ (в) и сравнение расчетных (а) и экспериментальных (б) форм пироотклика LiTaO_3 без пленки (кривая 1) и с пленкой цирконата титаната свинца (кривая 2); $d/h = 1/20$ (з).

4. для пленок с $\chi_1 = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, равной значению χ для подложки и одинаковой с подложкой толщиной пироток имеет треугольную форму с двукратно меньшей амплитудой;

5. при значениях $\chi_1 = (10^{-8} - 10^{-9}) \text{ м}^2 / \text{с}$, соответствующим полимерным пленкам, при $d/h = 1/50$ сдвиг фазы исчезает, а форма пиротока становится прямоугольной.

В экспериментальной части этой работы авторы в качестве образца использовали неотожженную пленку цирконата титаната свинца (ЦТС) толщиной 20 мкм и площадью 25 мм², нанесенную на кристалл танталата лития LiTaO₃ толщиной 440 мкм и площадью 100 мм² с нижним сплошным электродом Ni/Cr толщиной 100 нм. Пленка ЦТС освещалась прямоугольно модулированным потоком излучения частотой 10 Гц от ИК-лазера ($\lambda = 920-960$ нм, $W = 44$ мВт) с диаметром луча ≈ 1 мм. Модуляция лазера осуществлялась с помощью функционального генератора сигналов (SFG-71013). Результаты эксперимента и их сравнение с расчетом представлены на рис 1.8 г, из которого следует совпадение значения $\chi_1 = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{с}$ с существующими независимыми данными для этого материала.

Решение подобной задачи для трехслойной системы проведено в [60]. Здесь в качестве образца был использован кристалл парателлурита, который относится к диэлектрическим материалам с малым значением коэффициента теплопроводности [63]. Тем самым учтен факт, что количество тепла, прошедшего через образец, обратно пропорционально его коэффициенту теплопроводности. Очевидно, что для анализа тепловых характеристик этого объекта необходимо учитывать переход тепла в подложку [62], на которой расположена тыльная сторона сегнетоэлектрика. Тогда возникает необходимость решения задачи теплопроводности для трёхслойной системы (рис.1.9). Авторы [62] исходили из того, что при прохождении тепла через систему из n слоев имеется система из n уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi_i \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (1.3.3)$$

где x_i - координата конца i -го слоя, i - порядковый номер слоя, $I_i = x_i - x_{i-1}$ - толщина i -го слоя ($I_i \equiv 0$), χ_i - коэффициент теплопроводности i -того

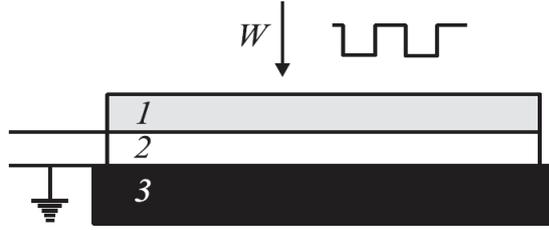


Рис.1.9. Схема регистрации пироотклика для трехслойной системы:
 1 - образец несегнетоэлектрического материала; 2 - сегнетоэлектрик
 (кристалл танталата лития); 3- металлическая подложка.

слоя. Набор граничных условий, необходимых для решения системы (1.3.3) имеют следующий вид:

$$-k_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = W(t), \quad k_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial x} \Big|_{x=x_i}, \quad T_1 \Big|_{x=x_i} = T_{i+1} \Big|_{x=x_i}, \quad \frac{\partial T_n}{\partial x} \Big|_{x=h} = 0, \quad h = \sum_{i=1}^n l_i \quad (1.3.4)$$

Мощность падающего прямоугольного потока энергии представлена в виде

$$W(t) = W_0 \frac{\tau}{T_m} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2} \exp(in\omega\tau) \right), \quad (1.3.5)$$

где T_m - период модуляции теплового потока, τ - длительность светового промежутка ($\tau = T_m/2$), $\omega = 2\pi/T_m$ - циклическая частота. При решении систем (1.3.3) авторы приняли во внимание тождество $l_2 \equiv d \ll l_3$, что позволяет считать $l_3 \rightarrow \infty$ и это существенно упрощает процедуру решения. В результате авторами получено выражение для пиротока трехслойной структуры следующего вида:

$$I = \frac{SW_0\gamma}{h} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(n\omega\tau/2)}{n\omega\tau/2} \exp(in\omega\tau) \right\} \frac{in\omega}{\varphi_2} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{ch(\varphi_2 l_2) - ch(\varphi_2 l_1)}{C + BA} - \frac{sh(\varphi_2 l_2) - sh(\varphi_2 l_1)}{C/A + B} \right] \right\}. \quad (1.3.6)$$

Здесь использованы обозначения

$$A = \frac{k_2 \varphi_2 ch[\varphi_2 l_2] + k_3 \varphi_3 ch[\varphi_2 l_2]}{k_3 \varphi_3 ch[\varphi_2 l_2] + k_2 \varphi_2 ch[\varphi_2 l_2]}, \quad B = k_2 \varphi_2 sh[\varphi_2 l_1] ch[\varphi_1 l_1] - k_1 \varphi_1 ch[\varphi_2 l_1] sh[\varphi_1 l_1],$$

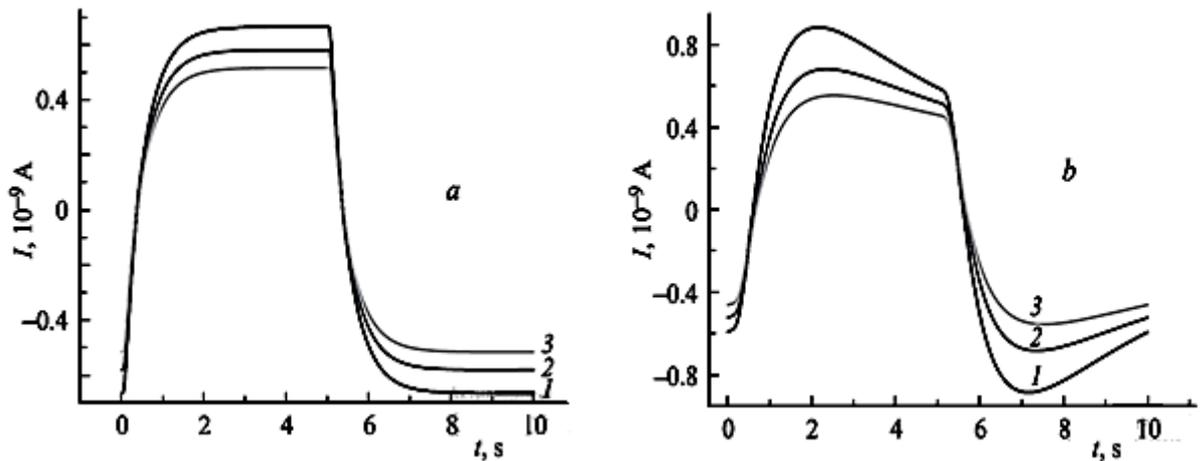


Рис. 1.9. Расчетные формы пироотклика танталата лития при постоянном значении коэффициента тепловой диффузии и различных значениях коэффициента теплопроводности несегнетоэлектрического материала: *a*-расчет без учета перехода тепла в металлическую подложку; *b*-с учетом.

$$C = k_1 \varphi_1 \operatorname{sh}[\varphi_2 l_1] \operatorname{sh}[\varphi_1 l_1] - k_2 \varphi_2 \operatorname{ch}[\varphi_2 l_1] \operatorname{ch}[\varphi_1 l_1], \quad \varphi_m = (1+i) \sqrt{n\omega / 2\alpha_m}, \quad m = 1, 2, 3.$$

На рис. 1.9 (*a*, *b*) представлены расчетные формы пироотклика танталата лития.

На рис. 1.10 *a*, *б* представлены расчетные формы пироотклика танталата лития при постоянном коэффициенте теплопроводности и разных коэффициентах тепловой диффузии материала (*a*) и при постоянных тепловых характеристиках материала и разных коэффициентах теплопроводности подложки (*b*). Авторами в качестве пироэлектрического материала использовался образец кристалла танталата лития размером $10 \times 10 \text{ mm}$ с толщиной 1 mm .

Аналогичные расчёты выполнены для случая постоянного значения теплопроводности и различных значениях коэффициента температуропроводности. Рис. 1.10 *a* относится к образцу с большим термическим сопротивлением. Когда температурная волна не проникает в образец глубже чем на $\frac{1}{3}d$, в расчетной формуле переход тепла в подложку не учитывается (используется формула, полученная в работе [58]).

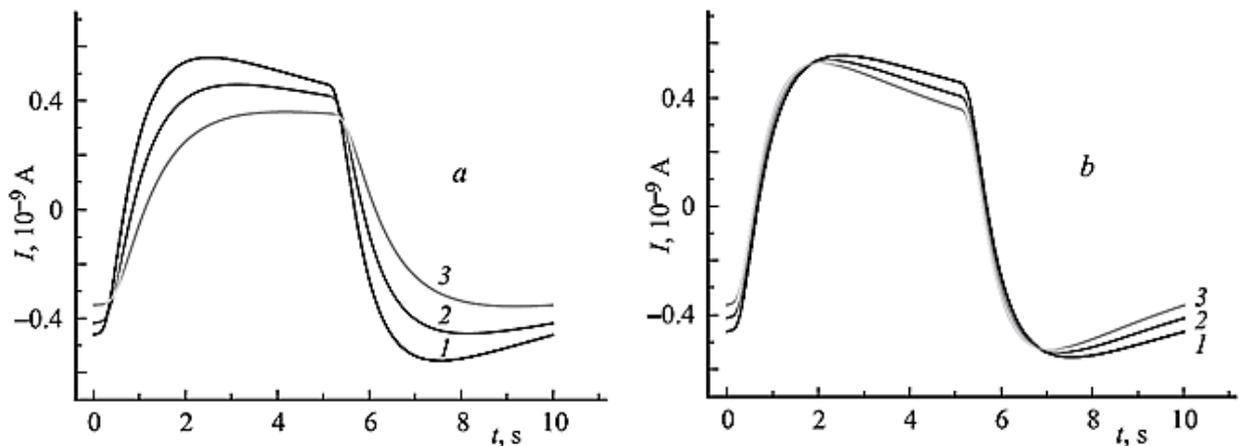


Рис. 1.10. Расчетные формы пироотклика танталата лития: *a* - при постоянном коэффициенте теплопроводности и разных коэффициентах тепловой диффузии материала ($\chi_1^1 < \chi_1^2 < \chi_1^3$, верхние индексы соответствуют номерам кривых); *b* - при постоянных тепловых характеристиках материала и разных коэффициентах теплопроводности подложки ($k_1^1 < k_1^2 < k_1^3$).

Расчет проведен с учетом перехода тепла в подложку.

Рис. 1.10 *b* относится к образцу с малым термическим сопротивлением, для которого в расчетной формуле учтен переход тепла в металлическую подложку. Как видно из расчетных кривых, форма пироотклика определяется глубиной проникновения температурной волны (меньше чем на $\frac{1}{3}d$ или больше), тогда как значение пиротока обратно пропорционально величине коэффициента теплопроводности материала, помещенного на танталате лития и прямо пропорционально величине температуропроводности (рис. 1.10 *a*). В отличие от коэффициента теплопроводности величина коэффициента температуропроводности влияет как на величину пироотклика, так и на его форму. Крутизна «завала», наблюдаемого в конце полупериода пироотклика, зависит также и от коэффициента теплопроводности металлической подложки, на которую помещен танталат лития (рис.1.10, *b*).

1.4. Анализ существующих работ по нелинейным температурным волнам

На возникновение нелинейных температурных волн в *n*-гексане при измерении теплопроводности $k(T)$ и теплоёмкости вблизи критической точки $\rho C_p(T)$ впервые было обращено внимание в работе Филиппова и соавторов [64]. Авторы исходили из убеждения, что нелинейные явления сопровождаются распространением звуковых, электромагнитных и других волн в конденсированных средах. Для генерации температурных волн был использован метод периодического нагрева в стационарном режиме, который позволяет детектировать амплитуду и фазу колебаний температуры зонда, нагреваемого переменным током частоты ω в исследуемой среде. В качестве зонда авторы могли использовать фольгу (жидкость зондируется плоскими температурными волнами) или проволоку (жидкость зондируется цилиндрическими температурными волнами). Обычно этот метод применяется в режиме линейных температурных волн, когда зависимость теплофизических свойств от температуры не проявляется. Однако в окрестности критической точки величины $\rho(T)$, $\rho C_p(T)$ и $k(T)$ являются температурно-зависящими и это приводит к генерации нелинейных гармоник. Авторами было выполнено измерение сигнала на второй и третьей гармониках температурных волн. Для интерпретации полученных результатов они исходили из нелинейного уравнения теплопроводности, где учтены температурные зависимости величин $k(T)$ и $\rho C_p(T)$. Ниже вкратце изложим эти результаты.

Для теоретического описания наблюдаемого явления необходимо решить уравнение теплопроводности

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T \right] = (\nabla k \cdot \nabla T) + k \nabla^2 T. \quad (1.4.1)$$

Отметим, что приближенный метод решения подобных уравнений ранее был разработан Филипповым Л.П. [21]. Суть метода заключается в том, что величину $T(x, y, z, t)$ представляют в виде суперпозиции постоянной со-

ставляющей $\bar{T}(x, y, z)$ и периодической части $\tilde{T}(x, y, z, t/\tau)$ с периодом τ и при выполнении условия $\int_0^\tau \tilde{T}(t) dt = 0$, т.е. в виде

$$T(t, x, y, z) = \bar{T}(x, y, z) + \tilde{T}(x, y, z, t/\tau). \quad (1.4.2)$$

Далее авторы, разлагая теплофизические величины в виде ряда по степеням величины $\tilde{T}(x, y, z, t/\tau)/\bar{T}$, для получения решения в линейном приближении в (1.4.1) все коэффициенты принимают постоянными, а $\nu = 0$. Для случая зонд-фольга в линейном приближении получена затухающая тепловая волна вида

$$\tilde{T}^0 = \Theta_1 \exp(-\gamma_0 x) \cos(2\omega t - \gamma_0 x - \varphi_0); \quad \gamma_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\chi}}; \quad \chi = \frac{k}{\rho C_p}. \quad (1.4.3)$$

Для рассматриваемого случая уравнение теплового баланса

$$\vec{W} = \left\{ c'_p m' \frac{\partial T}{\partial t} - sk |\nabla T| \right\}_{x=0}$$

выполняет роль граничного условия, где c'_p m' - удельная теплоемкость и масса, а s - боковая поверхность зонда. Отметим, что нагрев образца проводился переменным током вида $I = I_0 \cos(\omega t)$, для которого количество тепла, передаваемого в образец, определяется выражением $Q = 0.5 Q_0 (1 + \cos(2\omega t))$.

Авторами для второй гармоники сигнала было получено выражение

$$\begin{aligned} \tilde{T}^1 = & \frac{\Theta_0^2}{2} \alpha_\rho \exp(-\gamma_0 x) \cos(4\omega t - \gamma_0 x - 2\varphi_0) - \frac{\Theta_0^2}{2\sqrt{2}} [\alpha_c - \alpha_k - 2\alpha_\rho] \times \\ & \times \exp(-\sqrt{2}\gamma_0 x) \cos(4\omega t - \sqrt{2}\gamma_0 x - 2\varphi_0) + \frac{\Theta_0^2}{4} [\alpha_c - 2\alpha_k + \alpha_\rho] \times \\ & \times \exp(-2\gamma_0 x) \cos(4\omega t - 2\gamma_0 x - 2\varphi_0), \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

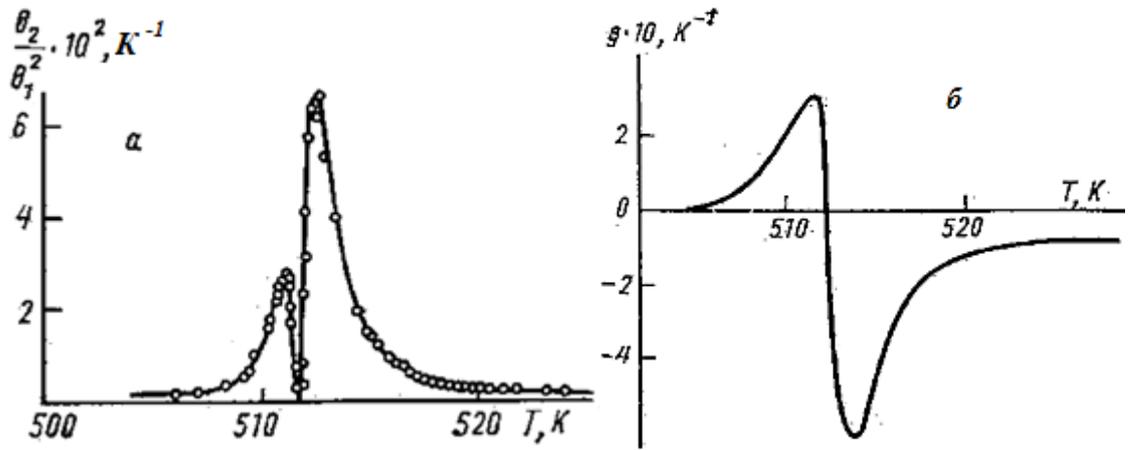


Рис. 1.11. Экспериментальные значения отношения амплитуды второй гармоники Θ_2 температурных колебаний к квадрату первой Θ_1^2 (а) и расчётные значения функции g ($\Theta_2/\Theta_1^2 \sim |g|$) (б).

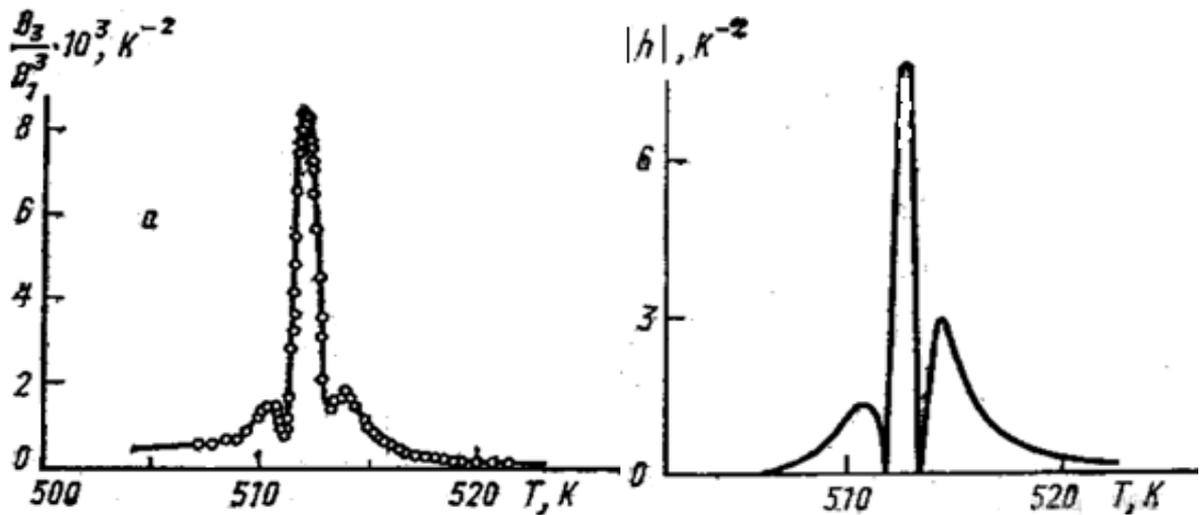


Рис. 1.12. Экспериментальные значения отношения амплитуды третьей гармоники Θ_3 температурных колебаний к кубу первой Θ_1^3 (а) и рассчитанные значения функции $|h| = \left| \frac{10}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 \rho C_p}{\partial T^2} \right)_p \right|$ ($\Theta_3/\Theta_1^3 \sim |h|$) (б).

где $\alpha_c = \frac{1}{\rho C_p} \left(\frac{\partial \rho C_p}{\partial T} \right)_p = \delta$, $\alpha_k = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)_p = \delta_2$, $\alpha_\rho = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ - термические коэффициенты соответствующих величин. Оказалось, что выражение (1.4.4) можно

переписать в виде

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1^2} = \frac{0.104|g|}{\sqrt{1 + \sqrt{2}\xi + \xi^2}}, \quad (1.4.5.)$$

где $|g| = \alpha_c + 0.41\alpha_\rho + 1.41\alpha_k$. $\xi = C'_p \rho' d \sqrt{\omega} / \sqrt{k C_p \rho}$. Здесь d - толщина зонда-фольги, а C'_p и ρ' - ее теплоемкость и плотность. В упомянутой работе авторы, реализуя метод, предложенный в [65], получили явный вид температурной зависимости теплофизических величин, который прекрасно совпадал с результатами эксперимента по температурной зависимости этих величин вблизи критической точки н-гексана. Используя эти выражения, авторы вычислили все производные, входящие в выражения для g . Эти результаты показаны на рис. 1.11 а. На рис. 1.12 а представлен модуль функции

$$h = \frac{10}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 \rho C_p}{\partial T^2} \right)_p.$$

Сопоставляя рис. 1.11 (а и б) с рис. 1.12 (а, б), авторы

пришли к заключению о полном качественном совпадении поведения измеренных величин Θ_2 / Θ_1^2 и Θ_3 / Θ_1^3 в зависимости от температур с вычисленными значениями $\Theta_2 / \Theta_1^2 \sim |g|$ и $\Theta_3 / \Theta_1^3 \sim |h|$, где Θ_3 - амплитуда третьей гармоники этого сигнала.

Систематические и целенаправленные исследования особенностей генерации и распространения тепловых волн, в том числе нелинейных, выполнено в работах А.Л.Казакова и учеников [66-71]. Следует подчеркнуть, что эти работы имеют больше математический уклон и посвящены решению нелинейного уравнения теплопроводности для случая, когда температурная зависимость коэффициента теплопроводности имеет различные виды степенных зависимостей. В реальности они соответствуют конвективным и диффузионным процессам в среде, включая фильтрацию жидкостей и газов, движение грунтовых вод, математические модели роста и миграции популяций, химическую кинетику и т. д.

Недавно была опубликована работа Давидовича с соавторами [72,73], где теоретически рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности, в котором учтено излучение по закону Стефана-Больцмана. Авторами, в частности, исследована задача о распространении тепловой волны в среде. По существу, написано новое нелинейное уравнение теплопроводности, которое описывает распределение температуры внутри Земли и Солнца с учетом как обычной, так и лучистой теплопроводностей.

Выводы по литературному обзору

Из достаточно краткого обзора литературы следует, что к настоящему времени отсутствуют:

- 1) теоретические исследования по вкладу тепловой нелинейности в установление стационарного температурного поля в диэлектрических пленках;
- 2) теория генерации линейных и нелинейных тепловых волн в пленках диэлектриков посредством гармонически модулированного пучка ионов.

Решению этих задач и посвящена настоящая диссертационная работа.

ГЛАВА II. ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ФОРМИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ТОНКИХ ПЛЕНОК ДИЭЛЕКТРИКОВ В ПОЛЕ ПУЧКА ИОНОВ

Введение

Прежде всего, заметим, что перенос тепла из области с высокой температурой в область с низкой температурой осуществляется по диффузионному закону. Если учесть, что длина пробега заряженных ионов в диэлектриках составляет порядка $R \sim 10^{-8} \text{ м}$, тогда время тепловой релаксации, т.е. время перехода из нестационарного состояния в стационарное, для этого слоя $\tau_{\chi} = L^2 / \chi$ составляет $\sim 10^{-9} - 10^{-12} \text{ с}$. Для твердых диэлектриков с толщиной $L \sim 1 \text{ мм}$ это время $\sim 0.1 \text{ с}$. Следовательно, при облучении пучком заряженных частиц с длительностью $\tau \gg \tau_{\chi}$ система достаточно быстро переходит в локально-равновесное состояние и возникает необходимость установления основных параметров этого состояния, включая пространственное распределение температуры. Особенностью этой задачи является то, что при этом чрезвычайно важным становится учет температурной зависимости коэффициента теплопроводности $\kappa(T)$ системы. Между тем, известно, что при этом и одновременно функцией температуры становятся степень черноты $A(T)$ материала и его коэффициент теплоотдачи $h(T)$. Целью настоящей главы диссертации является подробное теоретическое исследование влияния $\kappa(T)$, $A(T)$ и $h(T)$ на формирование стационарного поля температуры в диэлектриках [74-84].

2.1. Влияние температурной зависимости теплофизических величин и степени черноты на температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов

Целью настоящего параграфа работы является теоретическое исследование влияния $\kappa(T)$ образца на стационарное температурное поле диэлектриков при её непрерывном облучении пучком ионов. В зависимости от

условий облучения образца ионами и его положения в пространстве данную задачу можно разделить на следующие четыре подзадачи:

- 1) облучение образца проводится в воздухе;
- 2) образец прикреплен на массивной подложке, нижняя поверхность которой погружена в воду, а облучение проводится в вакууме;
- 3) образец находится на подложке и облучение проводится в воздухе;
- 4) образец находится на подложке и облучение проводится в вакууме.

Нетрудно заметить, что переход из третьего условия к четвертому осуществляется тривиально, а именно пренебрежением конвективного охлаждения образца, характерного для воздушной среды.

Случай 1. Предположим, что поток ионов перпендикулярно падает на поверхность пластинки диэлектрика толщиной L , которая находится в воздухе. Ввиду того, что длина пробега ионов в образце $R \ll L$, тогда возникает необходимость искусственного разделения образца на две части и имеет место следующая система нелинейных уравнений теплопроводности [3]:

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa(T_1) \frac{dT_1'}{dx} \right] = -\frac{EJ}{RZe} \Theta(R-x), \quad 0 < x < R, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa(T_2) \frac{dT_2'}{dx} \right] = 0, \quad R < x < L, \quad (2.1.2)$$

где J, Z, E - плотность тока пучка, заряд иона в единицах заряда электрона и начальная энергия ионов, соответственно; T_i' соответствуют приращению температуры в разных частях образца, $\Theta(R-x)$ - единичная функция Хэвисайда.

Видно, что в уравнения (2.1.1)-(2.1.2) входят температурно-зависящие величины $\kappa(T_1(x))$ и $\kappa(T_2(x))$. Будем считать, что температурная зависимость этих величин подчиняются следующим закономерностям:

$$\kappa(T_1') = \kappa^{(0)}(T_0)[1 + \delta_2 T_1'(x)], \quad \kappa(T_2') = \kappa^{(0)}(T_0)[1 + \delta_2 T_2'(x)], \quad \delta_2 = \frac{1}{\kappa^{(0)}(T_0)} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \quad \text{является}$$

термическим коэффициентом теплопроводности образца, $\kappa^{(0)}(T_0)$ - начальное

значение теплопроводности, T_0 - начальная температура образца. Подставляя эти выражения в (2.1.1)-(2.1.2), будем иметь

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_1'}{dx} + \frac{\delta_2}{2} \frac{d(T_1')^2}{dx} \right] = - \frac{EJ}{RZe\kappa_1^{(0)}(T_0)}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_2'(x)}{dx} + \frac{\delta_2}{2} \frac{d(T_2')^2}{dx} \right] = 0, \quad R \leq x \leq L. \quad (2.1.4)$$

Для решения системы двух дифференциальных уравнений необходимо иметь четыре граничных условия, которые следуют из условия непрерывности температур и потоков на границах между слоями. Другие два условия следуют из наличия теплового излучения и конвективного охлаждения на торцах образца. Тогда эти условия можно записать в следующем виде:

$$T_1'(R) = T_2'(R) = W_0, \quad \kappa^{(0)}(1 + \delta_2 T_1') \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=0} = hU_0 + A\sigma(U^4 - T_0^4) \Big|_{x=0},$$

$$\kappa(T_1) \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa(T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad -\kappa^{(0)}(1 + \delta_2 T_2') \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=L} = h\Theta_0 + A\sigma(U_1^4 - T_0^4) \Big|_{x=L}.$$

Здесь $U = U_0 + T_0$, $U_1 = \Theta_0 + T_0$ - установившиеся температуры облучаемой и тыловой поверхностей образца соответственно, а U_0 и Θ_0 - их приращения; W_0 - приращение температуры между границей облучаемым и необлучаемым слоями образца. Величины h и A также являются температурно-зависящими [85-87] и эту зависимость примем в виде

$$A = A^{(0)}(T_0)[1 + \delta_3 U_0], \quad h = h^{(0)}(T_0)[1 + \delta_4 U_0], \quad \text{где} \quad \delta_3 = \frac{1}{A^{(0)}(T_0)} \frac{\partial A}{\partial T}, \quad \delta_4 = \frac{1}{h^{(0)}(T_0)} \frac{\partial h}{\partial T} -$$

являются термическими коэффициентами этих величин.

Решая систему (2.1.1)-(2.1.2) для безразмерных функций $g_1(x) = \delta_2 T_1'(x)$, $g_2(x) = \delta_2 T_2'(x)$ получим следующие выражения, удовлетворяющие условию непрерывности температур в образце:

$$g_1(x) = -1 + \left\{ 1 + \delta_2 \left[\left(1 - \frac{x}{R} \right) (2U_0(1 + 0.5\delta_2 U_0) + \frac{EJx}{Zek^{(0)}}) + 2W_0(1 + 0.5\delta_2 W_0) \frac{x}{R} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.1.5)$$

$$g_2(x) = -1 + \left\{ 1 + \frac{2\delta_2}{L-R} [\Theta_0(1 + 0.5\delta_2 \Theta_0)(x-R) + W_0(1 + 0.5\delta_2 W_0)(L-x)] \right\}^{1/2}. \quad (2.1.6)$$

Условие непрерывности потоков тепла на границе между облучаемым

и необлученным слоями, а также наличие теплового излучения и конвективного охлаждения на торцах образца позволило получить следующую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения величин U_0 , W_0 , Θ_0 :

$$\delta_2(U_0^2 - W_0^2) + 2(U_0 - W_0) - \frac{EJR}{Zek^{(0)}} + \frac{2h^{(0)}R}{k^{(0)}}U_0(1 + \delta_4U_0) + \frac{2A^{(0)}R\sigma}{k^{(0)}}(1 + \delta_3U_0)(U^4 - T_0^4) = 0, \quad (2.1.7)$$

$$\delta_2U_0^2 + 2U_0 - (\delta_2W_0^2 + 2W_0)\left(1 + \frac{R}{L-R}\right) + \left(\frac{R}{L-R}\right)(\delta_2\Theta_0^2 + 2\Theta_0) + \frac{EJR}{Zek^{(0)}} = 0, \quad (2.1.8)$$

$$\delta_2(\Theta_0^2 - W_0^2) + 2(\Theta_0 - W_0) + \frac{2(L-R)A^{(0)}\sigma}{k^{(0)}}(1 + \delta_3\Theta_0)[(T_0 + \Theta_0)^4 - T_0^4] + \frac{2h^{(0)}(L-R)}{k^{(0)}}(1 + \delta_4\Theta_0)\Theta_0 = 0. \quad (2.1.9)$$

Система уравнений (2.1.7)-(2.1.9) совместно с выражениями (2.1.5)-(2.1.6) представляет собой решение сформулированной задачи и позволяет исследовать влияние температурной зависимости коэффициента теплопроводности на формирование температурного поля в твердых диэлектриках. Путем численного решения системы (2.1.7)-(2.1.9) можно определить зависимости величин U_0 , W_0 и Θ_0 от параметров падающего потока ионов J , Z , E и R . Для этого необходимо знать численные значения величин $k^{(0)}$, $h^{(0)}$, а также их термические коэффициенты. В табл. 1 протабулированы значения этих величин для некоторых систем (ввиду отсутствия надежных данных по $h^{(0)}$ и δ_4 для Al_2O_3 , SiO_2 , TiO_2 и ZrO_2 нами приняты значения для MgO). Используя эти данные, мы выполнили численное решение системы (2.1.7)-(2.1.9) для MgO , результаты которого показаны на рис. 2.1. Очевидно, что в формирование поля температур существенную роль играют не только значения теплофизических величин, но и знаки их термических коэффициентов. Так, при $\delta_2 < 0$ происходит уменьшение величины $\kappa(T)$ и перенос тепла от облучаемой поверхности образца к ее тыловой стороне. В результате этого происходит рост (возможно незначительный) температуры облучаемой поверхности образца U_0 (кривая 2) по сравнению со случаем $\delta_2 = 0$ (кривая 1). При $\delta_3 < 0$ происходит существенное уменьшение теплового излучения образца, что и приво-

Таблица 1

Численные (интегральные) значения величин $k^{(0)}$, $h^{(0)}$, $A^{(0)}$ и их термических коэффициентов для некоторых диэлектриков и металлов (в скобках указан диапазон температур определения этих величин)

Вещество	$k^{(0)}$, Вт/м·К	$\delta_2 \cdot 10^3, \text{K}^{-1}$ (диапазон температур)	$A^{(0)}$	$\delta_3 \cdot 10^3, \text{K}^{-1}$ (диапазон температур)	$h^{(0)}$, Вт/м ² ·К	$\delta_4 \cdot 10^3, \text{K}^{-1}$ (диапазон температур)
MgO	58 [86]	-0.92 (300-1100)К	0.72 [86]	-0.59 (300-1100) К	8.40 [88]	7.14 (300-1100)К
Al ₂ O ₃ (сапфир)	40 [90]	-0.86 (300-1000)К	0.79 [86]	-0.411 (400-1600) К	8.40 [88]	7.14 (300-1100)К
SiO ₂	13 [85]	-0.59 (400-1300)К	0.72 [86]	-0.55 (573-1173) К	8.40 [88]	7.14 (300-1100)К
TiO ₂	18,85 [88]	-0.56 (400-1500)К	0.82 [86]	0.108 (400-1300) К	8.40 [88]	7.14 (300-1100)К
ZrO ₂	1.7 [85]	0.16 (400-1500)К	0.8 [86]	-0.63 (300 – 100)К	8.40 [88]	7.14 (300-1100)К
ПММА	0,163 [85]	0,04 (300-1100)К	0.5 [86]	-3,0 (300-1100) К	8.40 [85]	7.14 (300-1100)К
ПЭНП	0,3 [86]	-1.85 (300-1000)К	0.87 [88]	0,07 (400-1600) К	8.40 [85]	7.14 (300-1100)К

дит к соответствующему возрастанию температуры обеих поверхностей (кривая 3). Существенный рост конвективного переноса тепла из поверхности образца в воздушную среду соответствует значению $\delta_4 > 0$ и это приводит к существенному охлаждению этих поверхностей (кривая 4). Результирующая зависимость $U_0(I)$ формируется в конкуренции всех этих трех факторов (кривая 5).

