Институт математики им. А.Джураева
НАН Таджикистана
Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Дадабоев Парвиз Абдусаломович

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана, доктор физико-
математических наук, профессор
М.Ш. Шабозов

Д У Ш А Н Б Е – 2023

О Г Л А В Л Е Н И Е

Введение

Диссертационная работа посвящена приближённому вычислению многомерных криволинейных интегралов для некоторых классов функций малой гладкости и классов пространственных кривых.

В диссертационной работе рассматриваются две задачи численного интегрирования криволинейных интегралов:

1) нахождение асимптотически оптимальных квадратурных формул для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на классе функций многих переменных и классе пространственных кривых, модуль непрерывности градиента которых сверху ограничен заданной мажорантой модуля непрерывности;

2) отыскание наилучших квадратурных формул приближённого интегрирования криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского для некоторых классов функций многих переменных малой гладкости и классов пространственных кривых, градиенты первого и второго порядка которых по норме пространства ограничены сверху заданным числом.

Таким образом, в первой главе диссертации рассматриваются вопросы нахождения асимптотически точных оценок погрешности приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций многих переменных и пространственных кривых; во второй главе рассматривается экстремальная задача отыскания наилучших квадратурных формул приближённого интегрирования многомерных криволинейных интегралов в смысле С.М.Никольского на классах функций многих переменных малой гладкости и классах пространственных кривых.

Актуальность и степень разработанности темы исследования

В пятидесятых годах прошлого столетия С.М.Никольский [17] впервые поставил и решил экстремальные задачи построения наилучших квадратурных формул на заданном классе функций – задачи выбора узлов и коэффициентов квадратурной формулы из условия минимальности точной оценки остатка формулы на этом же классе функций. Аналогичную задачу в случае фиксированных узлов впервые рассмотрел А.Сард [34, 35]. В дальнейшем теория построения наилучших квадратурных формул стала важным разделом вычислительной математики. Существенные результаты по отысканию наилучших (оптимальных) квадратурных формул были получены учениками и последователями С.М.Никольского – Н.П.Корнейчуком [8], В.П.Моторным [14], А.А.Женсыкбаевым [5], В.Ф.Бабенко [1], Б.Д.Бояновым [2], А.А.Лигуном [11], К.И.Осколковым [18], М.И.Левиным, М.Ю.Гиршовичем [10] и многими другими. Все эти результаты приведены Н.П.Корнейчуком [8] в добавлении к книге С.М.Никольского [17]. В этом добавлении отмечается, что данная теория получила значительное развитие, но в ней остался ряд нерешённых проблем. Прежде всего, значительно менее развита теория построения многомерных наилучших кубатурных формул, построения наилучших квадратурных формул для сингулярных и криволинейных интегралов. Поэтому решение экстремальных задач отыскания наилучших квадратурных формул для вышеперечисленных интегралов является актуальным.

Частично этот пробел – нахождение оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов – восполняется в данной диссертационной работе, а именно: здесь рассматривается задача построения наилучших квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций многих переменных, определённых в точках заданной пространственной кривой.

Отметим, что для некоторых классов многомерных функций и кривых наилучшие квадратурные формулы для криволинейных интегралов найдены С.Б.Вакарчуком [4], М.Ш.Шабозовым [27], М.Ш.Шабозовым и К.Тухлиевым [31], М.Ш.Шабозовым и М.К.Абдукаримзода [28], Д.С.Сангмамадовым [19, 20], Ф.М.Мирпоччоевым [12, 13], Л.Г.Файзмамадовой [23–25] и другими.

Несмотря на полученные результаты по оптимизации квадратурных формул для криволинейных интегралов, всё же точные результаты для классов функций и кривых найдены в редких случаях.

В первой главе диссертации изучается задача об асимптотически точных оценках приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых.

Во второй главе диссертации изучается вопрос отыскания наилучших квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных малой гладкости и некоторых классов пространственных кривых, заданных параметрическими формулами.

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работы кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2018-2023 гг. по теме “Теория приближения функций”.

Общая характеристика работы

Цели и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и классах кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных векторах коэффициентов и узлов;
- найти оптимальную квадратурную формулу типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- найти наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r = 1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1 \le q < \infty)$.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания и метод Н.П.Корнейчука отыскания наилучших квадратурных формул на функциях, обращающих квадратурную сумму в нуль.

Научная новизна исследований. В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и классах кривых $H^{\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных вектор-коэффициентах и узлах;
- найдены оптимальные квадратурные формулы типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;

- найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r=1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q<\infty)$.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о нахождении асимптотически точных оценок остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H^{\omega}_m$ и классах кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$;
- основные теоремы об оптимальных квадратурных формулах типа Маркова для приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- основные теоремы о наилучших квадратурных формулах вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r=1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q<\infty)$.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационной работе результаты о приближённом вычислении криволинейных интегралов имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты могут применяться при отыскании точных оценок погрешности приближённых интегралов для вычисления поверхностных интегралов. Главы диссертации по отдельности могут составить содержание специальных курсов для аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведённые в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений и кафедры математического анализа и теории функций Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана, профессора М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2016-2022 гг.);
- международной летней математической Школе-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.)
- международной научной конференции “Современные проблемы математики и ее приложений” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);
- международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений” (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.);
- международной научной конференции “Актуальные проблемы современной математики” (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.);
- республиканской научной конференции “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества” (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- на международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации. Результаты исследований автора по теме диссертационной работы опубликованы в 10 научных работах, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий Перечень ВАК РФ, а 6 – в трудах международных и республиканских конференций.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 45 наименований, занимает 68 страницу машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Глава I. Об асимптотически точных оценках погрешности приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых

В “Дополнение” Н.П.Корнейчука к монографии С.М.Никольский отмечается, что по экстремальным задачам теории квадратур получен ряд существенных результатов по минимизации погрешности квадратурных формул для соболевских классов функций одной переменной для классов функций, задаваемых модулями непрерывности (см. [17, с. 127-256]).

В то же время в указанном “Дополнение” отмечается, что до настоящего времени немало задач для многомерных случаев ещё не решено. Можно полагать, что это замечание в полной мере также относится к задаче отыскания наилучших квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов. Для указанных интегралов задача отыскания наилучших квадратурных формул для различных классов функций находится на стадии разработки. Отметим, что задача приближённого вычисления криволинейных интегралов для функций двух переменных определённых на плоской кривой ранее изучена в работах К.Тухлиева [22], М.Ш.Шабозова и Д.С.Сангмамадова [30], М.Ш.Шабозова и Л.Г.Файзмамадовой [32], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозовой [33] и др.

В перечисленных работах вычислены точные оценки погрешности на некоторых классах функций двух переменных и плоских кривых, задаваемых модулями непрерывности. Желая продолжить исследования по данной тематике, в первой главе диссертации вводим в рассмотрение аналог классических квадратурных формул прямоугольников, трапеций, Симпсона для приближённого вычисления многомерных криволинейных интегралов и найдены асимптотически точные оценки погрешности этих квадратурных формул для некоторых классов функций многих переменных и пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности. При этом при заданных значениях вектор-коэффициентов $P := \left\{p_k\right\}_{k=1}^N$ и вектор-узлов $T = \left\{t_k\right\}_{k=1}^N$ находятся асимптотически точные оценки погрешности рассматриваемых квадратурных формул на исследуемых классах функций.

§ 1.1. Определения, обозначения и постановка задач об оптимальных квадратурных формулах для приближенного вычисления криволинейных интегралов

Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$. Обозначим

$$J(f;\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{1.1.1}$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление так, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \overset{\smile}{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A. Тогда, как известно, кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t),\ (0 \le t \le L), \tag{1.1.2}$$

а функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ от переменной t. Хорошо известно, что в этом случае интеграл (1.1.1) запишется в виде следующего определённого интеграла на отрезке $[0, L]$

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt. \tag{1.1.3}$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathcal{L}_N\big(f;\Gamma;P,T\big) := \sum_{k=1}^{N} p_k f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big) \tag{1.1.4}$$

для приближённого вычисления интеграла (1.1.3) задаётся векторами коэффициентов $P = \big\{p_k\big\}_{k=1}^{N}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа, и векторами узлов $T = \big\{t_k : 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le L\big\}$. Через

$$\big|R_N(f;\Gamma)\big| := \big|R_N(f;\Gamma;P,T)\big| = \big|J(f;\Gamma) - \mathcal{L}_N(f;\Gamma;P,T)\big|$$

обозначим погрешность квадратурной формулы (1.1.4).

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f\bigl(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots \varphi_m(t)\bigr)\}$, определённых в точках кривой Γ и интегрируемых как сложные функции параметра t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности, примем верхнюю грань

$$R_N\bigl(\mathfrak{M}; \Gamma; P; T\bigr) = \sup\bigl\{|R_N(f; \Gamma; P; T)| : f \in \mathfrak{M}\bigr\}.$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями (1.1.2), длина которых равна L. Наибольшую погрешность квадратурной формулы (1.1.4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}$ обозначим

$$R_N\bigl(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L); P; T\bigr) = \sup\bigl\{|R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P; T)| : \Gamma \in \mathfrak{N}(L)\bigr\}.$$

Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ – множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$\bigl|\varphi(t') - \varphi(t'')\bigr| \le \omega\bigl(|t' - t''|\bigr), \quad t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, то есть непрерывная неубывающая функция, удовлетворяющая соотношениям

$$0 \le \omega(t'') - \omega(t') \le \omega(t'' - t'), \quad 0 \le t' \le t'' \le L, \quad \omega(0) = 0.$$

Через $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких пространственных кривых $\Gamma \subset R^m$, длиною L, заданных параметрическими уравнениями (1.1.2), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L], i = \overline{1, m}$, то есть

$$\bigl|\varphi_i(t'') - \varphi_i(t')\bigr| \le \omega_i\bigl(|t'' - t'|\bigr), \ t', t'' \in [0, L], \ i = \overline{1, m}.$$

В случае $\omega_i(t) \equiv \omega(t), i = \overline{1, m}$ вместо $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ будем писать $H^\omega_m[0, L]$. Если $\omega(t) = Kt^\alpha, K > 0, 0 < \alpha \le 1$, то получим класс Гёльдера с константой K порядка α, которую обозначим $KH^{\alpha, m}[0, L]$:

$$\bigl|\varphi_i(t'') - \varphi_i(t')\bigr| \le K\bigl|t'' - t'\bigr|^\alpha, \ t', t'' \in [0, L], \ i = \overline{1, m}.$$

§ 1.2. Вывод формулы Тейлора с интегральным остатком для сложной функции многих переменных, зависящих от параметра

Нам в дальнейшем понадобится новый вид формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, доказательство которой приводим в этом пункте. Чтобы вывести формулу Тейлора для сложной функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, введём операторное обозначение

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}. \tag{1.2.1}$$

Используя это обозначение для сложной функции

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big), \tag{1.2.2}$$

запишем выражение первой производной функции (1.2.2) через оператор (1.2.1), полагая

$$\nabla f = \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) :=$$

$$:= \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = F'(t).$$

Аналогично для второй производной (1.2.2) имеем:

$$\nabla^{(2)} f = \nabla(\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right)^2 f =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i^2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} := F''(t),\ j = \overline{1, m},$$

и для $r = 2, 3, \ldots$ получаем рекуррентную формулу

$$F^{(r)}(t) = \nabla^{(r)} f := \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) :=$$

$$:= \nabla\big(\nabla^{(r-1)} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\big). \tag{1.2.3}$$

Пользуясь введёнными обозначениями, запишем формулу Тейлора для разложения функций $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ в произвольной точке $t_0 \in [0, L]$ по степеням разности $(t - t_0)$. В самом деле, записав формулу Тейлора для функции $F(t)$ по степеням $t - t_0$ в интегральной форме (см., например, [17, с.21])

$$F(t) := \sum_{l=0}^{r-1} \frac{F^{(l)}(t_0)}{l!}(t - t_0)^l + \frac{1}{(r-1)!}\int_0^L \big(t - u\big)_+^{r-1} F^{(r)}(u)du, \qquad (1.2.4)$$

где $u_+^l = \big[\max(0, u)\big]^l$; $l \in \mathbb{N}$ и выражая производные $F^{(l)}(t_0)$ по формуле (1.2.3), получаем формулу Тейлора для функции $F(t) := f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ в следующем виде

$$F(t) := \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{l!}\,\nabla^{(l)} f\big(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)\big)(t - t_0)^l +$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^L \big(t - u\big)_+^{r-1}\,\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u)\big)du. \qquad (1.2.5)$$

Полученная обобщённая формула Тейлора (1.2.5) в дальнейшем будет основным нашим инструментом для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа вида (1.1.1) при помощи квадратурной формулы (1.1.4), при произвольном векторе коэффициентов $P = \big\{p_k\big\}_{k=1}^N$ и векторе узлов $T = \big\{t_k\big\}_{k=1}^N$.

