

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РЕСПУБЛИКИ ТАДЖИКИСТАН**

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ  
ТАДЖИКСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

*На правах рукописи*

УДК 535.21, 536.48, 538.953

**Давлатджонова Шукуфа Худжамбердиевна**

**ОПТОАКУСТИЧЕСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ  
СВЕРХТЕКУЧЕГО РАСТВОРА  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$**

Специальность 1.3.8. - физика конденсированного состояния

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель: член-корреспондент НАН  
Республики Таджикистан,  
доктор физико-математических  
наук, профессор Салихов Т.Х.

Душанбе- 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. Особенности возбуждения и распространения первого и второго звуков в сверхтекучих жидкостях (обзор).....	11
1.1. Первый и второй звуки в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ Методы возбуждения и особенности распространения.....	11
1.2. Обзор состояния работ по оптоакустике сверхтекучих жидкостей по тепловому механизму.....	14
1.3. Обзор состояния работ по оптоакустике сверхтекучего гелия и раствора $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ по стрикционному механизму.....	25
ГЛАВА II. Лазерная генерация оптоакустических импульсов первого и второго звуков в растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ в области слабого поглощения излучения .....	40
2.1. Возбуждение оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ прямоугольным импульсом лазерного излучения.....	40
2.2. Возбуждение оптоакустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ гауссовым импульсом лазерного излучения по тепловому механизму .....	47
2.3. Генерация импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем рас- творе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ негауссовым импульсом лазерного излучения по тепловому механизму .....	51
ГЛАВА III. Передаточные функции и временной профиль оптоакусти- ческих сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем рас- творе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .....	55
3.1. Волновые уравнения оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе по тепловому механизму.....	55
3.2. Частотная зависимость передаточных функций первого и второго	

звучков в растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ при контакте с твердым телом.....	56
3.3. Временное поведение оптоакустических сигналов первого и второго звуков в растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , контактирующем с твердым телом.....	64
3.4. Передаточные функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ с мягкой границей.....	70
3.5. Временное поведение оптоакустических сигналов первого и второго звуков в растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ с мягкой границей .....	76
ГЛАВА IV. Теория генерации фотоакустического сигнала	
сверхтекучим раствором $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ в буферный газ.....	81
4.1. Температурное поле в фотоакустической камере со сверхтекучим раствором $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .....	82
4.1.1. Вывод уравнения теплопроводности для стационарного случая.....	82
4.1.2. Температурное поле в фотоакустической камере с поглощающей подложкой.....	84
4.2. Упрощение граничного условия непрерывности потоков тепла на границе сверхтекучий раствор $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ - твердое тело .....	87
4.3. Теория генерации фотоакустического сигнала сверхтекучим раствором $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .....	90
4.4. Особенности частотной зависимости параметров фотоакустического сигнала, возбуждаемого сверхтекучим раствором $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .....	94
Заключение .....	102
Литература.....	104

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Известно, что в природе существуют лишь два стабильных изотопа гелия  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ . Легкий изотоп  $^3\text{He}$  был открыт примерно 80 лет тому назад, а в жидком состоянии получен в 1948 году. В 1972 году американскими физиками Дэвидом Ли, Дугласом Ошеровым и Робертом Ричардсоном была открыта сверхтекучесть этой жидкости при температурах ниже 0.0026K и давлении 34 атм. В дальнейшем был получен раствор  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  и оказалось, что этот раствор, также как и жидкий гелий, является сверхтекучим, но температура перехода в сверхтекучее состояние является функцией концентрации раствора. Уместно подчеркнуть, что обобщение теории Ландау, созданной для сверхтекучего гелия, была обобщена и для растворов. Оказалось, что многие по истине аномальные свойства  $\text{He-II}$  присущи и сверхтекучему раствору. К настоящему времени достаточно подробно, как теоретически, так и экспериментально исследован широкий набор физических свойств этого уникального раствора, включая акустические и кинетические. Тем не менее, анализ существующих публикаций последних лет показывает, что достаточно много вопросов, которые остались до конца не исследованными. Причиной этому может быть, прежде всего, весьма высокая чувствительность макроскопических и кинетических параметров этой системы к изменению температуры и концентрации. Другой причиной может быть отсутствие возможности проведения прецизионных измерений акустических, теплофизических и релаксационных параметров в области сверхнизких температур. В этой связи привлечение методов лазерной оптоакустической (ОА) спектроскопии, которые позволяют одновременно выполнить измерение целого набора физических величин исследуемой системы, является весьма многообещающим. Отметим, что к настоящему времени теоретически достаточно подробно исследованы особенности генерации ОА-волн первого и второго звуков в  $\text{He-II}$  по тепловому и стрикционному механизмам. Однако для сверхтекучего раствора  $^3\text{He}-^4\text{He}$  в силу целого ряда обстоятельств до настоящего времени так и не была создана теория генерации ОА-волн первого и