Мы также получили численное решение системы (2.1.7)-(2.1.9) для MgO и двух спеченных оксидов (Al_2O_3 , TiO_2), конечный результат которого

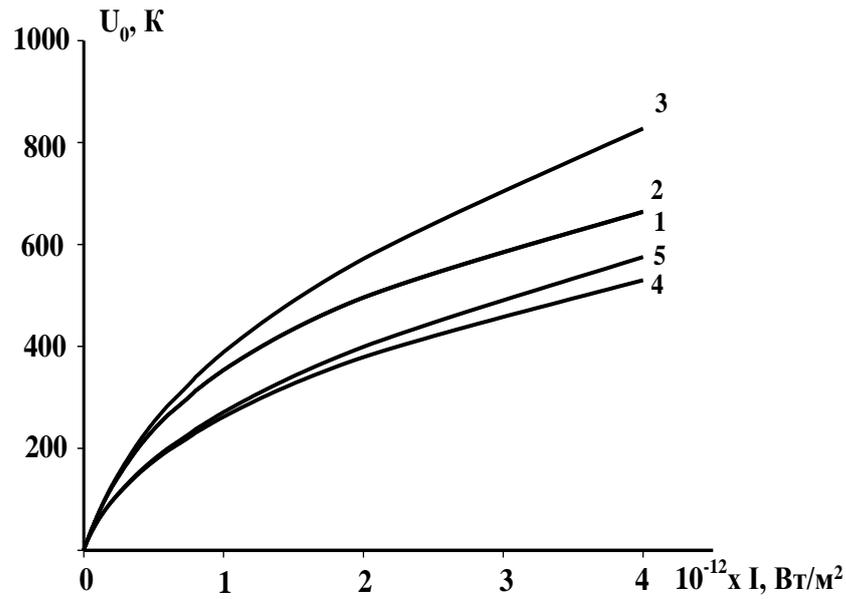


Рис.2.1. Зависимость приращения температуры облучаемой поверхности оксида магния от величины $I = \varepsilon J / RZe$ при: $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 0$ (кривая 1), $\delta_2 \neq 0$, $\delta_3 = 0, \delta_4 = 0$ (кривая 2), $\delta_2 \neq 0, \delta_3 \neq 0, \delta_4 = 0$ (кривая 3), $\delta_2 \neq 0, \delta_4 \neq 0, \delta_3 = 0$ (кривая 4), $\delta_2 = -0,92 \times 10^{-3} K^{-1}$, $\delta_3 = -0,59 \times 10^{-3} K^{-1}$, $\delta_4 = 7,14 \times 10^{-3} K^{-1}$ (кривая 5).

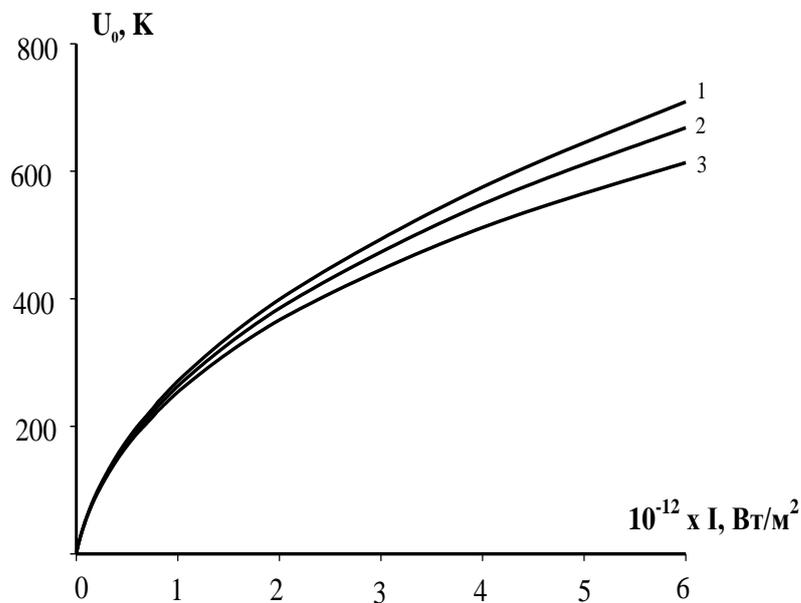


Рис.2.2. Зависимость приращения температуры облучаемой поверхности MgO (кривая 1), Al_2O_3 (кривая 2) и TiO_2 (кривая 3) от величины $I = \varepsilon J / RZe$.

Численные значения параметров приведены в табл. 1.

показан на рис. 2.2. Отметим, что для других диэлектриков нам не удалось обнаружить достоверные значения величин $h^{(0)}$ и δ_4 , поэтому воспользовались

Значениями этих параметров для MgO . Очевидно, что температурное поле в образцах формируется в конкуренции всех выше подчеркнутых факторов. Из-за того, что длина пробега ионов весьма мала ($\sim 2 \times 10^{-8}$ м), отличие величин U_0 и W_0 также составляет значительно меньше одного градуса и становится неразличимым. Различие между U_0 и Θ_0 при малых значениях интенсивности также весьма незначительно, но с ростом интенсивности падающего потока эта разность несколько возрастает и составляет несколько градусов.

Случай 2. Предполагается, что образец сильно прикреплен на массивной подложке, нижняя поверхность которой погружена в воду [4] (термостат). Облучения поверхности образца проводится в вакууме. Для этого случая систему нелинейных уравнений теплопроводности для образца и подложки можно написать в виде

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa_1(T_1') \frac{dT_1'}{dx} \right] = - \frac{EJ}{RZe} \Theta(R-x), \quad 0 < x < R, \quad (2.1.10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa_1(T_2') \frac{dT_2'}{dx} \right] = 0, \quad R < x < L_1, \quad (2.1.11)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa_2(T_3') \frac{dT_3'}{dx} \right] = 0, \quad L_1 < x < L_1 + L_2. \quad (2.1.12)$$

Здесь $k_2(T_2)$, L_2 - коэффициент теплопроводности и толщина подложки. Введём следующие значения приращения температуры на поверхностях образца, подложки, включая и поверхности, обеспечивающие контакты этих частей: $T_1'(0) = U_0$, $T_1'(R) = T_2'(R) = W_0$, $T_2'(L_1) = T_3'(L_1) = \Theta_0$, $T_3'(L_1 + L_2) = 0$. Условия непрерывности потоков тепла можно написать в виде

$$\kappa_1 \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=0} = A^{(0)} \sigma (U^4 - T_0^4) \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial T_3'}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2} = 0,$$

$$\kappa_1^{(0)}(T_1) \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_1^{(0)}(T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad \kappa_1^{(0)}(T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \kappa_2^{(0)}(T_3) \frac{\partial T_3'}{\partial x} \Big|_{x=L_1}.$$

Решение системы (2.1.10)-(2.1.12), удовлетворяющее этим граничным условиям, имеет следующий вид:

$$g_1(x) = -1 + \{(1 + \delta_{2(1)} U_0)^2 + \delta_{2(1)} [2(W_0 - U_0) + \delta_{2(1)} (W_0^2 - U_0^2)] \frac{x}{R} - \frac{\delta_{2(1)} E J x}{Z e \kappa_1^{(0)}} \left(\frac{x}{R} - 1\right)\}^{1/2}, \quad (2.1.13)$$

$$g_2(x) = -1 + \{(1 + \delta_{2(1)} W_0)^2 + \delta_{2(1)} [2(\Theta_0 - W_0) + \delta_{2(1)} (\Theta_0^2 - W_0^2)] \frac{x - R}{L_1 - R}\}^{1/2}, \quad (2.1.14)$$

$$g_3(x) = -1 + \{1 + \delta_{2(2)} \Theta_0 (2 + \delta_{2(1)} \Theta_0) \frac{L_1 + L_2 - x}{L_2}\}^{1/2}. \quad (2.1.15)$$

Для определения величин U_0 , W_0 , Θ_0 из условия непрерывности потоков тепла на границах между различными частями системы образец-подложка получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\delta_2 (U_0^2 - W_0^2) + 2(U_0 - W_0) + \frac{E J R}{Z e k_1^{(0)}} - \frac{A^{(0)} R \sigma}{k_1^{(0)}} (1 + \delta_3 U_0) (U_0^4 - T_0^4) = 0, \quad (2.1.16)$$

$$\delta_2 U_0^2 + 2U_0 - (\delta_2 W_0^2 + 2W_0) \left(1 + \frac{R}{L - R}\right) + \left(\frac{R}{L - R}\right) (\delta_2 \Theta_0^2 + 2\Theta_0) + \frac{E J R}{Z e k_1^{(0)}} = 0, \quad (2.1.17)$$

$$\Theta_0^2 (\delta_{2(1)} + a \delta_{2(2)}) + 2\Theta_0 (1 + a) - \delta_{2(1)} W_0^2 - 2W_0 = 0, \quad (2.1.18)$$

где $a = \frac{\kappa_2^{(0)} (L_1 - R)}{\kappa_1^{(0)} L_2}$. Выражения (2.1.13)-(2.1.15) совместно с системой нелинейных алгебраических уравнений (2.1.16)-(2.1.18) и представляет собой решение сформулированной задачи.

Очевидно, что и в этом случае для определения зависимости величин U_0 , W_0 , Θ_0 от параметров падающего потока ионов необходимо численное решение системы (2.1.16)-(2.1.18). Это позволит, в частности, определить и влияние подложки на температуру облучаемой поверхности образца. На рис. 2.3 показаны результаты такого расчета, когда образцом является оксид магния, а подложкой- кварцевое стекло (кривая 1), оксид титана (кривая 2), нержавеющая сталь (кривая 3). Приняты следующие значения толщин образца

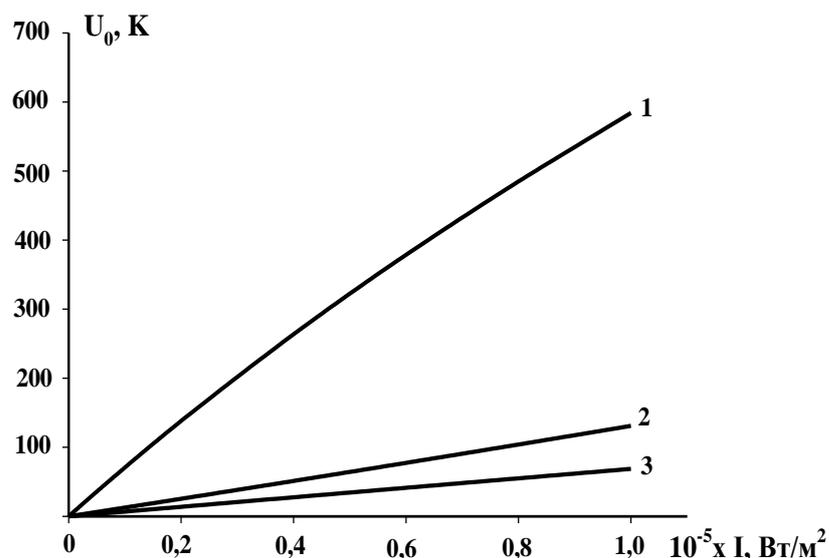


Рис. 2.3. Зависимость приращения температуры облучаемой поверхности MgO от величины $I = \varepsilon J / RZe$ на подложках из: 1-кварцевого стекла; 2- TiO_2 ; 3-нержавеющей стали.

и подложки: $R = 2 \cdot 10^{-8}$ м, $L_1 = 0.00$ и $L_2 = 0.01$ м. Из рисунка отчетливо наблюдается уменьшение величины U_0 с ростом теплопроводности подложки, что и следовало ожидать. Поскольку с ростом теплопроводности подложки возрастает количество теплоты, переносимой из образца в наружную среду.

Таким образом, в рамках настоящего раздела работы нами теоретически исследовано влияние температурной зависимости коэффициента теплопроводности на формирование температурного поля диэлектриков при облучении пучком ионов. Для двух рассмотренных случаев получены аналитические выражения для температурного поля диэлектрического образца, а также система нелинейных алгебраических уравнений для опорных температур. Путем численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений получены зависимости температуры облучаемой поверхности образца от параметров падающего пучка ионов. Установлено, что эта зависимость не явля-

ется линейной. Показано, что с ростом теплопроводности подложки существенно уменьшается нагрев образца, включая и облучаемую поверхность.

2.2. Влияние температурной зависимости теплофизических величин и степени черноты подложки на температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов в воздухе и вакууме

В предыдущем параграфе нами исследовались особенности формирования стационарного поля температуры твердых диэлектриков в поле сильноточечного ионного пучка [74] с учетом температурной зависимости теплофизических параметров образца. Целью настоящего параграфа работы является теоретическое исследование влияния ТН подложки на ПТ для случая, когда облучение образца на массивной подложке происходит на воздухе или в вакууме. Заметим, что подобные нелинейные фототепловые задачи для твердотельных образцов в поле мощного лазерного излучения решены в фототермоакустике (см., например, [91]).

Рассмотрим случай, когда облучение образца проводится в воздухе, поскольку переход к случаю вакуума совершается тривиальным образом. Тогда для описания поля температуры справедлива система нелинейных уравнений теплопроводности (2.1.10)-(2.1.12). Однако при этом существенно будут отличаться граничные условия на границе подложка-воздух. Эти условия можно записать в виде

$$T_1'(0) = U_0, \quad T_1'(R) = T_2'(R) = W_0, \quad T_2'(L_1) = T_3'(L_1) = \Theta_0, \quad T_3'(L_1 + L_2) = U_1.$$

$$\kappa_1^{(0)} (1 + \delta_{2(1)} T_1') \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 U_0 + A_1 \sigma (U^4 - T_0^4) \Big|_{x=0}, \quad \kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_1(T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=R}$$

$$\kappa_1(T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=L} = \kappa_2(T_3) \frac{\partial T_3'}{\partial x} \Big|_{x=L}, \quad -\kappa_2^{(0)} (1 + \delta_{2(2)} T_3') \frac{\partial T_3'}{\partial x} \Big|_{x=L+L_2} = h_2 \Theta_0 + A_2 \sigma (U_1^4 - T_0^4) \Big|_{x=L}.$$

Решая систему (2.1.10)-(2.1.12) для функций $g_1(x) = \delta_{2(1)} T_1'(x)$, $g_2(x) = \delta_{2(1)} T_2'(x)$, $g_3(x) = \delta_{2(2)} T_3'(x)$, получим следующие выражения, удовлетворяющие условию непрерывности температур в образце:

$$g_1(x) = -1 + \left\{1 + \delta_{2(1)} \left[\left(1 - \frac{x}{R}\right) (2U_0(1 + 0.5\delta_{2(1)}U_0) + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}}) + 2W_0(1 + 0.5\delta_{2(1)}W_0) \frac{x}{R} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.2.1)$$

$$g_2(x) = -1 + \left\{1 + \frac{2\delta_{2(1)}}{L_1 - R} [\Theta_0(1 + 0.5\delta_{2(1)}\Theta_0)(x - R) + W_0(1 + 0.5\delta_{2(1)}W_0)(L_1 - x)] \right\}^{1/2}, \quad (2.2.2)$$

$$g_3(x) = -1 + \left\{1 + 2\delta_{2(2)}\Theta_0(1 + 0.5\delta_{2(2)}\Theta_0) \frac{L_1 + L_2 - x}{L_2} + 2\delta_{2(2)}\Theta_1(1 + 0.5\delta_{2(2)}\Theta_1) \frac{x - L_1}{L_2} \right\}^{1/2}. \quad (2.2.3)$$

Для определения величин U_0 , W_0 , Θ_0 , Θ_1 из условия непрерывности потоков тепла на границах облученный - необлученный слой образца, необлученный слой образца - подложка, а также наличия теплового излучения и конвективного охлаждения на торцах системы образец-подложка, получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\delta_2(U_0^2 - W_0^2) + 2(U_0 - W_0) - \frac{EJR}{Zek^{(0)}} + \frac{2h^{(0)}R}{k^{(0)}}U_0(1 + \delta_4U_0) + \frac{2A^{(0)}R\sigma}{k^{(0)}}(1 + \delta_3U_0)(U^4 - T_0^4) = 0, \quad (2.2.4)$$

$$\delta_2U_0^2 + 2U_0 - (\delta_2W_0^2 + 2W_0)\left(1 + \frac{R}{L - R}\right) + \left(\frac{R}{L - R}\right)(\delta_2\Theta_0^2 + 2\Theta_0) + \frac{EJR}{Zek^{(0)}} = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\Theta_0^2(a\delta_{2(1)} + \delta_{2(2)}) + 2\Theta_0(a + 1) - W_0^2a\delta_{2(1)} - 2W_0a - \delta_{2(2)}\Theta_1^2 - 2\Theta_1 = 0, \quad (2.2.6)$$

$$\delta_{2(2)}(\Theta_0^2 - \Theta_1^2) + 2(\Theta_0 - \Theta_1) - \frac{2h_2^{(0)}L_2\Theta_1(1 + \delta_{4(1)}\Theta_1)}{k_2^{(0)}} - \frac{2A_2^{(0)}L_2(1 + \delta_{3(2)}\Theta_1)\sigma}{k_2^{(0)}}[(\Theta_1 + T_0)^4 - T_0^4] = 0, \quad (2.2.7)$$

где $a = [k_1^{(0)}L_2 / k_2^{(0)}(L_1 - R)]$.

Выражения (2.2.1)-(2.2.3) совместно с системой уравнений (2.2.4)-(2.2.7) представляют собой решение выше сформулированной задачи. В частности, это позволяет определить зависимости величин U_0 , W_0 , Θ_0 и Θ_1 от параметров падающего пучка потока ионов, для чего необходимо иметь численные значения величин $k_i^{(0)}$, $h_i^{(0)}$, $A_i^{(0)}$, а также их термических коэффициентов. В табл. 1 приведены эти данные для некоторых веществ. В качестве образца мы выбрали оксид магния (MgO). Результаты такого расчета для случая трех различных подложек показаны на рис. 2.4. – 2.6.

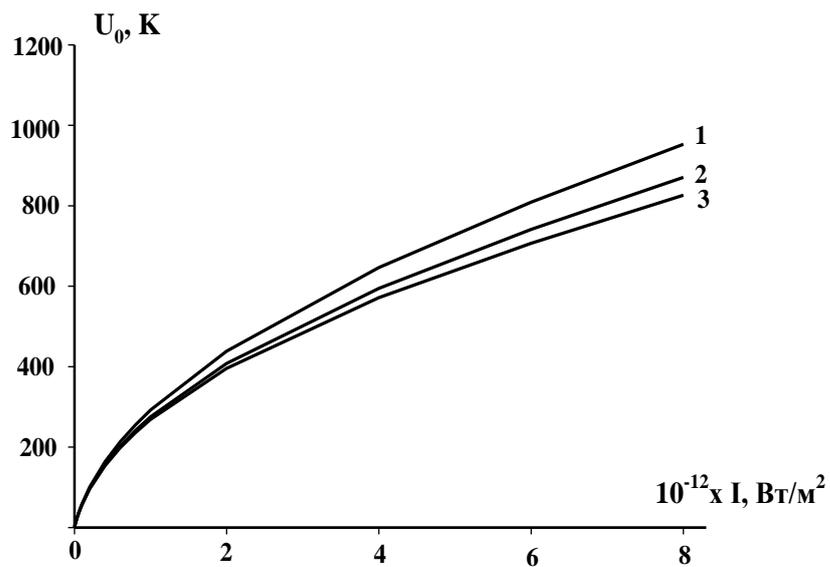


Рис. 2.4. Зависимость приращения температуры облучаемой поверхности MgO от величины $I = \varepsilon J / RZe$ на подложке из: 1- ZrO_2 ; 2- SiO_2 ; 3-сапфир Al_2O_3 .

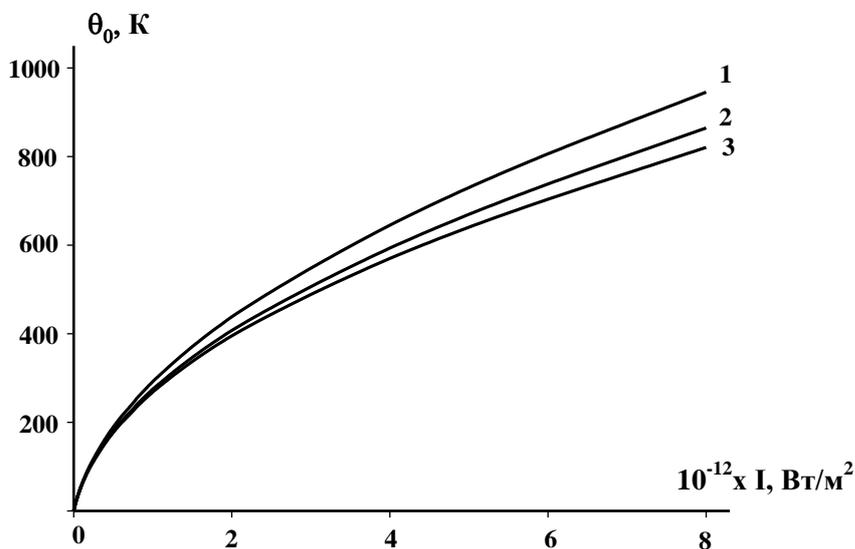


Рис. 2.5. Зависимость приращения температуры поверхности MgO от величины $I = \varepsilon J / RZe$ на подложке из: 1- ZrO_2 ; 2- SiO_2 ; 3-сапфир Al_2O_3 .

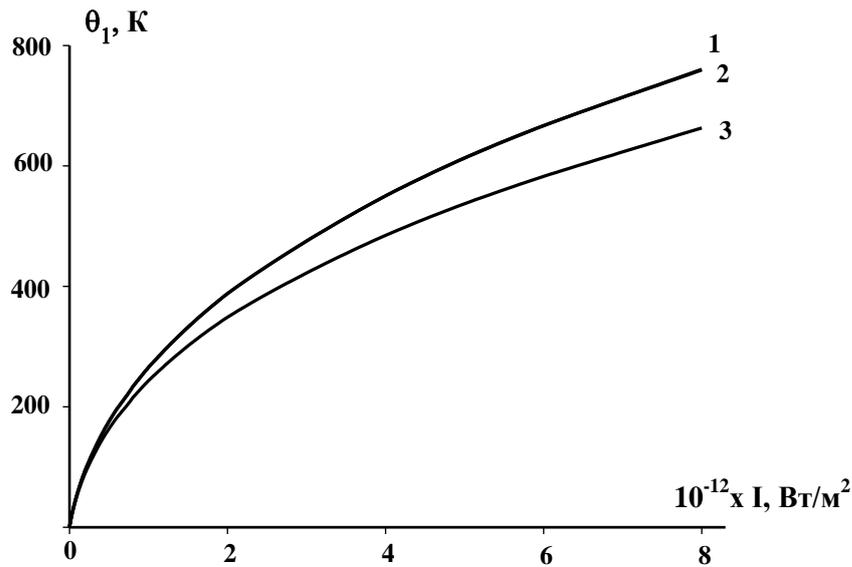


Рис.2.6. Зависимость приращения температуры тыловой поверхности

подложки от величины $I = \varepsilon J / RZe$ на подложке из:

1-ZrO₂; 2-SiO₂; 3-сапфир Al₂O₃.

Прежде всего, следует подчеркнуть, что из-за малости длины пробега ионов ($\sim 2 \times 10^{-8}$ м) отличие величин U_0 и W_0 составляет значительно меньше одного градуса. Из рис. 2.4. и 2.5 видно, что с ростом теплопроводности подложки возрастает перенос тепла из образца на тыловую поверхность подложки, а затем посредством конвекции и излучения в наружную среду. Этим обусловлено и уменьшение температуры поверхности образца при переходе от подложки со сравнительно низким значением теплопроводности (кривая 1) к подложкам с более высоким значением $k_i^{(0)}$ (кривые 2 и 3). Рисунок 2.6 показывает, что формирование температуры поверхности подложки зависит не только от значений $k_i^{(0)}, h_i^{(0)}, A_i^{(0)}$, но и от величины и знака $\delta_{2(i)}, \delta_{3(i)}$ и $\delta_{4(i)}$. Так, например, из за того что для сапфира значение $\delta_2 = -0.86 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ (отрицательное) и значительно меньше, чем для SiO₂, то это приводит к тому, что кривые зависимостей $\Theta_1(I)$ для этих двух систем отличаются лишь на 1-2 градуса, то есть почти совпадают, хотя значения теплопроводности этих систем отличаются в три раза. Для оксида циркония из-за положительного значения $\delta_2 = 0.16 \cdot 10^{-3} K^{-1}$ существенно возрастает перенос тепла из облучаемой

поверхности образца (кривая 3) в тыловую поверхность подложки, которое затем передается в наружную среду. Этим обусловлено появление кривой 3 на рис. 2.6.

Мы также выполнили численное решение нелинейной системы уравнений (2.2.4)-(2.2.7) для полимерных плёнок из полиметилметакрилата (ПММА) и полиэтилена низкой плотности (ПЭНП) на подложках из диоксидов циркония ZrO_2 и кремния SiO_2 (кремнезёма). Результаты численного решения представлены на рис. 2.7-2.10., из которых следует, что отличие величин U_0 и W_0 составляет значительно меньше одного градуса и оно обусловлено малостью длины пробега ионов ($\sim 2 \times 10^{-8} м$). Нетрудно заметить, что уменьшение температуры облучаемой поверхности образца от подложки со (ZrO_2) к SiO_2 обусловлен возрастанием переноса тепла из образца на тыловую поверхность подложки, а затем посредством конвекции и излучения в наружную среду.