Найдём общий вид остатка формулы (1.1.4) в предположении точности этой формулы на множествах полиномов степени $r - 1$. Имеем:

$$R_N(f, \Gamma) = \int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt - \sum_{k=0}^N p_k f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big) =$$

$$= \int_0^L \Bigg\{ \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{l!}\,\nabla^{(l)} f\big(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_m(t_0)\big)(t - t_0)_+^l +$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^L (t-u)_+^{r-1}\nabla^{(r)} f\left(\varphi_1(u),\,\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\right)du\Bigg\}dt-$$

$$-\sum_{k=0}^{N} p_k\Bigg\{\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{l!}\nabla^{(l)}\left(\varphi_1(t_0),\,\varphi_2(t_0),\ldots,\varphi_m(t_0)\right)\cdot(t_k-t_0)^l+$$

$$+\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^L (t_k-u)_+^{r-1}\,\nabla^{(r)} f\left(\varphi_1(u),\,\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\right)du\Bigg\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{1}{l!}\,\nabla^{(l)}\big(\varphi_1(t_0),\,\varphi_2(t_0),\ldots,\varphi_m(t_0)\big)\left[\int\limits_0^L (t-t_0)^l dt-\sum_{k=0}^{N} p_k(t_k-t_0)^l\right]+$$

$$+\frac{1}{r!}\int\limits_0^L\left[(L-u)^r-r\sum_{k=0}^{N} p_k(t_k-u)_+^{r-1}\right]\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(u),\,\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)du=$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^L\left[\frac{(L-u)^r}{r}-\sum_{k=0}^{N} p_k(t_k-u)_+^{r-1}\right]\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(u),\,\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)du=$$

$$=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_0^L K_r(t)\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt,\qquad(1.2.6)$$

где ядро $K_r(t)$ имеет вид:

$$K_r(t)=\left[\frac{(L-t)^r}{r}-\sum_{k=0}^{N} p_k(t_k-t)_+^{r-1}\right],\quad u_+^m:=\big[\max(0,u)\big]^m.\qquad(1.2.7)$$

Отметим, что ядро K_r является полиномиальном сплайном степени $r-1$, дефектом 1 в узлах t_k квадратурной формулы (1.1.4). Формулами (1.2.6) и (1.2.7) воспользуемся в последующих параграфах первой главы при выводе асимптотически точных оценок погрешности на классах функций многих переменных и классах пространственных кривых. Через

$$W^{(r)}H_m^{\omega}:=W^{(r)}H_m^{\omega}[0,L]\;(r\in\mathbb{Z}_+,\;W^{(0)}H_m^{\omega}\equiv H_m^{\omega})$$

обозначим множество функций $f(M) := f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, у которых почти всюду в области Q существуют частные производные

$$\frac{\partial^r f}{\partial\varphi_i^{r-s}\partial^s\varphi_j},\ i, j = \overline{0, k},\ \ s = \overline{0, r};$$

и для любых двух точек $t', t'' \in [0, L]$ удовлетворяющих условию

$$\Big|\nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t'), \varphi_2(t'), \ldots, \varphi_m(t')\big) - \nabla^{(r)} f\big((\varphi_1(t''), \varphi_2(t'')), \ldots, \varphi_m(t'')\big)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \big|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')\big| \leq \sum_{i=1}^{m} \omega_i\big(|t' - t''|\big), \tag{1.2.8}$$

где $\omega_i(t)$ $(i = \overline{1, m})$ – заданные модули непрерывности.

§ 1.3. Асимптотически точные оценки погрешности квадратурной формулы прямоугольников для криволинейных интегралов на классах функций $W^{(l)}H^{\omega}_{m}$ и классах кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$

При приближённом вычислении криволинейных интегралов вида (1.1.1) воспользуемся аналогом классической формулы средних прямоугольников для криволинейных интегралов вида (1.1.1)

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)+$$

$$+R_N(f;\Gamma). \qquad (1.3.1)$$

В этой формуле вектор коэффициентов $\bar{P} = \big\{\bar{p_k} : \bar{p_k} = L/N\big\}_{k=1}^{N}$ и вектор узлов $\bar{T} = \big\{\bar{t_k} : \bar{t_k} = (2k-1)L/(2N)\big\}_{k=1}^{N}$ заданы и требуется определить погрешность формулы (1.3.1) на классах функций $W^{(l)}H^{\omega}_{m}$ и классах кривых $H^{\omega_l,\ldots,\omega_m}[0,L]$, удовлетворяющих неравенству (1.2.8). Таким образом, требуется найти точное или асимптотически точное значение следующей величины

$$R_N\big(W^{(l)}H^{\omega}_{m};\ H^{\omega_l,\ldots,\omega_m}[0,L];\ \bar{P},\bar{T}\big) =$$

$$= \sup\left\{\big|R_N(f;\Gamma;\bar{P},\bar{T})\big| : f\in W^{(1)}H^{\omega}_{m};\ \Gamma\in H^{\omega_l,\ldots,\omega_m}[0,L]\right\}. \qquad (1.3.2)$$

Записав для произвольной функции $f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)\in W^{(l)}H^{\omega}_{m}$ как сложной функции одного переменного

$$F(t) := f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)$$

формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (1.2.5) в окрестности $t_0 = 0$, получим

$$f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big) = f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)+$$

$$+\int\limits_0^L \nabla f\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)(t-u)_+^0du, \tag{1.3.3}$$

где $(t-u)_+^0 = \big[\max(t-u,0)\big]^0$. Подставляя формулу (1.3.3) в квадратурную формулу (1.3.1) с учётом точности формулы для постоянной функции, остаток формулы запишем в виде

$$R_N\big(f;\Gamma;\bar{P},\bar{T}\big) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt-$$

$$-\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)=$$

$$=\int\limits_0^L \Big[f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)+\int\limits_0^L \nabla f\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)(t-u)_+^0du\Big]dt-$$

$$-\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N}\Bigg[f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)+$$

$$+\int\limits_0^L \nabla f\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)\left(\frac{2k-1}{2N}L-u\right)_+^0 du\Bigg]=$$

$$=\left\{Lf\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)-\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)\right\}+$$

$$+\int\limits_0^L\left\{\int\limits_0^L (t-u)_+^0dt-\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2k-1}{2N}L-u\right)_+^0\right\}\times$$

$$\times\nabla\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)du=$$

$$=\int\limits_0^L\left[L-u-\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2k-1}{2N}L-u\right)_+^0du\right]\nabla f\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)du=$$

$$=\int\limits_0^L K_1(u)\nabla f\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)du, \tag{1.3.4}$$

где, ради краткости, положено

$$K_1(u) = L - u - \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2k-1}{2N}L - u\right)_+^0. \qquad (1.3.5)$$

Равенство (1.3.4) с учётом (1.3.5) после простых вычислений и упрошения для произвольной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \in W^{(1)}H_m^\omega$ запишем в следующем виде

$$R_N\big(f; \Gamma; \bar{P}, \bar{T}\big) = \int_0^L \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) g(t)dt. \qquad (1.3.6)$$

Полагая $h = 1/N$, интеграл (1.3.6) запишем в виде

$$R_N\big(f; \Gamma; \bar{P}, \bar{T}\big) = \sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)h}^{kh} \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) g(t)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\int_{(k-1)h}^{(k-1/2)h} + \int_{(k-1/2)h}^{kh}\right) \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) g(t)dt =$$

$$= N\int_0^h \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) g(t)dt,$$

где функция $g(t)$ определяется равенством

$$g(t) = \begin{cases} t - (k-1)h, & (k-1)h \le t \le (k-1/2)h, \ h = 1/N; \\ t - kh, & (k-1/2)h \le t \le kh, \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \qquad (1.3.7)$$

Очевидно, что $g(kh + t) = g(t)$ $(0 \le \ t \le h, \ k = \overline{1, N})$. Отмеченные выше свойства (1.3.7) функции g(t) позволяют равенство (1.3.6) записать в следующем виде

$$\big|R_N(f, \Gamma; \bar{P}, \bar{T})\big| = N\left|\int_0^h \nabla f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) g(t)dt\right|. \qquad (1.3.8)$$

Учитывая, что $\int\limits_0^h g(t)dt = 0$, а также то, что $f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)) \in W^{(1)}H^\omega$, из (1.3.8) получаем

$$\left|R_N(f, \Gamma; \bar{P}, \bar{T})\right| =$$

$$= N\left|\int\limits_0^h \Big[\nabla f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) - \nabla f\big(\varphi_1(h/2), \ldots, \varphi_m(h/2)\big)\Big] g(t)dt\right| \le$$

$$\le N\Bigg\{\int\limits_0^{h/2}\Big|\nabla f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) - \nabla f\big(\varphi_1(h/2), \ldots, \varphi_m(h/2)\big)\Big| tdt +$$

$$+ \int\limits_{h/2}^{h}\Big|\nabla f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) - \nabla f\big(\varphi_1(h/2), \ldots, \varphi_m(h/2)\big)\Big|(h-t)dt\Bigg\} \le$$

$$\le N\left\{\int\limits_0^{h/2}\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i\left(\frac{h}{2} - t\right)\right\} tdt + \int\limits_{h/2}^{h}\left\{\sum_{i=1}^m \omega_i\left(t - \frac{h}{2}\right)\right\}(h-t)dt\right\} =$$

$$= 2N\sum_{i=1}^m \int\limits_0^{h/2} \omega_i\left(\frac{h}{2} - t\right) tdt = 2N\sum_{i=1}^m \int\limits_0^{h/2} \omega_i(t)\left(\frac{h}{2} - t\right) dt =$$

$$= 2N\sum_{i=1}^m \int\limits_0^{L/(2N)} \omega_i(t)\left(\frac{L}{2N} - t\right) tdt = \frac{L^2}{2N}\sum_{i=1}^m \int\limits_0^1 (1-t)\omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right) dt. \quad (1.3.9)$$

Так как модули непрерывности $\omega_i(Lt/2N))$ являются неубывающими функциями на отрезке $[0, 1]$, то из правой части (1.3.9) получаем оценку сверху

$$\left|R_N(f, \Gamma; \bar{P}, \bar{T})\right| \le \frac{L^2}{4N}\sum_{i=1}^m \omega_i\left(\frac{L}{2N}\right).$$

Докажем теперь, что для погрешности квадратурной формулы (1.3.1) на всём классе функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и классе кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]$ справедлива оценка

$$R_N(W^{(1)}H_m^\omega;\ H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0, L]; \bar{P}, \bar{T}) = \theta_N L\sum_{i=1}^m \int\limits_0^{L/(4N)} \omega_i(t)dt, \quad \frac{1}{2} \le \theta_N \le \frac{5}{2}. \quad (1.3.10)$$

В самом деле, сохраняя обозначение $h = L/N$, определим на отрезке $[0, L]$ функцию $f_0\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, у которой

$$\nabla f_0\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \omega_i(t), & 0 \le t \le \dfrac{h}{4}, \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(\dfrac{h}{2} - t\right), & \dfrac{h}{4} \le t \le \dfrac{h}{2}, \\ \nabla f_0\big(\varphi_1(h-t), \varphi_2(h-t), \ldots, \varphi_m(h-t)\big), & \dfrac{h}{2} \le t \le h \end{cases}$$

и для которой

$$\nabla f_0\big(\varphi_1(t+h), \varphi_2(t+h), \ldots, \varphi_m(t+h)\big) = \nabla f_0\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big).$$

Пользуясь рассуждением, приведённым в [31], легко показать, что $f_0\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$. Простые вычисления показывают, что

$$R_N\left(f_0, \Gamma; \bar{P}, \bar{T}\right) = 2N \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^{h/4} t\omega_i(t)dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^{h/4} \left(\frac{h}{2} - t\right)\omega_i(t)dt \right) =$$

$$= 2N \cdot \frac{h}{4} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{h/4} \omega_i(t)dt = \frac{L}{2} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{L/(4N)} \omega_i(t)dt. \qquad (1.3.11)$$