второго звуков по тепловому механизму. Также уместно отметить, что этот механизм является более эффективным по сравнению со стрикционным. Тогда, очевидно, что создание теории генерации ОА-сигналов первого и второго звуков в сверхтекучих растворах  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  по тепловому механизму является вполне актуальной задачей.

**Степень изученности проблемы, теоретическая и методологическая основа исследования.** К настоящему времени теоретически исследованы различные аспекты теории генерации ОА-сигналов первого и второго звуков лишь в сверхтекучем гелии. Также создана теория возбуждения фотоакустического (ФА) сигнала сверхтекучим гелием в буферный газ. Для сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  разработана теория генерации ОА-импульсов обоих звуков, когда он облучается непрерывным и гармонически модулированным лазерным лучом. В этих работах основным механизмом возбуждения звуковых волн является тепловой. Также разработана теория генерации ОА-волн по стрикционному механизму как в сверхтекучем гелии, так и в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .

**Целью работы** является создание теории лазерного возбуждения акустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  по тепловому механизму.

**Объектом исследования** является сверхтекучий раствор  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .

**Предметом исследования** закономерности генерации акустических волн, ОА-импульсов и ФА-сигнала в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  по тепловому механизму.

**Задачи исследования.** Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие основные задачи:

-теоретическое исследование особенностей генерации ОА-импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  импульсами прямоугольной, гауссовой и негауссовой форм лазерного излучения по тепловому механизму;

-установление вида частотной и временной зависимости спектра передаточных функций (ПФ) первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  для твердой и мягкой границ, а также поиск метода определения сопротивления Капицы из результатов измерения параметров этих функций;

-разработка теории возбуждения фотоакустического (ФА) сигнала генерации акустических волн сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в буферный газ и анализ их параметров для различных случаев, реализующихся в эксперименте.

**Достоверность** результатов обеспечивается корректностью исходной двухскоростной системы уравнений гидродинамики и теплопроводности для сверхтекучего раствора, набором начальных и граничных условий к ним и корректностью методов их решений.

**Научная новизна** работы состоит в том, что впервые:

-**разработана** теория возбуждения ОА-импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  по тепловому механизму лазерными импульсами различных форм;

-**получен** явный вид элементов матрицы ПФ ОА-сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , возбуждаемых импульсом лазерного луча для случаев жесткой и мягкой границ; **выполнен** численный расчёт ПФ и выявлены их частотные и временные поведения;

-**предложена** теория генерации ФА-сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в буферный газ при микрофонной регистрации сигнала.

**Практическая значимость.** Предложенные аспекты теории ОА-генерации звуковых волн в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  по тепловому механизму для различных временных форм импульсов лазерного луча могут стимулировать постановки новых целенаправленных ОА-экспериментов, целью которых могут быть определение термодинамических и акустических параметров раствора в широком диапазоне изменений концентрации и температуры. Экспериментальная реализация разработанной теории генерации ФА-сигнала также может служить независимым источником измерения теплофизических и

оптических параметров раствора и материала подложки при гелиевых температурах.

**Положения, вносимые на защиту:**

-выражения для ОА-импульсов первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , возбуждаемых лазерными импульсами прямоугольной, гауссовой и негауссовой форм, численные расчеты профилей ОА-импульсов для некоторых значений температур и концентраций;

-выражения, описывающие особенности частотной и временной зависимости ПФ ОА сигналов первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  для случаев, когда система имеет твердую или мягкую границу, включая результаты численного расчета этих функций;

-выражения для характеристик ФА-сигналов, генерируемых сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в буферный газ, результаты численного расчета частотных зависимостей амплитуды и фазы сигналов для простых случаев.