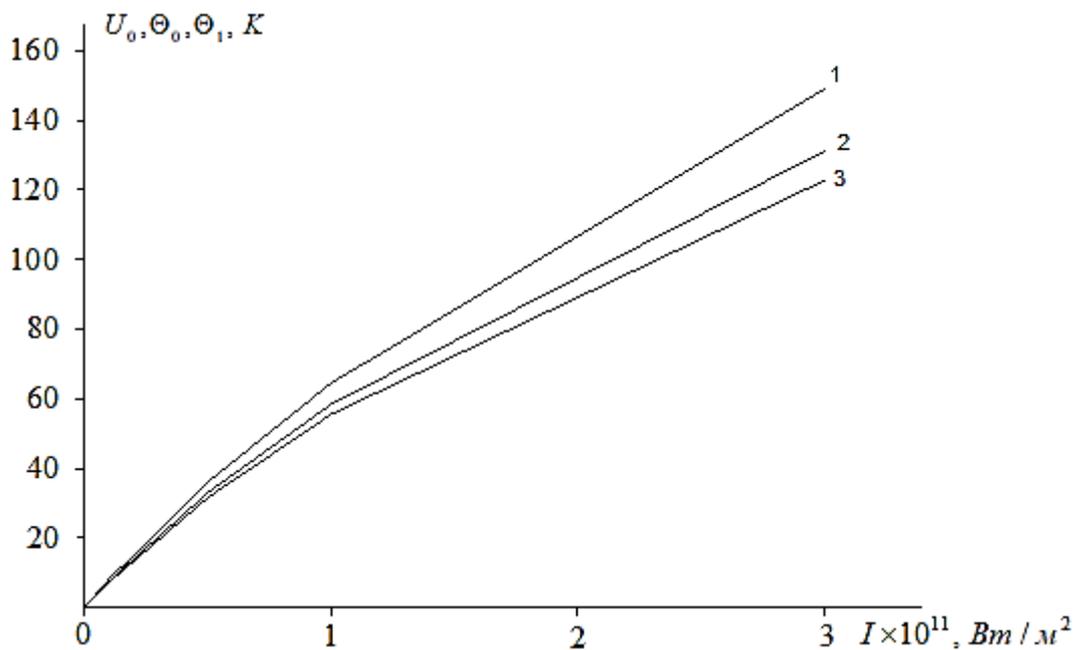


Рис. 2.7. Зависимости приращений температуры облучаемой стороны образца и тыловой стороны подложки от величины

$$I = \varepsilon J / RZe \text{ для системы ПММА-ZrO}_2.$$

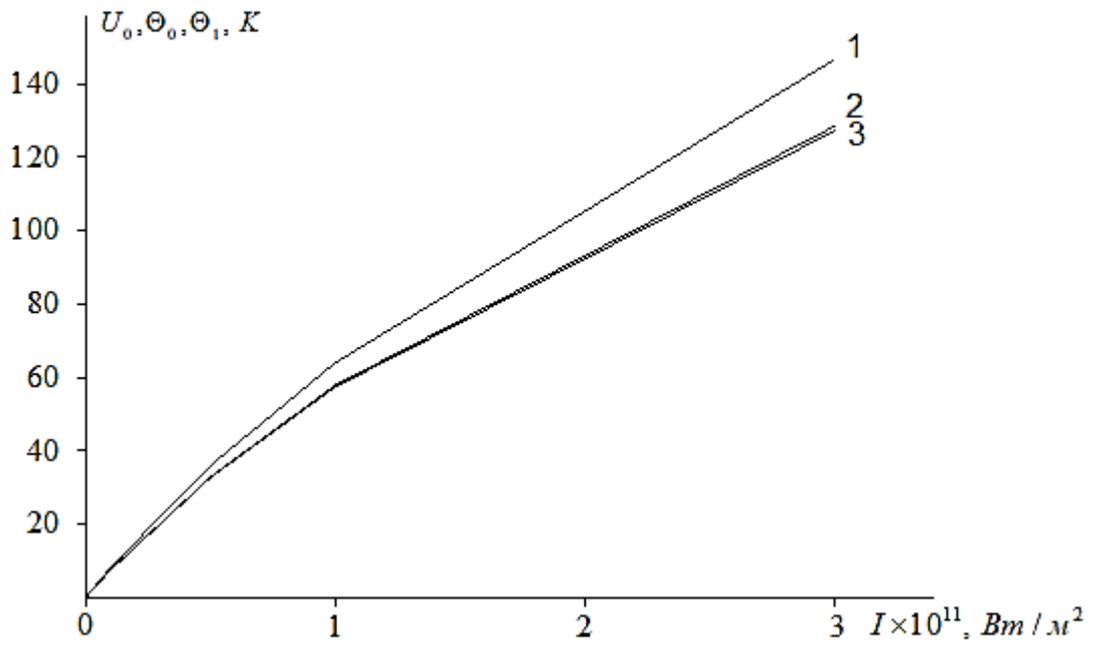


Рис. 2.8. Зависимости приращений температуры облучаемой стороны образца и тыловой стороны подложки от величины

$$I = \varepsilon J / RZe \text{ для системы ПММА-SiO}_2.$$

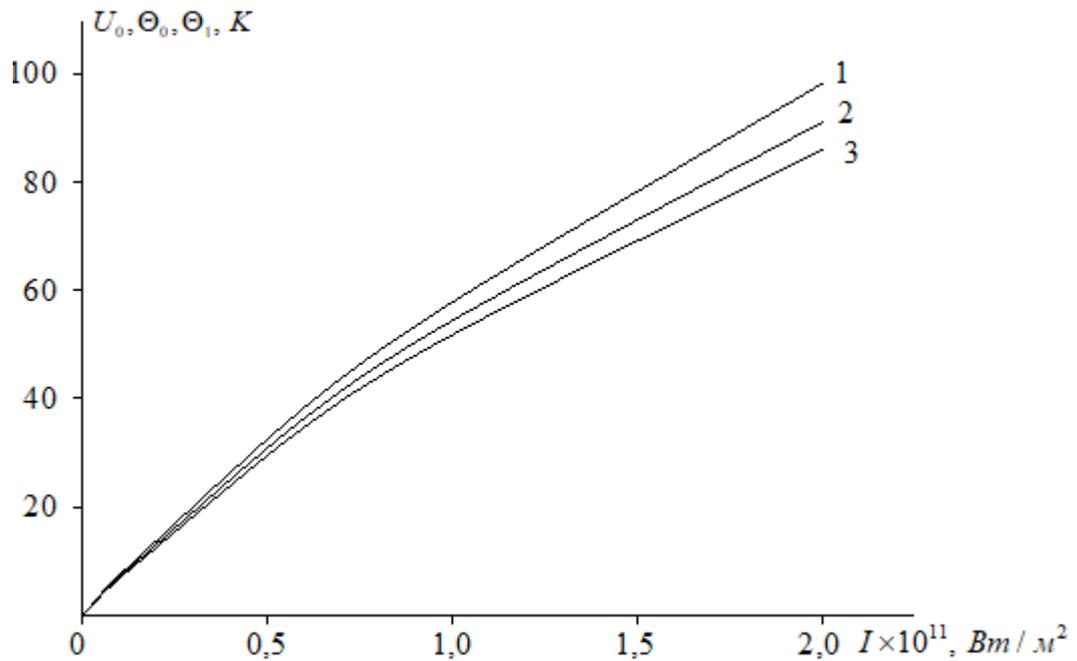


Рис. 2.9. Зависимости приращений температуры облучаемой стороны образца и тыловой стороны подложки от величины

$$I = \varepsilon J / RZe \text{ для системы ПЭНП-ZrO}_2.$$

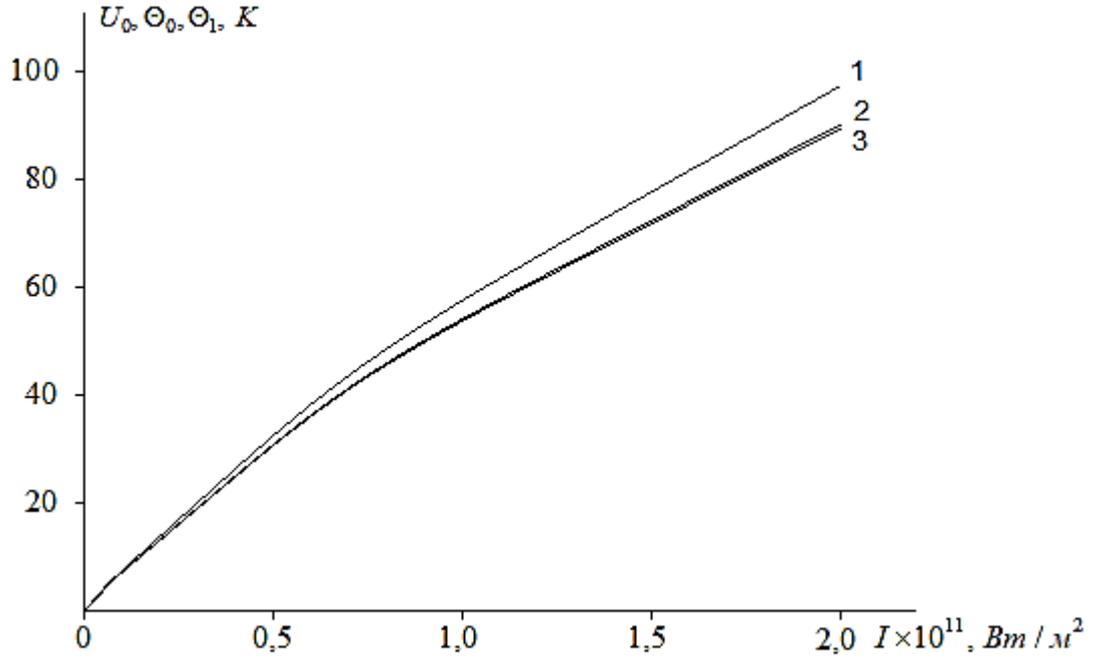


Рис. 2.10. Зависимости приращений температуры облучаемой стороны образца и тыловой стороны подложки от величины

$$I = \varepsilon J / RZe \text{ для системы ПЭНП-SiO}_2.$$

Выше мы рассмотрели случай, когда система образец-подложка находится в воздухе. Для случая, когда облучение поверхности образца производится в вакууме, достаточно в уравнениях (2.2.4) и (2.2.7) совершить переход $h_i^{(0)} \rightarrow 0$. В этом случае из этой системы будем иметь

$$\delta_2(U_0^2 - W_0^2) + 2(U_0 - W_0) - \frac{EJR}{Zek^{(0)}} + \frac{2A^{(0)}R\sigma}{k^{(0)}}(1 + \delta_3 U_0)(U^4 - T_0^4) = 0, \quad (2.2.8)$$

$$\delta_2 U_0^2 + 2U_0 - (\delta_2 W_0^2 + 2W_0)\left(1 + \frac{R}{L-R}\right) + \left(\frac{R}{L-R}\right)(\delta_2 \Theta_0^2 + 2\Theta_0) + \frac{EJR}{Zek^{(0)}} = 0, \quad (2.2.9)$$

$$\Theta_0^2(a\delta_{2(1)} + \delta_{2(2)}) + 2\Theta_0(a+1) - W_0^2 a \delta_{2(1)} - 2W_0 a - \delta_{2(2)}\Theta_1^2 - 2\Theta_1 = 0, \quad (2.2.10)$$

$$\delta_{2(2)}(\Theta_0^2 - \Theta_1^2) + 2(\Theta_0 - \Theta_1) - \frac{2A_2^{(0)}L_2(1 + \delta_{3(2)}\Theta_1)\sigma}{k_2^{(0)}}[(\Theta_1 + T_0)^4 - T_0^4] = 0. \quad (2.2.11)$$

Нами получено численное решение системы нелинейных алгебраических уравнений (2.2.8)-(2.2.11) для этого случая. Очевидно, что условие $h_i^{(0)} \rightarrow 0$ означает выключение механизма конвективного охлаждения образца и подложки, что должно привести к резкому росту величин U_0 , W_0 , Θ_0 и Θ_1 . Результаты такого расчета, представленные на рис. 2.11 (кривые 1-3), под-

тверждают это предположение. Другие особенности соответствуют выше описанному механизму. Результаты расчета показали, что отличие величины

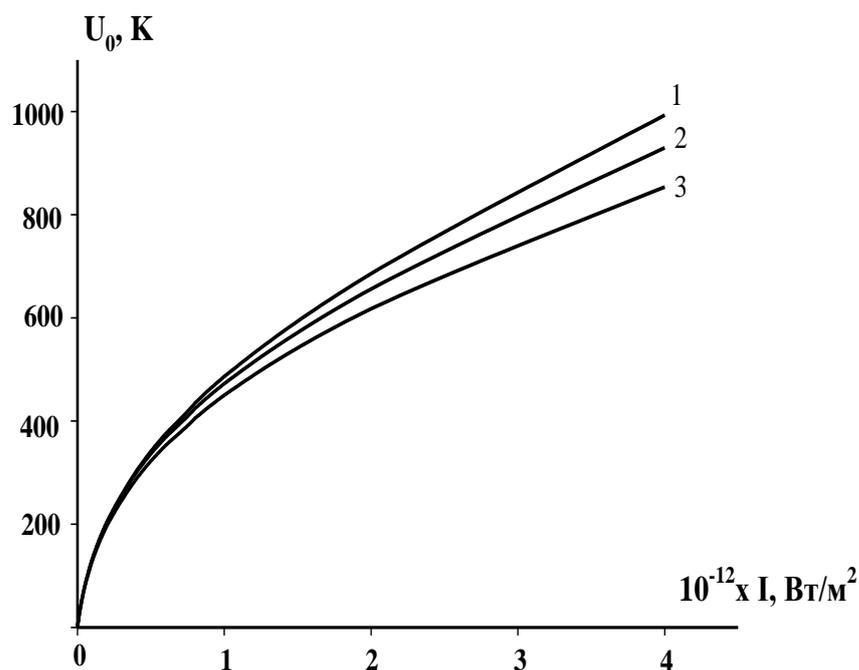


Рис. 2.11. Зависимости приращения температуры облучаемой поверхности образца MgO от величины $I = \varepsilon J / RZe$ в вакууме на подложках из: 1- ZrO₂; 2- SiO₂; 3-сапфира Al₂O₃.

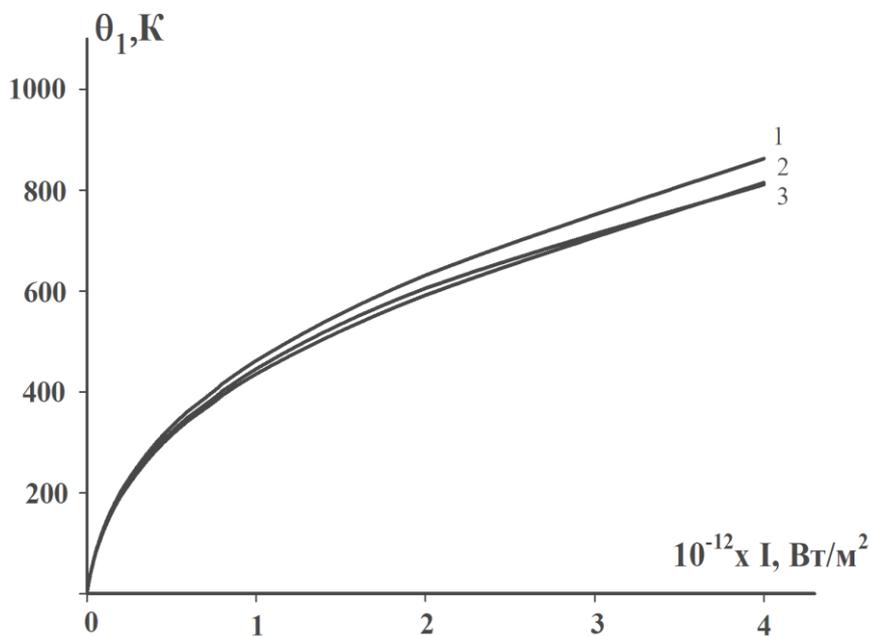


Рис. 2.12. Зависимость приращения температуры тыловой поверхности подложки Θ_1 от величины $I = \varepsilon J / RZe$ в вакууме на подложках из: 1- ZrO₂; 2-SiO₂; 3-сапфира Al₂O₃.

Θ_0 от U_0 составляет меньше одного градуса и лишь для значений величины $I \propto 10^{12} \text{ W/m}^2$ это отличие составляет порядка пяти градусов. В связи с этим мы не привели графики зависимостей $\Theta_0(I)$.

Из приведенного на рис.2.12 графика зависимости температуры тыловой стороны подложки Θ_1 от величины $I = \varepsilon J / RZe$ для этого случая следует не тривиальное поведение зависимости температуры от параметров облучения. Нам представляется, что эта зависимость формируется в конкуренции со слабым ростом теплопроводности диоксида циркония ($\delta_2 > 0$) и существенным уменьшением ($\delta_2 < 0$) этой величины для сапфира и SiO_2 .

Подводя итоги настоящего раздела работы можно утверждать, что учет температурной зависимости коэффициента теплопроводности подложки существенно влияет на формирование ТП в системе образец – подложка при непрерывном облучении пучком ионов в воздухе и в вакууме. Для всех рассмотренных случаев получены аналитические выражения для ТП образца и подложки, а также система взаимосвязанных нелинейных алгебраических уравнений для опорных температур. Путем численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений установлены нелинейность зависимости температуры облучаемой поверхности системы образец-подложка, а также тыловой стороны этой системы от параметров падающего пучка ионов.

2.3. Влияние термостатирования подложки на температурное поле диэлектрических пленок и подложки в поле непрерывного пучка ионов

В предыдущих разделах работы была предложена теория формирования стационарного температурного поля тонких диэлектрических пленок, когда длина пробега ионов в среде R сравнима с её толщиной L . Случай, когда пленка прикреплена на массивной подложке, погруженной в жидкость (например, в воду), а облучение ионами производится в вакууме, исследован в [74,75]. Однако анализ существующих экспериментальных работ по этой

задаче показал, что большинство из них посвящены случаю облучения в воздухе.

Будем исходить из нелинейной системы уравнений (2.1.10)-(2.1.12). Для рассматриваемого случая введём следующие значения приращения температуры на поверхностях образца, подложки, включая поверхности, обеспечивающие контакты этих частей: $T_1'(0) = U_0$, $T_1'(R) = T_2'(R) = W_0$, $T_2'(L_1) = T_3'(L_1) = \Theta_0$, $T_3'(L_1 + L_2) = 0$. Условия непрерывности потоков тепла можно написать в виде [4]

$$\kappa_1^{(0)} (1 + \delta_{2(1)} T_1') \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(U) U_0 + \sigma [A(U) U^4 - A^{(0)} T_0^4] \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial T_3'}{\partial x} \Big|_{x=L_1+L_2} = 0,$$

$$\kappa_1 (T_1) \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_1 (T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad \kappa_1 (T_2) \frac{\partial T_2'}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \kappa_2 (T_3) \frac{\partial T_3'}{\partial x} \Big|_{x=L_1}.$$

Решение системы (2.1.10)-(2.1.12), удовлетворяющее этим граничным условиям, имеет вид

$$g_1(x) = -1 + \{(1 + \delta_{2(1)} U_0)^2 + \delta_{2(1)} [2(W_0 - U_0) + \delta_{2(1)} (W_0^2 - U_0^2)] \frac{x}{R} - \frac{\delta_{2(1)} E j x}{Ze \kappa_1^{(0)}} \left(\frac{x}{R} - 1\right)\}^{1/2}, \quad (2.3.1)$$

$$g_2(x) = -1 + \{(1 + \delta_{2(1)} W_0)^2 + \delta_{2(1)} [2(\Theta_0 - W_0) + \delta_{2(1)} (\Theta_0^2 - W_0^2)] \frac{x - R}{L_1 - R}\}^{1/2}, \quad (2.3.2)$$

$$g_3(x) = -1 + \{1 + \delta_{2(2)} \Theta_0 (2 + \delta_{2(1)} \Theta_0) \frac{L_1 + L_2 - x}{L_2}\}^{1/2}. \quad (2.3.3)$$

Для определения величин U_0 , W_0 , Θ_0 из условий непрерывности потоков тепла на границах между различными частями системы образец-подложка получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\delta_{2(1)} (U_0^2 - W_0^2) + 2(U_0 - W_0) - \frac{EJR}{Ze k_1^{(0)}} + \frac{2h^{(0)} R (1 + \delta_4 U_0)}{k_1^{(0)}} + \frac{2A^{(0)} R \sigma}{k_1^{(0)}} [(1 + \delta_3 U_0)(U_0 + T_0)^4 - T_0^4] = 0, \quad (2.3.4)$$

$$\delta_{2(1)} U_0^2 + 2U_0 - (\delta_{2(1)} W_0^2 + 2W_0) \left(1 + \frac{R}{L - R}\right) + \left(\frac{R}{L - R}\right) (\delta_{2(1)} \Theta_0^2 + 2\Theta_0) + \frac{EJR}{Ze k_1^{(0)}} = 0, \quad (2.3.5)$$

$$\Theta_0^2 (\delta_{2(1)} + a \delta_{2(2)}) + 2\Theta_0 (1 + a) - \delta_{2(1)} W_0^2 - 2W_0 = 0, \quad (2.3.6)$$

где $a = \frac{\kappa_2^{(0)}(L_1 - R)}{\kappa_1^{(0)}L_2}$.

Выражения (2.3.1)-(2.3.3) совместно с системой нелинейных алгебраических уравнений (2.3.4)-(2.3.6) и представляет собой решение сформулированной задачи. Из выражения (2.3.1) нетрудно обнаружить, что пространственное распределение температуры имеет небольшой максимум при $x \approx 0.5R$. Отметим, что при $h \rightarrow 0$ получаются результаты, приведенные в параграфе 2.2, что соответствует случаю облучения в вакууме.

Очевидно, что для получения полной информации об особенностях поля температуры необходимо иметь численное решение системы нелинейных алгебраических уравнений (2.3.4)-(2.3.6) и получить зависимость опорных температур U_0, W_0, Θ_0 от величины $I = EJ / Ze$. Нами найдено такое решение, результаты которого показаны на рис. 2.13. Численные значения параметров,

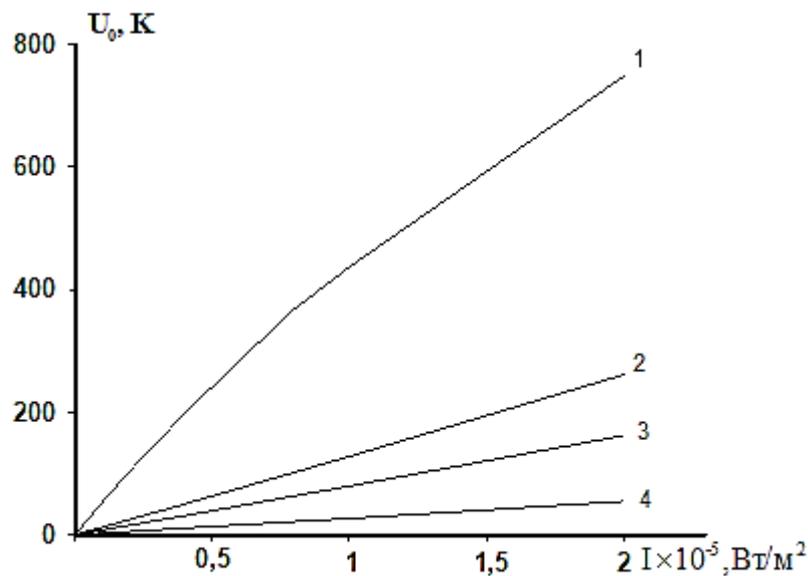


Рис. 2.13. Зависимость приращения температуры облученной поверхности пленки MgO от величины $I = EJ / Ze$ на различных подложках (1- ZrO_2 , 2- TiO_2 , 3- SiO_2 , 4- Al_2O_3).

необходимых для расчета, приведены в таблице 1. Приняты следующие значения толщин образца и подложки: $R = 2.10^{-8} м$, $L_1 = 0.001 м$ и $L_2 = 0.01 м$. Из рис. 2.13 следует, что зависимость U_0 от $I = EJ / Ze$ является нелинейной, а с

ростом теплопроводности подложки нагрев системы существенно падает. Также обнаружено несущественное отличие величин W_0 , Θ_0 от U_0 и только при больших значениях величины $I = EJ / Ze$ разница $(U_0 - \Theta_0)$ составляет несколько градусов.

Таким образом, в данном разделе нами получены аналитические выражения для температурного поля диэлектрического образца, прикрепленного на массивной подложке, вторая сторона которой погружена в воду, а облучение проводится в воздухе. Результаты расчета показали нетривиальную зависимость температуры облученной поверхности образца от параметров потока ионов.

2.4. Влияние тепловой нелинейности теплофизических величин и степени черноты на температурное поле тонких пленок полиимида в поле непрерывного пучка протонов

В предыдущих разделах работы была развита теория формирования стационарного поля температуры в диэлектриках при их облучении непрерывным потоком ионов [74,75]. В этих работах была учтена температурная зависимость теплофизических величин облучаемого образца. Отметим, что тепловой источник, обеспечивающий трансформацию энергии пучка в тепловую, непосредственно зависит от длины пробега ионов в среде R , которая существенно меняется при переходе от обычных диэлектриков к полимерным системам [92]. Согласно [92] в полиимиде марки Kapton H величина $R \sim 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, то есть в принципе, может равняться толщине образца. В дальнейшем под тонкими плёнками будем считать такие, толщины которых $L \leq R$. В эксперименте [92] методом пирометрии измерялась температура поверхности полиимидных пленок марки Kapton H при их облучении потоком протонов при различных значениях плотности тока J и начальной энергии частиц E . Однако в указанной работе теоретически не исследовались особенности формирования температурного поля. Целью настоящего раздела рабо-

ты является разработка теории формирования стационарного температурного поля в упомянутом эксперименте. В [92] измерения температуры проводились в вакууме, однако, рассматривая более общий случай, будем считать, что образец плёнки толщиной $L \approx R$ находится в воздухе, а поток протонов падает на него перпендикулярно. Тогда справедливо следующее нелинейное уравнение теплопроводности [3]:

$$\frac{d}{dx} \left[\kappa(T_1) \frac{dT_1'}{dx} \right] = - \frac{G(L,R)EJ}{eR}, \quad (2.4.1)$$

где T_1' - приращение температуры. Однако в эксперименте не всегда выполняется условие $L \approx R$ и возможен случай $L < R$. В этой связи в уравнение (2.4.1) мы ввели величину $G(L,R)$, учитывающую геометрический фактор и фактически уменьшение величины E из-за выхода протонов из образца. В грубом приближении эту величину можно написать в виде $G(L,R) = L/R$.

Принимая во внимание равенство $\kappa(T') = \kappa^{(0)}(T_0)[1 + \delta_2 T'(x)]$, уравнение (2.4.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT'}{dx} + \frac{\delta_2}{2} \frac{d(T')^2}{dx} \right] = - \frac{G(L,R)EJ}{eR\kappa^{(0)}(T_0)}. \quad (2.4.2)$$

Предположим, что $U = U_0 + T_0$, $U_1 = \Theta_0 + T_0$ являются установившимися температурами облучаемой и тыловой поверхностей образца, соответственно, а U_0 и Θ_0 - их приращения. Два граничных условия, необходимых для решения уравнение (2.4.2), можно записать в виде [4]

$$\kappa^{(0)}(1 + \delta_2 T') \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=0} = hU_0 + \sigma(A(U)U^4 - A_0 T_0^4) \Big|_{x=0}, \quad (2.4.3)$$

$$-\kappa^{(0)}(1 + \delta_2 T_1') \frac{\partial T_1'}{\partial x} \Big|_{x=L} = h\Theta_0 + \sigma[A(U_1)U_1^4 - A(T_0)T_0^4] \Big|_{x=L}. \quad (2.4.4)$$

Отметим, что эти условия учитывают наличие теплового излучения и конвективного охлаждения двух поверхностей образца. Величины h и A также являются функцией температуры [85,86] и эту зависимость мы представили в предыдущих разделах.

Используя обозначение $g(x) = \delta_2 T'(x)$, получим следующий вид решения уравнения (2.4.2):

$$g(x) = -1 + \left\{ 1 + 2\delta_2 \left[(U_0 + 0.5\delta_2 U_0^2) \left(1 - \frac{x}{L} \right) + (\Theta_0 + 0.5\delta_2 \Theta_0^2) \frac{x}{L} + \frac{G(L,R)EJx(L-x)}{2RZek^{(0)}} \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.4.5)$$

описывающий пространственное распределение температуры в пленке. Выражение (2.4.5) и условия (2.4.3) и (2.4.4) позволят получить следующую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения величин U_0 , Θ_0 :

$$\delta_2(U_0^2 - \Theta_0^2) + 2(U_0 - \Theta_0) - \frac{G(L,R)EJL^2}{RZek^{(0)}} + \frac{2h^{(0)}L}{k^{(0)}}U_0(1 + \delta_4 U_0) + \frac{2A^{(0)}L\sigma}{k^{(0)}}(1 + \delta_3 U_0)(U^4 - T_0^4) = 0, \quad (2.4.6)$$

$$\delta_2(U_0^2 - \Theta_0^2) + 2(U_0 - \Theta_0) + \frac{G(L,R)EJL^2}{RZek^{(0)}} - \frac{2h^{(0)}L}{k^{(0)}}\Theta_0(1 + \delta_4 \Theta_0) - \frac{2A^{(0)}L\sigma}{k^{(0)}}(1 + \delta_3 \Theta_0)(U_1^4 - T_0^4) = 0. \quad (2.4.7)$$

Нами получено численное решение этой системы для полиимида марки Kapton H, для которого численные значения параметров имеют следующие значения: $k^{(0)} = 0.155 \text{ Bm} / \text{м} \cdot \text{K}$ [93], $\delta_2 = 8.4 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $A^{(0)} = 0.95$ [93], $\delta_3 = 1.4 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $L = 20 \times 10^{-6} \text{ м}$. В табл. 2 приведены значения энергии и длины пробега протонов для этой системы [92]. Отметим, что в [92] эксперимент выполнялся в вакууме, где $h = 0$.

Таблица 2

Численные значения начальной энергии и соответствующая ей длина пробега протонов в ПИ (Kapton H) согласно [92].

Е, кэВ	10^3	$1,2 \times 10^3$	$1,4 \times 10^3$	$1,6 \times 10^3$
Р, мкм	19,2	25,6	32,6	40,4

Результаты этого расчета и сравнение с экспериментом показаны на рис. 2.14 а и б. Из этих графиков видно, что для значений энергии $E = 1200, 1400, 1600 \text{ keV}$ совпадение результатов с экспериментом вполне

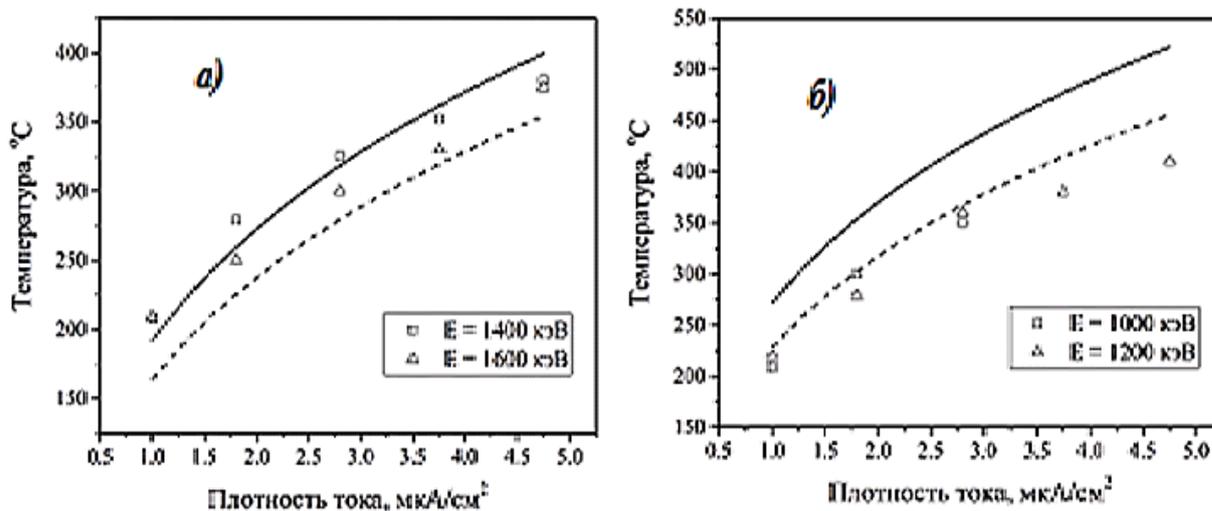


Рис. 2.14. Зависимость приращения температуры облучаемой поверхности полиимидной пленки марки Картон Н от плотности тока при бомбардировке потоком протонов различной энергии: а) □-эксперимент [92] при $E = 1400$ кэВ; Δ - эксперимент [92] при $E = 1600$ кэВ; сплошная - расчёт при $E = 1400$ кэВ; штриховая- расчёт при $E = 1600$ кэВ; б) □-эксперимент [92] при $E = 1000$ кэВ; Δ - эксперимент [92] при $E = 1200$ кэВ; сплошная - расчёт при $E = 1000$ кэВ; штриховая- расчёт при $E = 1200$ кэВ.

удовлетворительное. Систематически заниженное значение ($\sim 20\%$) измеренной величины U_0 при $E = 1000\text{keV}$ по сравнению с теорией может быть обусловлено многими факторами, в том числе возможными ошибками эксперимента.

Таким образом, в рамках настоящей раздела работы предложена теория формирования стационарного температурного поля в тонких полимерных пленках под действием потока протонов в воздушной среде с учетом тепловой нелинейности коэффициента теплопроводности, степени черноты и коэффициента теплоотдачи системы.

ГЛАВА III. ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В ПЛЕНКАХ ДИЭЛЕКТРИКОВ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫМ ИОННЫМ ПУЧКОМ

3.1. Теплофизическая модель задачи

Особенности формирования стационарного и нестационарного температурного поля при облучении непрерывным или другим видом импульса ионного пучка исследованы достаточно подробно (см. например [1-15, 74-81]). Между тем, как было показано в [12-16], возможны случаи, когда падающий пучок ионов изменяется по гармоническому закону с частотой ω . Очевидно, что и в этом случае становится важным учет температурной зависимости теплофизических параметров исследуемой среды. Отметим, что подобные работы выполнены по фотоакустике [97-104], где показано, что при гармонически модулированном падающем свете в среде возникают колебания температуры, как на частоте ω , так и на удвоенной частоте (вторая гармоника). Целью настоящего раздела работы является создание линейной и нелинейной теорий генерации тепловых волн в пленках диэлектриков посредством гармонически модулированного ионного пучка [105-106]. Считается, что облучение образца осуществляется в воздушной среде. Учитывая, что длина пробега ионов в пленке R меньше её толщины L , для описания стационарного и нестационарного поля температуры будем исходить из следующей системы нелинейных уравнений теплопроводности:

$$C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x}] + \frac{EJ}{2RZe} \Theta(R-x)(1 + e^{i\omega t}), \quad 0 \leq x \leq R, \quad (3.1.1)$$

$$C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x}], \quad R \leq x \leq L, \quad (3.1.2)$$

где C , K , J , Z , E - теплоемкость единицы объема, коэффициент теплопроводности, плотность тока пучка, заряд иона в единицах заряда электрона, начальная энергия ионов, соответственно, $\Theta(R-x)$ - единичная функция

Хэвисайда. В (3.1.1)-(3.1.2) для общности рассматриваемой задачи считается что, теплофизические величины соответствующих слоев не являются идентичными.