С другой стороны, из оценки (1.3.9) для всех $i = \overline{1, m}$ имеем:

$$2N \int\limits_0^{h/2} \left(\frac{h}{2} - t\right) \omega_i(t)dt = 2N \left(\int\limits_0^{h/4} \left(\frac{h}{2} - t\right)\omega_i(t)dt + \int\limits_{h/4}^{h/2} \left(\frac{h}{2} - t\right)\omega_i(t)dt \right) \le$$

$$\le 2N \left(\frac{h}{2} \int\limits_0^{h/4} \omega_i(t)dt + 2 \int\limits_{h/8}^{h/4} \left(\frac{h}{2} - 2t\right)\omega_i(2t)dt \right) \le$$

$$\leq 2N\left(\frac{h}{2}\int\limits_0^{h/4}\omega_i(t)dt+4\int\limits_{h/8}^{h/4}\left(\frac{h}{2}-2t\right)\omega_i(t)dt\right)\leq$$

$$\leq 2N\left(\frac{h}{2}\int\limits_0^{h/4}\omega_i(t)dt+h\int\limits_{h/8}^{h/4}\omega_i(t)dt\right)=L\int\limits_0^{h/4}\omega_i(t)dt+2L\int\limits_{h/8}^{h/4}\omega_i(t)dt. \quad (1.3.12)$$

Последний интеграл в правой части неравенства (1.3.12) оценим при помощи следующего неравенства, справедливого при любом $h \geq 0$:

$$\int\limits_{h/2}^{h}\omega_i(t)dt=\int\limits_0^{h}\omega_i(t)dt-\int\limits_0^{h/2}\omega_i(t)dt=\int\limits_0^{h}\left[\omega_i(t)-\frac{1}{2}\omega_i\left(\frac{t}{2}\right)\right]dt\leq\frac{3}{4}\int\limits_0^{h}\omega_i(t)dt,$$

поскольку $\omega_i(t/2) \geq (1/2)\omega_i(t)$. Таким образом, из неравенства (1.3.12) окончательно находим

$$2N\int\limits_0^{h/2}\left(\frac{h}{2}-t\right)\omega_i(t)dt\leq L\int\limits_0^{h/4}\omega_i(t)dt+2L\int\limits_{h/8}^{h/4}\omega_i(t)dt\leq$$

$$\leq L\int\limits_0^{h/4}\omega_i(t)dt+2L\cdot\frac{3}{4}\int\limits_0^{h/4}\omega_i(t)dt=\frac{5L}{2}\int\limits_0^{L/(4N)}\omega_i(t)dt. \quad (1.3.13)$$

Сравнивая оценки (1.3.11) и (1.3.13) для произвольной функции $f \in W^{(1)}H_m^{\omega}$ и кривой $\Gamma \in H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$, запишем двустороннюю оценку

$$\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/(4N)}\omega_i(t)dt\leq R_N\left(f,\Gamma;\bar{P},\bar{T}\right)\leq\frac{5L}{2}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^{L/(4N)}\omega_i(t)dt,$$

откуда и вытекает требуемое равенство (1.3.10).

Отметим, что соотношение (1.3.10) справедливо для произвольных модулей непрерывности. Если же $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ являются выпуклыми вверх модулями непрерывности, то аналогичным образом доказывается неравенство

$$\frac{L}{4}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i(t)dt \le R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \bar{P},\bar{T}\big) \le$$

$$\le \frac{L}{4}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i(t)dt + \frac{L^2}{32N^2}\sum_{i=1}^{m}\omega_i(t). \qquad (1.3.14)$$

Отсюда сразу следует предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{4NR_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \bar{P},\bar{T}\big)}{L\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i(t)dt} = 1. \qquad (1.3.15)$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1.3.1. *Для погрешности квадратурной формулы прямоугольников (1.3.1) на классах функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и классах кривых $\Gamma \in H^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ справедливы оценки*

$$R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \bar{P},\bar{T}\big) = \theta_N L\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{L/(4N)}\omega_i(t)dt, \quad \frac{1}{2}\le\theta_N\le\frac{5}{2}.$$

Если же $\omega_i(t)$ $(i=\overline{1,m})$ – выпуклые вверх на отрезке $[0,L]$ модули непрерывности, то имеет место предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{4NR_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega_1,\dots,\omega_m}; \bar{P},\bar{T}\big)}{L\sum\limits_{i=1}^{N}\int\limits_{0}^{L/(2N)}\omega_i(t)dt} = 1.$$

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы 1.3.1 при $\omega_i(t)=\omega(t)(i=\overline{1,m})$ справедливы равенства*

$$R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega,m}; \bar{P},\bar{T}\big) = \theta_N\, mL\int\limits_{0}^{L/(4N)}\omega(t)dt, \quad \left(\frac{1}{2}\le\theta_N\le\frac{5}{2}\right). \quad (1.3.16)$$

Если $\omega(t)$ – выпуклый вверх модуль непрерывности, то из (1.3.14) следует

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega}; H^{\omega,m}, \bar{P}, \bar{T}\big)}{mL \int\limits_0^{L/(2N)} \omega(t)dt} = 1. \tag{1.3.17}$$

Из (1.3.16), *в частности, если* $\omega(t) = Kt^{\alpha}$, $K > 0$, $0 < \alpha \le 1$, *то имеем:*

$$R_N\big(KW^{(1)}H_m^{\alpha};\ KH^{\alpha,m}, \bar{P}, \bar{T}\big) = \frac{\theta_N mKL}{\alpha+1}\left(\frac{L}{4N}\right)^{\alpha+1}, \quad \frac{1}{2} \le \theta_N \le \frac{5}{2},$$

а из асимптотического равенства (1.3.17) *получаем*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{4R_N\big(KW^{(1)}H^{\alpha,m}, H^{\alpha,m}, \bar{P}, \bar{T}\big)}{mKL \cdot \dfrac{1}{\alpha+1}\left(\dfrac{L}{2N}\right)^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+3}\cdot(\alpha+1)}{mKL^{\alpha+2}} \lim_{N\to\infty} N^{\alpha+1} R_N\big(KW^{(1)}H^{\alpha,m}, H^{\alpha,m}, \bar{P}, \bar{T}\big) = 1.$$

Из последнего равенства следует асимптотическое равенство

$$R_N\big(KW^{(1)}H_m^{\alpha};\ H^{\alpha,m}, \bar{P}, \bar{T}\big) \sim \frac{1}{N^{\alpha+1}} \cdot \frac{mKL^{\alpha+2}}{2^{\alpha+3}(\alpha+1)}, \ \text{при } N \to \infty.$$

§ 1.4. Об асимптотически точной оценке погрешности квадратурной формулы Симпсона приближенного интегрирования криволинейных интегралов на классах функций, задаваемых модулями непрерывности

В этом параграфе решим задачу приближённого интегрирования интеграла (1.1.3) при помощи квадратурной формулы Симпсона, имеющей вид

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right)dt = \frac{L}{6N}\Bigg\{ f\left(\varphi_1(0),\ldots,\varphi_m(0)\right) +$$

$$+4\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right)+$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{2N}\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{2N}\right)\right)+$$

$$+f\left(\varphi_1(L),\ldots,\varphi_m(L)\right)\Bigg\} + R_N(f,\ \Gamma), \qquad (1.4.1)$$

для классов функций $W^{(1)}H_m^{\omega}$ и классов кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$. Записав для произвольной функции $f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$ формулу Тейлора (1.2.5) с остаточным членом в интегральной форме в случае $r = 1$ и, принимая во внимание структуру формулы Симпсона, получаем

$$R_N(f,\ \Gamma) = \int_0^L \nabla f\big(\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)\big)K(t)dt, \qquad (1.4.2)$$

где на этот раз ядро $K(t)$ имеет вид:

$$K(t) = L - t - \frac{2L}{3N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2k-1}{2N}L - t\right)_+^0 - \frac{L}{3N}\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{kL}{N} - t\right)_+^0. \qquad (1.4.3)$$

Легко проверить, что остаток (1.4.2) с учётом (1.4.3) можно записать в виде [3]

$$R_N(f,\ \Gamma) = -\int_0^L \nabla f\big(\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt,$$

где

$$g_1(t) = \begin{cases} t-(6k+1)h, & \text{если} \;\; 6kh \le t \le 6kh+3h, \\ t-(6k+5)h, & \text{если} \;\; 6kh+3h \le t \le 6kh+6h, \\ & \qquad k=\overline{0,N-1},\; h=1/6N. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$g_1(6kh+3h-u) = -g_1(6kh+3h+u),\; (k=\overline{0,N-1},\; 0 \le u \le 3h),$$

$$g_1\left(\frac{kL}{N}+u\right) = g_1(u),\; \left(0 \le u \le \frac{L}{N},\; k=\overline{0,N-1}\right). \qquad (1.4.4)$$

Положим

$$\alpha_k = \big[6kh,\; (6k+2)h\big], \quad \beta_k = \big[(6k+2)h,\; (6k+4)h\big], \quad k=\overline{0,N-1}$$

и, учитывая отмеченные выше свойства функции $g_1(t)$, имеем:

$$\big|R_N(f,\; \Gamma)\big| \le 2N\left|\int\limits_{\alpha_k} \nabla f\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right| +$$

$$+N\left|\int\limits_{\beta_k} \nabla f\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right|. \qquad (1.4.5)$$

Для $6kh \le t \le (6k+2)h$, полагая $t = 2(6k+1)h - u$ и учитывая соотношения (1.4.4), для произвольной функции $f\left(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\right) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$ будем иметь

$$\left|\int\limits_{\alpha_k} \nabla f\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right| =$$

$$= \left|\left(\int\limits_{6k}^{(6k+1)h} + \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h}\right) \nabla f\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right| \le$$

$$\le \int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} |g_1(t)|\,\big|\nabla f\big(\varphi_1(2(6k+1)h-t),\ldots,\varphi_m(2(6k+1)h-t)\big) -$$

$$-\nabla f\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\big| \le \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{(6k+1)h}^{(6k+2)h} g_1(t)\omega_i[2(t-(6k+1)h)]dt =$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{h} g_1\big[t+(6k+1)h\big]\omega_i(2t)dt = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{h} t\omega_i(2t)dt = \sum_{i=1}^{m} h^2\int\limits_{0}^{1} t\omega_i(2ht)dt =$$

$$=\frac{1}{36}\left(\frac{L}{N}\right)^2\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{1} t\omega_i\left(\frac{Lt}{3N}\right)dt. \qquad (1.4.6)$$

Аналогичным образом, оценивая второй интеграл в правой части неравенства (1.4.5) и полагая $(6k+2)h \le t \le (6k+3)h,\ \ t = 2(6k+3)h - u$ для произвольной $f\left(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\right) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$, получим:

$$\left|\int\limits_{\beta_k}\nabla f\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right| \le$$

$$\le\left|\left(\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h}+\int\limits_{(6k+3)h}^{(6k+4)h}\right)\nabla f\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right| =$$

$$=\left|\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h}\nabla f\big(\varphi_1(2(6k+3)h-t),\dots,\varphi_m\big(2(6k+3)h-t\big)\big)g_1\big[2(6k+3)h-t\big]dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h}\nabla f\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)g_1(t)dt\right| \le$$

$$\le\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h}\big|g_1(t)\big|\cdot\big|\nabla f\big(\varphi_1(2(6k+3)h-t),\dots,\varphi_m(2(6k+3)h-t)\big)-$$

$$-\nabla f\big(\varphi_1(t),\dots,\varphi_m(t)\big)\big|dt \le \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{(6k+2)h}^{(6k+3)h}\big|g_1(t)\big|\omega_i\big[2\big((6k+3)h\big)-t\big]dt =$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{h} g_1\big[(6k+3)h-t\big]\omega_i(2t)dt = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{0}^{h}(2h-t)\omega_i(2t)dt =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{L}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{3N}\right)(2-t)dt. \tag{1.4.7}$$

Подставляя найденные оценки (1.4.6) и (1.4.7) в правую часть неравенства (1.4.5), для произвольной функции $f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$ и $\Gamma \in H^{\omega_1, \ldots, \omega_m}[0, L]$ имеем:

$$\big|R_N(f, \Gamma)\big| \leq \frac{L^2}{36N} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{3N}\right)(2+t)dt. \tag{1.4.8}$$

Заменив под интегралом $\omega_i\left(\frac{Lt}{3N}\right)$ на $\omega_i\left(\frac{L}{3N}\right)$, будем иметь

$$\big|R_N(f, \Gamma)\big| \leq \frac{5L^2}{72N} \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(\frac{L}{3N}\right).$$

Укажем ещё оценку остатка на классе $W^{(1)}H_m^{\omega}$, усложнённой квадратурной формулы трапеций, имеющей вид:

$$\int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt = \frac{L}{2N}\Bigg\{ f\big(\varphi_1(0), \ldots, \varphi_m(0)\big) + f\big(\varphi_1(L), \ldots, \varphi_m(L)\big) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_N(f, \Gamma) \tag{1.4.9}$$

и являющейся точной для многочленов первой степени.