**Личный вклад соискателя.** Все результаты, представленные в диссертации, получены при непосредственном участии автора. Автором получены аналитические выражения для ОА-сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , проведен их анализ и выполнены численные расчеты. Все результаты по созданию теории генерации ФА-сигнала сверхтекучим раствором в буферный газ принадлежат автору.

**Апробация работы:** Основные результаты исследований по теме диссертации доложены на: международной конференции «Современные вопросы молекулярной спектроскопии», посвящённой 50-летию кафедры оптики и спектроскопии ТНУ (Душанбе, 2011); национальной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния», посвящённой 70-летию заслуженного деятеля науки и техники РТ, профессора Бобоева Т.Б. (Душанбе, 2012); 10 международной конференции по компьютерному анализу проблем науки и технологии. (Душанбе, 2015); 7th International conference of Physics of Liquids Matter: Modern Problems" (PLMMP-2016), (Kyiv, 2016); II международной конференции «Химия алифатических и циклических произ-

водных глицерина и аспекты их применения» (Душанбе, 2016); XIV международной научно-технической конференции «Оптические методы исследования потоков» (Москва, 2017); 8th International Conference «Physics of Liquid Matter: Modern Problems» PLMMP, (Kyiv, 2018); республиканской научно-теоретической конференции ППС и сотрудников ТНУ, посвящённой годам развития села, туризма и народных ремёсел (2019-2021 гг.) и 2400-летию Миробида Сайидо Насафи» (Душанбе, 2019); республиканской научно-теоретической конференции ППС и сотрудников ТНУ, посвящённой 5500-летию древнего Саразма, 700-летию поэта Камоли Худжанди и 20-летию развития естественных, точных и математических наук (Душанбе, 2020); научных семинарах отдела «Физики конденсированных сред» НИИ ТНУ.

Работа выполнена в соответствии с научными проектами «Линейная и нелинейная лазерная оптоакустическая спектроскопия конденсированных сред» (РКД 01011ТД063, 2011-2015) и «Тепловая нелинейность в радиационной акустике» (РКД. 0116Т700568, 2016-2020), проводимых в НИИ Таджикского национального университета.

**Публикации.** По результатам работы опубликовано 12 статей в рецензируемых журналах из Перечня ВАК РФ и 10 статей в материалах международных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 121 страницах, включая 34 рисунка, 1 таблицу и список литературы из 166 наименований.

**Во введении** подробно обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и основные задачи работы, описаны научная новизна и перечислены основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** вкратце приведен обзор существующих теоретических и экспериментальных работ, посвященных различным аспектам возбуждения и детектирования звуковых волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , в том числе существующие результаты по оптоакустике, из чего сле-

дует и постановка задачи теоретического исследования генерации ОА - импульсов в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  импульсами прямоугольной, гауссовой и негауссовой форм лазерного луча и поиск закономерностей возбуждения ФА-сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}-^4\text{He}$  в буферный газ.

**Вторая глава** посвящена разработке теории лазерной генерации ОА-импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  по тепловому механизму различными видами импульса лазерного луча. В разделе 2.1 теоретически исследованы особенности генерации ОА- импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  прямоугольным импульсом лазерного луча по тепловому механизму. Здесь получены необходимые выражения для акустических возмущений давления и температуры, а также выполнен численный расчет формы этих импульсов. Выявлено, что сформировавшиеся ОА-импульсы являются двухполюсными и по мере сужения импульса лазерного луча происходит постепенное уменьшение амплитуды импульсов и их смещение в область малых времен. Созданию теории лазерной генерации оптоакустических волн первого и второго звуков посредством гауссового импульса лазерного луча по тепловому механизму посвящен раздел 2.2. Показано, что в этом случае в растворе генерируется спектр цилиндрических импульсов. Обнаружено, что эти волны состоят из медленных и быстрых составляющих, фазы которых не зависят от ширины лазерного луча  $\tau_L$ , а зависимость амплитуды описывается множителем  $\tau_L \exp[-\omega^2 \tau_L^2 / 4]$ . Вопросам генерации оптоакустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  с помощью негауссового импульса лазерного излучения по тепловому механизму посвящен раздел 2.3 работы.