Четыре граничных условия, необходимых для решения системы (3.1.1)-(3.1.2), имеют вид [4]

$$\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1(T_1 - T_0) + A_1 \sigma_0(T_1^4 - T_0^4), \quad (3.1.3)$$

$$-\kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T_2 - T_0) + A_2 \sigma_0(T_2^4 - T_0^4), \quad (3.1.4)$$

$$T_1(x) \Big|_{x=R} = T_2(x) \Big|_{x=R}, \quad \kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=R}. \quad (3.1.5)$$

Как и раньше [74-81,94,101], температурную зависимость теплофизических величин примем в линейной форме, т.е. в виде

$$\begin{aligned} \kappa_i(T_i) &= \kappa_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{2(i)}T_i], \quad A_i(T_i) = A_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{3(i)}T_i], \quad C_i(T_i) = C_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{(i)}T_i], \\ h_i(T_i) &= h_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{4(i)}T_i], \end{aligned}$$

где

$$\delta_{(i)} = \frac{1}{C_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial C_i}{\partial T}, \quad \delta_{2(i)} = \frac{1}{\kappa_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial \kappa_i}{\partial T}, \quad \delta_{3(i)} = \frac{1}{A_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial A_i}{\partial T}, \quad \delta_{4(i)} = \frac{1}{h_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial h_i}{\partial T}$$

являются термическими коэффициентами этих величин.

Представим возмущение температуры в виде суммы локально-равновесной $T_{0(i)}(x)$, линейных $\Phi_{L(i)}(x,t)$ и нелинейных $\Phi_{N(i)}(x,t)$ частей, т.е. в виде

$$T'_i(x,t) = T_{0(i)}(x) + \Phi_{L(i)}(x,t) + \Phi_{1N(i)}(x,t) + \Phi_{2N(i)}(x,t), \quad (3.1.6)$$

где $\Phi_{1N(i)}$ и $\Phi_{2N(i)}$ - нелинейные составляющие колебания температуры соответствующего слоя на основной и второй гармониках.

Тогда система уравнений (3.1.1)-(3.1.2) распадается на следующие системы уравнений для $T_{0(i)}(x)$, $\Phi_{L(i)}(x,t)$, $\Phi_{1N(i)}(x,t)$ и $\Phi_{2N(i)}(x,t)$:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0(1)}}{dx} + \frac{\delta_{2(1)}}{2} \frac{d(T_{0(1)})^2}{dx} \right] = -\frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (3.1.7)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0(2)}(x)}{dx} + \frac{\delta_{2(2)}}{2} \frac{d(T_{0(2)})^2}{dx} \right] = 0, \quad R \leq x \leq L. \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial t} = -\frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)} \exp(i\omega t), \quad 0 \leq x \leq R, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial t} = 0, \quad R \leq x \leq L, \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(1)}}{\partial t} = -(\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(1)}(x, t)), \quad (3.1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(2)}}{\partial t} = -(\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(2)}(x, t)), \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(1)}^2(x, t)), \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(2)}^2(x, t)). \quad (3.1.14)$$

Здесь $I = EJ / ZeR$, $\chi_i^{(0)} = \kappa_i^{(0)} / C_p^{(0)}$ - температуропроводность соответствующих слоев при $T = T_0$ - начальной температуре образца.

Из (3.1.3)-(3.1.5) получим следующие граничные условия для $\Phi_{L(i)}(x, \omega)$:

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = B_1 \Phi_{L(1)}, \quad \Phi_{L(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{L(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad (3.1.15)$$

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad -\kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial x} \Big|_{x=L} = B_2 \Phi_{L(2)}, \quad (3.1.16)$$

где $B_i = h_i^{(0)} + 4\sigma A_i^{(0)} T_0^3$.

Выше приведенные системы уравнений (3.1.7.)- (3.1.14) и граничные условия к ним (3.1.15), (3.1.16) представляют математическую модель сформулированной задачи. Нетрудно заметить, что сформулированная задача распадается на четыре подзадачи: стационарное поле температуры, линейная тепловая волна и нелинейные тепловые волны на основной и второй гармониках. Особенности формирования стационарного поля температуры доста-

точно подробно исследованы в предыдущей главе. Оставшиеся задачи в дальнейшем будут рассмотрены отдельно.

3.2. Решение системы уравнений для линейной составляющей колебания температуры

Учитывая, что источник модулирован по гармоническому закону, величины $\Phi_{L(i)}(x, t)$ в (3.1.9)-(3.1.10) представим в виде $\Phi_{L(i)}(x, t) = e^{i\omega t} \Phi_{L(i)}(x, \omega)$.

Тогда будем иметь

$$\frac{d^2 \Phi_{L(1)}}{dx^2} - \sigma_1^2 \Phi_{L(1)} = -\xi, \quad (3.2.1)$$

$$\frac{d^2 \Phi_{L(2)}}{dx^2} - \sigma_2^2 \Phi_{L(2)} = 0, \quad (3.2.2)$$

где $\xi = \frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)}$, $\sigma_i^2 = i\omega / \chi_i^{(0)}$, $\sigma_i = (1+i) / \mu_i$, $\mu_i = (2\chi_{0(i)} / \omega)^{1/2}$ - длина тепловой диффузии.

Используя метод вариации постоянных, решение системы уравнений (3.2.1)-(3.2.2) можно представить в виде

$$\Phi_{L(1)}(x, \omega) = \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \gamma_1 e^{\sigma_1 x} + \gamma_2 e^{-\sigma_1 x}, \quad (3.2.3)$$

$$\Phi_{L(2)}(x, \omega) = \beta_1 e^{\sigma_2(x-R)} + \beta_2 e^{-\sigma_2(x-R)}. \quad (3.2.4)$$

Здесь γ_i и β_i являются постоянными интегрирования. Используя граничные условия (3.1.15) и (3.1.16), получим следующую систему уравнений для нахождения γ_i и β_i :

$$\kappa_1^{(0)} \sigma_1 (\gamma_1 - \gamma_2) = B_1 \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2} + \gamma_1 + \gamma_2 \right), \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\xi}{\sigma_1^2} + \gamma_1 e^{\sigma_1 R} + \gamma_2 e^{-\sigma_1 R} = \beta_1 + \beta_2, \quad (3.2.6)$$

$$\kappa_1^{(0)} \sigma_1 (\gamma_1 e^{\sigma_1 R} - \gamma_2 e^{-\sigma_1 R}) = \kappa_2^{(0)} \sigma_2 (\beta_1 - \beta_2), \quad (3.2.7)$$

$$-\kappa_2^{(0)} \sigma_2 (\beta_1 e^{\sigma_2(L-R)} - \beta_2 e^{-\sigma_2(L-R)}) = B_2 (\beta_1 e^{\sigma_2(L-R)} + \beta_2 e^{-\sigma_2(L-R)}). \quad (3.2.8)$$

Решая эту систему, получим следующие выражения:

$$\gamma_1 = \gamma_2 \frac{R_2}{R_1} + \frac{B_1 \xi}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1^{(0)} \sigma_1^2 R_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{R_2}{R_1} + \frac{B_1 \xi}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1^{(0)} \sigma_1^2 R_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$\beta_1 = \beta_2 e^{-2\sigma_2(L-R)} \frac{(1 - \frac{B_2}{\kappa_2^{(0)} q_2})}{(1 + \frac{B_2}{\kappa_2^{(0)} q_2})} = \beta_2 e^{-2\sigma_2(L-R)} \frac{G_1}{G_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_2(L-R)}, \quad \beta_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Очевидно, что слагаемые $\gamma_1 e^{\sigma_1 x}$ в (3.2.3) и $\beta_1 e^{\sigma_2(x-R)}$ в (3.2.4) соответствуют тепловым волнам с нарастающей амплитудой и не являются физическими. По этой причине в дальнейшем ими пренебрегаем. Также пренебрежём первым слагаемым в (3.2.3), которое на заданной частоте является постоянным. Тогда будем иметь

$$\Phi_{L(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} e^{-\sigma_1 x}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (3.2.9)$$

$$\Phi_{L(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_2(x-R)}. \quad R \leq x \leq L. \quad (3.2.10)$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta = \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_2(L-R)} \left[\frac{R_2(1-b)}{R_1} e^{\sigma_1 R} - (b+1)e^{-\sigma_1 R} \right] + \frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_1 R} (b+1) + e^{-\sigma_1 R} (b-1),$$

$$\Delta_1 = -\frac{\xi}{\sigma_1^2} \left\{ \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_2(L-R)} \left[\frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} R_1 \sigma_1} (1-b)e^{\sigma_1 R} - b \right] + \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} R_1 \sigma_1} (1+b)e^{\sigma_1 R} + b \right\},$$

$$\Delta_2 = \frac{\xi}{\sigma_1^2} \left\{ e^{\sigma_1 R} \frac{R_2}{R_1} - e^{-\sigma_1 R} - \frac{2B_1}{\kappa_1^{(0)} R_1 \sigma_1} \right\}, \quad R_1 = 1 - \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}, \quad R_2 = 1 + \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}, \quad G_1 = 1 - \frac{B_2}{\kappa_2^{(0)} \sigma_2},$$

$$G_2 = 1 + \frac{B_2}{\kappa_2^{(0)} \sigma_2}, \quad b = \frac{\kappa_2^{(0)} \sigma_2}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}.$$

Выражения (3.2.9)-(3.2.10) представляют собой общее решение линейной задачи и описывают частотную зависимость параметров тепловых волн для рассматриваемого случая. Для случая $\kappa_1^{(0)} = \kappa_2^{(0)}$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $b=1$, $R_1 = G_1$ и $R_2 = G_2$ справедливы равенства

$$\Delta = 2e^{\sigma_1 R} \left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R_1}{R_2} e^{-2\sigma_1 L} \right), \quad (3.2.11)$$

$$\Delta_1 = \frac{\xi}{\sigma_1^2} \left[\frac{R_1}{R_2} e^{-2\sigma_1(L-R)} - \frac{2B_1}{\kappa_1^{(0)} R_1 \sigma_1} e^{\sigma_1 R} - 1 \right], \quad (3.2.12)$$

$$\Delta_2 = \frac{\xi}{\sigma_1^2} \left[\frac{1}{R_1} (R_2 e^{\sigma_1 R} - \frac{2B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}) - e^{-\sigma_1 R} \right]. \quad (3.2.13)$$

Выражение для σ_i позволяет определить величины скорости $\mathcal{G} = (2\omega\chi_{0(i)})^{1/2} = 2(\pi\chi/T)^{1/2}$, длины волны $\lambda = 2\pi\mu = 2\pi(2\chi_{0(i)}/\omega)^{1/2}$ и фазы $\varphi = x/\mu = (\omega/2\chi)^{1/2} x$ тепловой волны соответственно. Здесь T - период колебаний этой волны.

Выполним анализ выражений (3.2.11)-(3.2.13). Исходим из того, что величина $R \propto (10^{-8} - 10^{-7})\text{м}$. Тогда справедлива оценка $R\sigma_1 \propto R/\mu_1(\omega) \ll 1$. С другой стороны, $L \propto 10^{-3} - 10^{-2})\text{м}$, т.е. $L \gg R$, $L/\mu(\omega) \gg 1$ и $\text{Exp}[-L/\mu(\omega)] \propto 0$. Для диэлектриков $h \propto 10\text{Вт}/\text{м}^2\text{К}$ и значительно больше $4\sigma A_i^{(0)} T_0^3$, тогда $B_i \propto h_i^{(0)}$. $B_1/\kappa_1^{(0)}\sigma \propto h\mu(\omega)/k_1^{(0)} \leq 10^{-2}$ и $R_i \propto 1$. Это приводит к тому, что $\Delta \propto 2$, $\Delta_1 \propto \xi/\sigma_1^2$, $\Delta_2 \propto 2\xi B_1/k_1^{(0)}\sigma_1^3$. В этом случае выражения (3.2.9) и (3.2.10) примут вид

$$\Phi_{L(1)} = \frac{\xi}{2\sigma_1^2} e^{-\sigma_1 x + i\pi}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (3.2.14)$$

$$\Phi_{L(2)} = \frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3} e^{-\sigma_2(x-R) + i\pi}, \quad R \leq x \leq L. \quad (3.2.15)$$

Из (3.2.14) следует, что частотная зависимость амплитуды линейного составляющего возбуждаемой тепловой волны в облучаемом слое $\propto \omega^{-1}$, в то время как для необлучаемого слоя $\propto \omega^{-3/2}$. Результаты расчета этих зависимостей приведены на рис. 3.1 и 3.2. Расчет выполнен для значения $I = 10^8 \text{Вт}/\text{м}^2$.

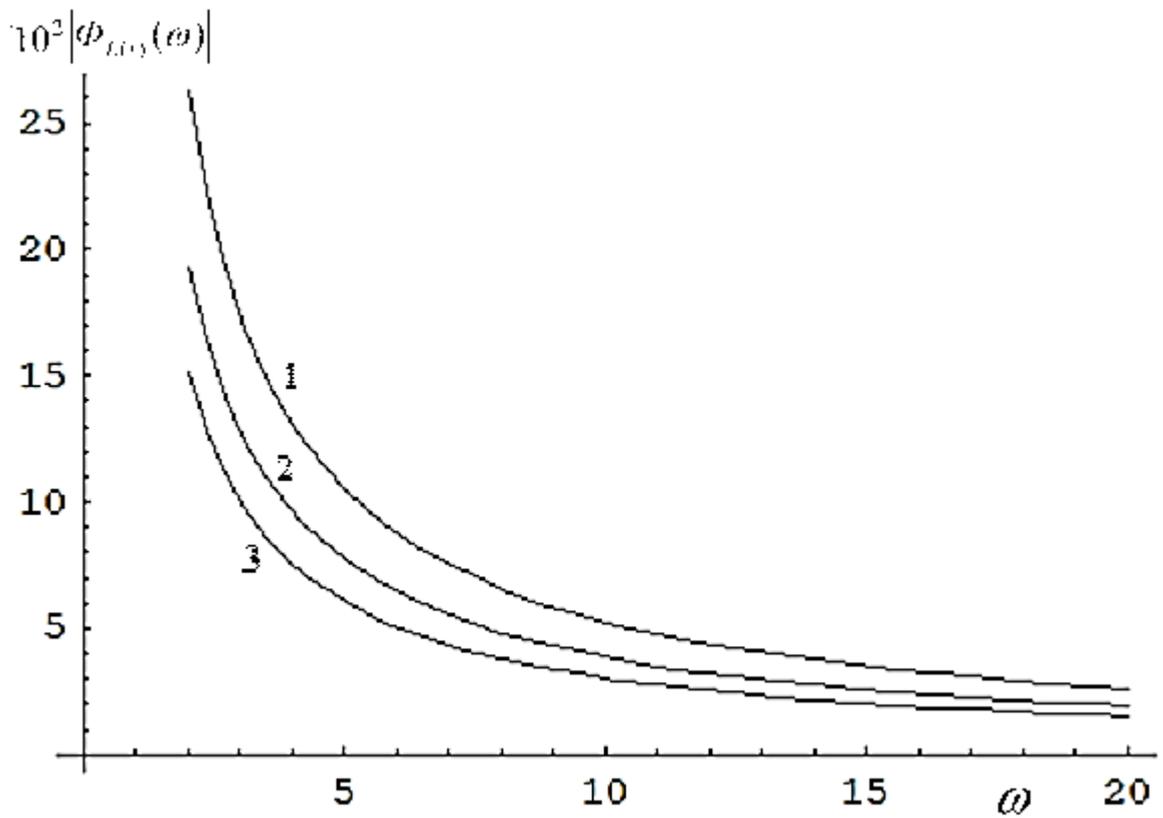


Рис. 3.1. Частотная зависимость амплитуды линейной тепловой волны в облучаемом слое SiO_2 (1), ZrO_2 (2) и MgO (3) при $I = 10^8 \text{ Bm}/\text{m}^2$.

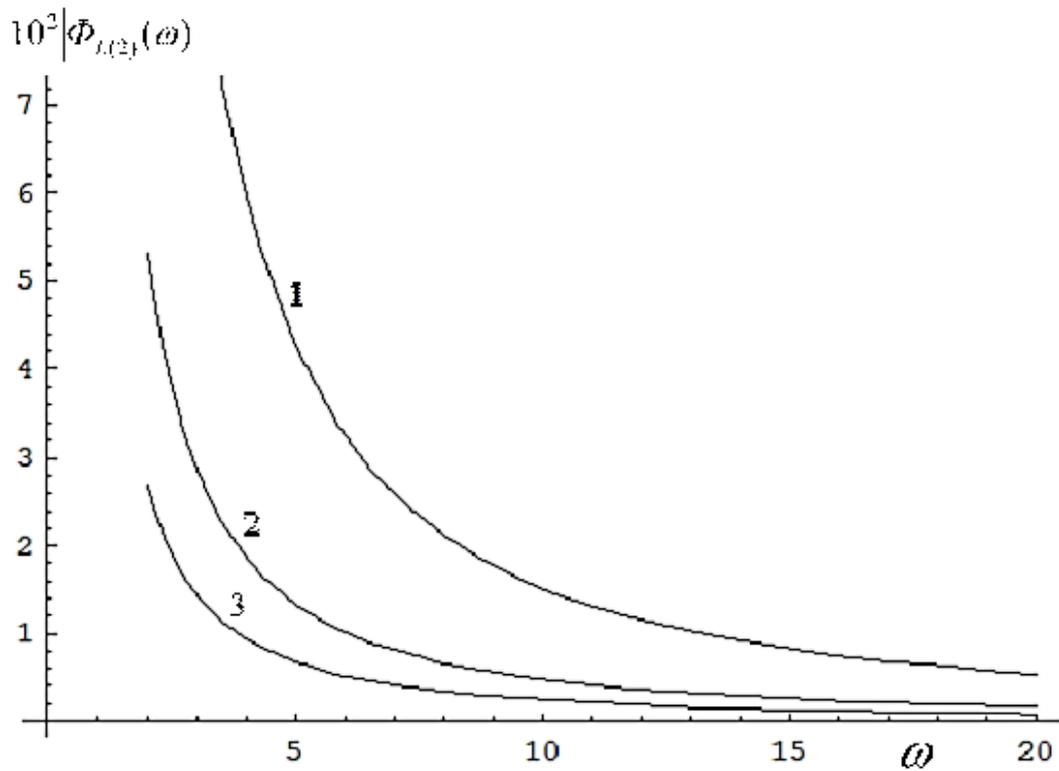


Рис. 3.2. Частотная зависимость амплитуды линейной тепловой волны в не облучаемом слое образца для SiO_2 (1), ZrO_2 (2) и MgO (3) при $I = 10^8 \text{ Bm}/\text{m}^2$.

3.3. Решение системы уравнений для основной гармонике нелинейного колебания температуры

Исходим из того, что граничные условия (3.1.5) для рассматриваемого случая примут вид

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{1N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_{1N(1)} + \delta_{2(1)} T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)} \right) \Big|_{x=R} = \frac{\kappa_2^{(0)}}{\kappa_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_{1N(2)} + \delta_{2(2)} T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)} \right) \Big|_{x=R}. \quad (3.3.2)$$

Тогда возникает необходимость иметь уравнение для функции $\Psi_{1N(i)} = \Phi_{1N(i)} + \delta_{2(i)} T_{0(i)}(x) \Phi_{L(i)}$. Из (3.1.11) и (3.1.12) для этой функции получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{1N(i)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{1N(i)} = \frac{\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}}{\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} (T_{0(i)}(x) \Phi_{L(i)}(x, t)), \quad i = 1, 2. \quad (3.3.4)$$

Тогда граничные условия (3.1.3) и (3.1.4) примут вид

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Psi_{1N(1)}}{\partial x} = B_1 \Psi_{1N(1)} + (2D_1 - \delta_{2(1)} B_1) T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega), \quad (3.3.5)$$

$$-\kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Psi_{1N(2)}}{\partial x} = B_2 \Psi_{1N(2)} + (2D_2 - \delta_{2(2)} B_2) T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)}(x, \omega). \quad (3.3.6)$$

Здесь $D_i = h_i^{(0)} \delta_{4(i)} + 4\sigma A_i^{(0)} T_0^3 \delta_{3(i)}$. Учитывая, что $\Phi_{L(i)}(x, t) = \Phi_{L(i)}(x, \omega) \exp(i\omega t)$, в (3.3.4) положим $\Phi_{N(i)}(x, t) = \Phi_{N(i)}(x, \omega) \exp(i\omega t)$ и будем иметь

$$\frac{d^2 \Psi_{1N(i)}}{dx^2} - \sigma_i^2 \Psi_{1N(i)} = \sigma_i^2 (\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}) T_{0(i)}(x) \Phi_{L(i)}(x, \omega), \quad i = 1, 2. \quad (3.3.7)$$

Решение уравнения (3.3.7) имеет вид

$$\Psi_{1N(1)}(x, \omega) = \gamma_{1(1)} e^{\sigma_1 x} + \gamma_{2(1)} e^{-\sigma_1 x} + W_1 [S_{1(1)}(x) e^{\sigma_1 x} - S_{1(2)}(x) e^{-\sigma_1 x}], \quad (3.3.8)$$

$$\Psi_{1N(2)}(x, \omega) = \gamma_{1(2)} e^{\sigma_2(x-R)} + \gamma_{2(2)} e^{-\sigma_2(x-R)} + W_2 [S_{2(1)}(x) e^{\sigma_2(x-R)} - S_{2(2)}(x) e^{-\sigma_2(x-R)}]. \quad (3.3.9)$$

Здесь использованы обозначения:

$$W_1 = \frac{1}{2\delta_{2(1)}} \sigma_1 (\delta_{(1)} - \delta_{2(1)}), \quad W_2 = \frac{1}{2\delta_{2(2)}} \sigma_2 (\delta_{(2)} - \delta_{2(2)}).$$

$$S_{1(1)}(x, \omega) = \int g_{01}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega) e^{-\sigma_1 x} dx, \quad S_{1(2)}(x, \omega) = \int g_{01}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega) e^{\sigma_1 x} dx, \quad (3.3.10)$$

$$S_{2(1)}(x, \omega) = \int g_{02}(x) \Phi_{L(2)}(x, \omega) e^{-\sigma_2(x-R)} dx, \quad S_{2(2)}(x, \omega) = \int g_{02}(x) \Phi_{L(2)}(x, \omega) e^{\sigma_2(x-R)} dx, \quad (3.3.11)$$

$$g_{01}(x) = \delta_{2(1)} T_{01}(x), \quad g_{02}(x) = \delta_{2(2)} T_{02}(x).$$

Для определения величин $\gamma_{1(1)}$, $\gamma_{1(2)}$, $\gamma_{2(1)}$ и $\gamma_{2(2)}$, используя граничные условия (3.3.1), (3.3.2), (3.3.5) и (3.3.6), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_{1(1)} e^{\sigma_1 R} + \gamma_{2(1)} e^{-\sigma_1 R} + W_1 [S_{1(1)}(R) e^{\sigma_1 R} - S_{1(2)}(R) e^{-\sigma_1 R}] - g_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}(R, \omega) = \\ = \gamma_{1(2)} + \gamma_{2(2)} + W_2 [S_{2(1)}(R) - S_{2(2)}(R)] - g_{0(2)}(R) \Phi_{L(2)}(R, \omega) \end{aligned}, \quad (3.3.12)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1^{(0)} \sigma_1 [\gamma_{1(1)} - \gamma_{2(1)} + W_1 [S_{1(1)}(0, \omega) + S_{1(2)}(0, \omega)]] = \\ = B \{ \gamma_{1(1)} + \gamma_{2(1)} + W_1 [S_{1(1)}(0, \omega) + S_{1(2)}(0, \omega)] \} + (2D_1 - \delta_{2(1)} B) T_{0(1)}(0) \Phi_{L(1)}(0, \omega), \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

$$\begin{aligned} -\kappa_2^{(0)} \sigma_2 \{ \gamma_{1(2)} e^{\sigma_2(L-R)} - \gamma_{2(2)} e^{-\sigma_2(L-R)} + W_2 [S_{2(1)}(L, \omega) e^{\sigma_2(L-R)} + S_{2(2)}(L, \omega) e^{-\sigma_2(L-R)}] \} = \\ = B \{ \gamma_{1(2)} e^{\sigma_2(L-R)} + \gamma_{2(2)} e^{-\sigma_2(L-R)} + W_2 [S_{2(1)}(L, \omega) e^{\sigma_2(L-R)} - S_{2(2)}(L, \omega) e^{-\sigma_2(L-R)}] \} + \\ + (2D_2 - \delta_{2(2)} B) T_{0(2)}(L) \Phi_{L(2)}(L, \omega) \end{aligned}, \quad (3.3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}{\kappa_2^{(0)} \sigma_2} \{ \gamma_{1(1)} e^{\sigma_1 R} - \gamma_{2(1)} e^{-\sigma_1 R} + W_1 [S_{1(1)}(R) e^{\sigma_1 R} + S_{1(2)}(R) e^{-\sigma_1 R}] \} = \\ = \gamma_{1(2)} - \gamma_{2(2)} + W_2 [S_{2(1)}(R) + S_{2(2)}(R)] \end{aligned}. \quad (3.3.15)$$

Используя определения

$$F_1 = W_1 [S_{1(2)}(R) e^{-\sigma_1 R} - S_{1(1)}(R) e^{\sigma_1 R}] + W_2 [S_{2(1)}(R) - S_{2(2)}(R)] + g_{0(1)}(R) \Phi_{L(1)}(R, \omega) - g_{0(2)}(R) \Phi_{L(2)}(R, \omega),$$

$$F_2 = W_1 S_{1(1)}(0, \omega) (1 - d_1) - W_1 S_{1(2)}(0, \omega) (d_1 - 1) + \frac{1}{B} (2D_1 - \delta_{2(1)} B) T_{0(1)}(0) \Phi_{L(1)}(0, \omega),$$

$$F_3 = W_2 S_{2(1)}(L, \omega) e^{\sigma_2(L-R)} (1 + d_2) - W_2 S_{2(2)}(L, \omega) e^{-\sigma_2(L-R)} (1 - d_2) + \frac{1}{B} (2D_2 - \delta_{2(2)} B) T_{0(2)}(L) \Phi_{L(2)}(L, \omega),$$

$$F_4 = -\frac{W_1}{b} [S_{1(1)}(R) e^{\sigma_1 R} + S_{1(2)}(R) e^{-\sigma_1 R}] + W_2 [S_{2(1)}(R) + S_{2(2)}(R)], \quad \frac{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}{B} = d_1, \quad \frac{\kappa_2^{(0)} \sigma_2}{B} = d_2,$$

систему уравнений (3.3.12)-(3.3.15) перепишем в виде

$$\gamma_{1(1)} e^{\sigma_1 R} + \gamma_{2(1)} e^{-\sigma_1 R} - \gamma_{1(2)} - \gamma_{2(2)} = F_1, \quad (3.3.16)$$

$$d_1 (\gamma_{1(1)} - \gamma_{2(1)}) - \gamma_{1(1)} - \gamma_{2(1)} = F_2, \quad (3.3.17)$$

$$-d_2 (\gamma_{1(2)} e^{\sigma_2(L-R)} - \gamma_{2(2)} e^{-\sigma_2(L-R)}) - \gamma_{1(2)} e^{\sigma_2(L-R)} - \gamma_{2(2)} e^{-\sigma_2(L-R)} = F_3, \quad (3.3.18)$$

$$\frac{1}{b} (\gamma_{1(1)} e^{\sigma_1 R} - \gamma_{2(1)} e^{-\sigma_1 R}) - \gamma_{1(2)} + \gamma_{2(2)} = F_4. \quad (3.3.19)$$

Из уравнений (3.3.17) и (3.3.18) найдем выражения для $\gamma_{1(2)}$, $\gamma_{2(1)}$ вида

$$\gamma_{1(2)} = \gamma_{2(2)} \left(\frac{d_2 - 1}{d_2 + 1} \right) e^{-2\sigma_2(L-R)} - \frac{F_3}{d_2 + 1} e^{-\sigma_2(L-R)}, \quad \gamma_{2(1)} = \left(\frac{d_1 - 1}{d_1 + 1} \right) \gamma_{1(1)} - \frac{F_2}{d_1 + 1}.$$

Подставляя эти выражения в (3.3.16) и (3.3.19), а также, используя обозначения

$$F_a = F_1 + \frac{F_2 e^{-\sigma_1 R}}{d_1 + 1} - \frac{F_3 e^{-\sigma_2(L-R)}}{d_2 + 1}, \quad F_b = F_4 - \frac{F_2 e^{-\sigma_1 R}}{b(d_1 + 1)} - \frac{F_3 e^{-\sigma_2(L-R)}}{d_2 + 1},$$

для $\gamma_{1(1)}$, $\gamma_{2(2)}$ получим систему уравнений

$$\gamma_{1(1)} \left[e^{\sigma_1 R} + \frac{d_1 - 1}{d_1 + 1} e^{-\sigma_1 R} \right] - \gamma_{2(2)} \left[1 + \frac{d_2 - 1}{d_2 + 1} e^{-2\sigma_2(L-R)} \right] = F_a, \quad (3.3.20)$$

$$\frac{\gamma_{1(1)}}{b} \left[e^{\sigma_1 R} - \frac{d_2 - 1}{d_2 + 1} e^{-\sigma_1 R} \right] + \gamma_{2(2)} \left[1 - \frac{(d_2 - 1)}{d_2 + 1} e^{-2\sigma_2(L-R)} \right] = F_b, \quad (3.3.21)$$

решение которой имеет вид

$$\gamma_{1(1)} = \frac{\Delta_1^*}{\Delta^*}, \quad \gamma_{2(2)} = \frac{\Delta_2^*}{\Delta^*}. \quad (3.3.22)$$

Здесь

$$\Delta^* = \frac{4[d_1 ch(\sigma_1 R) + sh(\sigma_1 R)][d_2 sh\sigma_2(L-R) + ch\sigma_2(L-R)]e^{-\sigma_2(L-R)}}{(d_1 + 1)(d_2 + 1)} +$$

$$+ \frac{4[d_2 ch\sigma_2(L-R) + sh\sigma_2(L-R)][d_1 sh(\sigma_1 R) + ch(\sigma_1 R)]e^{-\sigma_2(L-R)}}{(d_1 + 1)(d_2 + 1)}.$$

$$\Delta_1^* = \frac{2\{ch\sigma_2(L-R)(F_a + d_2 F_b) + sh\sigma_2(L-R)(F_b + d_2 F_a)\}e^{-\sigma_2(L-R)}}{(d_2 + 1)}.$$

$$\Delta_2^* = \frac{2}{(d_1 + 1)} [ch\sigma_1 R(F_b d_1 - F_a) + sh\sigma_1 R(F_b - d_1 F_a)].$$

Тогда из оставшейся системы уравнений (3.3.16)-(3.3.19) найдем явный вид величин $\gamma_{1(2)}$ и $\gamma_{2(1)}$:

$$\gamma_{1(2)} = \frac{\gamma_{2(2)} e^{-\sigma_2(L-R)} (d_2 - 1) - F_3}{(1 + d_2) e^{\sigma_2(L-R)}} = \frac{d_2 - 1}{d_2 + 1} e^{-2\sigma_2(L-R)} \frac{\Delta_2^*}{\Delta^*} - \frac{F_3 e^{-\sigma_2(L-R)}}{d_2 + 1}, \quad (3.3.23)$$

$$\gamma_{2(1)} = \frac{\gamma_{1(1)} (d_1 - 1) - F_2}{d_1 + 1} = \frac{d_1 - 1}{d_1 + 1} \frac{\Delta_1^*}{\Delta^*} - \frac{F_2}{d_1 + 1}. \quad (3.3.24)$$

Выражения (3.3.8) и (3.3.9) совместно с (3.3.22)-(3.3.24) являются общим решением сформулированной задачи. Нетрудно заметить, что первый и

третий слагаемые в выражениях (3.3.8) и (3.3.9) являются расходящимися и в дальнейшем ими пренебрежём. Тогда будем иметь

$$\Psi_{1N(1)}(x, \omega) = e^{-\sigma_1 x} [\gamma_{2(1)} - W_1 S_{1(2)}(x)], \quad (3.3.25)$$

$$\Psi_{1N(2)}(x, \omega) = e^{-\sigma_2(x-R)} [\gamma_{2(2)} - W_2 S_{2(2)}(x)]. \quad (3.3.26)$$

Выражения (3.3.25) и (3.3.26) совместно с (3.3.22)-(3.3.24) описывают все особенности генерации основной гармоники нелинейной тепловой волны.

