ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертацию Дадабоева Парвиза Абдусаломовича «Оптимальные квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для многомерных функций», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В конце пятидесятых годов прошлого столетия С.М.Никольским впервые была сформулирована и решена экстремальная задача построения наилучших квадратурных формул на заданном классе функций, то есть задача выбора узлов и коэффициентов квадратурной формулы из условия минимальности точной оценки погрешности формулы на этом же классе функций. В дальнейшем для различных классов функций указанная задача была решена как самим С.М.Никольским, так и его учениками и последователями – Н.П.Корнейчуком, В.П.Моторным, А.А.Женсыкбаевым, Е.Н.Лушпай, В.Ф.Бабенко, Б.Д.Баяновым, А.А.Лигуном, К.И.Осколковым, М.И.Левиным, М.Ю.Гиршовечем и многими другими. Обзор всех этих результатов приведен Н.П.Корнейчуком в "Дополнении" к книге С.М.Никольского "Квадратурные формулы", последнее издание которой вышло в издательстве "Наука" в 1988 г. В этом "Дополнении" отмечается, что данная теория получила значительное развитие для регулярных интегралов, но в ней остался ряд нерешённых проблем для других видов интегралов. Так, например, значительно менее развита теория построения наилучших квадратурных формул для сингулярных и криволинейных интегралов. Этим подчеркивается актуальность решения экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных формул для сингулярных и криволинейных интегралов.

Диссертационная работа Дадабоева Парвиза Абдусаломовича посвящена построению асимптотических и наилучших квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функции многих переменных. Следует отметить, что для некоторых классов многомерных функций и кривых наилучшие квадратурные формулы для криволинейных интегралов найдены С.Б.Вакарчуком, М.Ш.Шабозовым, К.Тухлиевым, М.К.Абдукаримзода, Д.С.Сангмамадовым, Ф.М.Мирпоччоевым, Л.Г.Файзмамадовой и другими. Несмотря на полученные некоторые результаты по оптимизации квадратурных формул для криволинейных интегралов, всё же точные результаты для классов функций и кривых найдены в редких случаях.

Перейдем к описанию основных результатов работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы.

Во введении обсуждается актуальность темы, приводятся постановки рассматриваемых в диссертации задач, указываются основные направления диссертационной работы и излагается кратко ее содержание.

Первая глава начинается с краткого исторического обзора. Затем приводятся формулировки экстремальных задач и даются определения классов функций, для которых эти задачи будут решены. В первой главе диссертации найдены асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и классах кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных вектор-коэффициентах и узлах. Основными результатами данной главы являются теоремы 1.3.1 и 1.4.1 и различные их следствия, важные для приложения.

Во второй главе диссертации изучается вопрос отыскания наилучших квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных малой гладкости и некоторых классов пространственных кривых, заданных параметрическими формулами. Здесь основными являются теоремы 2.2.1, 2.3.1–2.3.3, 2.4.1.

Однако, на наш взгляд, оптимальность квадратурных формул в полной мере не доказана. Автор по умолчанию предполагает, что всегда можно подобрать функцию многих переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ так, что её производная порядка r на произвольной кривой, заданной параметрически $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, будет принимать некоторое желаемое значение (здесь имеется в виду производная сложной функции по параметру t). Если для функции одной переменной это действительно так и показывается достаточно просто, то в рассматриваемом случае это не простой вопрос, который почему-то оставлен автором без внимания. Однако ответ на этот вопрос требует исследования разрешимости непростого дифференциального уравнения, так как производная сложной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, как функции на кривой по параметру t, имеет громоздкое и непростое выражение.

Да, полученные в диссертации квадратурные формулы являются оптимальными по порядку. Возможно эти формулы являются и наилучшими на соответствующих классах, но диссертантом установлена лишь оценка сверху. На наш взгляд, без исследования обозначенного вопроса о возможности подобрать нужную функцию говорить об оптимальности не следует. Возможно ранее такой вопрос уже изучался кем-то из специалистов и имеет положительное решение, тогда следует дать необходимую ссылку.

В связи с обозначенной проблемой вероятно автору следовало бы внести уточнение в название диссертации, к слову оптимальные добавить “по порядку”.

Диссертация содержит ряд неточностей и небольших ошибок. Помимо обозначенного неисследованого вопроса к наиболее существенным неточностям я бы отнёс неправильное выражение для производной, начиная со второй, сложной функции нескольких переменных по параметру рассматриваемой кривой. Это, конечно, недостаток, однако выписываемое выражение громозкой производной в диссертации при доказательствах не используется и на результаты не влияет.

Приведём список других недочётов:

1. На с.15 и много где ниже (с.39,52), функции φ_i это функции одной переменной, поэтому при записи производной буква d должна быть прямой, вместе с тем на с.56 применяется верная запись.
2. На с.16, в формуле (1.2.4) и ниже нижний предел интеграла должен быть t_0.
3. На с.17, в формуле (1.2.7) числа p_k не должны быть произвольными, но про это ничего не говорится.
4. На с.23, не написано зачем нужна функция f_0.
5. На с.31, почему в нижнем равенстве отсутствует K?
6. На с.37, используется неудачное слово «доказали» в строке 5.
7. На с.38, пропущено выражение для ρ_3.
8. На с.40, что такое градиент второго порядка?
9. На с.44, что такое «обычные средства дифференциального вычисления»? Не ясно как получены формулы (2.2.14).
10. На с.48, откуда возникли формулы (2.3.8)?
11. На с.49, откуда взялась формула для остатка в строке 5 снизу?
12. На с.52, говорится, что рассуждения из [21] можно повторить, но какие, ведь это монография в 419 страниц?

Перечисленные в списке замечания в большей части носят методический характер и никак не влияют на результаты диссертационной работы.

Основными результатами работы являются:

1. найдены асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и классах кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных вектор-коэффициентах и узлах;
2. найдены квадратурные формулы типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$, которые, возможно, оптимальные;
3. найдены квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r = 1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1 \leq q < \infty)$, причём при положительном ответе на обозначенный ранее вопрос их можно будет считать наилучшими.

Данные результаты являются новыми и вносят весомый вклад в теорию численного интегрирования.

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, полно и правильно отражает основные положения текста диссертационной работы.

Диссертация Дадабоева П.А. соответствует критериям, установленным “Положением о присуждении ученых степеней” по пунктам 10, 11 и 14.

Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения в теории аппроксимации функций (с некоторой оговоркой про оптимальнось квадратурных формул, обозначенной выше), выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в теорию приближения функций. Полученные автором результаты могут быть использованы при решении разного рода экстремальных задач теории приближения функций.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в 10 научных работах, 4 из которых опубликованы в журналах входящих в перечень ВАК МОН РФ.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Диссертация Дадабоева Парвиза Абдусаломовича на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям пунктов 9-11, 14 Положения о присуждения ученых степеней, а ее автор — Дадабоев Парвиз Абдусаломович — заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук
по специальности 1.1.7 Вычислительная
математика **Волков Ю.С.**

Место работы:
630090, Россия, г. Новосибирск, пр. академика Коптюга, д.4,
ФГБУН Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Тел.: 383 333-28-92.
Веб-сайт: //www.math.nsc.ru/;
E-mail: im@math.nsc.ru

Подпись Ю.С.Волкова подтверждаю
Учёный секретарь **Н.А.Даурцева**

18.09.2023