**В третьей главе** описаны результаты исследований частотного и временного поведения передаточных функций ОА-сигналов первого и второго звуков в  $^3\text{He}-^4\text{He}$ . Математическая модель задачи сформулирована в разделе 3.1. В разделах 3.2 и 3.3 получен явный вид частотной и временной зависимости всех элементов матрицы ПФ, когда система контактирует с твердым телом, т.е. имеет жесткую границу. Путем численного расчета установ-

лено, что спектры всех элементов ПФ, генерируемых ОА-импульсами, являются двухконтурными и их характеристики являются достаточно чувствительными к термодинамическому состоянию среды; временное поведение всех этих функций имеют гауссову форму, интенсивность которых уменьшается с ростом ширины импульса лазерного луча, а положение максимумов всех возбуждаемых импульсов соответствуют  $t_{max} \approx z/u_1$  и  $t_{max} \approx z/u_2$ . В разделах 3.4 и 3.5 работы рассмотрены эти же вопросы для случая мягкой границы, где показано, что и здесь частотная зависимость спектра всех элементов матрицы ПФ является двухконтурной, а временное распределение ПФ состоит из двух экспоненциальных кривых и переходной области для коротких импульсов луча, а для длинных гладкие кривые с пологими минимумом и максимумом

**Четвертая глава** посвящена построению теории генерации ФА-сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в буферный газ. Получено необходимое выражение для поля температуры в ФА-камере для произвольного значения теплопроводности подложки. Получено аналитическое выражение для акустического возмущения давления в газовой среде, посредством которого детектируется ФА-сигнал. Выполнен анализ частотной зависимости параметров этого сигнала для двух случаев, имеющих место в эксперименте. Путем численного расчета зависимости амплитуды и фазы этого сигнала установлено, что частотное распределение этих параметров описывается набором импульсов или гармоник, появление которых обусловлено наличием слабозатухающего второго звука в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .

# ГЛАВА I. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ В СВЕРХТЕКУЧИХ ЖИДКОСТЯХ (ОБЗОР)

**Введение.** Прежде всего, отметим, что исследованию различных аспектов физики сверхтекучих жидкостей посвящено достаточно большое количество как теоретических, так и экспериментальных работ, основные результаты которых достаточно полно изложены в [1-24]. Следует отметить, что в последние годы ведутся довольно интенсивные теоретические и экспериментальные исследования, в том числе по численному моделированию, различных нелинейных явлений в сверхтекучих жидкостях, включая нелинейные волны второго звука и акустическая турбулентность [25-43]. Также подчеркнем, что в различных лабораториях мира проводятся исследования особенностей термодинамических и кинетических свойств сверхтекучих жидкостей, включая и сверхтекучий раствор  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  [44-55]. С другой стороны, обстоятельный обзор по оптоакустике этих систем достаточно подробно описан в [56,57]. В этой связи в настоящей главе, в основном, проанализируем те работы, которые опубликованы после 2014 года, а также те, что являются основополагающими для понимания физической сущности вопросов, входящих в содержание диссертации.

## 1.1. Первый и второй звуки в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .

### Методы возбуждения и особенности распространения

Примерно 84 года тому назад в физике произошло событие мирового значения. Это было связано с открытием явления сверхтекучести советским физиком П.Л. Капицей [58]. Полная теория этого явления очень скоро была предложена в известной работе Л.Д.Ландау [59], согласно которой в сверхтекучем гелии может распространяться не только первый звук- колебание давления, но и второй звук- колебание температуры. В [59] было получено выражение для скорости второго звука. В дальнейшем Пешков [60], реализуя

метод Лифшица [61], возбудил второй звук и выполнил измерение ее скорости и получил блестящее совпадение с теорией Ландау. Это было, по истине, триумфом теории Ландау.