Для случая $\kappa_1^{(0)} = \kappa_2^{(0)}$, $\sigma_1 = \sigma_2, b=1$ справедливы равенства $R_1 = G_1$, $R_2 = G_2$ и $d_1 = d_2$. Вычислив приближенно интегралы, посредством которых определяются функции $S_{i(j)}(x, \omega)$, для этих функций будем иметь следующие выражения:

$$S_{1(1)}(x, \omega) = -\frac{\xi \delta_2 e^{-2\sigma_1 x}}{8\sigma_1^3} \{2U_0(1+0.5\delta_2 U_0)(-1 + \frac{1}{R}(x + \frac{1}{2\sigma_1})) + \frac{EJ}{Zek_1^{(0)}} [(\frac{x^2}{R} + (x + \frac{1}{2\sigma_1})(\frac{1}{R\sigma_1} - 1)) - (x + \frac{1}{2\sigma_1})] - \frac{2W_0(1+0.5\delta_2 W_0)}{R}(x + \frac{1}{2\sigma_1})\},$$

$$\begin{aligned} S_{1(2)}(x, \omega) &= \int g_{01}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega) e^{\sigma_1 x} dx = -\frac{\xi}{2\sigma_1^2} \int g_{01}(x) dx = \\ &= -\frac{\xi}{2\sigma_1^2} \int [-1 + \{1 + \delta_2 [(1 - \frac{x}{R})(2U_0(1+0.5\delta_2 U_0) + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}}) + 2W_0(1+0.5\delta_2 W_0) \frac{x}{R}]\}^{1/2}] dx \approx \\ &= -\frac{\xi \delta_2}{4\sigma_1^2} \int [(1 - \frac{x}{R})(2U_0(1+0.5\delta_2 U_0) + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}}) + 2W_0(1+0.5\delta_2 W_0) \frac{x}{R}] dx \approx \\ &\approx -\frac{\xi \delta_2}{4\sigma_1^2} [(1 - \frac{x}{2R})2U_0(1+0.5\delta_2 U_0) + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}} (\frac{1}{2} - \frac{x}{3R}) + W_0(1+0.5\delta_2 W_0) \frac{x}{R}] x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2(1)}(x, \omega) &= \int g_{02}(x) \Phi_{L(2)}(x, \omega) e^{-\sigma_2(x-R)} dx = -\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3} \int g_{02}(x) e^{-2\sigma_2(x-R)} dx = \\ &= -\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3} \int [-1 + \{1 + \frac{2\delta_2}{L-R} [\Theta_0(1+0.5\delta_2 \Theta_0)(x-R) + W_0(1+0.5\delta_2 W_0)(L-x)]\}^{1/2}] e^{-2\sigma_2(x-R)} dx = \\ &= \frac{\xi B_1 \delta_2}{2k_1^{(0)} \sigma_2^4} \frac{1}{L-R} [\Theta_0(1+0.5\delta_2 \Theta_0)(x-R + \frac{1}{2\sigma_2}) - W_0(1+0.5\delta_2 W_0)(x-L + \frac{1}{2\sigma_1})] e^{-2\sigma_2(x-R)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{2(2)}(x, \omega) &= \int g_{02}(x) \Phi_{L(2)}(x, \omega) e^{\sigma_2(x-R)} dx = -\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3} \int g_{02}(x) dx = \\ &= -\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3} \int [-1 + \{1 + \frac{2\delta_2}{L-R} [\Theta_0(1+0.5\delta_2 \Theta_0)(x-R) + W_0(1+0.5\delta_2 W_0)(L-x)]\}^{1/2}] dx \approx \\ &\approx -\frac{\xi B_1 \delta_2}{2k_1^{(0)} \sigma_1^3} \frac{1}{L-R} [\Theta_0(1+0.5\delta_2 \Theta_0)(x-2R) + W_0(1+0.5\delta_2 W_0)(2L-x)] x \end{aligned}$$

Из этих выражений будем иметь

$$S_{1(1)}(R, \omega) \approx -\frac{\xi \delta_2}{8R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right), \quad S_{1(2)}(R, \omega) \approx -\frac{\xi \delta_2 R}{4\sigma_1^2} \left(U_0 + \frac{EJR}{6Zek_1^{(0)}} - W_0 \right),$$

$$S_{2(1)}(R, \omega) \approx \frac{\xi B_1 \delta_2}{2k_1^{(0)}\sigma_2^4 L} \left(\frac{\Theta_0}{2\sigma_2} + W_0 L \right) = \frac{\xi B_1 \delta_2 W_0}{2k_1^{(0)}\sigma_2^4}, \quad S_{2(2)}(R, \omega) \approx -\frac{\xi B_1 \delta_2 W_0 R}{k_1^{(0)}\sigma_1^3},$$

$$S_{1(2)}(R, \omega) - S_{1(1)}(R, \omega) \approx \frac{\xi \delta_2}{8R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right), \quad S_{1(2)}(0, \omega) = 0,$$

$$S_{2(1)}(R, \omega) - S_{2(2)}(R, \omega) \approx \frac{\xi B_1 \delta_2 W_0}{2k_1^{(0)}\sigma_2^4}, \quad S_{1(1)}(0, \omega) = -\frac{\xi \delta_2}{8R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right),$$

$$S_{2(1)}(L, \omega) = \frac{\xi B_1 \delta_2}{2k_1^{(0)}\sigma_2^4} \Theta_0 e^{-2\sigma_2 L}, \quad S_{2(2)}(L, \omega) = -\frac{\xi B_1 \delta_2}{2k_1^{(0)}\sigma_2^3} [\Theta_0 + 2W_0]L.$$

Принимая во внимание эти равенства, для функции F_i получим следующие выражения:

$$F_1 = \frac{W_1 \xi \delta_2}{\sigma_1^4} \left[\frac{1}{8R} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) + \frac{B_1 W_0}{2k_1^{(0)}} \right] \approx \frac{W_1 \xi \delta_2}{\sigma_1^4} \left[\frac{1}{8R} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \right],$$

$$F_2 = -W_1(1-d_1) \frac{\xi \delta_2}{8R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) + \frac{(2\delta_{4(1)} - \delta_{2(1)})U_0 \xi}{2\sigma_1^2}, \quad F_3 = \frac{\xi B_1 \delta_2 \Theta_0 (2\delta_{4(1)} - \delta_{2(1)})}{k_1^{(0)}\sigma_1^3},$$

$$F_4 = \frac{\xi \delta_2 W_1}{2\sigma_1^4} \left[\frac{B_1 W_0}{k_1^{(0)}} - \frac{1}{4R} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \right] \approx -\frac{\xi \delta_2 W_1}{8R\sigma_1^4} \left[\left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \right].$$

$$F_a = \frac{\xi \delta_2 W_1}{8R\sigma_1^4} \left[\left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \right] + \frac{B_1 (2\delta_{4(1)} - \delta_{2(1)})U_0 \xi}{k_1^{(0)}\sigma_1^3}, \quad F_b = -\frac{\xi \delta_2 W_1}{4R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right).$$

Тогда для величин Δ_i^* , $\gamma_{2(1)}$ и $\gamma_{2(2)}$ справедливы следующие выражения:

$$\Delta^* \approx 2, \quad \Delta_1^* = -\frac{\xi \delta_2 W_1}{8R\sigma_1^4} \left[\left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \right] + \frac{B_1 (2\delta_{4(1)} - \delta_{2(1)})U_0 \xi}{k_1^{(0)}\sigma_1^3},$$

$$\Delta_2^* = -\frac{\xi \delta_2 W_1}{4R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \left(2 + \frac{B_1}{k_1^{(0)}\sigma} \right) - \frac{2B_1^2 (2\delta_{4(1)} - \delta_{2(1)})U_0 \xi}{k_1^2 \sigma_1^4}.$$

$$\gamma_{2(1)} = -\frac{3\xi \delta_2 W_1}{16R\sigma_1^4} \left[\left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right) \right],$$

$$\gamma_{2(2)} = -\frac{\xi \delta_2 W_1}{4R\sigma_1^4} \left(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1} \right).$$

Отметим, что при выводе этих формул мы пренебрегли малыми вкладами типа δ_2^2 и R/L . Подставляя эти выражения в (3.3.25) и (3.3.26), для искомым функции получим следующие выражения:

$$\Psi_{1N(1)}(x, \omega) = -\frac{\xi \delta_2 W_1}{4\sigma_1^2} e^{-\sigma_1 x} \left\{ \frac{3}{4R\sigma_1^2} (U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1}) - x \left[2U_0 \left(1 - \frac{x}{2R}\right) + \frac{x}{R} W_0 + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3R}\right) \right] \right\}, \quad (3.3.27)$$

$$\Psi_{1N(2)}(x, \omega) = -\frac{\xi(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})}{2\sigma_1^2} \left\{ (U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1}) \frac{1}{R\sigma_1} - \frac{B_1}{k_1^{(0)}L} [\Theta_0(x - 2R) + W_0(2L - x)]x \right\}. \quad (3.3.28)$$

Из (3.3.27) и (3.3.28) для $\Phi_{1N(1)} = \Psi_{1N(1)} - \delta_{2(1)} T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}$ и $\Phi_{1N(2)} = \Psi_{1N(2)} - \delta_{2(2)} T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)}$

получим следующие выражения:

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) = \frac{\xi \delta_2}{2\sigma_1^2} e^{-\sigma_1 x + i\pi} \left\{ \frac{3}{8R\sigma_1^2} (U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1}) - \frac{x}{2} \left[2U_0 \left(1 - \frac{x}{2R}\right) + \frac{xW_0}{R} + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3R}\right) \right] + \left[\left(1 - \frac{x}{2R}\right) \left(2U_0 + \frac{EJx}{Zek_1^{(0)}}\right) + \frac{2xW_0}{R} \right] \right\}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (3.3.29)$$

$$\Phi_{1N(2)}(x, \omega) = \frac{\xi}{2\sigma_1^2} e^{-\sigma_2(x-R) + i\pi} \left\{ (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[(U_0 - W_0 + \frac{EJ}{2Zek_1^{(0)}\sigma_1}) \frac{1}{R\sigma_1} - \frac{B_1}{k_1^{(0)}L} (\Theta_0(x - 2R) + W_0(2L - x))x \right] - \frac{B_1 \delta_{(2)}}{k_1^{(0)}\sigma_1(L - R)} [\Theta_0(x - R) + W_0(L - x)] \right\}, \quad R \leq x \leq L. \quad (3.3.30)$$

Из (3.3.29) и (3.3.30) следует, что имеет место следующие частотные зависимости амплитуды возбуждаемой основной гармоникой нелинейной тепловой волны:

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \approx \frac{C_1}{\omega} + \frac{C_2}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega^{5/2}},$$

$$\Phi_{1N(2)}(x, \omega) \approx \frac{K_1}{\omega} + \frac{K_2}{\omega^{3/2}} + \frac{K_3}{\omega^2}.$$

Здесь величины C_i и K_i являются константами. Из (3.3.29) и (3.3.30) также следует, что $|\Phi_{1N(1)}(x, \omega)| \sim \delta_2$, а $|\Phi_{1N(2)}(x, \omega)| \sim A(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})$ и $\delta_{(2)}$.

3.4. Решение системы уравнений для второй гармоники нелинейного колебания температуры

Для этого случая граничные условия (3.1.5) позволяют получить равенства

$$\Phi_{2N(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{2N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_{2N(1)}(x, t) + 0.5\delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(x, t) \right) \Big|_{x=R} = \frac{\kappa_2^{(0)}}{\kappa_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_{2N(2)} + 0.5\delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(x, t) \right) \Big|_{x=R}. \quad (3.4.2)$$

Тогда, очевидно, возникает необходимость иметь уравнение для функции $\Psi_{2N(i)}(x, t) = \Phi_{2N(i)}(x, t) + 0.5\delta_{2(i)} \Phi_{L(i)}^2(x, t)$. Из (3.1.13) и (3.1.14) для $\Psi_{2N(i)}(x, t)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{2N(i)}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{2N(i)}(x, t) = \frac{\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}}{2\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{L(i)}^2(x, t), \quad i=1,2, \quad (3.4.3)$$

а из (3.1.3) и (3.1.4) получим следующие граничные условия для $\Psi_{2N(i)}(x, t)$:

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Psi_{2N(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = B_1 \Psi_{2N(1)}(x, t) + (D_1 - 0.5\delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(x, t) \Big|_{x=L}, \quad (3.4.4)$$

$$-\kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Psi_{2N(2)}}{\partial x} \Big|_{x=L} = B_2 \Psi_{2N(2)}(x, t) + (D_2 - 0.5\delta_{2(2)} B_2) \Phi_{L(2)}^2(x, t) \Big|_{x=L}. \quad (3.4.5)$$

Как и ранее, положим $\Phi_{L(i)}^2(x, t) = \Phi_{L(i)}^2(x, \omega) e^{2i\omega t}$, $\Psi_{2N(i)}(x, t) = \Psi_{2N(i)}(x, \omega) e^{2i\omega t}$ и тогда из (3.4.3) будем иметь

$$\frac{d^2 \Psi_{2N(i)}(x, \omega)}{dx^2} - q_{2(i)}^2 \Psi_{2N(i)}(x, \omega) = R_{2(i)} q_{2(i)} \Phi_{L(i)}^2(x, \omega), \quad i=1,2, \quad (3.4.6)$$

где $R_{2(i)} = 0.25(\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}) q_{2(i)}$, $q_{2(i)}^2 = 2i\omega / \chi_i^{(0)} = (1+i) / \mu_{2(i)}(\omega)$, $\mu_{2(i)}(\omega) = (\chi_{0(i)} / 2\omega)^{1/2}$, $q_{2(i)}^2 = 2\sigma_i^2$.

Решение (3.4.6) имеет следующий вид:

$$\Psi_{2N(1)}(x, \omega) = \mu_{1(1)} e^{q_{2(1)} x} + \mu_{1(2)} e^{-q_{2(1)} x} + R_{2(1)} [e^{q_{2(1)} x} W_{1(1)}(x, \omega) - e^{-q_{2(1)} x} W_{1(2)}(x, \omega)], \quad (3.4.7)$$

$$\Psi_{2N(2)}(x, \omega) = \mu_{2(1)} e^{q_{2(2)}(x-R)} + \mu_{2(2)} e^{-q_{2(2)}(x-R)} + R_{2(2)} [e^{q_{2(2)}(x-R)} W_{2(1)}(x, \omega) - e^{-q_{2(2)}(x-R)} W_{2(2)}(x, \omega)], \quad (3.3.8)$$

где

$$W_{1(1)}(x, \omega) = \int e^{-q_{2(1)}x} \Phi_{L(1)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{1(2)}(x, \omega) = \int e^{q_{2(1)}x} \Phi_{L(1)}^2(x, \omega) dx,$$

$$W_{2(1)}(x, \omega) = \int e^{-q_{2(2)}(x-R)} \Phi_{L(2)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{2(2)}(x, \omega) = \int e^{q_{2(2)}(x-R)} \Phi_{L(2)}^2(x, \omega) dx.$$

Для определения величин $\mu_{1(1)}$, $\mu_{1(2)}$, $\mu_{2(1)}$ и $\mu_{2(2)}$ из граничных условий (3.4.1), (3.4.2), (3.4.4) и (3.4.5) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_{1(1)} e^{q_{2(1)}R} + \mu_{1(2)} e^{-q_{2(1)}R} + R_{2(1)} [W_{1(1)}(R, \omega) + W_{1(2)}(R, \omega)] - 0.5 \delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(R, \omega) = \\ = \mu_{2(1)} + \mu_{2(2)} + R_{2(2)} [W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega)] - 0.5 \delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(R, \omega) \end{aligned}, \quad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} \mu_{1(1)} e^{q_{2(1)}R} - \mu_{1(2)} e^{-q_{2(1)}R} + \frac{R_{2(1)}}{\sigma_{2(1)}} [e^{q_{2(1)}R} \Phi_{L(1)}^2(R, \omega) + e^{-q_{2(1)}R} \Phi_{L(1)}^2(R, \omega)] = \\ = \frac{\kappa_2^{(0)} q_{2(2)}}{\kappa_1^{(0)} q_{2(1)}} [(\mu_{2(1)} - \mu_{2(2)}) + \frac{2R_{2(2)}}{q_{2(2)}} \Phi_{L(2)}^2(R, \omega)] \end{aligned}, \quad (3.4.10)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1^{(0)} q_{2(1)} [\mu_{1(1)} - \mu_{1(2)} + \frac{2R_{2(1)}}{q_{2(1)}} \Phi_{L(1)}^2(0, \omega)] = \\ = B_1 \{ \mu_{2(1)} + \mu_{2(2)} + R_{2(1)} [W_{1(1)}(0, \omega) + W_{1(2)}(0, \omega)] \} + (D_1 - 0.5 \delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(0, \omega) \end{aligned}, \quad (3.4.11)$$

$$\begin{aligned} -\kappa_2^{(0)} q_{2(2)} \{ [\mu_{2(1)} e^{q_{2(2)}(L-R)} - \mu_{2(2)} e^{-q_{2(2)}(L-R)}] + \frac{2R_{2(2)}}{q_{2(2)}} ch[q_{2(2)}(L-R)] \Phi_{L(2)}^2(L, \omega) \} = \\ = B_2 \{ (\mu_{2(1)} e^{q_{2(2)}(L-R)} + \mu_{2(2)} e^{-q_{2(2)}(L-R)} + R_{2(2)} [W_{2(1)}(L, \omega) + W_{2(2)}(L, \omega)]) \} + \\ + (D_2 - 0.5 \delta_{2(2)} B_2) \Phi_{L(2)}^2(L, \omega) \end{aligned}. \quad (3.4.12)$$

В (3.4.9)-(3.4.12) введем следующие обозначения:

$$G_1 = R_{2(2)} [W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega)] - R_{2(1)} [W_{1(1)}(R, \omega) + W_{1(2)}(R, \omega)] + 0.5 [\delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(R, \omega) - \delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(R, \omega)], \quad \lambda_1 = \frac{\kappa_1^{(0)} q_{2(1)}}{B_1},$$

$$G_2 = \frac{2R_{2(2)}}{q_{2(2)}} \Phi_{L(2)}^2(R, \omega) - \frac{2R_{2(1)}}{q_{2(1)}} ch(q_{2(1)} R) \Phi_{L(1)}^2(R, \omega), \quad \lambda_2 = \frac{\kappa_2^{(0)} q_{2(2)}}{B_2},$$

$$G_3 = \frac{1}{B_1} (D_1 - 0.5 \delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(0, \omega) + R_{2(1)} [W_{1(1)}(0, \omega) + W_{1(2)}(0, \omega)] - \frac{2\lambda_1 R_{2(1)}}{q_{2(1)}} \Phi_{L(1)}^2(0, \omega),$$

$$\begin{aligned} G_4 = \frac{1}{B_2} (D_2 - 0.5 \delta_{2(2)} B_2) \Phi_{L(2)}^2(L, \omega) + R_{2(2)} [W_{2(1)}(L, \omega) + W_{2(2)}(L, \omega)] + \\ + \frac{2\lambda_2 R_{2(2)}}{q_{2(2)}} ch q_{2(2)}(L-R) \Phi_{L(2)}^2(L, \omega) \end{aligned}.$$

Тогда систему (3.4.9)-(3.4.12) можно переписать в виде

$$\mu_{1(1)}e^{q_{2(1)}R} + \mu_{1(2)}e^{-q_{2(1)}R} - (\mu_{2(1)} + \mu_{2(2)}) = G_1, \quad (3.4.13)$$

$$\mu_{1(1)}e^{q_{2(1)}R} - \mu_{1(2)}e^{-q_{2(1)}R} - b(\mu_{2(1)} - \mu_{2(2)}) = G_2, \quad (3.4.14)$$

$$\lambda_1(\mu_{1(1)} - \mu_{1(2)}) - (\mu_{2(1)} + \mu_{2(2)}) = G_3, \quad (3.4.15)$$

$$-\lambda_2[\mu_{2(1)}e^{q_{2(2)}(L-R)} - \mu_{2(2)}e^{-q_{2(2)}(L-R)}] - (\mu_{2(1)}e^{q_{2(2)}(L-R)} + \mu_{2(2)}e^{-q_{2(2)}(L-R)}) = G_4. \quad (3.4.16)$$

Суммируя (3.4.13) с (3.4.14), а затем (3.4.14) с (3.4.15), получим следующие уравнения:

$$2\mu_{1(1)}e^{q_{2(1)}R} - \mu_{2(1)}(1+b) + \mu_{2(2)}(b-1) = G_1 + G_2, \quad (3.4.17)$$

$$\mu_{1(1)}\left(\lambda_1 + \frac{e^{q_{2(1)}R}}{b}\right) - \mu_{1(2)}\left(\lambda_1 + \frac{e^{-q_{2(1)}R}}{b}\right) - 2\mu_{2(1)} = G_2 + G_3. \quad (3.4.18)$$

Исключив из (3.4.14) величины $\mu_{2(1)}$ и $\mu_{2(2)}$ и выполняя простые выкладки в (3.4.16), получим

$$\mu_{1(1)}(\lambda_1 - e^{q_{2(1)}R}) - \mu_{1(2)}(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)}R}) = G_3 - G_1, \quad (3.4.19)$$

$$\mu_{2(1)}e^{q_{2(2)}(L-R)}(\lambda_2 + 1) + \mu_{2(2)}e^{-q_{2(2)}(L-R)}(1 - \lambda_2) = -G_4. \quad (3.4.20)$$

Из (3.4.19) и (3.4.20) для $\mu_{2(1)}$ и $\mu_{2(2)}$ получим выражения

$$\mu_{1(1)} = \frac{\mu_{1(2)}(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)}R}) + G_3 - G_1}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)}R}}, \quad \mu_{2(1)} = \frac{\mu_{2(2)}(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)}(L-R)} - G_4}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)}(L-R)}}, \quad (3.4.21)$$

постановка которых в (3.4.17) и (3.4.18) позволяет получить следующую замкнутую систему уравнений для $\mu_{1(2)}$ и $\mu_{2(2)}$:

$$\frac{2[\mu_{1(2)}(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)}R}) + G_3 - G_1]e^{q_{2(1)}R}}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)}R}} - \frac{(1+b)[\mu_{2(2)}(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)}(L-R)} - G_4]}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)}(L-R)}} + \mu_{2(2)}(b-1) = G_1 + G_2,$$

$$\left[\lambda_1 + \frac{e^{q_{2(1)}R}}{b}\right] \frac{\mu_{1(2)}(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)}R}) + G_3 - G_1}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)}R}} - \mu_{1(2)}\left(\lambda_1 + \frac{e^{-q_{2(1)}R}}{b}\right) - \frac{2[\mu_{2(2)}(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)}(L-R)} - G_4]}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)}(L-R)}} = G_2 + G_3.$$

Эту систему уравнений удобно представить в виде

$$\begin{cases} \mu_{1(2)}b_{11} - \mu_{2(2)}b_{12} = \Psi_1 \\ \mu_{1(2)}b_{21} + \mu_{2(2)}b_{22} = \Psi_2 \end{cases}. \quad (3.4.22)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$b_{11} = \frac{2(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}})e^{q_{2(1)R}}}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}}, \quad b_{12} = \frac{(1+b)(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}}}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}} + (1-b),$$

$$b_{21} = (\lambda_1 + \frac{e^{q_{2(2)R}}}{b}) \frac{(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}})}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}} - (\lambda_1 + \frac{e^{-q_{2(2)R}}}{b}), \quad b_{22} = -\frac{2(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}}}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}}.$$

$$\Psi_1 = G_1 + G_2 - \frac{2e^{q_{2(1)R}}(G_3 - G_1)}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}} - \frac{(1+b)G_4}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(1)(L-R)}}},$$

$$\Psi_2 = G_2 + G_3 - \frac{(\lambda_1 + \frac{e^{q_{2(1)R}}}{b})(G_3 - G_1)}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}} - \frac{2G_4}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}}.$$

Решив систему уравнений (3.4.22) и подставляя её результат в выражение (3.4.21), окончательно будем иметь

$$\mu_{1(1)} = \frac{(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}}) \Delta_1^{**}}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}} \Delta^{**}} + \frac{G_3 - G_1}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}}, \quad \mu_{1(2)} = \frac{\Delta_1^{**}}{\Delta^{**}}, \quad (3.4.23)$$

$$\mu_{2(1)} = \frac{(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}} \Delta_2^{**}}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}} \Delta^{**}} - \frac{G_4}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}}, \quad \mu_{2(2)} = \frac{\Delta_2^{**}}{\Delta^{**}}. \quad (3.4.24)$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta^{**} = b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} = \frac{4e^{q_{2(1)R}}(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}})(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}}}{(\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}})(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}} -$$

$$- [(1-b) \frac{(1+b)(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}}}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}}] [(\lambda_1 + \frac{e^{q_{2(2)R}}}{b}) \frac{(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}})}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}} - (\lambda_1 + \frac{e^{-q_{2(2)R}}}{b})]$$

$$\Delta_1^{**} = \Psi_1 b_{22} + b_{12} \Psi_2 = \frac{[(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}}] \Psi_1}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}} + [\frac{(1+b)(\lambda_2 - 1)e^{-q_{2(2)(L-R)}}}{(\lambda_2 + 1)e^{q_{2(2)(L-R)}}} + (1-b)] \Psi_2,$$

$$\Delta_2^{**} = b_{11} \Psi_2 - b_{21} \Psi_1 = \frac{2\Psi_2(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}})e^{q_{2(1)R}}}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}} - [(\lambda_1 + \frac{e^{q_{2(2)R}}}{b}) \frac{(\lambda_1 + e^{-q_{2(1)R}})}{\lambda_1 - e^{q_{2(1)R}}} - (\lambda_1 + \frac{e^{-q_{2(2)R}}}{b})] \Psi_1.$$

Нетрудно заметить, что первый и третье слагаемые в (3.4.7) и (3.4.8) являются расходящимися. В этой связи в дальнейшем ими пренебрегаем, и будем иметь

$$\Psi_{2N(1)}(x, \omega) = e^{-q_{2(1)x}} [\mu_{1(2)} - R_{2(1)} W_{1(2)}(x, \omega)], \quad (3.4.25)$$

$$\Psi_{2N(2)}(x, \omega) = e^{-q_{2(2)(x-R)}} [\mu_{2(2)} - R_{2(2)} e^{-q_{2(2)(x-R)}} W_{2(2)}(x, \omega)]. \quad (3.4.26)$$

Выражения (3.4.25) и (3.4.26) совместно с (3.4.23) – (3.4.24) являются общим решением задачи возбуждения второй гармоники нелинейной тепло-

вой волны для рассматриваемого образца. Отметим, что основным механизмом этой генерации является тепловая нелинейность теплофизических величин образца, а также степени её черноты и коэффициента теплоотдачи.