С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, можно получить следующую оценку погрешности формулы (1.4.9) для любой функции $f\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\right) \in W^{(1)}H_m^{\omega}$ и $\Gamma \in H^{\omega_1, \ldots, \omega_m}[0, L]$:

$$\big|R_N(f, \Gamma)\big| \leq \frac{L}{8N} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt + \frac{3}{32}\left(\frac{L}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} \omega_i(1). \tag{1.4.10}$$

Отметим, что оценка (1.4.10) справедлива для произвольных модулей непрерывности $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. Если же $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ – выпуклые вверх модули непрерывности, то, как и выше, легко доказать, что

$$\frac{L}{8N}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt \le R_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega};\ H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big) \le$$

$$\le \frac{L}{8N}\sum_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt + \frac{1}{32}\left(\frac{L}{N}\right)^2\sum_{i=1}^{m}\omega_i(1). \qquad (1.4.11)$$

Из неравенства (1.4.10) сразу следует предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{8NR_N\big(W^{(1)}H_m^{\omega};\ H^{\omega_1,\dots,\omega_m}\big)}{L\sum\limits_{i=1}^{m}\int\limits_0^1 \omega_i\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt} = 1. \qquad (1.4.12)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1.4.1. *Для погрешности квадратурной формулы трапеций (1.4.9) справедливо предельное равенство (1.4.12). В частности, если* $\omega_i(t) = \omega(t)$, $i = \overline{1,m}$, *то имеем:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{8NR_N\Big(W^{(1)}H_m^{\omega};\ H_m^{\omega}\Big)}{mL\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{Lt}{2N}\right)dt} = 1. \qquad (1.4.13)$$

Если в (1.4.13) полагать $\omega(t) = Kt^{\alpha}$ $(K>0,\ 0<\alpha\le 1)$, *то получаем*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2^{\alpha+3}(\alpha+1)}{mL^{\alpha+1}}N^{\alpha+1}R_N\Big(W^{(1)}H_m^{\alpha};\ H_m^{\alpha}\Big) = 1.$$

Глава II. Наилучшие квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов

§ 2.1. Постановка задач об отыскании оптимальных квадратурных формул для криволинейного интеграла

В этом параграфе рассматривается экстремальная задача об отыскании наилучшей (оптимальной) квадратурной формулы в смысле С.М.Никольского [16, 17] для приближённого вычисления криволинейного интеграла общего вида

$$J(f,\,\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt \tag{2.1.1}$$

некоторых классов дифференцируемых функций многих переменных и кривых в предположении, что функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определены и интегрируемы вдоль пространственной кривой Γ, принадлежащей m-мерному евклидову пространству R^m.

Предположим, что на кривой установлено положительное направление таким образом, что положение точки $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на кривой Γ определяется дугой $t = \smile{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A до точки M. В этом случае, как мы ранее отметили, кривая Γ сводится к параметрическому виду и выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t),\, x_2 = \varphi_2(t),\, \ldots,\, x_m = \varphi_m(t),\; 0 \le t \le L, \tag{2.1.2}$$

а определенная на кривой Γ функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ сведется к сложной функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ от переменной t. При этом интеграл приобретёт вид следующего определенного интеграла

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\big)dt. \qquad (2.1.3)$$

В этом случае произвольная квадратурная формула

$$J(f;\Gamma) \approx \mathscr{L}_N(f;\Gamma;P,T) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\big) \qquad (2.1.4)$$

для приближенного вычисления интеграла (2.1.3) задаётся векторами коэффициентов $P = \big\{p_k\big\}_{k=1}^{N}$ и векторами узлов $T = \big\{t_k:\ 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le L\big\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (2.1.4) по аналогии с монографией С.М.Никольского [15, 17] определим равенством

$$|R_N(f;\Gamma)| := |R_N(f;\Gamma;P,T)| = |J(f;\Gamma) - \mathscr{L}_N(f;\Gamma;P,T)|.$$

Если $\mathfrak{M} := \big\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\big\}$ – некоторый класс функций, определенных в точках кривой Γ и интегрируемых как сложные функции переменной t на отрезке $[0, L]$, то за величину, характеризующую точную оценку погрешности квадратурной формулы на классе $\mathfrak{M}$, примем верхнюю грань

$$R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) = \sup\big\{\, |R_N(f;\Gamma;P,T)| :\ f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Через $\mathscr{T} := \mathscr{T}(L)$ обозначим класс пространственных кривых Γ, заданных параметрическими уравнениями (2.1.2), длина которых равна L. Максимальную погрешность квадратурной формулы (2.1.4) всего класса функций $\mathfrak{M}$ и кривых Γ обозначим

$$R_N\big(\mathfrak{M};\mathscr{T}(L);P,T\big) = \sup\big\{R_N(\mathfrak{M};\Gamma;P,T) : \Gamma \subset \mathscr{T}(L)\big\}.$$

Чтобы найти оптимальную квадратурную формулу на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathscr{T}(L)$, потребуем, чтобы формула (2.1.4) была точна на функции

$f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) = \mathrm{const}$, то есть выполнялось равенство

$$\int_0^L dt = \sum_{k=1}^N p_k = L.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathscr{T}(L)) = \inf\big\{R_N(\mathfrak{M}; \mathscr{T}(L), P, T) : (P, T)\big\} \tag{2.1.5}$$

будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (2.1.4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathscr{T}(L)$. Если существует вектор (P^0, T^0) коэффициентов $P^0 = \big\{p_k^0\big\}_{k=0}^N$ и узлов $T^0 = \big\{t_k^0\big\}_{k=0}^N$, для которого

$$\mathcal{E}_N\big(\mathfrak{M}, \mathscr{T}(L)\big) = R_N\big(\mathfrak{M}; \mathscr{T}(L), P^0, T^0\big), \tag{2.1.6}$$

то указанный вектор определяет наилучшую квадратурную формулу (2.1.4) на указанных классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathscr{T}(L)$.

В первой главе диссертационной работы мы изучили асимптотические точные оценки приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых гладких классов функций $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и кривых Γ, имеющих параметрические уравнения

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t),\ \ldots,\ x_m = \varphi_m(t),\ (0 \le t \le L).$$

При этом для приближённого вычисления криволинейного интеграла

$$J(f, \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))dt$$

использовалась квадратурная формула

$$J(f, \Gamma) \approx \mathscr{L}_N(f; \Gamma; P, T) := \sum_{k=1}^N p_k\, f(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)). \tag{2.1.7}$$

Отметим, что значение остатка квадратурной формулы (2.1.7)

$$R_N(f;\Gamma) = |J(f;\Gamma) - \mathscr{L}_N(f;\Gamma;P,T)| =$$

$$= \left| \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt - \sum_{k=1}^N p_k f\big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\big) \right| \quad (2.1.8)$$

зависит как от выбора квадратурной формулы, которая определяется векторами коэффициентов $P = \{p_k\}$ и векторами узлами $T = \{t_k\}$, так и от свойств интегрируемой функции f. Формула (2.1.8) есть одно из возможных представлений остатка, но оно недостаточно в том отношении, что при помощи него часто бывает весьма трудно проследить, какое влияние на $R_N(f;\Gamma)$ оказывают структурные свойства функции f или кривой Γ. Выражение (2.1.7) рассчитано на весьма широкий класс функций. Оно верно при любых функциях f и кривых Γ, для которых имеет смысл интеграл $J(f,\Gamma)$ и которое имеет конечные значения в узлах вектора $T = \{t_k\}$. Ввиду своей общности, оно не учитывает другие свойства функции f. Чтобы удостоверить задачу исследования остатка $R_N(f,\Gamma)$ на классах функций и кривых, полезно построить представления остатка в интегральном виде, чтобы легко проследили структурные свойства функции f, а затем и класса функций, чтобы можно было в дальнейшем учесть влияние на величину остатка $R_N(f,\Gamma)$ таких свойств, как: порядок дифференцируемости класса, влияние особых точек функции f, ограниченность наибольшей производной в норме пространства и др. Среди представлений остатка этого вида особое значение имеют представления, учитывающие структурные свойства класса функций.

Для задач приближенного вычисления интеграла $J(f,\Gamma)$ по формуле (2.1.7), которые будут рассматриваться в дальнейшем, достаточно простых средств классического анализа, более быстро приводящих к цели.

Следует отметить, что многообразие всех интегрируемых функций

$f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ достаточно обширно. Если рассматривается какой-либо вполне определённый метод приближённого интегрирования функций для криволинейного интеграла (1.1.3), то невозможно указать заранее величину оценки приближения для всех вообще интегрируемых функций. Эта оценка просто равна бесконечности. Обратимся, например, к методу трапеций для криволинейного интеграла (для кривых Γ с параметрическими уравнениями (1.1.2)):

$$J(f, \Gamma) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt,$$

имеющей следующий вид:

$$\int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{2N}\Bigg\{ f\big(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_m(0)\big) + f\big(\varphi_1(L), \varphi_2(L), \ldots, \varphi_m(L)\big) +$$

$$+2\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right), \varphi_2\left(\frac{kL}{N}\right) \ldots, \varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right)\Bigg\} + R_N(f, \Gamma). \qquad (2.1.9)$$

Можно очевидно построить функцию $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, определённую во всех точках Γ, равную нулю на концах отрезка $[0, L]$, то есть

$$f\big(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_m(0)\big) = f\big(\varphi_1(L), \varphi_2(L), \ldots, \varphi_m(L)\big) = 0,$$

и такую, что определённый интеграл от неё на этом отрезке будет больше любого наперёд заданного числа. Погрешность приближения интеграла $J(f)$ от такой функции по методу трапеций (2.1.9) равна самому этому интегралу и может, таким образом, быть как угодно большой.

Выход из положения находят в том, что оценки приближения получают для достаточно узких классов функций, интегрируемых вдоль заданной кривой Γ. Такими весьма распространёнными в современном математическом анализе классами функций являются прежде всего классы дифференцируемых функций многих переменных с ограниченным по норме пространства градиентом. При этом, если сложная функция $F(t) := \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big)$, $0 \le t \le L$ принадлежит классу r-раз дифференцируемых функций $C^{(r)}[0, L]$, то, как мы доказали во втором параграфе первой главы, основным инструментом исследования погрешности приближённого вычисления криволинейного интеграла для квадратурной формулы вида (1.1.4) является формула Тейлора с интегральным остатком для кривых, заданных в параметрическом виде, имеющая вид:

$$f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big) := \sum_{l=0}^{r-1} \frac{1}{l!}\, \nabla^{(l)} f\big(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)\big)(t - t_0)^l +$$

$$+\frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^L \big(t - \tau\big)_+^{r-1} \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \dots, \varphi_m(\tau)\big) d\tau.$$

При этом общий вид остатка квадратурной формулы (1.1.4) при условии точности формулы (1.1.4) на множестве полиномов степени не более $r-1$ запишется в следующем виде

$$R_N(f, \Gamma) := \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_0^L \mathscr{K}_r(t)\, \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)\big) dt.$$

Здесь ядро $\mathscr{K}_r(t)$ имеет вид

$$\mathscr{K}_r(t) := \left[\frac{(L-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{N} p_k \left(t_k - t\right)_+^{r-1}\right], \quad \left(t_k - t\right)_+^{r-1} := \big[\max(0, x)\big]^{r-1}.$$

Высказанные соображения следует иметь в виду при выборе той или иной квадратурной формулы, когда необходимо вычислить приближённый криволинейный интеграл от заданной конкретной функции и кривой. Таким образом, как следует из всего сказанного, требуется найти наилучшие (оптимальные) квадратурные формулы вычисления криволинейного интеграла первого рода (1.1.3):

$$J(f,\Gamma)=\int\limits_{\Gamma} f(x_1,x_2,\ldots,x_m)dt$$

для некоторых классов дифференцируемых функций, где функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ определены и интегрируемы вдоль заданной кривой Γ с параметрическими уравнениями (1.1.2):

$$x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ldots,x_m=\varphi_m(t),\ 0\le t\le L.$$

Задача отыскания наилучшей квадратурной формулы приближённого интегрирования типа (1.1.4) для интеграла $J(f,\Gamma)$ для заданного класса функций и класса кривых, как мы отметили, находится на стадии разработки. Некоторые результаты на классах функций $\mathfrak{M}^{\omega}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$, удовлетворяющих неравенству

$$\big|f(M')-f(M'')\big|\le\omega\big(\rho_i(M',M'')\big),\ M',M''\in\Gamma,$$

где

$$\rho_1\big(M',M''\big)=\sum_{i=1}^{m}\big|x'-x''\big|;\quad \rho_2\big(M',M''\big)=\left\{\sum_{i=1}^{m}\big(x'-x''\big)^2\right\}^{1/2},$$

найдены в работе М.Ш.Шабозова [27].