Подробно рассмотрим случай, когда $\kappa_1^{(0)} = \kappa_2^{(0)}$, $q_{2(1)} = q_{2(2)}$, $\sigma_1 = \sigma_2$, $b = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и справедливы равенства $R_1 = G_1$, $R_2 = G_2$, $D_1 = D_2$, $d_1 = d_2$. Вычислив интегралы, посредством которых определяются функции $W_{i(j)}(x, \omega)$, для этих функций будем иметь следующие выражения:

$$W_{1(1)}(x, \omega) = -\left(\frac{\xi}{2\sigma_1}\right)^2 \frac{1}{(q_{2(1)} + 2\sigma_1)} e^{-(q_{2(1)} + 2\sigma_1)x}, \quad W_{1(2)}(x, \omega) = \left(\frac{\xi}{2\sigma_1}\right)^2 \frac{1}{(q_{2(1)} - 2\sigma_1)} e^{(q_{2(1)} - 2\sigma_1)x},$$

$$W_{2(1)}(x, \omega) = -\left(\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3}\right)^2 \frac{1}{(q_{2(2)} + 2\sigma_2)} e^{-(q_{2(2)} + 2\sigma_2)(x-R)}, \quad W_{2(2)}(x, \omega) = \left(\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3}\right)^2 \frac{e^{(q_{2(2)} - 2\sigma_2)(x-R)}}{(q_{2(2)} - 2\sigma_2)}.$$

$$W_{1(1)}(R, \omega) + W_{1(2)}(R, \omega) = \left(\frac{\xi}{2\sigma_1}\right)^2 \frac{4\sigma_1}{q_{2(1)}^2 - 4\sigma_1^2}, \quad W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega) = \left(\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3}\right)^2 \frac{4\sigma_2}{q_{2(2)}^2 - 4\sigma_2^2}.$$

Используя эти выражения для величин G_1 , G_2 , G_3 и G_4 , а также Ψ_1 и Ψ_2 , введенные выше, получим следующие приближенные выражения:

$$G_1 \approx \left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^2 \left[0.5\delta_{2(1)} \left(\frac{1}{4} - \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \right) + \frac{(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \right) \right],$$

$$G_2 \approx \frac{1}{2} (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^2 \left[\frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} - \frac{1}{4} \right],$$

$$G_3 \approx \left(\frac{\xi}{2\sigma_1}\right)^2 \left[\frac{1}{B_1} (D_1 - 0.5\delta_{2(1)} B_1) + \frac{(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{k_1^{(0)}}{\sqrt{2} B_1} \right) \right], \quad G_4 = 0,$$

$$G_1 + G_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^2 \left[\frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} ((\sqrt{2} - 1)\delta_{(2)} - \delta_{2(1)} + 0.25(\delta_{(2)}(4 - \sqrt{2}) - 4\delta_{2(1)})) \right],$$

$$G_3 - G_1 = \left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^2 \left\{ \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)} B_1}{4B_1} + \frac{B_1^2(\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)})}{2(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} - \frac{\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{4} \left[1 + \frac{k_1^{(0)}}{\sqrt{2} B_1} \right] \right) - \frac{\delta_{2(1)}}{8} \right\},$$

$$G_2 + G_3 = \left(\frac{\xi}{\sigma_1}\right)^2 \{ (\delta_{(2)} + \delta_{2(1)}) \left[\frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} + \frac{2\sqrt{2} - 1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} \right] + \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)} B_1}{4B_1} \},$$

$$\Psi_1 \approx \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \left[\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \delta_{(2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{2(1)} - \frac{2}{\lambda_1-1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1-\sqrt{2})\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} \right] - \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4-\sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \frac{\sqrt{2}(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})}{\lambda_1-1} \left(1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{k_1^{(0)}}{\sqrt{2}B_1}\right)\right) + \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{\delta_{2(1)}}{4} \right\}$$

$$\Psi_2 \approx \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \left[\delta_{(2)} - \delta_{2(1)} - \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1-\sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \right] + \right. \\ \left. + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{8B_1}\right) \right] + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \frac{\delta_{2(1)}}{8} - \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} \right\}$$

$$\Psi_2 - \Psi_1 \approx \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \left[\delta_{(2)} - \delta_{2(1)} - \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1-\sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \delta_{(2)} + \frac{\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\lambda_1-1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1-\sqrt{2})\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} \right] + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{8B_1}\right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1-1} \left(\frac{3}{4} - \frac{k_1^{(0)}}{4\sqrt{2}B_1}\right) - \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4-\sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{\delta_{2(1)}}{4} + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \frac{\delta_{2(1)}}{8} - \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} \right\}$$

$$\Psi_1 + 2\Psi_2 \approx \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \left[\frac{(\sqrt{2}-1)\delta_{(2)}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{2(1)} - \frac{2}{\lambda_1-1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1-\sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) - \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1-\sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} \right] - \frac{1}{\lambda_1-1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} [1 - 2(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})] + \right. \\ \left. + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{4B_1}\right) \right] + \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1-1} \left(\frac{3}{4} - \frac{k_1^{(0)}}{4\sqrt{2}B_1}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4-\sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \frac{\delta_{2(1)}}{4} \frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1} \right\}$$

Также, принимая во внимание равенства

$$b_{11} = 2\left(\frac{\lambda_1+1}{\lambda_1-1}\right), \quad b_{12} = 0, \quad b_{21} = \frac{2(\lambda_1+1)}{\lambda_1-1}, \quad b_{22} = 0$$

$$\Delta^{**} \approx 4e^{-2q_{2(2)}(L-R)}, \quad \Delta_1^{**} \approx \left(\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2+1}\right) [\Psi_1 + (1+b)\Psi_2] e^{-2q_{2(2)}(L-R)}, \quad \Delta_2^{**} \approx \frac{2(\lambda_1+1)}{\lambda_1-1} (\Psi_2 - \Psi_1) e^{-2q_{2(2)}(L-R)}$$

для $\mu_{1(2)}$ и $\mu_{2(2)}$ будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\mu_{1(2)} = & \frac{\lambda_2 - 1}{4(\lambda_2 + 1)} \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \left[\frac{(\sqrt{2} - 1)\delta_{(2)}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{2(1)} - \frac{2}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} + \right. \right. \\
& + 2(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) - \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} \left. \right] - \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} [1 - 2(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})] + \\
& + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{4B_1} \right) \right] + \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{4} - \frac{k_1^{(0)}}{4\sqrt{2}B_1} \right) \left. \right\} \\
& + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4 - \sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \frac{\delta_{2(1)}}{4} \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{2(2)} = & \frac{2(\lambda_1 + 1)}{4(\lambda_1 - 1)} \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} [\delta_{(2)} - \delta_{2(1)} - \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \delta_{(2)} + \right. \\
& + \frac{\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} \left. \right] + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} \right) \right] - \\
& - \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{4} - \frac{k_1^{(0)}}{4\sqrt{2}B_1} \right) - \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4 - \sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{\delta_{2(1)}}{4} + \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \frac{\delta_{2(1)}}{8} - \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Примем во внимание, что из выражений (3.4.25) и (3.4.26) следуют следующие выражения для $\Phi_{2N(1)}(x, \omega)$ и $\Phi_{2N(2)}(x, \omega)$:

$$\Phi_{2N(1)}(x, \omega) = e^{-q_{2(1)}x} [\mu_{1(2)} - R_{2(1)}W_{1(2)}(x, \omega)] - 0.5\delta_{2(1)}\Phi_{L(1)}^2, \quad (3.4.27)$$

$$\Phi_{2N(2)}(x, \omega) = e^{-q_{2(2)}(x-R)} [\mu_{2(2)} - R_{2(2)}e^{-q_{2(2)}(x-R)}W_{2(2)}(x, \omega)] - 0.5\delta_{2(2)}\Phi_{L(2)}^2. \quad (3.4.28)$$

Подставляя $\mu_{1(2)}$ в (3.4.27) и $\mu_{2(2)}$ в (3.4.28) будем иметь:

$$\begin{aligned}
\Phi_{2N(1)}(x, \omega) = & e^{-q_{2(1)}x} \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2}\right)^2 \left[\frac{\lambda_2 - 1}{(\lambda_2 + 1)} \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} \left[\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \delta_{(2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{2(1)} - \right. \right. \right. \\
& - \frac{2}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} + 2(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) - \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} \left. \right] - \\
& - \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} [1 - 2(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})] + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \right. \\
& + \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{4B_1} \right) \left. \right] + \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{4} - \frac{k_1^{(0)}}{4\sqrt{2}B_1} \right) \left. \right\} + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4 - \sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \\
& + \frac{\delta_{2(1)}}{4} \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} - \frac{(\delta_{(2)} - \delta_{2(1)})}{4(\sqrt{2} - 1)} e^{-(\sqrt{2}-1)q_{2(1)}x} - \frac{\delta_{2(1)}}{\sqrt{2} - 1} e^{-\sqrt{2}q_{2(1)}x} \left. \right]. \quad (3.4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{2N(2)}(x, \omega) = e^{-q_{2(2)}(x-R)} & \left[\frac{1}{2} \frac{(\lambda_1 + 1)}{(\lambda_1 - 1)} \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2} \right)^2 \left\{ \frac{B_1^2}{(k_1^{(0)})^2 \sigma_1^2} [\delta_{(2)} - \delta_{2(1)} - \right. \right. \\
& - \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{2} - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \delta_{(2)} + \frac{\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\lambda_1 - 1} \frac{\sqrt{2}\delta_{(2)} + (1 - \sqrt{2})\delta_{2(1)}}{\sqrt{2}} \left. \right\} + \\
& + (\delta_{(2)} - \delta_{2(1)}) \left[\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} + \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} + \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{k_1^{(0)}}{8B_1} \right) \right] - \frac{\sqrt{2}}{\lambda_1 - 1} \left(\frac{3}{4} - \frac{k_1^{(0)}}{4\sqrt{2}B_1} \right) - \\
& - \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} + \frac{1}{4\sqrt{2}} ((4 - \sqrt{2})\delta_{(2)} - 4\delta_{2(1)}) + \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{\delta_{2(1)}}{4} + \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1} \frac{\delta_{2(1)}}{8} - \\
& - \frac{1}{\lambda_1 - 1} \frac{D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1}{2B_1} \left. \right\} + \left(\frac{\xi B_1}{k_1^{(0)} \sigma_1^3} \right)^2 e^{-\sqrt{2}q_{2(2)}(x-R)} \left(\frac{\delta_{(2)} - \delta_{2(2)}}{4(\sqrt{2} - 1)} - 0.5\delta_{2(2)} \right)]. \quad (3.4.30)
\end{aligned}$$

Из (3.4.29) и (3.4.30) следуют следующие формы частотной зависимости амплитуды возбуждаемой второй гармоники тепловой волны в облучаемой и необлучаемой средах

$$\begin{aligned}
\Phi_{2N(1)}(x, \omega) & \sim \frac{A_1}{\omega^2} + \frac{A_2}{\omega^3}, \\
\Phi_{2N(2)}(x, \omega) & \sim \frac{H_1}{\omega^2} + \frac{H_2}{\omega^3} + \frac{H_3}{\omega^4}.
\end{aligned}$$

Здесь A_i и H_i коэффициенты, которые зависят от теплофизических параметров обоих слоев образца и их термических коэффициентов.

Подводя итоги, можно заключить, что в рамках настоящей главы работы предложена теория генерации линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках посредством гармонически модулированного потока ионов. Установлено, что частотная зависимость амплитуды линейного составляющего возбуждаемой тепловой волны в облучаемом слое $\propto \omega^{-1}$, в то время как для необлучаемого слоя $\propto \omega^{-3/2}$. Также получены общие выражения для основной и второй гармоник нелинейного составляющего тепловых волн, полученные с учетом температурной зависимости теплофизических и оптических параметров образца. Выявлено, что частотные зависимости амплитуды возбуждаемых основной и второй гармоник нелинейной тепловой волны в облучаемом и необлучаемом слоях образца имеют вид

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \approx \frac{C_1}{\omega} + \frac{C_2}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega^{5/2}},$$

$$\Phi_{1N(2)}(x, \omega) \approx \frac{K_1}{\omega} + \frac{K_2}{\omega^{3/2}} + \frac{K_3}{\omega^2},$$

$$\Phi_{2N(1)}(x, \omega) \sim \frac{A_1}{\omega^2} + \frac{A_2}{\omega^3},$$

$$\Phi_{2N(2)}(x, \omega) \sim \frac{H_1}{\omega^2} + \frac{H_2}{\omega^3} + \frac{H_3}{\omega^4}.$$

Здесь величины C_i , K_i , A_i и H_i являются константами.

ГЛАВА IV. ОСОБЕННОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНКАХ НА ТВЕРДОЙ ПОДЛОЖКЕ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИ МОДУЛИРОВАННЫМ ИОННЫМ ПУЧКОМ

В предыдущей главе нами были рассмотрены особенности генерации линейных и нелинейных тепловых волн в пленках диэлектриков, находящихся в воздухе посредством гармонически модулированного ионного пучка с частотой ω [12-16]. Однако случай, когда пленка прикреплена на подложке не рассматривался. Целью настоящей главы работы является обобщение результатов предыдущей главы с учетом наличия подложки [107-112].

4.1. Теплофизическая модель задачи

Как и в разделе 3.1., предположим, что облучение образца осуществляется в воздушной среде и примем во внимание то, что толщина диэлектрика - L_1 значительно больше длины пробега ионов R в нём. Тогда для описания исследуемого явления будем исходить из следующей системы нелинейных уравнений теплопроводности:

$$C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x}] + \frac{EJ}{2RZe} \Theta(R-x)(1 + e^{i\omega t}), \quad 0 \leq x \leq R, \quad (4.1.1)$$

$$C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x}], \quad R \leq x \leq L_1, \quad (4.1.2)$$

$$C_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\kappa_3(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial x}]. \quad L_1 \leq x \leq L_1 + L_2. \quad (4.1.3)$$

где $\Theta(R-x)$ - единичная функция Хэвисайда, а C , κ - теплоемкость единицы объема и коэффициент теплопроводности соответствующих слоев, соответственно, а J , Z , E - плотность тока пучка, заряд иона в единицах заряда электрона, начальная энергия ионов, соответственно.

Принимая во внимание, что начальное значение температуры образца T_0 , шесть граничных условий, необходимых для решения системы (4.1.1)-(4.1.3), будут иметь вид [4]

$$\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1(T_1 - T_0) + A_1 \sigma_0 (T_1^4 - T_0^4), \quad (4.1.4)$$

$$-\kappa_3(T_3) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = h_3(T_3 - T_0) + A_3 \sigma_0 (T_3^4 - T_0^4), \quad (4.1.5)$$

$$T_1(x) \Big|_{x=R} = T_2(x) \Big|_{x=R}, \quad T_2(x) \Big|_{x=R} = T_3(x) \Big|_{x=R}, \quad (4.1.6)$$

$$\kappa_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad \kappa_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \kappa_3(T_3) \frac{\partial T_3}{\partial x} \Big|_{x=L_1}. \quad (4.1.7)$$

Следуя [7,8,50-57], будем считать, что температурная зависимость теплофизических и оптических величин имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa_i(T_i) &= \kappa_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{2(i)} T_i], \quad A_i(T_i) = A_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{3(i)} T_i], \quad C_i(T_i) = C_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{(i)} T_i] \\ h_i(T_i) &= h_i^{(0)}(T_0)[1 + \delta_{4(i)} T_i], \end{aligned}$$

где

$$\delta_{(i)} = \frac{1}{C_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial C_i}{\partial T}, \quad \delta_{2(i)} = \frac{1}{\kappa_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial \kappa_i}{\partial T}, \quad \delta_{3(i)} = \frac{1}{A_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial A_i}{\partial T}, \quad \delta_{4(i)} = \frac{1}{h_i^{(0)}(T_0)} \frac{\partial h_i}{\partial T}$$

являются термическими коэффициентами этих величин.

Величину возмущения температуры $T_i'(x, t)$ представим в виде суммы линейных $\Phi_{L(i)}(x, t)$, нелинейных $\Phi_{N(i)}(x, t)$ и локально-равновесных $T_{0(i)}(x)$ составляющих, т.е. в виде

$$T_i'(x, t) = T_{0(i)}(x) + \Phi_{L(i)}(x, t) + \Phi_{1N(i)}(x, t) + \Phi_{2N(i)}(x, t). \quad (4.1.8)$$

Здесь $\Phi_{1N(i)}$ и $\Phi_{2N(i)}$ - нелинейные составляющие колебания температуры соответствующего слоя на основной и второй гармониках. С учетом этого обстоятельства система уравнений (4.1.1)-(4.1.3) распадается на следующие системы уравнений для $T_{0(i)}(x)$, $\Phi_{L(i)}(x, t)$, $\Phi_{1N(i)}(x, t)$ и $\Phi_{2N(i)}(x, t)$:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0(1)}}{dx} + \frac{\delta_{2(1)}}{2} \frac{d(T_{0(1)})^2}{dx} \right] = -\frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (4.1.9)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0(2)}(x)}{dx} + \frac{\delta_{2(2)}}{2} \frac{d(T_{0(2)})^2}{dx} \right] = 0, \quad R \leq x \leq L_1, \quad (4.1.10)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{dT_{0(3)}(x)}{dx} + \frac{\delta_{2(3)}}{2} \frac{d(T_{0(3)})^2}{dx} \right] = 0, \quad L_1 \leq x \leq L_2. \quad (4.1.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial t} = -\frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)} \exp(i\omega t), \quad 0 \leq x \leq R, \quad (4.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial t} = 0, \quad R \leq x \leq L, \quad (4.1.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{L(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{L(3)}}{\partial t} = 0, \quad L_1 \leq x \leq L_2, \quad (4.1.14)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(1)}}{\partial t} = -(\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(1)}(x, t)), \quad (4.1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(2)}}{\partial t} = -(\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(2)}(x, t)), \quad (4.1.16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(3)}}{\partial t} = -(\delta_{2(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(3)}}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(3)}(x, t)), \quad (4.1.17)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(1)}^2(x, t)), \quad (4.4.18)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(2)}^2(x, t)). \quad (4.1.19)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(3)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (\delta_{2(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(3)}}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(\Phi_{L(3)}^2(x, t)). \quad (4.1.20)$$

В (4.1.9)-(4.1.20) $I = EJ / ZeR$, $\chi_i^{(0)} = \kappa_i^{(0)} / C_p^{(0)}$ - температуропроводность соответствующих слоев при $T = T_0$.

Из (4.1.4)-(4.1.7) получим следующие граничные условия для $\Phi_{L(i)}(x, \omega)$:

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = B_1 \Phi_{L(1)} \Big|_{x=0}, \quad \Phi_{L(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{L(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad (4.1.21)$$

$$\Phi_{L(2)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} = \Phi_{L(3)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1}, \quad \kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(1)}}{\partial x} \Big|_{x=R} = \kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial x} \Big|_{x=R}, \quad (4.1.22)$$

$$\kappa_2^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(2)}}{\partial x} \Big|_{x=L_1} = \kappa_3^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(3)}}{\partial x} \Big|_{x=L_1}, \quad -\kappa_3^{(0)} \frac{\partial \Phi_{L(3)}}{\partial x} \Big|_{x=L_3} = B_3 \Phi_{L(3)} \Big|_{x=L_3}, \quad (4.1.23)$$

где $B_i = h_i^{(0)} + 4\sigma A_i^{(0)} T_0^3$. Во второй главе нами получено решение системы уравнений (4.1.9)-(4.1.11), удовлетворяющее граничные условия (4.1.4)-

(4.1.7), а также выполнен анализ особенностей формирования стационарного поля температуры.

4.2. Решение системы уравнений для линейной составляющей колебания температуры

Принимая во внимание, что падающий пучок ионов модулирован по гармоническому закону, величины $\Phi_{L(i)}(x, t)$ в (4.1.12)-(4.1.14) представим в виде $\Phi_{L(i)}(x, t) = e^{i\omega t} \Phi_{L(i)}(x, \omega)$ и будем иметь

$$\frac{d^2 \Phi_{L(1)}}{dx^2} - \sigma_1^2 \Phi_{L(1)} = -\xi, \quad (4.2.1)$$

$$\frac{d^2 \Phi_{L(2)}}{dx^2} - \sigma_2^2 \Phi_{L(2)} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{d^2 \Phi_{L(3)}}{dx^2} - \sigma_3^2 \Phi_{L(3)} = 0, \quad (4.2.3)$$

где $\xi = \frac{I}{\kappa_1^{(0)}(T_0)}$, $\sigma_i^2 = i\omega / \chi_i^{(0)}$, $\sigma_i = (1+i) / \mu_i$, $\mu_i = (2\chi_i^{(0)} / \omega)^{1/2}$ - длина тепловой диффузии.

Очевидно, что решение системы уравнений (4.2.1)-(4.2.3) имеет вид

$$\Phi_{L(1)}(x, \omega) = \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \alpha_1 e^{\sigma_1 x} + \alpha_2 e^{-\sigma_1 x}, \quad (4.2.4)$$

$$\Phi_{L(2)}(x, \omega) = \beta_1 e^{\sigma_2(x-R)} + \beta_2 e^{-\sigma_2(x-R)}. \quad (4.2.5)$$

$$\Phi_{L(3)}(x, \omega) = \gamma_1 e^{\sigma_3(x-L_4)} + \gamma_2 e^{-\sigma_3(x-L_4)}. \quad (4.2.6)$$

Здесь α_i, β_i и γ_i являются постоянными интегрирования. Используя граничные условия (4.1.21)-(4.1.23), получим следующую систему линейных уравнений для нахождения явного вида α_i, β_i и γ_i :

$$\chi_1 \sigma_1 (\alpha_1 - \alpha_2) = B_1 \left(\frac{\xi}{\sigma_1^2} + \alpha_1 + \alpha_2 \right), \quad (4.2.7)$$

$$\frac{\xi}{\sigma_1^2} + \alpha_1 e^{\sigma_1 R} + \alpha_2 e^{-\sigma_1 R} = \beta_1 + \beta_2, \quad (4.2.8)$$

$$\beta_1 e^{\sigma_2(L_1-R)} + \beta_2 e^{-\sigma_2(L_1-R)} = \gamma_1 + \gamma_2 \quad (4.2.9)$$

$$\chi_1 \sigma_1 (\alpha_1 e^{\sigma_1 R} - \alpha_2 e^{-\sigma_1 R}) = \chi_2 \sigma_2 (\beta_1 - \beta_2) \quad (4.2.10)$$

$$\chi_2 \sigma_2 (\beta_1 e^{\sigma_2(L_1-R)} - \beta_2 e^{-\sigma_2(L_1-R)}) = \chi_3 \sigma_3 (\gamma_1 - \gamma_2) \quad (4.2.11)$$

$$-\chi_3 \sigma_3 (\gamma_1 e^{\sigma_3(L_2-L_1)} - \gamma_2 e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}) = B_3 (\gamma_1 e^{\sigma_3(L_2-L_1)} + \gamma_2 e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}) \quad (4.2.12)$$

Решая эту систему, получим следующие выражения для искомых величин:

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\xi}{\sigma_1^2} \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1} [(1+b)F_2 - F_1(1-b)] e^{-\sigma_1 R} - \frac{\xi}{\sigma_1^2} (F_1 - F_2) G_2}{G_1 [(1+b)F_2 - F_1(1-b)] e^{-\sigma_1 R} - G_2 [F_2(1-b) - F_1(1+b)] e^{-\sigma_1 R}}$$

$$\alpha_2 = \frac{G_1 \frac{\xi}{\sigma_1^2} (F_1 - F_2) - \frac{\xi}{\sigma_1^2} \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1} [(1-b)F_2 - F_1(1+b)] e^{\sigma_1 R}}{G_1 [(1+b)F_2 - F_1(1-b)] e^{-\sigma_1 R} - G_2 [F_2(1-b) - F_1(1+b)] e^{-\sigma_1 R}}$$

$$\beta_1 = \frac{\frac{1}{\Delta} \left[\frac{\xi}{\sigma_1^2} + \Delta_1 e^{\sigma_1 R} + \Delta_2 e^{-\sigma_1 R} \right] \left[(1-c) - \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} (1+c) \right]}{\left\{ \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} [(1-c)e^{2\sigma_2(L_1-R)} - (1+c)] - (1+c)e^{2\sigma_2(L_1-R)} + (1-c) \right\}},$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\Delta F_4} \left[\Delta \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \Delta_1 e^{\sigma_1 R} + \Delta_2 e^{-\sigma_1 R} \right] e^{2\sigma_3(L_2-L_1)},$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\Delta} \frac{\left[\Delta \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \Delta_1 e^{\sigma_1 R} + \Delta_2 e^{-\sigma_1 R} \right]}{F_4}, \quad \gamma_2 = \frac{G_2 \left[\Delta \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \Delta_1 e^{\sigma_1 R} + \Delta_2 e^{-\sigma_1 R} \right] e^{2\sigma_3(L_2-L_1)}}{2F_4 G_1 \Delta}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Delta = R_1 [(1+b)F_2 - F_1(1-b)] e^{-\sigma_1 R} + R_2 [F_2(1-b) - F_1(1+b)] e^{\sigma_1 R},$$

$$\Delta_1 = \frac{\xi}{\sigma_1^2} \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1} [(1+b)F_2 - F_1(1-b)] e^{-\sigma_1 R} + \frac{\xi}{\sigma_1^2} (F_1 - F_2) R_2,$$

$$\Delta_2 = \frac{\xi R_1}{\sigma_1^2} (F_1 - F_2) - \frac{\xi}{\sigma_1^2} \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1} [(1-b)F_2 - F_1(1+b)] e^{\sigma_1 R},$$

$$F_1 = e^{2\sigma_2(L_1-R)} \left[\frac{G_1}{G_2} (1-c) e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} - (1+c) \right], \quad F_2 = 1 - c - \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} (1+c),$$

$$F_3 = 1 - c - \frac{G_1}{G_2} (1+c) e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)}, \quad b = \frac{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}{\kappa_2^{(0)} \sigma_2}, \quad c = \frac{\kappa_2^{(0)} \sigma_2}{\kappa_3^{(0)} \sigma_3}, \quad R_1 = 1 - \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1}, \quad R_2 = 1 + \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1},$$

$$F_4 = \left\{ \frac{G_1}{G_2} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} [(1-c)e^{2\sigma_2(L_1-R)} - (1+c)] - (1+c)e^{2\sigma_2(L_1-R)} + (1-c) \right\}, G_1 = 1 - \frac{B_3}{\kappa_3^{(0)}\sigma_3}, G_2 = 1 + \frac{B_3}{\kappa_3^{(0)}\sigma_3}.$$

Слагаемые $\alpha_1 e^{\sigma_1 x}$ в (4.2.4), $\beta_1 e^{\sigma_2(x-R)}$ в (4.2.5) и $\gamma_1 e^{\sigma_2(x-L_1)}$ в (4.2.6) являются расходящимися и противоречат физическим законам. На этой основе в дальнейшем ими пренебрегаем. Первое слагаемое в (4.2.4) является постоянным, поскольку не зависит от частоты, поэтому им также пренебрегаем. Тогда будем иметь

$$\Phi_{L(1)} = \alpha_2 e^{-\sigma_1 x}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad (4.2.13)$$

$$\Phi_{L(2)} = \beta_2 e^{-\sigma_2(x-R)}. \quad R \leq x \leq L. \quad (4.2.14)$$

$$\Phi_{L(3)} = \gamma_2 e^{-\sigma_3(x-L_1)}, \quad L_1 \leq x \leq L_2. \quad (4.2.15)$$

Выражения (4.2.13)-(4.2.15) описывают частотную зависимость амплитуды и фазы возбуждаемых тепловых волн для рассматриваемого случая.

Рассмотрим случай, когда $\kappa_1^{(0)} = \kappa_2^{(0)}$, $\sigma_1 = \sigma_2$, тогда $b=1$ и справедливы равенства

$$\alpha_2 = \frac{\frac{\xi}{\sigma_1^2} [(F_1 - F_2)G_1 + \frac{B_1(1+b)F_1}{\kappa_1^{(0)}\sigma_1} e^{\sigma_1 R}]}{G_1(1+b)F_2 e^{-\sigma_1 R} + G_2(1+b)F_1 e^{-\sigma_1 R}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\Delta F_4} [\Delta \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \Delta_1 e^{\sigma_1 R} + \Delta_2 e^{-\sigma_1 R}] e^{2\sigma_2(L_1-R)}$$

$$\gamma_2 = \frac{G_2 [\Delta \frac{\xi}{\sigma_1^2} + \Delta_1 e^{\sigma_1 R} + \Delta_2 e^{-\sigma_1 R}] e^{2\sigma_3(L_2-L_1)}}{2F_4 G_1 \Delta}, \quad \Delta = (1+b)[R_1 F_2 e^{-\sigma_1 R} - R_2 F_1 e^{\sigma_1 R}],$$

$$\Delta_1 = \frac{\xi}{\sigma_1^2} \left\{ \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)}\sigma_1} (1+b)F_2 e^{-\sigma_1 R} + (F_1 - F_2)R_2 \right\}, \quad \Delta_2 = \frac{\xi}{\sigma_1^2} \left[(F_1 - F_2)R_1 + \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)}\sigma_1} F_1 (1+b)e^{\sigma_1 R} \right].$$

Принимая во внимание эти равенства, выполним анализ выражений (4.2.13)-(4.2.15). Учтем, что величина $R \propto (10^{-8} - 10^{-7})$ м и справедлива оценка $R\sigma_1 \propto R/\mu_1(\omega) \ll 1$, поскольку $L_1 \propto (10^{-3} - 10^{-2})$ м, т.е. $L_1 \gg R$, $L/\mu(\omega) \gg 1$ и $\text{Exp}[-L_1/\mu(\omega)] \propto 0$. Примем, что $L_2 \propto (10^{-3} - 10^{-2})$ м. Для диэлектриков $h \propto 10 \text{ Вт}/\text{м}^2 \text{ К}$ и значительно больше $4\sigma A_i^{(0)} T_0^3$, тогда $B_i \propto h_i^{(0)}$, $B_1/\kappa_1^{(0)}\sigma \propto h\mu(\omega)/k_1^{(0)} < 10^{-2}$ и $R_i \propto 1$. Также $B_3/\kappa_3^{(0)}\sigma_3 \propto h\mu_3(\omega)/k_3^{(0)} \leq 10^{-3}$, $G_i \propto 1$ и

$F_1 \approx -(1+c)e^{2\sigma_2(L_1-R)}$, $F_2 \approx 1-c$, $F_3 \approx 1-c$, $F_4 \approx -(1+c)e^{2\sigma_2(L_1-R)}$. В результате получим, что

$$\alpha_2 \propto -\frac{\xi}{\sigma_1^2} \propto \omega^{-1}, \quad \beta_2 \propto -\frac{\xi}{\sigma_1^2} \cdot \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1} \propto \omega^{-3/2} \quad \text{и} \quad \gamma_2 \propto -\frac{\xi}{\sigma_1^2} \cdot \frac{B_1}{\kappa_1^{(0)} \sigma_1} \propto \omega^{-3/2}.$$

Эти выражения показывают, что в облучаемом слое частотная зависимость амплитуды линейной составляющей возбуждаемой тепловой волны $\propto \omega^{-1}$, а для не облучаемого $\propto \omega^{-3/2}$.

4.3. Решение системы уравнений для основной гармонике нелинейного колебания температуры

Исходим из полученной выше системы уравнений для $\Phi_{1N(i)}(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(1)}}{\partial t} = -(\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(1)}(x, t)), \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(2)}}{\partial t} = -(\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(2)}(x, t)), \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{1N(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{1N(3)}}{\partial t} = -(\delta_{2(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(3)}}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t})(T_0(x) \Phi_{L(3)}(x, t)). \quad (4.3.3)$$

Из (4.1.4)-(4.1.7) следует, что шесть граничных условий, необходимых для решения системы (4.3.1)-(4.3.3), имеют вид

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{1N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad \Phi_{1N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} = \Phi_{1N(3)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1}, \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{1N(1)} + \delta_{2(1)} T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}) \Big|_{x=R} = \frac{\kappa_2^{(0)}}{\kappa_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{1N(2)} + \delta_{2(2)} T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)}) \Big|_{x=R}. \quad (4.3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{1N(2)} + \delta_{2(2)} T_{0(2)}(x) \Phi_{L(2)}) \Big|_{x=L_1} = \frac{\kappa_3^{(0)}}{\kappa_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{1N(3)} + \delta_{2(3)} T_{0(3)}(x) \Phi_{L(3)}) \Big|_{x=L_1}. \quad (4.3.6)$$

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{1N(1)}(x, \omega) + \delta_{2(1)} T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega)) \Big|_{x=0} = [B_1 \Phi_{1N(1)}(x, \omega) + 2D_1 T_{0(1)}(x) \Phi_{L(1)}(x, \omega)]_{x=0}, \quad (4.3.7)$$

$$-\kappa_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{1N(3)}(x, \omega) + \delta_{2(3)} T_{0(3)}(x) \Phi_{L(3)}(x, \omega)) \Big|_{x=L_2} = [B_3 \Phi_{1N(3)}(x, \omega) + 2D_3 T_{0(3)}(x) \Phi_{L(3)}(x, \omega)]_{x=L_2}. \quad (4.3.8)$$

Из выражений (4.3.5)-(4.3.8) следует, что для того, чтобы воспользоваться этими граничными условиями, нам необходимо иметь уравнение для функции $\Psi_{1N(i)} = \Phi_{1N(i)} + \delta_{2(i)}T_{0(i)}(x)\Phi_{L(i)}$. Из (4.3.1) –(4.3.3) получим следующее уравнение для этой функции:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{1N(i)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{1N(i)} = \frac{\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}}{\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} (T_{0(i)}(x)\Phi_{L(i)}(x, t)), \quad i=1,2. \quad (4.3.9)$$

Тогда граничные условия (4.3.7) и (4.3.8) примут вид

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Psi_{1N(1)}}{\partial x} = B_1 \Psi_{1N(1)} + (2D_1 - \delta_{2(1)}B_1)T_{0(1)}(x)\Phi_{L(1)}(x, \omega), \quad (4.3.10)$$

$$-\kappa_3^{(0)} \frac{\partial \Psi_{1N(3)}}{\partial x} = B_3 \Psi_{1N(3)} + (2D_3 - \delta_{2(3)}B_3)T_{0(3)}(x)\Phi_{L(3)}(x, \omega). \quad (4.3.11)$$

Здесь $D_i = h_i^{(0)}\delta_{4(i)} + 4\sigma A_i^{(0)}T_0^3\delta_{3(i)}$. Принимая во внимание, что $\Phi_{L(i)}(x, t) = \Phi_{L(i)}(x, \omega)\exp(i\omega t)$, в (4.3.9) положим $\Psi_{1N(i)}(x, t) = \Phi_{1N(i)}(x, \omega)\exp(i\omega t)$ и будем иметь

$$\frac{d^2 \Psi_{1N(i)}}{dx^2} - \sigma_i^2 \Psi_{1N(i)} = \sigma_i^2 (\delta_{(i)} - \delta_{2(i)})T_{0(i)}(x)\Phi_{L(i)}(x, \omega), \quad i=1,2,3. \quad (4.3.12)$$

Решение уравнения (4.3.12) имеет вид

$$\Psi_{1N(1)}(x, \omega) = \gamma_{1(1)}e^{\sigma_1 x} + \gamma_{2(1)}e^{-\sigma_1 x} + W_1[S_{1(1)}(x)e^{\sigma_1 x} - S_{1(2)}(x)e^{-\sigma_1 x}], \quad (4.3.13)$$

$$\Psi_{1N(2)}(x, \omega) = \gamma_{1(2)}e^{\sigma_2(x-R)} + \gamma_{2(2)}e^{-\sigma_2(x-R)} + W_2[S_{2(1)}(x)e^{\sigma_2(x-R)} - S_{2(2)}(x)e^{-\sigma_2(x-R)}]. \quad (4.3.14)$$

$$\Psi_{1N(3)}(x, \omega) = \gamma_{1(3)}e^{\sigma_3(x-L_1)} + \gamma_{2(3)}e^{-\sigma_3(x-L_1)} + W_3[S_{3(1)}(x)e^{\sigma_3(x-L_1)} - S_{3(2)}(x)e^{-\sigma_3(x-L_1)}]. \quad (4.3.15)$$

Здесь использованы обозначения

$$W_1 = \frac{1}{2\delta_{2(1)}}\sigma_1(\delta_{(1)} - \delta_{2(1)}), \quad W_2 = \frac{1}{2\delta_{2(2)}}\sigma_2(\delta_{(2)} - \delta_{2(2)}), \quad W_3 = \frac{1}{2\delta_{3(2)}}\sigma_3(\delta_{(3)} - \delta_{3(2)}),$$

$$S_{1(1)}(x, \omega) = \int g_{01}(x)\Phi_{L(1)}(x, \omega)e^{-\sigma_1 x} dx, \quad S_{1(2)}(x, \omega) = \int g_{01}(x)\Phi_{L(1)}(x, \omega)e^{\sigma_1 x} dx, \quad (4.3.16)$$

$$S_{2(1)}(x, \omega) = \int g_{02}(x)\Phi_{L(2)}(x, \omega)e^{-\sigma_2(x-R)} dx, \quad S_{2(2)}(x, \omega) = \int g_{02}(x)\Phi_{L(2)}(x, \omega)e^{\sigma_2(x-R)} dx, \quad (4.3.17)$$

$$S_{3(1)}(x, \omega) = \int g_{03}(x)\Phi_{L(2)}(x, \omega)e^{-\sigma_3(x-L_1)} dx, \quad S_{3(2)}(x, \omega) = \int g_{03}(x)\Phi_{L(3)}(x, \omega)e^{\sigma_3(x-L_1)} dx, \quad (4.3.18)$$

$$g_{01}(x) = \delta_{2(1)}T_{01}(x), \quad g_{02}(x) = \delta_{2(2)}T_{02}(x), \quad g_{03}(x) = \delta_{2(3)}T_{03}(x).$$

Для определения величин $\gamma_{i(1)}$ и $\gamma_{i(2)}$, используя граничные условия (4.3.4.)-

(4.3.8), получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \gamma_{1(1)}e^{\sigma_1 R} + \gamma_{2(1)}e^{-\sigma_1 R} + W_1[S_{1(1)}(R)e^{\sigma_1 R} - S_{1(2)}(R)e^{-\sigma_1 R}] - g_{0(1)}(x)\Phi_{L(1)}(R, \omega) = \\ & = \gamma_{1(2)} + \gamma_{2(2)} + W_2[S_{2(1)}(R) - S_{2(2)}(R)] - g_{0(2)}(R)\Phi_{L(2)}(R, \omega) \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

$$\begin{aligned} & \gamma_{1(2)}e^{\sigma_2(L_1-R)} + \gamma_{2(2)}e^{-\sigma_2(L_1-R)} + W_2[S_{2(1)}(L_1)e^{\sigma_2(L_1-R)} - S_{2(2)}(L_1)e^{-\sigma_2(L_1-R)}] - \\ & - g_{0(2)}(L_1)\Phi_{L(2)}(L_1, \omega) = \gamma_{1(3)} + \gamma_{2(3)} + W_3[S_{3(1)}(L_1) - S_{3(2)}(L_1)] - g_{0(3)}(L_1)\Phi_{L(3)}(L_1, \omega) \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_1^{(0)}\sigma_1}{\kappa_2^{(0)}\sigma_2} \{\gamma_{1(1)}e^{\sigma_1 R} - \gamma_{2(1)}e^{-\sigma_1 R} + W_1[S_{1(1)}(R)e^{\sigma_1 R} + S_{1(2)}(R)e^{-\sigma_1 R}]\} = \\ & = \gamma_{1(2)} - \gamma_{2(2)} + W_2[S_{2(1)}(R) + S_{2(2)}(R)] \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_2^{(0)}\sigma_2}{\kappa_3^{(0)}\sigma_3} \{\gamma_{1(2)}e^{\sigma_2(L_1-R)} - \gamma_{2(2)}e^{-\sigma_2(L_1-R)} + W_2[S_{2(1)}(L_1)e^{\sigma_2(L_1-R)} + S_{2(2)}(L_1)e^{-\sigma_2(L_1-R)}]\} = \\ & = \gamma_{1(3)} - \gamma_{2(3)} + W_3[S_{3(1)}(L_1) + S_{3(2)}(L_1)] \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1^{(0)}\sigma_1[\gamma_{1(1)} - \gamma_{2(1)} + W_1[S_{1(1)}(0, \omega) + S_{1(2)}(0, \omega)]] = \\ & = B_1\{\gamma_{1(1)} + \gamma_{2(1)} + W_1[S_{1(1)}(0, \omega) + S_{1(2)}(0, \omega)]\} + (2D_1 - \delta_{2(1)}B_1)T_{0(1)}(0)\Phi_{L(1)}(0, \omega) \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

$$\begin{aligned} & -\kappa_3^{(0)}\sigma_3\{\gamma_{1(3)}e^{\sigma_3(L_2-L_1)} - \gamma_{2(3)}e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} + W_3[S_{3(1)}(L_1, \omega)e^{\sigma_3(L_2-L_1)} + S_{3(2)}(L_1, \omega)e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}]\} = \\ & = B_2\{\gamma_{1(3)}e^{\sigma_3(L_2-L_1)} + \gamma_{2(3)}e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} + W_3[S_{3(1)}(L_1, \omega)e^{\sigma_3(L_2-L_1)} - S_{3(2)}(L_1, \omega)e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}]\} + \\ & + (2D_3 - \delta_{2(3)}B_2)T_{0(3)}(L_1)\Phi_{L(3)}(L_1, \omega) \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

Используя определения

$$f_1 = +W_2[S_{2(1)}(R) - S_{2(2)}(R)] + W_1[S_{2(1)}(R)e^{-\sigma_1 R} - S_{1(1)}(R)e^{\sigma_1 R}] + g_{0(1)}(R)\Phi_{L(1)}(R, \omega) - g_{0(2)}(R)\Phi_{L(2)}(R, \omega),$$

$$f_2 = W_3[S_{3(1)}(L_1) - S_{3(2)}(L_1)] - W_2[S_{2(1)}(L_1)e^{\sigma_2(L_1-R)} - S_{2(2)}(L_1)e^{-\sigma_2(L_1-R)}] + g_{0(2)}(L_1)\Phi_{L(2)}(L_1, \omega) - g_{0(3)}(L_1)\Phi_{L(3)}(L_1, \omega),$$

$$f_3 = W_2[S_{2(1)}(R, \omega) + S_{2(2)}(R, \omega) - bW_1[S_{1(1)}(R, \omega)e^{\sigma_1 R} - S_{1(2)}(R, \omega)e^{-\sigma_1 R}],$$

$$f_4 = W_3[S_{3(1)}(L_1) + S_{3(2)}(L_1)] - cW_2[S_{2(1)}(L_1)e^{\sigma_2(L_1-R)} + S_{2(2)}(L_1)e^{-\sigma_2(L_1-R)}],$$

$$f_5 = W_1(1 - d_1)[S_{1(1)}(0, \omega) + S_{1(2)}(0, \omega)] + \frac{(2D_1 - \delta_{2(1)}B_1)T_{0(1)}(0)\Phi_{L(1)}(0, \omega)}{B_1},$$

$$f_6 = -W_3[(d_2 + 1)S_{3(1)}(L_1, \omega)e^{\sigma_3(L_2-L_1)} + (1 - d_2)S_{3(2)}(L_1, \omega)e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}] - \frac{(2D_3 - \delta_{2(3)}B_2)T_{0(3)}(L_1)\Phi_{L(3)}(L_1, \omega)}{B_2}$$

$$\frac{\kappa_1^{(0)}\sigma_1}{B_1} = d_1, \quad \frac{\kappa_3^{(0)}\sigma_3}{B_2} = d_2,$$

систему уравнений (4.3.19)-(4.3.24) перепишем в виде

$$\gamma_{1(1)}e^{\sigma_1 R} + \gamma_{2(1)}e^{-\sigma_1 R} - \gamma_{1(2)} - \gamma_{2(2)} = f_1, \quad (4.3.25)$$

$$\gamma_{1(2)}e^{\sigma_2(L_1-R)} + \gamma_{2(2)}e^{-\sigma_2(L_1-R)} - \gamma_{1(3)} - \gamma_{2(3)} = f_2, \quad (4.3.26)$$

$$\gamma_{1(1)}(b-1) - (b+1)\gamma_{2(1)} = f_3, \quad (4.3.27)$$

$$c[\gamma_{1(2)}e^{\sigma_2(L_1-R)} - \gamma_{2(2)}e^{-\sigma_2(L_1-R)}] - \gamma_{1(3)} + \gamma_{2(3)} = f_4, \quad (4.3.28)$$

$$(d_1-1)\gamma_{1(1)} - (d_1+1)\gamma_{2(1)} = f_5, \quad (4.3.29)$$

$$\gamma_{1(3)}e^{\sigma_3(L_2-L_1)}(1+d_2) + \gamma_{2(3)}e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}(1-d_2) = f_6. \quad (4.3.30)$$

Из (4.3.27) и (4.3.29), которые оказались независимыми, находим следующие выражения для $\gamma_{1(1)}$ и $\gamma_{2(1)}$:

$$\gamma_{1(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ и } \gamma_{2(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (4.3.31)$$

где $\Delta = (b+1)(d_1-1) - (b-1)(d_1+1)$, $\Delta_1 = f_5(b+1) - f_3(d_1+1)$, $\Delta_2 = f_5(b-1) - f_3(d_1-1)$.

Из уравнения (4.3.30) находим, что

$$\gamma_{1(3)} = [f_6 e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} + \gamma_{2(3)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)}(d_2-1)](1+d_2)^{-1}. \quad (4.3.32)$$

В уравнении (4.3.25) отсутствует слагаемое с $\gamma_{1(3)}$. Учитывая это обстоятельство, из (4.3.25) находим

$$\gamma_{1(2)} = \gamma_{1(1)}e^{\sigma_1 R} + \gamma_{2(1)}e^{-\sigma_1 R} - \gamma_{2(2)} - f_1, \quad (4.3.33)$$

Подставляя выражения (4.3.32) и (4.3.33) в (4.3.26) и (4.3.28), получим следующую систему уравнений для определения $\gamma_{2(2)}$ и $\gamma_{2(3)}$:

$$a_{11}\gamma_{2(2)} + a_{12}\gamma_{2(3)} = y_1, \quad (4.3.34)$$

$$a_{21}\gamma_{2(2)} + a_{22}\gamma_{2(3)} = y_2. \quad (4.3.35)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$a_{11} = e^{-\sigma_2(L_1-R)} - e^{\sigma_2(L_1-R)}, \quad a_{12} = -1 + \frac{(d_2-1)}{(d_2+1)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)},$$

$$a_{21} = -c[e^{-\sigma_2(L_1-R)} + e^{-\sigma_2(L_1-R)}], \quad a_{22} = 1 + \frac{(d_2-1)}{(d_2+1)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)},$$

$$y_1 = f_2 - e^{-\sigma_2(L_1-R)} \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - f_1 \right] + \frac{f_6}{(d_2+1)} e^{-\sigma_3(L_2-L_1)},$$

$$y_2 = f_4 - e^{\sigma_2(L_1-R)} \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - f_1 \right] c + \frac{f_6}{(d_2+1)} e^{-\sigma_3(L_2-L_1)}.$$

Решение системы (4.3.34)-(4.3.35) можно представить в виде

$$\gamma_{2(2)} = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad \gamma_{2(3)} = \frac{\delta_2}{\delta}, \quad (4.3.36)$$

где

$$\delta = -2sh(\sigma_2(L_1-R)) \left(1 + \frac{(d_2-1)}{(d_2+1)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} \right) + 2ch(\sigma_2(L_1-R)) \left(\frac{(d_2-1)}{(d_2+1)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} - 1 \right) c,$$

$$\delta_1 = \left(1 + \frac{(d_2-1)}{(d_2+1)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} \right) \left[f_2 - e^{-\sigma_2(L_1-R)} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - f_1 \right) + \frac{f_6}{(d_2+1)} e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} \right] -$$

$$- \left(\frac{(d_2-1)}{(d_2+1)} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} - 1 \right) \left[f_4 - e^{\sigma_2(L_1-R)} \left[\frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - f_1 \right] c + \frac{f_6}{(d_2+1)} e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} \right],$$

$$\delta_2 = -2sh(\sigma_2(L_1-R)) \left[f_4 - e^{\sigma_2(L_1-R)} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - f_1 \right) c + \frac{f_6}{(d_2+1)} e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} \right] +$$

$$+ 2ch(\sigma_2(L_1-R)) c \left[f_2 - e^{-\sigma_2(L_1-R)} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - f_1 \right) + \frac{f_6}{(d_2+1)} e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} \right].$$

Тогда для величин $\gamma_{1(2)}$ и $\gamma_{1(3)}$ получим следующие выражения:

$$\gamma_{1(2)} = \frac{\Delta_1}{\Delta} e^{\sigma_1 R} + \frac{\Delta_2}{\Delta} e^{-\sigma_1 R} - \frac{\delta_1}{\delta} - f_1, \quad (4.3.37)$$

$$\gamma_{1(3)} = \left[f_6 e^{-\sigma_3(L_2-L_1)} + \frac{\delta_2}{\delta} e^{-2\sigma_3(L_2-L_1)} (d_2-1) \right] (1+d_2)^{-1}. \quad (4.3.38)$$

Выше полученные выражения (4.3.13)-(4.3.15) совместно с (4.3.31) и (4.3.36)-(4.3.38) представляют собой решение сформулированной задачи. В дальнейшем будем пренебрегать первым и третьим слагаемыми в выражениях (4.3.13)-(4.3.15), поскольку они являются расходящимися и не являются физическими. Тогда будем иметь

$$\Psi_{1N(1)}(x, \omega) = e^{-\sigma_1 x} [\gamma_{2(1)} - W_1 S_{1(2)}(x)], \quad (4.3.39)$$

$$\Psi_{1N(2)}(x, \omega) = e^{-\sigma_2(x-R)} [\gamma_{2(2)} - W_2 S_{2(2)}(x)], \quad (4.3.40)$$

$$\Psi_{1N(3)}(x, \omega) = e^{-\sigma_3(x-L_1)} [\gamma_{2(3)} - W_3 S_{3(2)}(x)]. \quad (4.3.41)$$

Выражения (4.3.39)-(4.3.41) совместно с (4.3.31) и (4.3.36) описывают все особенности возбуждения основной гармоники нелинейной тепловой волны.

4.4. Решение системы уравнений для второй гармоники нелинейного колебания температуры

Исходим из системы уравнений для $\Phi_{2N(i)}(x,t)$, которая соответствует второй гармонике колебания температуры

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(1)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\delta_{2(1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(1)}}{\chi_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\Phi_{L(1)}^2(x,t)), \quad (4.4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(2)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(2)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\delta_{2(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(2)}}{\chi_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\Phi_{L(2)}^2(x,t)). \quad (4.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2N(3)}}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial \Phi_{2N(3)}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\delta_{2(3)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\delta_{(3)}}{\chi_3^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\Phi_{L(3)}^2(x,t)). \quad (4.4.3)$$

Очевидно, что для решения этой системы дифференциальных уравнений необходимо иметь шесть граничных условий. Эти условия вытекают из условий (4.1.4) –(4.1.7) и имеют вид

$$\Phi_{2N(1)}(x, \omega) \Big|_{x=R} = \Phi_{2N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=R}, \quad \Phi_{2N(2)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} = \Phi_{2N(3)}(x, \omega) \Big|_{x=L_1} \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{2N(1)}(x,t) + 0.5\delta_{2(1)}\Phi_{L(1)}^2(x,t)) \Big|_{x=R} = \frac{\kappa_2^{(0)}}{\kappa_1^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{2N(2)} + 0.5\delta_{2(2)}\Phi_{L(2)}^2(x,t)) \Big|_{x=R}, \quad (4.4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{2N(2)}(x,t) + 0.5\delta_{2(2)}\Phi_{L(2)}^2(x,t)) \Big|_{x=L_1} = \frac{\kappa_3^{(0)}}{\kappa_2^{(0)}} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_{2N(3)} + 0.5\delta_{2(3)}\Phi_{L(3)}^2(x,t)) \Big|_{x=L_1}, \quad (4.4.6)$$

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{2N(1)}(x,t) + 0.5\delta_{2(1)}\Phi_{L(1)}^2(x,t)] \Big|_{x=0} = B_1 [\Phi_{2N(1)}(x,t) + 0.5\delta_{2(1)}\Phi_{L(1)}^2(x,t)] + (D_1 - 0.5\delta_{2(1)}B_1)\Phi_{L(1)}^2(x,t) \Big|_{x=L}, \quad (4.4.7)$$

$$-\kappa_3^{(0)} \frac{\partial}{\partial x} [\Phi_{2N(3)}(x,t) + 0.5\delta_{2(3)}\Phi_{L(3)}^2(x,t)] \Big|_{x=L} = [B_3(\Phi_{2N(3)}(x,t) + 0.5\delta_{2(3)}\Phi_{L(3)}^2(x,t)) + (D_2 - 0.5\delta_{2(3)}B_3)\Phi_{L(3)}^2(x,t)] \Big|_{x=L}. \quad (4.4.8)$$

Тогда, очевидно, возникает необходимость иметь уравнение для функции $\Psi_{2N(i)}(x,t) = \Phi_{2N(i)}(x,t) + 0.5\delta_{2(i)}\Phi_{L(i)}^2(x,t)$. Из (4.4.1)-(4.4.3) для $\Psi_{2N(i)}(x,t)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{2N(i)}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi_i^{(0)}} \frac{\partial \Psi_{2N(i)}(x,t)}{\partial t} = \frac{\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}}{2\chi_i^{(0)}} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{L(i)}^2(x,t). \quad i = 1,2,3 \quad (4.4.9)$$

Из (4.4.7) и 4.4.8) получим следующие граничные условия для $\Psi_{2N(i)}(x,t)$:

$$\kappa_1^{(0)} \frac{\partial \Psi_{2N(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = B_1 \Psi_{2N(1)}(x, t) + (D_1 - 0.5\delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(x, t) \Big|_{x=0}, \quad (4.4.10)$$

$$-\kappa_3^{(0)} \frac{\partial \Psi_{2N(3)}}{\partial x} \Big|_{x=L_2} = B_3 \Psi_{2N(3)}(x, t) + (D_2 - 0.5\delta_{2(2)} B_2) \Phi_{L(3)}^2(x, t) \Big|_{x=L_2}. \quad (4.4.11)$$

Как и ранее, положим $\Phi_{L(i)}^2(x, t) = \Phi_{L(i)}^2(x, \omega) e^{2i\omega t}$, $\Psi_{2N(i)}(x, t) = \Psi_{2N(i)}(x, \omega) e^{2i\omega t}$ и тогда из (4.4.9) будем иметь

$$\frac{d^2 \Psi_{2N(i)}(x, \omega)}{dx^2} - \sigma_{2(i)}^2 \Psi_{2N(i)}(x, \omega) = R_{2(i)} \sigma_{2(i)} \Phi_{L(i)}^2(x, \omega), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4.12)$$

где $\sigma_{2(i)}^2 = 2i\omega / \chi_i^{(0)}$, $R_{2(i)} = 0.5(\delta_{(i)} - \delta_{2(i)}) \sigma_{2(i)}$.

Решение (4.4.12) для всех слоев образца имеет следующий вид:

$$\Psi_{2N(1)}(x, \omega) = \mu_{1(1)} e^{\sigma_{2(1)} x} + \mu_{1(2)} e^{-\sigma_{2(1)} x} + R_{2(1)} [e^{\sigma_{2(1)} x} W_{1(1)}(x, \omega) - e^{-\sigma_{2(1)} x} W_{1(2)}(x, \omega)], \quad (4.4.13)$$

$$\Psi_{2N(2)}(x, \omega) = \mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(x-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(x-R)} + R_{2(2)} [e^{\sigma_{2(2)}(x-R)} W_{2(1)}(x, \omega) - e^{-\sigma_{2(2)}(x-R)} W_{2(2)}(x, \omega)], \quad (4.4.14)$$

$$\Psi_{2N(3)}(x, \omega) = \mu_{3(1)} e^{\sigma_{3(2)}(x-L_1)} + \mu_{3(2)} e^{-\sigma_{3(2)}(x-L_1)} + R_{2(3)} [e^{\sigma_{3(2)}(x-L_1)} W_{3(1)}(x, \omega) - e^{-\sigma_{3(2)}(x-L_1)} W_{3(2)}(x, \omega)], \quad (4.4.15)$$

где

$$W_{1(1)}(x, \omega) = \int e^{-\sigma_{2(1)} x} \Phi_{L(1)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{1(2)}(x, \omega) = \int e^{\sigma_{2(1)} x} \Phi_{L(1)}^2(x, \omega) dx.$$

$$W_{2(1)}(x, \omega) = \int e^{-\sigma_{2(2)}(x-R)} \Phi_{L(2)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{2(2)}(x, \omega) = \int e^{\sigma_{2(2)}(x-R)} \Phi_{L(2)}^2(x, \omega) dx,$$

$$W_{3(1)}(x, \omega) = \int e^{-\sigma_{3(2)}(x-L_1)} \Phi_{L(3)}^2(x, \omega) dx, \quad W_{3(2)}(x, \omega) = \int e^{\sigma_{3(2)}(x-L_1)} \Phi_{L(3)}^2(x, \omega) dx.$$

Для определения величин $\mu_{1(1)}$, $\mu_{1(2)}$, $\mu_{2(1)}$ и $\mu_{2(2)}$ из граничных условий (4.4.6)-(4.4.8), (4.4.10) и (4.4.11) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \mu_{1(1)} e^{\sigma_{2(1)} R} + \mu_{1(2)} e^{-\sigma_{2(1)} R} + R_{2(1)} [W_{1(1)}(R, \omega) + W_{1(2)}(R, \omega)] - 0.5\delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(R, \omega) = \\ & = \mu_{2(1)} + \mu_{2(2)} + R_{2(2)} [W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega)] - 0.5\delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(R, \omega) \end{aligned}, \quad (4.4.16)$$

$$\begin{aligned} & \mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + R_{2(1)} [e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(1)}(L_1, \omega) - e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(2)}(L_1, \omega)] - \\ & - 0.5\delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(L_1, \omega) = \mu_{3(1)} + \mu_{3(2)} + R_{2(3)} [W_{3(1)}(L_1, \omega) + W_{3(2)}(L_1, \omega)] - 0.5\delta_{2(3)} \Phi_{L(3)}^2(L_1, \omega) \end{aligned}, \quad (4.4.17)$$

$$\begin{aligned} & \mu_{1(1)} e^{\sigma_{2(1)} R} - \mu_{1(2)} e^{-\sigma_{2(1)} R} + \frac{R_{2(1)}}{\sigma_{2(1)}} [e^{\sigma_{2(1)} R} W_{1(1)}(R, \omega) + e^{-\sigma_{2(1)} R} W_{1(2)}(R, \omega)] = \\ & = \frac{\kappa_2^{(0)} \sigma_{2(2)}}{\kappa_1^{(0)} \sigma_{2(1)}} [(\mu_{2(1)} - \mu_{2(2)}) + R_{2(2)} (W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega))] \end{aligned}, \quad (4.4.18)$$

$$\begin{aligned} & \mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \frac{R_{2(2)}}{\sigma_{2(2)}} [e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(1)}(L_1, \omega) - e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(2)}(L_1, \omega)] \\ & = \frac{\kappa_3^{(0)} \sigma_{2(3)}}{\kappa_2^{(0)} \sigma_{2(2)}} [(\mu_{3(1)} - \mu_{3(2)}) + R_{2(3)} (W_{3(1)}(L_1, \omega) + W_{3(2)}(L_1, \omega))] \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_1^{(0)} \sigma_{2(1)} [\mu_{1(1)} - \mu_{1(2)} + R_{2(1)} (W_{1(1)}(0, \omega) + W_{1(2)}(0, \omega))] = \\ & = B_1 \{ \mu_{1(1)} + \mu_{2(2)} + R_{2(1)} [W_{1(1)}(0, \omega) + W_{1(2)}(0, \omega)] \} + (D_1 - 0.5 \delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(0, \omega), \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

$$\begin{aligned} & -\kappa_3^{(0)} \sigma_{2(3)} [\mu_{3(1)} e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} - \mu_{3(2)} e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} + R_{2(3)} (e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} W_{3(1)}(L_2, \omega) + e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} W_{3(2)}(L_2, \omega))] = \\ & = B_3 \{ (\mu_{3(1)} e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} + \mu_{3(2)} e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} + R_{2(3)} (e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} W_{3(1)}(L_2, \omega) - e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} W_{3(2)}(L_2, \omega))) \} + \\ & + (D_2 - 0.5 \delta_{2(3)} B_3) \Phi_{L(3)}^2(L_2, \omega) \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

В (4.4.16)-(4.4.21) используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 0.5(\delta_{2(1)} \Phi_{L(1)}^2(R, \omega) - \delta_{2(2)} B_2) \Phi_{L(2)}^2(R, \omega) + \\ & + R_{2(2)} [W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega)] - R_{2(1)} [W_{1(1)}(R, \omega) + W_{1(2)}(R, \omega)], \end{aligned}$$

$$Q_2 = b_2 R_{2(2)} [W_{2(1)}(R, \omega) + W_{2(2)}(R, \omega)] - \frac{R_{2(1)}}{\sigma_{2(1)}} [e^{\sigma_{2(1)} R} W_{1(1)}(R, \omega) + e^{-\sigma_{2(1)} R} W_{1(2)}(R, \omega)],$$

$$Q_3 = -R_1 R_{2(1)} (W_{1(1)}(0, \omega) + W_{1(2)}(0, \omega)) + (D_1 - 0.5 \delta_{2(1)} B_1) \Phi_{L(1)}^2(0, \omega),$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= 0.5(\delta_{2(2)} \Phi_{L(2)}^2(L_1, \omega) - \delta_{2(3)} \Phi_{L(3)}^2(L_1, \omega) + R_{2(3)} [W_{3(1)}(L_1, \omega) + W_{3(2)}(L_1, \omega)] - \\ & - R_{2(1)} [e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(1)}(L_1, \omega) - e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(2)}(L_1, \omega)]) \end{aligned},$$

$$Q_5 = b_3 R_{2(3)} [W_{3(1)}(L_1, \omega) + W_{3(2)}(L_1, \omega)] - \frac{R_{2(2)}}{\sigma_{2(2)}} [e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(1)}(L_1, \omega) - e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} W_{2(2)}(L_1, \omega)].$$

$$Q_6 = G_1 R_{2(1)} e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} W_{3(1)}(L_2, \omega) + G_2 R_{2(2)} e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} W_{3(2)}(L_2, \omega).$$

Тогда систему уравнений (4.4.16)-(4.4.21) можно переписать в виде

$$\mu_{1(1)} e^{\sigma_{2(1)} R} + \mu_{1(2)} e^{-\sigma_{2(1)} R} - \mu_{2(1)} - \mu_{2(2)} = Q_1, \quad (4.4.22)$$

$$\mu_{1(1)} e^{\sigma_{2(1)} R} - \mu_{1(2)} e^{-\sigma_{2(1)} R} - b_2 (\mu_{2(1)} - \mu_{2(2)}) = Q_2, \quad (4.4.23)$$

$$R_1 \mu_{1(1)} - R_2 \mu_{1(2)} = Q_3, \quad (4.4.24)$$

$$\mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} - \mu_{3(1)} - \mu_{3(2)} = Q_4, \quad (4.4.25)$$

$$\mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)} - b_3 (\mu_{3(1)} - \mu_{3(2)}) = Q_5, \quad (4.4.26)$$

$$-G_1 \mu_{3(1)} e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} + G_2 \mu_{3(2)} e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} = Q_6. \quad (4.4.27)$$

Из (4.4.25)–(4.4.26) для $\mu_{3(1)}$ и $\mu_{3(2)}$ находим следующие выражения:

$$\mu_{3(1)} = \frac{1}{2} \{ [\mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)}] (1 + \frac{1}{b}) - (Q_4 + \frac{Q_5}{b_3}) \}, \quad (4.4.28)$$

$$\mu_{3(2)} = \frac{1}{2} \{ [\mu_{2(1)} e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} + \mu_{2(2)} e^{-\sigma_{2(2)}(L_1-R)}] (1 - \frac{1}{b}) - (Q_4 + \frac{Q_5}{b_3}) \}. \quad (4.4.29)$$

Подставляя эти выражения в (4.4.27) и используя обозначения

$$N_1 = e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} (G_1 (1 + \frac{1}{b}) e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} - G_2 (1 - \frac{1}{b}) e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)}),$$

$$N_2 = e^{\sigma_{2(2)}(L_1-R)} (G_2 (1 - \frac{1}{b_3}) e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} - G_1 (1 + \frac{1}{b_3}) e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)}),$$

$$N_3 = 2Q_6 + (Q_4 + \frac{Q_5}{b_3}) (G_2 e^{-\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)} - G_1 e^{\sigma_{3(2)}(L_2-L_1)}).$$

для $\mu_{2(2)}$, получим следующее выражение:

$$\mu_{2(2)} = \mu_{2(1)} \frac{N_1}{N_2} + \frac{N_3}{N_2}. \quad (4.4.30)$$

Из (4.4.24) находим, что

$$\mu_{1(1)} = \frac{R_2}{R_1} \mu_{1(2)} + \frac{Q_3}{R_1}. \quad (4.4.31)$$

Выражения для $\mu_{1(1)}$ и $\mu_{2(2)}$ подставим в (4.4.22) – (4.4.23) и будем иметь

$$\begin{cases} \mu_{1(2)} \left(\frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} + e^{-\sigma_{2(1)}R} \right) + \frac{Q_3}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} - \mu_{2(1)} - \mu_{2(1)} \frac{N_1}{N_2} - \frac{N_3}{N_2} = Q_1 \\ \mu_{1(2)} \left(\frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} - e^{-\sigma_{2(1)}R} \right) + \frac{Q_3}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} - b_2 \mu_{2(1)} + b_2 \left(\mu_{2(1)} \frac{N_1}{N_2} + \frac{N_3}{N_2} \right) = Q_2 \end{cases}, \quad (4.4.32)$$

$$\begin{cases} \mu_{1(2)} \varepsilon_{11} - \mu_{2(1)} \varepsilon_{12} = Y_1 \\ \mu_{1(2)} \varepsilon_{21} - \mu_{2(1)} \varepsilon_{22} = Y_2 \end{cases}.$$

Здесь использованы обозначения

$$\varepsilon_{11} = \frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} + e^{-\sigma_{2(1)}R}, \quad \varepsilon_{12} = 1 + \frac{N_1}{N_2}, \quad \varepsilon_{21} = \frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} - e^{-\sigma_{2(1)}R}, \quad \varepsilon_{22} = 1 - b_2 \frac{N_1}{N_2}.$$

$$Y_1 = Q_1 - \frac{Q_3}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} + \frac{N_3}{N_2}, \quad Y_2 = Q_2 - \frac{b_2 N_3}{N_2} - \frac{Q_3}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R}.$$

Тогда решение системы (4.4.32) примет следующий вид:

$$\mu_{1(2)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \mu_{2(1)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (4.4.33)$$

где

$$\Delta = -b_2 \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} + e^{-\sigma_{2(1)}R}\right) + \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} - e^{-\sigma_{2(1)}R}\right),$$

$$\Delta_1 = -\left(Y_1 b_2 \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right) - Y_2 \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)\right), \Delta_2 = Y_2 \left(\frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} + e^{-\sigma_{2(1)}R}\right) - Y_1 \left(\frac{R_2}{R_1} e^{\sigma_{2(1)}R} - e^{-\sigma_{2(1)}R}\right).$$

Подставляя эти выражения в (4.4.30) и (4.4.31) будем иметь

$$\mu_{1(1)} = \frac{R_2}{R_1} \frac{\Delta_1}{\Delta} + \frac{Q_3}{R_1}, \quad \mu_{2(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{N_1}{N_2} + \frac{N_3}{N_2}. \quad (4.4.34)$$

Первые и третьи слагаемые в (4.4.13)–(4.4.15) являются расходящимися и не являются физическими. В дальнейшем ими пренебрегаем и будем иметь

$$\Psi_{2N(1)}(x, \omega) = e^{-\sigma_{2(1)}x} [\mu_{1(2)} - R_{2(1)} W_{1(2)}(x, \omega)], \quad (4.4.35)$$

$$\Psi_{2N(2)}(x, \omega) = e^{-\sigma_{2(2)}(x-R)} [\mu_{2(2)} - R_{2(2)} W_{2(2)}(x, \omega)], \quad (4.4.36)$$

$$\Psi_{2N(3)}(x, \omega) = e^{-\sigma_{3(2)}(x-L)} [\mu_{3(2)} + R_{2(3)} W_{3(2)}(x, \omega)]. \quad (4.4.37)$$

Выражения (4.4.35)–(4.4.37) совместно с (4.4.29), (4.4.33) и (4.4.34) являются общим решением сформулированной задачи возбуждения второй гармоники нелинейной тепловой волны в диэлектрических пленках, прикрепленных на подложке. Подчеркнем, что генерация этой волны обусловлена тепловыми нелинейностями теплофизических величин всех слоев образца, а также степенью черноты и коэффициентом теплоотдачи поверхностей.