Следует также отметить, что наилучшая квадратурная формула приближённого интегрирования типа Маркова для интеграла $J(f,\Gamma)$ на классах $\mathfrak{M}^{\omega}_{\rho_i}$ $(i=1,2,3)$ и классах кривых $\Gamma\in H^{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_m}$ найдены в работе М.Ш.Шабозова и К.Тухлиева [31], а для некоторых классов функций с ограничением на производной r-го порядка в пространствах $L_p[0,L]$ $(1\le p\le\infty)$ в работах С.Б.Вакарчука [4], Д.С.Сангмамадова [19], Г.А.Юсупова и А.А.Шабозова [33], Л.Г.Файзмамадовой [24, 25]. Обобщение работ [24, 25, 31, 33] дано в работе М.Ш.Шабозова и М.К.Абдукаримзоды [28].

§ 2.2. Оптимальная квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволинейного интеграла для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых

В этом параграфе мы решим сформулированную задачу о нахождении оптимальной квадратурной формулы вида (2.1.4) при произвольных коэффициентах $P = \{p_k\}_{k=0}^{N}$ и произвольных векторах узлов, крайние узлы которых фиксированы: $T = \{t_k : \ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N < t_{N+1} = L\}$. Таким образом, для квадратурной формулы типа Маркова вида

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= p_0 f\big(\varphi_1(0),\, \varphi_2(0), \ldots, \varphi_m(0)\big) + p_{N+1} f\big(\varphi_1(L),\, \varphi_2(L), \ldots, \varphi_m(L)\big) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} p_k f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big) + R_N(f; \Gamma, P, T) \qquad (2.2.1)$$

требуется решить экстремальную задачу (2.1.5) и найти явный вид оптимальных векторов коэффициентов и узлов (P^0, T^0). Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ дифференцируема по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ дифференцируемы по переменной t. Тогда сложная функция $F(t) := f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ дифференцируема по переменной t и имеет место формула

$$F'(t) := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}. \qquad (2.2.2)$$

Если ввести операторное обозначение

$$\nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t},$$

то формулу (2.2.2) запишем в виде

$$F'(t) := \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big). \qquad (2.2.3)$$

Аналогичным образом, если функция $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))$ имеет все производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-l}\varphi_i \partial^l \varphi_j}, \quad (l = 0, 1, 2;\ i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

а функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, то, пользуясь операторным обозначением (2.2.3), для производной второго порядка $F^{(2)}(t)$ запишем формулу

$$F^{(2)}(t) := \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2 f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) =$$

$$= \nabla^2 f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big). \qquad (2.2.4)$$

Обозначим через $W^{(2)}L_2(M)$ класс функций $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$, у которых существуют вторые смешанные и частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^{2-l}\varphi_i \partial^l \varphi_j} \ (l = 0, 1, 2;\ i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

и градиент второго порядка ∇^2 по норме удовлетворяет условию

$$\left\| \nabla^2 f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \right\|_{L_2} =$$

$$= \left(\int_0^L \left| \nabla^2 f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) \right|^2 dt \right)^{1/2} \le M.$$

В этих обозначениях справедлива следующая общая

Теорема 2.2.1. *Среди всех квадратурных формул типа Маркова (2.2.1) наилучшей для класса $W^{(2)}L_2(M)$ является формула, у которой вектор узлов определен равенством*

$$T^0 := \left\{ t_0 = 0,\ t_{N+1} = L,\ t_k = \frac{\sqrt{2/3} + k - 1}{2\sqrt{2/3} + N - 1} L,\ \ k = 1, 2, \ldots, N \right\},$$

а вектор коэффициентов имеет вид

$$P^0 := \begin{cases} p_0 = p_{N+1} = \dfrac{\dfrac{3}{8}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}}{\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}+N-1\right)}, \\ p_1 = p_N = \dfrac{\left(1+\dfrac{5}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)L}{\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}+N-1\right)}, \\ p_k = \dfrac{L}{\left(2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}+N-1\right)}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Точная оценка погрешности наилучшей квадратурной формулы типа Маркова на классах $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T} := \Gamma$ равна

$$\mathcal{E}_N(W^{(2)}L_2(M), \mathscr{T}(L)) = \frac{M}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{L^2}{\left[2\left(2\cdot\sqrt{2/3}+N-1\right)\right]^2}. \tag{2.2.6}$$

Доказательство. Воспользуемся схемой рассуждений, приведенной в [4], [27]. Рассмотрим подмножество функций $W_0^{(2)}L_2(M)$ функций $f \in W^{(2)}L_2(M)$, удовлетворяющих условию

$$f\big(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \ldots, \varphi_m(0)\big) = f\big(\varphi_1(L), \varphi_2(L), \ldots, \varphi_m(L)\big) = 0.$$

Для произвольной функции $f \in W_0^{(2)}L_2(M)$ имеет место легко проверяемое интегральное представление

$$f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)) = \int_0^L \nabla^2 f(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u))K(t,u)du, \tag{2.2.7}$$

где ядро $K(t,u)$ имеет вид

$$K(t,u) = (t-u)_+ - t(L-u).$$

Очевидно и обратное утверждение: любая функция $f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)$, имеющая представление (2.2.7), принадлежит множеству $W_0^{(2)}L_2(M)$. Непосредственным вычислением для произвольной функции $f\in W_0^{(2)}L_2(M)$, вычислив погрешность квадратурной формулы (2.2.1), получаем

$$R_N(f;\Gamma)=\int\limits_0^L K_1(u)\nabla^2 f\big(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u)\big)du. \qquad (2.2.8)$$

Здесь

$$K_1(u)=\frac{u(u-L)}{2}-\sum_{k=1}^N p_k\big[(t_k-u)_+-t_k(L-u)\big].$$

Применяя к (2.2.8) неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$R_N(f;\Gamma)\le\left\|\nabla^2 f(\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot),\ldots,\varphi_m(\cdot))\right\|_{L_2}\cdot\|K_1(\cdot)\|_{L_2}\le$$

$$\le\left(\int\limits_0^L\left|\nabla^2 f(\varphi_1(u),\varphi_2(u),\ldots,\varphi_m(u))\right|^2du\right)^{1/2}\cdot\left(\int\limits_0^L|K_1(u)|^2du\right)^{1/2}\le$$

$$\le M\cdot\|K_1\|_{L_2}. \qquad (2.2.9)$$

Рассмотрим функцию

$$f_0(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))=M\cdot\left\|K_1(\cdot)\right\|_{L_2}^{-1}\cdot\int\limits_0^L K_1(u)K(t,u)du.$$

Так как

$$f_0(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0))=f_0(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L))=0,$$

$$\nabla^2 f_0(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))=M\cdot\left\|K_1(\cdot)\right\|_{L_2}^{-1}\cdot K_1(t),$$

то очевидно, что $f_0(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))$ обращает в равенство (2.2.8). Следовательно, (2.2.9) превращается в равенство. Таким образом

$$R_N(W_0^{(2)}L_2(M);\Gamma;P,T)=|R_N(f_0;\Gamma;P,T)|=M\cdot\|K_1(\cdot)\|_{L_2}. \qquad (2.2.10)$$

Осталось найти оптимальные узлы $t_k^0\,(k = 1, 2, \ldots, N)$ и коэффициенты $p_k^0\,(k = 1, 2, \ldots, N)$, при которых величина, стоящая в правой части (2.2.10), принимает наименьшее значение. С этой целью полагаем

$$\Phi := \Phi\big(t_1, t_2, \ldots, t_N; p_1, p_2, \ldots, p_N\big) = \big\|K_1(\cdot)\big\|_{L_2}^2 =$$

$$= \left\| \frac{u(u-L)}{2} - \sum_{k=1}^{N} p_k\big[(t_k - u) - t_k(L-u)\big] \right\|_{L_2}^2 .$$

Из того что числа p_k, t_k $(k = 1, 2, ..., N)$ должны удовлетворять необходимым условиям экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0, \;\; \frac{\partial \Phi}{\partial t_k} = 0\,(k = 1, 2, ..., N),$$

искомые числа должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} K_1(u)du = \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} K_1(u)\cdot u du = 0\,(k = 1, 2, ..., N-1), \tag{2.2.11}$$

$$\int\limits_{0}^{t_1} K_1(u)\cdot u du = 0, \qquad \int\limits_{t_N}^{L} K_1(u)\cdot (L-u)du = 0. \tag{2.2.12}$$

Из определения функции $K_1(u)$ и равенств (2.2.11) следует, что в случае наилучшей для $W_0^{(2)}L_2(M)$ формулы (2.2.1) функция $K_1(u)$ на каждом отрезке $[t_k,\, t_{k+1}]\,(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ есть приведенный к этому отрезку многочлен Лежандра со старшим членом $\dfrac{1}{2}\,u^2$. Кроме того, на отрезках $[0, t_1]$ и $[t_N, L]$ функция $K_1(u)$ имеет соответственно вид

$$\frac{u^2}{2} - pt \quad \text{и} \quad \frac{u(u-L)}{2} + (L-u)q,$$

где, согласно равенствам (2.2.12), имеем:

$$p = \frac{3}{8}t_1 \quad \text{и} \quad q = \frac{1 + 3t_N}{8}.$$

Учитывая все это, для наилучшей квадратурной формулы на классе $W_0^{(2)}L_2(M)$ получим функционал погрешности

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_N;\ p_1, p_2, \ldots, p_N) = \int\limits_0^{t_1} K_1^2(u)du + \int\limits_{t_N}^{L} K_1^2(u)du +$$

$$+\sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} K_1^2(u)du = \frac{t_1^5 + (L - t_N)^5}{320} + \frac{1}{720} \sum_{k=1}^{N-1} (t_{k+1} - t_k)^5. \qquad (2.2.13)$$

Из (2.2.13) и из условия того, что функционал Φ непрерывен по совокупности переменных и должен иметь наименьшее значение, обычными средствами дифференциального вычисления находим искомые узлы:

$$t_k^0 = \frac{\left(\sqrt{2/3} + k - 1\right)}{\left(2\sqrt{2/3} + N - 1\right)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \qquad (2.2.14)$$

Подставляя найденные значения t_k^0 из (2.2.14) в равенство (2.2.13), получим наименьшее значение Φ:

$$\Phi\left(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_N^0;\ p_1, p_2, \ldots, p_N\right) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{L^2}{4\left(2\sqrt{2/3} + N - 1\right)^2}. \qquad (2.2.15)$$

Повторяя схему рассуждений, приведенную в [29], и исходя из равенств

$$p_k = K_1'(t_k - 0) - K_1'(t_k + 0), \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

найдём значение коэффициентов

$$\begin{cases} p_1 = p_N = \dfrac{\left(1 + \dfrac{5}{4} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) L}{\left[2\left(2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} + N - 1\right)\right]}, \\[3ex] p_k = \dfrac{L}{\left(2 \cdot \sqrt{\dfrac{2}{3}} + N - 1\right)}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1. \end{cases} \qquad (2.2.16)$$

Таким образом, для множества $W_0^{(2)}L_2(M)$ наилучшая квадратурная формула (2.2.1) имеет узлы (2.2.14) и коэффициенты (2.2.16). Учитывая (2.2.15), согласно (2.2.10), для этой формулы имеем

$$R_N\big(W_0^{(2)}L_2(M);\Gamma;P^0,T^0\big)=\frac{1}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{L^2}{4\left(2\sqrt{2/3}+N-1\right)^2}. \tag{2.2.17}$$

Пусть теперь в формуле (2.2.1)

$$p_0=p_{N+1}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\left[2\left(2\sqrt{2/3}+N-1\right)\right]^{-1},$$

а остальные t_k и p_k вычислены по формулам (2.2.14) и (2.2.16). Непосредственная проверка показывает, что формула (2.2.1) точна для любого многочлена первой степени. Поэтому для неё

$$R_N\left(f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t));\Gamma\right)=R_N\Big(f(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t))-$$

$$-(L-t)f(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0))-t\cdot f(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L));\Gamma\Big),$$

где, если функции $f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)\in W^{(2)}L_2(M)$, то очевидно, что функция

$$f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)-(L-t)f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)-$$

$$-t\cdot f\big(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L)\big)\in W_0^{(2)}L_2(M).$$

Значит, для полученной формулы

$$R_N\big(W^{(2)}L_2(M);\Gamma\big)\le R_N\big(W_0^{(2)}L_2(M);\Gamma\big), \tag{2.2.18}$$

но, с другой стороны, $W_0^{(2)}L_2(M)\in W^{(2)}L_2(M)$ для любой кривой $\Gamma\subset\mathscr{T}(L)$, имеющей параметрические уравнения вида (2.1.2), справедлива оценка

$$R_N\big(W_0^{(2)}L_2(M)\big)\le R_N\big(W^{(2)}L_2(M)\big). \tag{2.2.19}$$

Требуемое равенство (2.2.6) следует из сопоставления неравенств (2.2.18) и (2.2.19)

$$R_N\big(W_0^{(2)}L_2(M),\ \mathscr{T}(L);\, P^0,\, T^0\big) = R_N\big(W^{(2)}L_2(M),\ \mathscr{T}(L);\, P^0,\, T^0\big) =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{L^2}{\left[2\left(2\sqrt{2/3}+N-1\right)\right]^2},$$

чем и завершаем доказательство теоремы.