Таким образом, в рамках настоящей главы работы предложена теория генерации линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках, прикрепленных на твердой подложке посредством гармонически модулированного потока ионов. Установлено, что частотная зависимость амплитуды линейного составляющего возбуждаемой тепловой волны в облучаемом слое $\propto \omega^{-1}$, в то время как для необучаемых слоев образца и подложки $\propto \omega^{-3/2}$. Также получены общие выражения для основной и второй гармоник нелинейного составляющих тепловых волн, полученные с учетом температурной зависимости теплофизических и оптических параметров образца.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Теоретически исследовано влияние температурной зависимости коэффициента теплопроводности на формирование стационарного температурного поля диэлектриков при облучении пучком ионов. Рассмотрены два случая: 1) свободный образец облучается на воздухе; 2) образец прикреплен на массивной подложке, вторая поверхность которой погружена в воду, а облучение проводится в вакууме. Для всех рассмотренных случаев получены аналитические выражения для температурного поля, а также получена система взаимосвязанных нелинейных алгебраических уравнений для установившейся температуры облучаемой и тыловой поверхностей и на границе между облучаемой и необлучаемой частями.

2. Теоретически исследовано влияние температурной зависимости коэффициентов теплопроводности $\kappa(T)$, теплоотдачи $h(T)$ и степени черноты $A(T)$ пленки и твердой подложки на формирования стационарного температурного поля системы диэлектрик - подложка при облучении непрерывным пучком ионов в воздухе. Подробно и в отдельности рассмотрены два случая: 1) тыловая поверхность подложки погружена в воду и является изотермической; 2) тыловая поверхность подложки находится в воздухе. Для всех рассмотренных случаев получены аналитические выражения для температурного поля образца и подложки, а также получена система взаимосвязанных нелинейных алгебраических уравнений для характерных температур. Численным решением системы нелинейных алгебраических уравнений найдены зависимости температуры облучаемой поверхности системы образец-подложка, а также тыловой стороны этой системы от параметров падающего пучка ионов. Установлено, что эти зависимости являются нелинейными. Обнаружено, что с ростом теплопроводности подложки существенно уменьшается нагрев образца, включая её облучаемую поверхность.

3. Теоретически исследовано влияние температурной зависимости теплофизических величин на стационарное температурное поле тонких диэлектриков при их облучении пучком протонов в воздушной среде. Получено выраже-

ние, описывающее пространственное распределение этого поля. Выведена система взаимосвязанных нелинейных алгебраических уравнений для установившейся температуры облучаемой и тыловой поверхностей образца. Выполнено сравнение с экспериментом (для полиимидной пленки марки Каптон Н) и обнаружено вполне удовлетворительное совпадение результатов теории с экспериментом.

4. Для случая, когда источник, обеспечивающий перенос энергии ионов в тепло, является гармонически модулированным по частоте, сформулирована теплофизическая модель задачи возбуждения тепловых волн в однослойных диэлектрических пленках, находящихся в воздухе. С учетом того, что длина пробега ионов в пленках $-R$ меньше толщины образца $-L$, для описания исследуемого явления использованы системы нелинейных уравнений теплопроводности для этих частей образца. Температурная зависимость теплофизических величин обеих частей образца, а также коэффициента теплоотдачи и степени черноты, принята в линейном виде посредством термических коэффициентов. Возмущения температуры представлены в виде суммы стационарной и колебательной составляющих, а колебательную часть в виде суммы линейной и нелинейной. В свою очередь, нелинейная часть состоит из суммы колебания на основной и второй гармониках. Ввиду того, что временное изменение теплового источника, обусловленного поглощением потока ионов, имеет гармоническую форму, временная зависимость колебаний температуры в исходных уравнениях также представлена в гармоническом виде. Решением граничной задачи получены явный вид выражения для всех частей колебательной составляющей возмущения температуры. Обнаружено, что:

1) частотная зависимость амплитуды линейного составляющего возбуждаемой тепловой волны в облучаемом слое $\propto \omega^{-1}$, в то время, как для необлучаемого слоя $\propto \omega^{-3/2}$;

2) частотные зависимости амплитуды возбуждаемой основной гармоникой нелинейной тепловой волны описывается выражениями

$$\Phi_{1N(1)}(x, \omega) \approx \frac{C_1}{\omega} + \frac{C_2}{\omega^2} + \frac{C_3}{\omega^{5/2}}, \quad \Phi_{1N(2)}(x, \omega) \approx \frac{K_1}{\omega} + \frac{K_2}{\omega^{3/2}} + \frac{K_3}{\omega^2},$$

где C_i и K_i коэффициенты, которые зависят от теплофизических параметров обоих слоев образца и их термических коэффициентов.

3) частотные зависимости амплитуды возбуждаемой второй гармоники нелинейной тепловой волны в облучаемой и необлучаемой средах имеют вид

$$\Phi_{2N(1)}(x, \omega) \sim \frac{A_1}{\omega^2} + \frac{A_2}{\omega^3}, \quad \Phi_{2N(2)}(x, \omega) \sim \frac{H_1}{\omega^2} + \frac{H_2}{\omega^3} + \frac{H_3}{\omega^4},$$

где A_i и H_i коэффициенты, которые зависят от теплофизических параметров обоих слоев образца и их термических коэффициентов.

5. Сформулирована математическая модель задачи генерации линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках, прикрепленных на подложке и находящихся в воздухе посредством гармонически модулированного по частоте пучка ионов. Для решения сформулированной задачи использована система нелинейных уравнений теплопроводности для двух слоев образца и подложки. Температурная зависимость теплофизических величин обеих частей образца и подложки, а также коэффициента теплоотдачи и степени черноты образца и подложки принята в линейном виде посредством термических коэффициентов. Возмущения температуры представлены в виде суммы стационарной и колебательной составляющих, а колебательная часть в виде суммы линейной и нелинейной. В свою очередь, нелинейная часть состоит из суммы колебания на основной и второй гармониках. Ввиду того, что временное изменение теплового источника, обусловленного поглощением потока ионов, имеет гармоническую форму, временная зависимость колебаний температуры в исходных уравнениях также представлена в гармоническом виде. Решением граничной задачи получены явный вид выражения для всех частей колебательной составляющей возмущения температуры. Оказалось, что частотная зависимость амплитуды линейной составляющей возбуждаемой тепловой волны в облучаемом слое $\propto \omega^{-1}$, в то время, как для необлучаемого слоя и подложки $\propto \omega^{-3/2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсбурда Д.И., Семина Б.Н., Таванова Э.Г., Матлис С.Б., Геринга Г.И., Балычева И.Н. Высокоэнергетическая электроника твердого тела // М.: Наука. - 1982. - 224 с.
2. Бойко В.И., Валяев А.Н., Погребняк А.Д. Модификация металлических материалов импульсными пучками частиц // УФН. - 1999. - Т.169. -№11.- С.1243.
3. Вайсбурд Д.И., Пичугин В.Ф., Чебодаев М.И. Влияние термического сопротивления контакта диэлектрик-металл на температурное поле в диэлектрике при облучении ионным пучком // Изв. вузов. Физика. - 2001. - № 4. - С.39-43.
4. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействия импульсных пучков заряженных частиц с веществом // М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2003.- 288 с.
5. Черняев А.П. Взаимодействия ионизирующего излучения с веществом // М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2004. - 152с.
6. Комаров Ф.Ф. Дефектообразование и трекообразование в твердых телах при облучении ионами сверхвысоких энергий // УФН.- 2003. -Т.173. - №12. - С. 1287-1318.
7. Фортов В.Е., Хоффманн Д., Шарков Б.Ю. Интенсивные ионные пучки для генерации экстремальных состояний вещества // УФН. - 2008. - Т.178. - №2.- С.113.
8. Комаров Ф.Ф. Нано-и макроструктурирование твердых тел быстрыми тяжёлыми ионами // УФН.- 2017. -Т.175. - №5. - С. 465-504.
9. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. – М.: - Либроком. - 2012. – 656 с.
10. Блейхер Г.А., Кривобоков В.П., Пашенко О.В. Тепломассоперенос в твердом теле под действием мощных пучков заряженных частиц. – Новосибирск. – Наука. – 1999. – 176 с.

11. Крючков Ю.Ю., Малютин В.М., Пичугин В.Ф., Сохорева В.В., Франгуль-ян Т.С. Разработка и применение методов спектроскопии обратного рассеяния быстрых ионов для анализа состава и структуры ионно-облученных слоев диэлектриков // Известия ТПУ. – 2000. –Т. 303. № 3. – С. 12-21.
12. Kenji Kimura, Kenji Nakanishi, Akira Nishimura, Michihiko Mannami. Acoustic Radiation Induced by Intensity Modulated Ion Beam // Japanese Journal of Applied Physics. – 1985.- Vol. 24.- № 6 . – p. L449 - L450.
13. Mori Y., Muto M., Ohmori C., Shirakabe Y., Takagi A. Fast beam chopper with ma cores // Proceedings of EPAC 2000.- Vienna, Austria.- p. 2468-2470.
14. Wiesner C., Droba M., Meusel O., Noll D., Payir O., Ratzinger U., Schneider P. Chopping high-intensity ion beams at franz // Proceedings of LINAC. – 2014. - Geneva, Switzerland. - p.765-769.
15. Lin Ai Lei Wang, Yang Tan, Shavkat Akhmadaliev, Shengqiang Zhou, and Feng Chen. Efficient Second Harmonic Generation of Diced Ridge Waveguides Based on Carbon Ion-irradiated Periodically Poled LiNbO3 // Journal of Lightwave Technology. - 2016.2638920.
16. Shafiei S., Lamahi-Rashti M., Vosoughi Y. Design and Development of a Chopper for Ion Beam Current Measurement and Monitoring // Journal of Nuclear Research and Applications. - 2022. - № 2(2). - p.13-19.
17. Joseph, D. D. Heat Waves // Reviews of Modern Physics. – 1989. – Vol. 61. – No. 1. – pp. 41-73.
18. Ивлиев А. Д. Метод температурных волн в теплофизических исследованиях (анализ советского и российского опыта) // ТВТ. - 2009. - Т. 47. – Выпуск 5. – С . 771–792.
19. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: Системно-структурный подход // М.: Едиториал УРСС. - 2004. - 296 с.
20. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600с.

21. Филиппов Л.П. Измерения теплофизических свойств веществ методом периодического нагрева. - М.: Энергоатомиздат, 1984. – 104 с.
22. Карслоу Г. Егер Д. Теплопроводность твердых тел . -М.: Наука. – 1964. – 488 с.
23. Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 88 с.
24. Лямшев, Л.М. Наугольных К.А.Оптическая генерация звука. Нелинейные эффекты. Обзор // Акуст. Журн.- 1981.- Т.27.-, вып.5.- С.641-668.
25. Гусев В.Э., Карабутов А.А. Лазерная оптоакустика. М.: - Наука. - 1991.- 304 с.
26. Mandelis A., Salnick A., Opsal J., Rosenswaig A. Nonlinear fundamental photothermal response in three dimensional geometry // Theoretical model-J.Appl. Phys. –1999. –V.85–.P. 1811–1821.
27. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Влияние теплофизических и свойств подложки на характеристики нелинейного фотоакустического сигнала непрозрачных сред // Журнал прикладной спектроскопии. – 2019. – Т.86. – № 6. – С.908-916.
28. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А. Генерация фотоакустического сигнала двухслойными прозрачными образцами с поглощающей подложкой // Письма в журнал технической физики –2019. – Т.45 –№9 –С.30–31.
29. Салихов Т.Х., Мадвалиев У., Шарифов Д.М., Туйчиев Х.Ш. К теории генерации нелинейного фотоакустического сигнала при газомикрофонной регистрации // Журнал технической физики. – 2021. – Т.91.- Вып.11. – С.1608-1618.
30. Gusev V., Mandelis A., Bleiss R. Nonlinear photothermal response of thin solid films and coatings // Mater. Sci. Eng.- 1994.- V26.- No.1. - Pp.111-119.
31. Проскурин М.А., Хабибулин В.Р., Усольцева Л.О., Вырко Е.А., Михеев И.В., Волков Д.С. Фототермическая и оптоакустическая спектроскопия:

- Современное состояние и преспективы // Успехи физических наук . – 2022. - т. – 192. - №3. - с.294-340.
32. Егерев С.В., Симановский Я.О. Оптоакустика неоднородных медицинских сред: конкуренция механизмов и перспективы применения // Акустический журнал. – 2022. – Т.68. – №1. – С. 96-116.
33. Вайсбурд Д.И., Пичугин В.Ф., Чебодаев М.И. Методика определения термического сопротивления контакта диэлектрик-металл при интенсивных ржимах облучения диэлектрика // Изв. вузов. Физика. - 2001. - № 12. - С.36-43.
34. Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark K. Stopping and ranges of ions in Matter. - New York: Pergamon Press, 1985. - 371 p.
35. Рвачев В. Л., Слесаренко А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах // Киев: Наукова думка, 1976.- 287 с.
36. Tabata G., Ito R. An algorithm for the energy deposition by fast electrons // Nucl. Sci. and Eng. - 1971. - V. 53. - No. 2 - P. 226-239.
37. Шлыков Ю.П., Ганин Е.А. Контактное термическое сопротивление. - М.: Энергия, 1977.- 328 с.
38. Кравчун С.Н., Глеубаев С. О возможности измерения теплофизических свойств жидкостей в потоках методом периодического нагрева // Инженерно-физический журнал. – 1984. – Т. 46. - № 1. – С. 113 – 118.
39. Сафонов А. Н., Ивлиев А. Д. Измерение относительной теплоемкости проводников методом температурных волн // ТВТ. – 1991. Т. 29. – Вып. 1. – С. 169–172.
40. Липаев А. А. Метод температурных волн в системе контактирующих тел при исследовании фильтрующих, капиллярно-пористых сред // Инженерно-физический журнал. – 1991. – Т. 61.- № 2. – С. 335–336.
41. Галактионов А.В., Петров В.А., Степанов С.В., Улыбин С. Ал. Сравнительный анализ двух модификаций метода температурных волн для измерения температуропроводности теплоизоляционных материалов // ТВТ. – 1993. – Т. 31. – Вып.5. – С. 817–820.

42. Липаев А. А. Теплофизические исследования в петрофизике // Казань, Изд-во КГУ. - 1993. – 147 с.
43. Кравчун С.Н., Липаев А.А. Метод периодического нагрева в экспериментальной теплофизике // Казань: Казанский государственный университет. - 2006. – 208 с.
44. Пономарев С. В., Мищенко С. В., Дивин А. Г. Теоретические и практические основы теплофизических измерений // под ред. Пономарева С. В. – Москва: – ФИЗМАТЛИТ. - 2008. – 408 с.
45. Пономарев С. В., Дивин А. Г., Щекочихин С. К вопросу о выборе оптимальных режимных параметров процесса измерения коэффициента температуропроводности теплоизоляционных материалов методом регулярного режима третьего рода // Измерительная техника.2012.–№ 1. С. 47 – 49.
46. Любимова Д.А., Пономарев С.В., Дивин А.Г. Измерение теплофизических свойств теплоизоляционных материалов методом регулярного режима третьего рода: монография // Тамбов. - Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ». - 2014. –80 с.
47. Черноскутов М.Ю., Ивлиев А.Д., Мешков В.В. Экспериментальная оценка степени адиабатичности образца при измерении температуропроводности методом температурных волн // ТВТ. – 2017. – Т. 55. - № 4 . - С. 634–637.
48. Ивлиев А. Д., Черноскутов М. Ю., Мешков В. В., Куриченко А. А. Теплофизические свойства твердых растворов иттрий-гольмий в интервале температур от комнатных до 1400 К // ТВТ. – 2020. – Т. 58. – № 3. - С. 336–343.
49. Lang S. B. Theoretical analysis of the pulse technique for measuring thermal diffusivity utilizing a periodical detector // Ferroelectrics. - 1976. - V. 11. - P. 315.
50. Yeack C.E., Melcher L.R., Jha S.S. Measurement of thermal diffusivity using a periodical detector // J. Appl. Phys. –1982. –V.53 –. № 6.- P. 3947–3949.

51. Malyshkina O. V., Bogomolov A.A., Major M.M. Surface layers of TGS class ferroelectrics and $Sn_2P_2S_6$ and $SbSI$ ferroelectrics – semiconductors in the phase transition region // *Ferroelectrics*. – 1996. - V.182. – P.11-18.
52. Малышкина О. В., Мовчи́кова А.А., Suchanek G. Новый метод определения координатных зависимостей пиротока в сегнетоэлектрических материалах // *ФТТ*. – 2007 . –Т. 49. -№ 11. – С.2045 – 2048.
53. Малышкина О. В., Мовчи́кова А.А. Метод тепловых волн как способ определения профиля поляризации в сегнетоэлектрических материалах // *ФТТ*. – 2009 . –Т. 51. -№ 7. – С.1307 – 1309.
54. Малышкина О. В. Применение метода TSW для исследования профиля поляризации в пленочных сегнетоэлектриках // *ФТТ*. – 2010 . –Т. 52. - № 4. – С.704 – 708.
55. Malyshkina O. V., Movchikova A. A., Grechishkin R. M., Kalugina O. N. Use of the Thermal Square Wave Method to Analyze Polarization State in Ferroelectric Materials // *Ferroelectrics*. – 2010.- V.400:1. - P. 63-75.
56. Malyshkina O. V., Movchikova A. A., Kalugina O. N., Daineko A. V. Determination of Thermal Diffusivity Coefficient of Thin Films by Thermal Square Wave Method // *Ferroelectrics*. – 2011.- V.424:1. - P. 28-35.
57. Malyshkina O. V., Movchikova A. A., Kalugina O. N., Shashkov M. S., Malyshkin Yu.A. , Golovnin V. A., Daineko. Analysis of the Pyroelectric Response of Sandwich-Type Piezoelectric Ceramics with Inhomogeneous Polarization Distribution // *Ferroelectrics*. – 2012.- V.439:1. - P.95-101.
58. Мовчи́кова А.А., Малышкина О. В., Калугина О.Н. Новый метод определения коэффициента тепловой диффузии тонких пленок с использованием сегнетоэлектрических кристаллов // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. – 2012. - №1. –С.37-41.
59. Малышкина О. В., Шишков Г. С. Исследование динамической температуропроводности пироэлектрическим методом // *Известия РАН. Серия физическая*. – 2016 . –Т. 80. -№ 10. -С. 800-803.

60. Малышкина О.В., Гавалян М.Ю., Шишков Г.С., Каплунов И.А., Колесников А.И., Айдинян Н.В. Анализ тепловых характеристик монокристаллов парателлурита методом прямоугольной тепловой волны // Физика твердого тела. – 2016. – Т. 58. - Вып. 11. – С. 2282-2286.
61. Малышкина О.В., Шишков Г.С., Калугина О.Н. Особенности распространения температурной волны в веществе // Известия РАН. Серия физическая. – 2019. – Т. 83. - № 19. - С. 838-841.
62. Малышкина О.В., Мовчикова А.А., Прокофьева Н.Б., Калугина О.Н. Физические и математические условия применения прямоугольной тепловой волны для исследования пироэффекта // Вестн. ТвГУ. Сер. Физика. - 2009.- 7, 48.
63. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. Л.: - Энергия.- 1976. - 352 с.
64. Филиппов Л.П., Кравчун С.Н., Абдуллаева В.М. Регистрация температурных волн в термически нелинейных средах // Вестн. Моск. Ун-та. Серия 3, Физика, Астрономия. – 1988. – Т.29. - №1. – С. 97-100.
65. Филиппов Л.П. Бинодаль, спинодаль, закритическая область // ТВТ. – 1984. – Т.22. –Вып. 4. – С. 679–685.
66. Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2014. - Т. 17. - № 1. - С. 46-54.
67. Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае цилиндрической и сферической симметрии // Вестник УрГУПС. - 2013. - № 4.- С. 4-10.
68. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2014. - Т. 20. - № 1. - С. 119-129.

69. Казаков А.Л., Спевак Л.Ф. численное и аналитическое исследование некоторых процессов описываемых нелинейным уравнением теплопроводности // Ученые записки казанского университета. Физико-математические науки.- 2015. - Т. 157. - кн. 4. – С. 42-48.
70. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Трехмерная тепловая волна, порожденная краевым режимом, заданным на подвижном многообразии // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». - 2018. - Т. 26. - С. 16-34.
71. Казаков А.Л., Нефедова О.А., Спевак Л.Ф. Решение задач об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов // Журнал вычислительной математики и математической. – 2019. – Т.59. - №6. - С. 1047–1062.
72. Давидович М.В., Корнев И.А., Тимофеев А.И. Нелинейные температурные волны: Анализ на основе нелинейного уравнения теплопроводности // Известия вузов. ПНД. – 2019 . - Т.27. - №6. – С.73–90.
73. Давидович М.В. Нелинейная задача о распределении температуры внутри Земли // Известия вузов. ПНД. – 2020 . - Т.28. - №2. – С.140–157.
74. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Влияние температурной зависимости коэффициента теплопроводности на стационарное температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов // Вестник Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2016. -№1/1(192). - С.120-126.
75. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Влияние температурной зависимости теплопроводности подложки на стационарное температурное поле диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов в воздухе и вакууме // Вестник Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. – 2016. -№1/1(192). - С.164-170.
76. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А., Рахими Ф.К. Влияние тепловой нелинейности теплофизических величин на стационарное температурное

- поле тонких пленок диэлектриков в поле непрерывного пучка протонов // Доклады АН Республики Таджикистан. - 2016. - Т. 59. - №1-2. - С. 41-45.
77. Бондаренко В.Н., Гончаров А.В., Сухоставец В.И., Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Контроль температуры полимерных пленок при облучении пучком ускоренных ионов // Восточно-европейский физический журнал. -2017.- Т.4. - №1. - С. 62-69.
78. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Температурное поле пленок диэлектриков в поле непрерывного пучка ионов // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. - Т.24. - № 6 . - С.981-984.
79. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Формирование температурного поля диэлектрических пленок и подложки в поле непрерывного пучка ионов // Инженерно-физический журнал . – 2018. - Т.91 . - №6 . - С.131-138.
80. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. О стационарном температурном поле диэлектрических пленок и подложки в поле непрерывного пучка ионов // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук.– 2017. - №4. - С.77-81.
81. Салихов Т. Х., Абдурахмонов А. А., Гуйчиев Х. Ш. Температурное поле в полимерных пленках при облучении потоком ионов // Вестник Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни. Серия естественных наук. – 2022. - №4 (16). - С.179-184.
82. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Температурное поле тонких пленок полиэтилена низкой плотности в поле непрерывного пучка однозарядных ионов гелия. Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященный «20-й годовщине дня национального единства» и «Году молодежи», ТНУ, апрель, 2017. С.598.
83. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А., Ходжахонов И.Т. Пространственно-временное поведение температурного поле тонких полимерных плёнок в поле непрерывного пучка протонов. Материалы международной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния»

- посвященной 90- летию Заслуженного деятеля науки и техники Республики Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Б.Н.Нарзуллаева(25 ноября, 2017) , Душанбе . 2019 С.84-85.
84. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. О температурное поле полимерных пленок в поле непрерывного пучка ионов в воздухе. Материалы международной научно- практической конференции «Современные проблемы физики и химии полимеров» . Физфак, ТНУ, 10-октября, 2023,с.89-91.
85. Nag P.K. Heat transfer. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited. – 2002. - 729 p.
86. Физические величины. Справочник. Под редакцией Григорьева И.С., Мейлихова Е.З.- М.: Энергоатомиздат. - 1991. –1232 с.
87. Физико - химические свойства окислов. Справочник. Под редакцией Самсонова Г.В. -М.: Наука. - 1978. - 471с.
88. Тепловая изоляция. Справочник. Под редакцией Г.Ф.Кузнецова. - М.: Стройиздат. - 1976.- 440с.
89. Р.Зигель, Дж. Хауэлл. Теплообмен излучением. Перевод с англ.// -М.: Мир, 1975.-935с.
90. Латыев Л.Н., Петров В.А., Чеховский В.Я., Шестаков Е.Н. Излучательные свойства твердых тел. Справочник. // М.: Энергия,-1974.-472с.
91. Салихов Т.Х. Тепловая нелинейность в оптоакустике (обзор). Часть II. Тепловая нелинейность в фототепловых задачах в физике твердого тела/ Салихов Т.Х.// Известия АН РТ, Отд.физ.-мат., хим., геол. и техн. н. –2012.- №1(146). -С.40-51.
92. Бондаренко В.Н., Гончаров А.В., Зац А.В. и др. Температурные режимы в полиимидной пленке при ионной имплантации.Тез.докл.междунар. совещания «Микро-и нанотехнологии с использованием пучков ионов, ускоренных до малых и средних энергий», РФ. г. Обнинск., 16-18 октября 2007.
93. David K. Lambert. Thermal Conductivity 21, Edited by C.J. Kremers and H.A. Fine, Plenum Press, New York, 1990. pp . 209-219.

94. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with solids // J. Appl Phys. –1976. – Vol.47. - No.1. – Pp.64–69.
95. Fujji Y., Moritani A., Nakai J. Photoacoustic Spectroscopy Theory for Multi-Layered Samples and Interference Effect // Jpn. J. Appl. Phys. –1981.–Vol.20. - No.2. –Pp. 361–367.
96. Barros M., Faria M. Photoacoustic procedure for measuring thermal parameters of transparent solids // Appl. Phys. Lett –1995. –Vol.67. - No.2. –Pp.3892–3894.
97. Т.Х.Салихов, Н.Меликхуджа, Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на формирование второй гармоники нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов // Доклады НАНТ. – 2020. - Т.63. - №3-4. - С.206-215.
98. Gao R., Xu Z., Ren Y., Song L., Liu C. Nonlinear mechanism in photoacoustic - powerful tools in photoacoustic imaging // Photoacoustics. – 2021. – Vol. 22. – Pp.100-243.
99. Салихов Т.Х., Шарипов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Вклад температурной зависимости теплофизических параметров подложки на параметры второй гармоники фотоакустического сигнала непрозрачных сред // Доклады АН Республики Таджикистан .– 2008.– Т. 51.–№ 8.– С.588-593.
100. Салихов Т.Х. Шарипов Д.М., Туйчиев Х.Ш. Влияние температурной зависимости оптических величин на характеристики основной гармоники нелинейного фотоакустического сигнала твердых тел с объемным поглощением луча // Доклады АН Республики Таджикистан .– 2011.– Т. 54.–№ 6.– С.465-472.
101. Салихов Т.Х., Ходжаев Ю.П., Рахмонов Р.К. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными непрозрачными образцами // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук.– 2014. – №1/4(153). – С.174-180.
102. Салихов Т.Х., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П., Рахмонов Р.К. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала оп-

- тически неоднородными твердыми телами // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2015. – Т. 58. – № 9. – С.804-812.
103. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на формирование основной гармоника нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов // Вестник ТНУ. Серия естественных наук . – 2021. - №3. - С.169-181.
104. Салихов Т.Х., Меликхуджа Н., Махмалатиф А., Ходжаев Ю.П. Вклад поглощения подложки на формирование нелинейного фотоакустического отклика двухслойных образцов: математическая модель и температурное поле // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2019 . - №4. - С.67-73.
105. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Особенности возбуждения тепловых волн в пленках диэлектриков при облучении гармонически модулированным ионным пучком // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2023.–№4.–С.109-122.
106. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Особенности возбуждения основной гармоника нелинейной тепловой волны в диэлектрических пленках при облучение гармонически модулированным ионным пучком. Сборник статей международной научной конференции «Развития новых направлений в науке: современные состояние и перспективы», посвященной 20-летию основания Научно-исследовательского института ТНУ, Душанбе, 25-26 октября, 2024 г.с.14-18.
107. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Математическая модель возбуждения линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках на подложке при облучении гармонически модулированным ионным пучком // Доклады НАН Таджикистана. 2024.- Т. 67. -№ 1-2.- С. 61-67.
108. Салихов Т.Х., Абдурахманов А.А. Особенности возбуждения линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках на подложке при облучении гармонически модулированным ионным пучком //Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук, 2024.-№3.- С.87-103.

109. Салихов Т. Х., Абдурахмонов А.А Математическая модель возбуждения линейных и нелинейных тепловых волн в диэлектрических пленках и подложки гармонически модулированным ионным пучком. Материалы республиканской научно-теоретической конференции преподавателей, сотрудников НИИ ТНУ посвященной «30-летия принятия Конституции Республики Таджикистан» и «Годом правового просвещения», Душанбе, 22-27 апреля 2024г. С. 4-6.
110. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А. Возбуждения тепловых волн в пленках диэлектриков на подложке гармонически модулированным ионным пучком. Сборник статей VI международной научной конференции «Вопросы физической и координационной химии» Душанбе. 15-16 мая 2024 г., С.186-192.
111. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А., Махмалатиф А. Особенности возбуждения второй гармоники тепловых волн в диэлектрических пленках на твердой подложке гармонически модулированными ионным пучком. Материалы IX Международной научной конференции «Современные проблемы физики», посвященной 60-летию Физико-технического Института им. С.У. Умарова, Национальной академии наук Таджикистана. Душанбе, 11-12 октября 2024 г. С.60-64.
112. Салихов Т.Х., Абдурахмонов А.А., Махмалатиф А., Особенности возбуждения основной гармоники тепловых волн в диэлектрических пленках на твердой подложке гармонически модулированным ионным пучком. Материалы международной научной конференции « Физические и технические науки в пространстве СНГ: проблемы и перспективы развития», Душанбе, 29-30, ноябрь, 2024. С.40-43