Отметим, что для некоторых классов функций и кривых, задаваемых мажорантами модулей непрерывности координатных функций кривых, оптимальные квадратурные формулы для криволинейных интегралов найдены в работах [3, 29, 31].

§ 2.3. О минимизации оценки остатка квадратурной формулы (1.1.4) на классах функций $C^{(r)}[0, L]$ $(r = 1, 2)$ и $W_0^{(1)} L_q[0, L]$

В предыдущем параграфе 2.2 мы ввели в рассмотрение квадратурную формулу общего вида

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} p_k f\big(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \ldots, \varphi_m(t_k)\big) + R_N(f, \Gamma), \qquad (2.3.1)$$

которая задаётся векторами коэффициентов $P = \{p_k\}$ и векторами узлов $T = \{t_k\}$ $(0 \leq_1 < t_2 < \cdots < t_N \leq L)$, где p_k – произвольные числа, а $R_N(f, \Gamma)$ – погрешность квадратурной формулы (2.3.1) на функции f, определённой на классе кривых Γ. Если функция $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ имеет r-ю производную по переменной t на отрезке $[0, L]$, то, как мы доказали в параграфе 1.2 первой главы, остаток квадратурной формулы (2.3.1) представим в виде

$$R_N(f, \Gamma) = \int_0^L \mathscr{K}_r(t) \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt, \qquad (2.3.2)$$

где ядро $\mathscr{K}_r(t)$ имеет вид:

$$\mathscr{K}_r(t) := \left[\frac{\big(L-t\big)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{N} p_k \frac{\big(t_k - t\big)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right], \qquad (2.3.3)$$

$$\big(t_k - t\big)_+^{r-1} := \Big[\max(0, t_k - t)\Big]^{r-1}. \qquad (2.3.4)$$

В (2.3.2) воспользовались обозначениями

$$\nabla f := \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t},$$

и по рекуррентной формуле при любом $r \in \mathbb{N}$ имеем

$$\nabla^{(r)} f := \nabla\big(\nabla^{(r-1)} f\big) = \nabla^{(r)} f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1} \cdot \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\varphi_2} \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial}{\partial\varphi_m} \cdot \frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right)^r f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big).$$

Рассмотрим теперь множество функций $f \in C^{(r)}[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$\big|\nabla^{(r)} f\big| = \big|\nabla^{(r)} f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\big| \leq M_r.$$

Тогда, как следует из равенства (2.3.2), на множестве $C^{(r)}[0, L]$ верна оценка

$$\big|R_N(f, \Gamma)\big| \leq M_r \int\limits_0^L \big|\mathscr{K}_r(t)\big| dt. \tag{2.3.5}$$

Можно легко убедиться, что правая часть неравенства (2.3.5) есть верхняя грань $R_N(f, \Gamma)$ на множестве функций $C^{(r)}[0, L]$. Для этого достаточно функцию f_0 взять такой, чтобы всюду, кроме точек разрыва, она была равна $f_0^{(r)}(t) = M_r \operatorname{sing} \mathscr{K}_r(t)$. Для этой функции

$$R_N\big(C^{(r)}[0, L], \Gamma\big) := \sup\big\{|R_N(f, \Gamma)| : f \in C^{(r)}[0, L], \Gamma \in \mathscr{T}(L)\big\} =$$

$$= |R_N\big(f_0, \mathscr{T}(L)\big)| = M_r \int\limits_0^L |\mathscr{K}_r(t)| dt, \tag{2.3.6}$$

мы должны так подобрать векторы $P = \big\{p_k\big\}$ и $T = \big\{t_k\big\}$, чтобы интеграл

$$\int\limits_0^L \big|\mathscr{K}_r(t)\big| dt \tag{2.3.7}$$

имел бы наименьшее значение при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\, t_k^l = \frac{1}{l+1} \quad (l = 0, 1, \ldots, r-1). \tag{2.3.8}$$

Приведём решение сформулированной задачи при значениях $r = 1$ и $r = 2$.

I. Случай $r = 1$. Рассмотрим класс функций $C^{(1)}[0, L]$, непрерывно дифференцируемых на $[0, L]$. В этом случае мы должны требовать, чтобы квадратурная формула (2.3.1) давала точный результат для постоянной функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) \equiv c$, что равносильно выполнению уравнения связи из (2.3.8) при $l = 0$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = L. \tag{2.3.9}$$

При этом ядро $\mathscr{K}_1(t)$ имеет значение

$$\mathscr{K}_1(t) = L - t - \sum_{k=0}^{N} p_k\big(x_k - t\big)_+^0. \tag{2.3.10}$$

Обычные средства для нахождения минимума интеграла при условиях (2.3.9) и (2.3.10) дают значение

$$P = \left\{p_k = \frac{L}{N},\ k = \overline{1, N}\right\}, \quad T = \left\{t_k : t_k = \frac{2k-1}{2N}L\right\}$$

и наилучшая квадратурная формула (2.3.1) на классе $C^{(1)}[0, L]$ имеет вид

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f, \Gamma).$$

Остаток $R_N(f, \Gamma)$ на всём классе $C^{(1)}[0, L]$ равен

$$R_N\big(C^{(1)}[0, L], \mathscr{T}(L)\big) = \frac{M_1 L}{4N}.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Наилучшая квадратурная формула приближённого вычисления криволинейного интеграла на классе* $C^{(1)}[0, L]$ *имеет вид*

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \qquad (2.3.11)$$

При этом для погрешности квадратурной формулы (2.3.11) *на всём классе* $C^{(1)}[0,L]$ *имеет место оценка*

$$R_N\big(C^{(1)}[0,L],\mathscr{T}(L)\big) = \frac{M_1 L}{4N}. \qquad (2.3.12)$$

II. Пусть теперь $r = 2$. В этом случае, узлы и коэффициенты должны быть подчинены двум условиям

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = \int_0^L 1\cdot dt = L, \qquad \sum_{k=1}^{N} p_k\, t_k = \int_0^L t dt = \frac{L^2}{2},$$

означающим, что квадратурная формула (2.3.1) должна дать точный результат для всякой линейной функции. Для дальнейшего полезно подсчитать значения ядра $\mathscr{K}_2(t)$ на участках $[0,t_1]$, $[t_1,t_2],\ldots,[t_N,1]$. Имеем:

$$\mathscr{K}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & \text{при } 0\le t\le t_1,\\ \dfrac{(L-t)^2}{2} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{N} p_k(t_k - t), & \text{при } t_i\le t\le t_{i+1},\\ \dfrac{(L-t)^2}{2}, & \text{при } t_N\le t\le L,\end{cases}$$

$\mathscr{K}(t)$ есть непрерывная функция от t на отрезке $[0,L]$. Первая производная $\mathscr{K}'(t)$ имеет разрывы первого рода в точках t_k и величины скачков $\mathscr{K}'(t)$ определяются равенствами:

$$\mathscr{K}'(t_k+0) - \mathscr{K}'(t_k-0) = -p_k. \qquad (2.3.13)$$

На каждом из отрезков $[t_k,t_{k+1}]$ $(k=\overline{1,N-1})$ ядро $\mathscr{K}(t)$ есть квадратичный многочлен со старшим членом $0,5t^2$. Считая, что минимум

$$U = \int_0^L |\mathscr{K}_2(t)| dt$$

существует, применим к его нахождению известные правила разыскания экстремумов функции. Составим вспомогательную функцию

$$F = U + \lambda_1 \left(\sum_{k=1}^{N} p_k - L \right) + \lambda_2 \left(\sum_{k=1}^{N} p_k\, t_k - \frac{L^2}{2} \right)$$

и приравняем нулю её частные производные по узлам t_k и коэффициентам p_k:

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = -p_k \int\limits_0^L \operatorname{sign} \mathscr{K}_2(t)(t_k - t)_+^0 dt + \lambda_2\, p_k = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = -\int\limits_0^L \operatorname{sign} \mathscr{K}_2(t)(t_k - t) dt + \lambda_1 + \lambda_2\, t_k = 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

Отсюда видно, что на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ должно быть

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \operatorname{sign} \mathscr{K}_2(t) dt = 0, \qquad \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} t \operatorname{sign} \mathscr{K}_2(t) dt = 0, \quad t = \overline{1, N}.$$

Следовательно, на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ ядро $\mathscr{K}_2(t)$ есть многочлен второй степени со старшим членом $0,5t^2$, наименее уклоняющимся от нуля в метрике L на $[t_k, t_{k+1}]$.

Из теории многочленов Чебышева второго рода хорошо известно [21], что среди многочленов степени n со старшим членом x^n наименее отклоняющимся от нуля в метрике L на отрезке $[-1, 1]$ будет многочлен Чебышева второго рода

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n} U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{2^n \sqrt{1 - x^2}}.$$

В частности, при $n = 2$ это будет многочлен

$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Когда от отрезка $-1 \le x \le 1$ перейдём к отрезку $t_k \le t \le t_{k+1}$ при помощи линейного преобразования

$$t_k = \alpha_k + h_k\, t, \quad \alpha_k = (t_k + t_{k+1})/2, \quad h_k = (t_{k+1} - t_k)/2$$

и приведём после этого старший коэффициент к 0.5, то для $\mathscr{K}_2(t)$ получим следующее представление

$$\mathscr{K}_2(t) = \frac{h_k^2}{2} P_2\left(\frac{t-\alpha_k}{h_k}\right), \quad t_k \le t \le t_{k+1}.$$

Если исходить из этого представления ядра $\mathscr{K}_2(t)$ и повторить рассуждения [21] по аналогичному вопросу для обычных регулярных интегралов, то переходим к следующему утверждению.

Теорема 2.3.2. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.3.1) *наилучшей для класса* $C^{(2)}[0,L]$ *является формула, у которой векторы коэффициентов и узлов имеют вид*

$$P := \left\{ p_k = \frac{2L}{\sqrt{3}+2(N-1)}, \ (k=\overline{2,N-1}), \ p_1 = p_N = \frac{(2+\sqrt{3})L}{2\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]} \right\},$$

$$T := \left\{ t_k; \ t_k = \frac{\big[\sqrt{3}+4(k-1)\big]L}{2\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]}, \ k=\overline{1,N} \right\}.$$

При этом для оценки погрешности наилучшей квадратурной формулы на всем классе $C^{(2)}[0,L]$ *справедлива оценка*

$$R_N\big(C^{(2)}[0,L],\Gamma\big) = \frac{M_2 L}{8\big[\sqrt{3}+2(N-1)\big]^2}.$$

III. В этом пункте определим класс функций $W_0^{(1)}L_q[0,L]$ $(1 \le q \le \infty)$ как подкласс функций $f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big) \in W^{(1)}L_q[0,L]$, имеющих на отрезке $[0,L]$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_k}$ $(k=\overline{1,m})$ с ограничением

$$\big\|\nabla f\big(\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot),\ldots,\varphi_m(\cdot)\big)\big\|_{L_q[0,L]} :=$$

$$:= \left(\int\limits_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \varphi_m}\cdot\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} \right|^q dt \right)^{1/q} \le M_1^{(q)}$$

с дополнительным условием, что

$$f\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big) = 0.$$

Для этого класса функций справедлива следующая

Теорема 2.3.3. *Среди всех квадратурных формул вида* (2.3.1) *наилучшей на классе* $W_0^{(1)}L_q[0,L]$ *является формула вида*

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{2L}{2N+1}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2kL}{2N+1}\right),\varphi_2\left(\frac{2kL}{2N+1}\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{2kL}{2N+1}\right)\right)+$$

$$+R_N(f,\Gamma). \tag{2.3.14}$$

Для минимальной оценки погрешности формулы (2.3.14) *на указанном классе функций и классе кривых имеет место точная оценка*

$$R_N\big(W_0^{(1)}L_q[0,L],\mathscr{T}(L)\big) =$$

$$= \frac{M_1^{(q)}L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}\cdot(2N+1)},\quad (p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\le q\le\infty). \tag{2.3.15}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для произвольной функции $f\in W_0^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q\le\infty)$ как сложной функции

$$F(t) := f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)$$

переменной $t\in[0,L]$, удовлетворяющей условию

$$\big(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)\big)=0,$$

справедливо интегральное представление, вытекающее из (1.2.5):

$$f\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\ldots,\varphi_m(t)\big) =$$

$$= \int_0^L \nabla f\big(\varphi_1(s),\varphi_2(s),\ldots,\varphi_m(s)\big)\cdot(t-s)_+^0 ds, \tag{2.3.16}$$

где по-прежнему положено

$$(t-s)_+^0 := \big\{1, \text{ если } t \geq s; \;\; 0, \text{ если}, \; t < s\big\}.$$

Подставляя формулу (2.3.9) в квадратурную формулу (2.3.1), погрешность формулы представим в виде

$$R_N(f,\Gamma) = \int\limits_0^L \nabla\big(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_m(s)\big)\mathscr{K}_1(s)ds, \tag{2.3.17}$$

где, как и в предыдующем пункте,

$$\mathscr{K}_1(s) = L - s - \sum_{k=1}^{N} p_k(s_k - s)_+^0.$$

Поступая так же, как в предыдующем пункте, указанную задачу сведём к отысканию величины

$$R_N\big(W_0^{(1)}L_q[0,L], \mathscr{T}(L)\big) = \inf\left\{M_1^{(q)}\left(\int\limits_0^L \big|\mathscr{K}_1(s)\big|^q ds\right)^{1/q} : (P,T)\right\}. \tag{2.3.18}$$

Таким образом, задача сводится к исследованию минимума интеграла

$$\int\limits_0^L \Big|L - s - \sum_{k=1}^{N} p_k(t_k - s)_+^0\Big|^q ds = \int\limits_0^L \Big|t - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(t-\tau_k)_+^0\Big|^q dt,$$

где положено

$$\lambda_k = p_{N-k+1}, \; t_k = \tau_{N-k+1}, \; t_k < t_{k+1}, \; k = \overline{1,N}, \; \tau_{N+1} = L. \tag{2.3.19}$$

Фактически, вопрос сводится к нахождению минимума интеграла [17]

$$\int\limits_0^L \Big|t - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(t-t_k)_+^0\Big| dt := \int\limits_0^L \big|t - \rho_N^{(1)}(t)\big|^q dt, \tag{2.3.20}$$

среди всевозможных систем чисел λ_k и t_k при фиксированном N удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = L, \; 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{N-1} < t_N \leq L.$$

Итак, требуется найти наилучшее приближение функции t ступенчатыми функциями $\rho_N^{(1)}(t)$ в метрике $L_q[0,L]$ $(1 \leq q \leq \infty)$, которые на каждом из интервалов (t_k, t_{k+1}) принимают постоянное значение.

Вычисляя интеграл в правой части (2.3.12) при условии

$$t_1 + \sum_{k=1}^{N}(t_{k+1} - t_k) = L,$$

находим минимальные значения $t = t_k^*$:

$$t_k^* = \frac{2(k-1)+1}{2N+1}L, \quad k = \overline{1, N}.$$

При этом экстремальная ступенчатая функция имеет вид

$$\rho_{N^*}(t) := \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < t < \dfrac{1}{2N+1}, \\ \dfrac{2kL}{2N+1}, & \text{если } t_k^* < t < t_{k+1}^*. \end{cases}$$

Из (2.3.19) находим

$$\lambda_k = \frac{2}{2N+1}; \quad p_k^* = \frac{2}{2N+1}; \quad \sigma_k^* = \frac{2kL}{2N+1}, \ k = \overline{1, N}.$$

Простые вычисления дают равенства

$$\inf_{\lambda_k, t_k} \left(\int_0^L \left| t - \rho_N^{(1)}(t) \right|^q dt \right)^{1/q} = \left(\int_0^L \left| t - \rho_{N^*}^{(1)}(t) \right|^q dt \right)^{1/q} = \frac{L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)},$$

пользуясь которыми, в силу (1.3.10), для указанных классов функций и кривых находим точную оценку погрешности

$$R_N\big(W_0^{(1)} L_q[0,L], \mathscr{T}(L)\big) = \frac{M_1^{(q)} L^{1+1/q}}{\sqrt[q]{q+1}(2N+1)}, \ 1 \leq q \leq \infty,$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.3.

В завершение этого параграфа отметим, что в случае $q = 2$ теорема 2.3.3 для криволинейных интегралов от функции двух переменных

$$J(f, \Gamma) = \int_\Gamma f(M)dt = \int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt$$

в случае плоской кривой Γ ранее доказана в работе Л.Г.Файзмамадовой [24].

§ 2.4. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций $W_p^{(1)}(M_p)$ и кривых $\mathscr{T}_Q(L)$

Во втором параграфе первой главы мы отметили, что если кривая Γ параметрически выразится уравнениями (2.1.2), то функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, заданная в точках кривой, сведётся к сложной функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ от переменной t. В этом случае криволинейный интеграл (2.1.1) запишется в виде следующего определённого интеграла

$$\mathcal{J}(f, \Gamma) = \int\limits_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt.$$

Обозначим через $\mathscr{T}_Q(L)$ — класс пространственных спрямляемых кривых Γ, у которых длина равна L и кривизна кусочно-непрерывна. Будем предполагать, что все кривые $\Gamma \in \mathscr{T}_Q(L)$ расположены в области

$$Q = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_m) : \sum_{i=1}^m x_i^2 \le L^2\Big\}.$$

Полагаем $F(t) := f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$. Если функция f дифференцируема по каждой из переменных $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и функции $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ дифференцируемы по переменной t, то по-прежнему запишем

$$F'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dt}.$$

Более того, если f имеет частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\big(\partial^{2-l}\varphi_i \partial^l \varphi_j\big)}$, $l = 0, 1, 2$, $i, j = 1, \ldots, m$ и функции $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ дважды непрерывно дифференцируемы, то, введя операторное обозначение

$$\nabla f\big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dt}, \tag{2.4.1}$$

производную второго порядка $F^{(2)}(t)$ определяем по формуле

$$F^{(2)}(t) := \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \cdot \frac{d\varphi_i}{dt} \right)^2 f = \nabla^2 f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big).$$

Обозначим через $W_p^{(1)}(M_p)$, $1 \le p \le \infty$ класс функций $f(M_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, у которых почти всюду в области Q существуют непрерывные частные производные первого порядка

$$\frac{\partial^1 f}{\partial^{1-l}\varphi_i \partial^l \varphi_j} \ (l = 0, 1, \ i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

и удовлетворяют ограничениям

$$\begin{gathered} \big\|\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\big\|_{L_p(Q)} \le M_p, \ 1 \le p < \infty, \\ supvrai\big\{|\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_m)| : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in Q\big\} \le M_\infty, \ p = \infty. \end{gathered} \tag{2.4.2}$$

В частности, условия (2.4.2) равносильны неравенствам

$$\big\|grad\, f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\big\|_{L_p(Q)} \le M_p, \ 1 \le p < \infty,$$

$$supvrai\big\{|grad\, f(x_1, x_2, \ldots, x_m)| : (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in Q\big\} \le M_\infty, \ p = \infty.$$

Таким образом, если $\mathfrak{M}_p^{(1)} = W_p^{(1)}(M_p)$, то, согласно (2.1.5), требуется найти величину

$$R_N\big(\mathfrak{M}_p^{(1)}, \mathscr{T}_Q(L)\big) = \inf\big\{R_N(\mathfrak{M}_p^{(1)}, \mathscr{T}_Q(L), P, T) : \ (P, T) \in A\big\}.$$

Приведём решение сформулированной задачи в случае $k = 1, \ 1 \le p \le \infty$.

В этом случае, записав для произвольной функции $f \in W_p^{(1)}(M_p)$ как функции одного переменного $F(t) := f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)$ формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши с учётом точности квадратурной формулы (1.1.4) на функции $f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big) = const$, остаток формулы представим в виде

$$R_N(f, \Gamma, P, T) = \int_0^L \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt} \right) \Phi(t) dt :=$$

$$:= \int_0^L \nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)\, \Phi(t) dt, \tag{2.4.3}$$

где

$$\Phi(t) = L - t - \sum_{k=1}^{N} p_k (t_k - t)_+^0, \quad t_+^0 = \big\{1, \text{если } t > 0, \quad 0, \text{если } t \le 0\big\}.$$

Используя неравенство Гёльдера и определение класса $W_p^{(1)}(M_p)$, с учётом тождества

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_m}{dt}\right)^2 \equiv 1,$$

для произвольной функции $f \in W_p^{(1)}(M_p)$, $1 \le p \le \infty$ и произвольной кривой $\Gamma \in \mathscr{T}_Q(L)$ из (2.4.3) получаем оценку сверху

$$|R_N(f, \Gamma, P, T)| \le \int_0^L \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt} \right| \big|\Phi(t)\big| dt =$$

$$= \int_0^L \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_m}\right)^2} \cdot \big|\Phi(t)\big| dt =$$

$$= \int_0^L \big|\nabla f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)\big| \, \big|\Phi(t)\big| dt :=$$

$$:= \int_0^L \big|grad\, f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\big| \, \big|\Phi(t)\big| dt \le$$

$$\le \left(\int_0^L \big|grad\, f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\big|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^L |\Phi(t)|^q dt \right)^{1/q} \le$$

$$\le M_p \left(\int_0^L |\Phi(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ 1 \le q \le \infty. \tag{2.4.4}$$

Рассмотрим кривую $\Gamma^* \in \mathscr{T}_Q(L)$, которая задана параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t) := t/\sqrt{m}, \quad 0 \le t \le L, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.4.5}$$

и определим функцию $f^*\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)$ на кривой $\Gamma^*\in\mathscr{T}_Q(L)$ равенством

$$f^*\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{o}^{\varphi_i(t)}\psi(t)dt, \tag{2.4.6}$$

где

$$\psi(t)=\frac{M_p}{\sqrt{m}}\left(\int\limits_0^L|\Phi(t)|^q dt\right)^{-1/p}|\tilde{\Phi}(t)|^{q-1}\operatorname{sgn}\tilde{\Phi}(t),$$

$$\tilde{\Phi}(t)=L-\sqrt{m}\,t+\sum_{k=1}^{m}p_k(t_k-\sqrt{m}t)_+^0,\quad \tilde{\Phi}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)\equiv\Phi(t).$$

Покажем, что функция $f^*\in W_p^{(1)}(M_p)$. Из (2.4.6) и (2.4.1) имеем

$$\nabla f^*\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)=\sum_{i=1}^{m}\psi\big(\varphi_i(t)\big)\,\varphi_i'(t)=\sum_{i=1}^{m}\psi\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)\frac{1}{\sqrt{m}}=$$

$$=\sqrt{m}\,\psi\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)=M_p\left(\int\limits_0^L|\Phi(t)|^q dt\right)^{-1/p}\left|\tilde{\Phi}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)\right|^{q-1}\operatorname{sgn}\tilde{\Phi}\left(\frac{t}{\sqrt{m}}\right)=$$

$$=M_p\left(\int\limits_0^L|\Phi(t)|^q dt\right)^{-1/p}|\Phi(t)|^{q-1}\operatorname{sgn}\Phi(t). \tag{2.4.7}$$

Отсюда, используя определение класса $W_p^{(1)}(M_p)$, получаем

$$\big\|\nabla f^*\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)\big\|_{L_p(Q)}^p=M^p\left(\int\limits_0^L\big|\Phi(t)\big|^q dt\right)^{-1}\int\limits_0^L|\Phi(t)|^{(q-1)p}dt=$$

$$=M^p\left(\int\limits_0^L\big|\Phi(t)\big|^q dt\right)^{-1}\int\limits_0^L\big|\Phi(t)\big|^q dt=M_p^p,$$

и этим включение $f^*\in W_p^{(1)}(M_p)$ доказано.

Используя соотношение (2.4.6) и (2.4.7), из равенства (2.4.3) запишем

$$R_N(f^*,\Gamma^*,P,T)=\int\limits_0^L\nabla f^*\big(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)\big)\,\Phi(t)dt=$$

$$= M_p \left(\int\limits_0^L |\Phi(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad 1 \le q \le \infty.$$

Таким образом, правая часть (2.4.4) является точной верхней границей погрешности квадратурной формулы (1.1.4) на множествах функций $W_p^{(1)}(M_p)$ и кривых $\mathscr{T}_Q(L)$:

$$R_N\big(W_p^{(1)}(M_p), \mathscr{T}_Q(L), P, T\big) = M_p \left(\int\limits_0^L |\Phi(t)|^q dt \right)^{1/q}, \ 1 \le q \le \infty. \qquad (2.4.8)$$

Нетрудно заметить, что экстремальная пара f^* и Γ^* не единственная. Полагая $\sigma_k = t_k/L, \ \alpha_k = p_k/L$, перепишем функцию $\Phi(t)$ в следующем виде

$$\Phi(t) = L \left[1 - \frac{t}{L} - \sum_{i=1}^N \alpha_k \left(\sigma_k - \frac{t}{L} \right)_+^0 \right] := L\Phi_1(t/L). \qquad (2.4.9)$$

Подставляя равенство (2.4.9) в правую часть (2.4.8) и сделав замену переменой $\tau = t/L$, приходим к равенству

$$R_N\big(W_p^{(1)}(M_p), \mathscr{T}_Q(L), P, T\big) = M_p \left(\int\limits_0^L \big|\Phi_1(t/L)\big| dt \right) =$$

$$= M_p L^{1+1/q} \left(\int\limits_0^1 |\Phi_1(t)|^q dt \right)^{1/q},$$

где

$$\Phi_1(t) = 1 - t - \sum_{i=1}^N \alpha_k \left(\sigma_k - t \right)_+^0 .$$

Таким образом, требуется вычислить правую часть величины

$$\mathcal{E}_N\big(W_p^{(1)}(M_p), \mathscr{T}_Q(L)\big) = \inf_{(P,T)} R_N\big(W_p^{(1)}(M_p), \mathscr{T}_Q(L), P, T\big) = M_p L^{1+1/q} \times$$

$$\times \inf \left\{ \left(\int\limits_0^1 |\Phi_1(t)|^q dt \right)^{1/q} : \{\sigma_k\}_{k=1}^N, 0 \le \sigma_k \le 1, \{\alpha_k\}_{k=1}^N, \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1 \right\}. \qquad (2.4.10)$$

Несложное вычисление показывает, что нижнюю грань в правой части (2.4.10) реализуют числа $\alpha_k = 1/N$, $\sigma_k = (2k-1)/(2N)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, причём

$$\inf\left\{\left(\int_0^1 |\Phi_1(t)|^q dt\right)^{1/q} : \{\sigma_k\}_{k=1}^N, 0 \le \sigma_k \le 1, \{\alpha_k\}_{k=1}^N, \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1\right\} = \frac{1}{2N\sqrt[q]{q+1}},$$

и мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.4.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (1.1.4) *для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W_p^{(1)}(M_p)$, $1 \le p \le \infty$ *и классе кривых* $\mathscr{T}_Q(L)$ *наилучшей является формула средних прямоугольников* (2.3.11)*:*

$$\int_0^L f\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)\big)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \ldots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f, \Gamma).$$

При этом для минимальной погрешности формулы (2.3.11) *на указанных классах функций и кривых имеет место точная оценка*

$$R_N\left(W_p^{(1)}(M_p), \mathscr{T}_Q(L)\right) = \frac{M_p L^{1+1/q}}{2N\sqrt[q]{q+1}}, \quad 1 \le q \le \infty. \tag{2.4.11}$$

Замечание. Утверждение теоремы 2.4.1 в случае $m = 2$, $q = 1$ ранее было получено С.Б.Вакарчуком [4], а в случае $m = 2$, $1 \le q \le \infty$ М.Ш.Шабозовым и Ф.М.Мирпоччоевым [29].

В других случаях из (2.4.11) получаем

$$R_N\left(W_1^{(1)}(M_1), \mathscr{T}_Q(L)\right) = \frac{M_1 L}{4N};$$

$$R_N\left(W_1^{(2)}(M_2), \mathscr{T}_Q(L)\right) = \frac{M_2 L^{1+1/2}}{2\sqrt{2}\,N};$$

$$R_N\left(W_\infty^{(1)}(M_\infty), \mathscr{T}_Q(L)\right) = \frac{M_\infty L^2}{2N}.$$

Заключение

Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты работы заключаются в следующем:

- найдены асимптотически точные оценки остатка квадратурных формул приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $W^{(1)}H_m^\omega$ и кривых $H^{\omega_1,\ldots,\omega_m}[0,L]$ при фиксированных векторах коэффициентов и узлов;
- найдены оптимальные квадратурные формулы типа Маркова приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов дифференцируемых функций $W^{(2)}L_2(M)$ и кривых $\mathscr{T}(L)$;
- найдены наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейных интегралов на классах функций $C^{(r)}[0,L]$ $(r=1,2)$ и $W^{(1)}L_q[0,L]$ $(1\le q<\infty)$.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационной работы и методы их доказательств можно применять при отыскании точных оценок погрешности приближённых интегралов для вычисления поверхностных интегралов. Главы диссертации по отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] *Бабенко В.Ф.* Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул // Матем. заметки. – 1976. – Т.20, №4. – С.589–595.

[2] *Боянов Б.Д.* Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для одного класса дифференцируемых функций // ДАН СССР. – 1977. – Т.232, №6. – С.1233–1236.

[3] *Бусарова Т.Н.* Точные оценки приближённого интегрирования на некоторых классах дифференцируемых функций // В сб.: Вопросы теории приближений функций и её приложений. ИМ АН УССР. – Киев. – 1976. – С.40–45.

[4] *Вакарчук С.Б.* Оптимальная формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал. – 1986. – Т.38, №5. – С.643–645.

[5] *Женсыкбаев А.А.* О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов непериодических функций // ДАН СССР. – 1977. – Т.236, №3. – С.531–534.

[6] *Корнейчук Н.П.* Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки. – 1968 – Т.3, №5. – С.565–576.

[7] *Корнейчук Н.П., Лушпай Н.Е.* Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение // Изв. АН СССР. Сер. математика. – 1969. – Т.33, №6, – С.1416–1437.

[8] *Корнейчук Н.П.* О новых результатах по экстремальным задачам теории квадратур // Добавление к монографии С.М.Никольского. М.: Наука. –

1988. – С.127–255.

[9] *Левин М.И.* Экстремальные задачи для кубатурных формул // ДАН СССР. – 1977. – Т.236, №6. – С.1303–1306.

[10] *Левин М.И., Гиршович Ю.М.* Наилучшие кубатурные формулы на множествах периодических функций // Изв. АН Эст. СССР. Серия физ.-мат. – 1977. – Т.26, №2. – С.114–122.

[11] *Лигун А.А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Матем. заметки. – 1976. – Т.19, №6. – С.913–926.

[12] *Мирпоччоев Ф.М.* О приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №5. – С.359–365.

[13] *Мирпоччоев Ф.М.* К вопросу об оценках квадратурных формул для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №6. – С.448–454.

[14] *Моторный В.П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1974. – Т.38, №3. – С.583–614.

[15] *Никольский С.М.* К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами // Успехи мат. наук. – 1950. – Т.5, №2. – С.165–177.

[16] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1952. – Т.6. – С.181–196.

[17] *Никольский С.М.* Квадратурные формулы // М.: Наука. – 1988. – 256 С.

[18] *Осколков К.И.* Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций // ДАН СССР. – 1979. – Т.249, №1. – С.49–52.

[19] *Сангмамадов Д.С.* Наилучшие по коэффициентам квадратурные формулы для приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. – 2011. – Т.54, №9. – С.709–714.

[20] *Сангмамадов Д.С.* К вопросу об оценках квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода некоторых классов функции // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2011, №3(144). – С.7–13.

[21] *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены // М.: Наука. – 1979. – 416 С.

[22] *Тухлиев К.* Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2013. – Вып.2, – Ч.1. – С.50–57.

[23] *Файзмамадова Л.Г.* О численном интегрировании криволинейных интегралов первого рода // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №7. – С.533–539.

[24] *Файзмамадова Л.Г.* Об одной наилучшей квадратурной формуле для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №9. – С.701–706.

[25] *Файзмамадова Л.Г.* Об оптимальных квадратурных формулах для приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. – 2013. – Т.56, №4. – С.265–271.

[26] *Шабозов М.Ш.* Об одном подходе к исследованию оптимальных квадратурных формул для сингулярных интегралов с фиксированной особенностью // Укр. матем. журнал. – 1995. – Т.47, №9. – С.1300–1305.

[27] *Шабозов М.Ш.* О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых //

Матем. заметки. – 2014. – Т.96, №4. – С.637–640.

[28] *Шабозов М.Ш., Абдукаримзода М.К.* Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Чебышевский сборник. – 2020. – Т.21, вып. 3. – С.250–261.

[29] *Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М.* Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ. – 2010. – Т.53, №6. – С.415–419.

[30] *Шабозов М.Ш., Сангмамадов Д.С.* О наилучших квадратурных формулах приближённого вычисления криволинейных интегралов первого типа // ДАН РТ. – 2012. – Т.55, №11. – С.847–852.

[31] *Шабозов М.Ш., Тухлиев К.* Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности // Вестник СПбГУ, Сер.1. – 2015. – Т.2(60), вып.4. – С.563–575.

[32] *Шабозов М.Ш., Файзмамадова Л.Г.* Наилучшая формула численного интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2012, №2(147). – С.7–15

[33] *Юсупов Г.А., Шабозова А.А.* Точные оценки приближённого интегрирования криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых // ДАН РТ. – 2013. – Т.56, №7. – С.509–514.

[34] *Sard A.* Best approximation integration formulas, Best approximate formulas // American J. of Math. – 1949. – LXXI. – P.80–91.

[35] *Sard A., Meyers F.* Best approximate integration formulas // J. Math. and

Phys. – 1950. – XXIX. – P.118–123.

Б) Работы автора по теме диссертации

1. В журналах, входящих в перечень ВАК Российской Федерации:

[36] *Шабозов М.Ш., Дадабоев П.А.* Об асимптотически точных оценках приближчнного интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классах функций и кривых // Проблемы вычислительной и прикладной матем. – 2015. –№ 201. – С.3–10.

[37] *Дадабоев П.А.* Асимптотически точные оценки приближенного интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Труды международной летней математической школы–конференции С.Б.Стечкина по теории функций. – 2016. – С.98–102.

[38] *Дадабоев П.А.* Оценка остатка усложненных квадратурных формул приближенного вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций малой гладкости // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2018, №3(172). – С.19–27.

[39] *Дадабоев П.А.* Оптимальная квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволиненйного интеграла для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых // ДАН РТ. – 2020. – Т.63, №11-12. – С.672–680.

2. В других изданиях:

[40] *Хамдамов Ш.Дж., Дадабоев П.А.* Наилучшие квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых // Материалы международной научной конференции “*Современные проблемы математики и её приложений*” (Душанбе, 14-15 марта 2018 г.). – С.53–55.

[41] *Дадабоев П.А.* Об одной оптимальной квадратурной формуле для вычисления криволиненых интегралов // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений*" (Душанбе, 25-26 декабря 2020 г.) – С.97–101.

[42] *Дадабоев П.А.* Точная оценка для погрешности квадратурных формул // Материалы международной научной конференции "*Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами*" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.) – С.83–86.

[43] *Дадабоев П.А.* Оптимальная квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволинейных интегралов // Материалы международной научной конференции "*Актуальные проблемы современной математики*" (Душанбе, 25-26 июня 2021 г.) – С.49–53.

[44] *Дадабоев П.А.* Квадратурная формула типа Маркова для приближенного вычисления криволинейного интеграла для некоторых классов дифференцируемых функций и кривых // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества*" (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.) – С.16-20.

[45] *Мирпоччоев Ф.М., Файзмамадова Л.Г., Дадабоев П.А.* О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Материалы международной научной конференции "*Современные проблемы математического анализа и теории функций*", посвященной 70-летию академика НАН Таджикистаана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.). – С. 106–109.