Отметим, что согласно теории Е.М.Лифшица, твердая пластина, температура поверхности которой изменяется согласно гармоническому закону, возбуждает колебание температуры- второй звук в сверхтекучем гелии. Однако непосредственное применение теории Лифшица для сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  было не оправдано, поскольку в растворе присутствует дополнительный динамический параметр- концентрация  $c'(t, \vec{r})$ . В этой связи Б.Н.Есельсоном с сотрудниками была модифицирована теория Лифшица применительно к раствору  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  [62]. Авторам удалось показать, что возмущения гидродинамических параметров жидкости на волне обычного (первого) звука определяются следующими выражениями:

$$g_n(x,t) = \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right) \left(1 + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1}, \quad p'(x,t) = \rho u_1 \left(1 + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1} g_s(x,t), \quad (1.1.1)$$

$$T'(x,t) = -\frac{u_1}{\bar{\sigma}} \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\bar{\sigma}^2}{u_1^2} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \left(1 + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1}, \quad c'(x,t) = -\frac{c \rho_s}{u_1 \rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \left(1 + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1} g_s(x,t), \quad (1.1.2)$$

Здесь  $u_1, u_2$ - соответственно скорости первого и второго звуков. Эти выражения на волне второго звука могут быть записаны в виде

$$g_{nn}(x,t) = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \left(1 + \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right) \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1} g_s(x,t), \quad p'(x,t) = -\rho u_2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1} g_s(x,t), \quad (1.1.3)$$

$$T'(x,t) = -\frac{u_2}{\bar{\sigma}} \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\bar{\sigma}^2}{u_2^2} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1} g_s, \quad c'(x,t) = -\frac{c \rho_s}{u_2 \rho_n} \left(1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-1} g_s(x,t). \quad (1.1.4)$$

Из (1.1.3)-(1.1.4) исходит следующее соотношение для интенсивностей звуков, одновременно генерируемых резонатором Лифшица:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\rho_n u_2}{\rho_s u_1} \left(\frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}\right)^{-2}. \quad (1.1.5)$$

Оказалось, что для концентрации  $c = 0,2$  и значения  $(c\rho^{-1} \partial\rho/\partial c) \approx -0,15$  справедлива оценка  $I_2/I_1 \approx 10$ . Это означает, что генерируемый первый звук является измеряемым.

Магнитострикционный механизм генерации волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  был предложен в [63]. Авторы считали, что переменное магнитное поле может привести к возникновению магнитострикционной силы

$$f = -\frac{H^2}{2} \nabla \chi + \frac{\nabla}{2} \left[ \rho \left( \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right)_T H^2 \right], \quad (1.1.6)$$

где  $\chi$  - магнитная восприимчивость. В дальнейшем эта сила была включена в уравнение движения для  $g_n(x,t)$  - нормальной компоненты скорости жидкости.

Учитывая равенства  $\frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{\chi}{c} \right) = 0$  и  $\left| \frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right| \gg 1$ , а также принимая во внимание

приближенное выражение  $\partial H / \partial \rho \approx -H(\chi/T)(\partial T / \partial \rho)$ , для возбуждаемых звуковых волн авторами получено дисперсионное уравнение

$$(\omega^2 - k^2 s_{10}^2)(\omega^2 - k^2 s_{20}^2) = \omega^2 k^2 s_H^2, \quad (1.1.7)$$

где  $s_{10}$  и  $s_{20}$  являются скоростями этих волн при отсутствии магнитного поля,

а  $s_H^2 = \frac{xH^2}{2\rho} \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right|^{-1}$ . Решение дисперсионного уравнения (1.1.7) можно

написать в виде

$$s_1 = s_{10}(1 - \gamma), \quad s_2 = s_{20}(1 + \gamma),$$

где

$$\gamma = \frac{xH^2}{2\rho s_1^2} \left| \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right|^{-1}.$$

Из анализа полученного решения следует, что вклад от магнитострикции для второго звука является положительным, а для первого звука отрицательным. Очевидно, что этот эффект является пороговым и авторам было найдено выражение для  $H_c$  - порогового значения магнитного поля и показано, что

при  $H > H_c$  в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  развивается параметрическая неустойчивость. В частности, было установлено, что если толщина жидкости  $L = 1$  см, тогда  $H_{c(2)} = 6 \cdot 10^4$  Э для второго и  $H_{c(1)} = 2 \cdot 10^4$  Э для первого звуков.

Таким образом, можно однозначно утверждать, что к настоящему времени основным и эффективным методом генерации звуковых волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  является метод, разработанный Лифшицем для He-II и модифицированный Есельсоном с учениками для этого раствора.

## 1.2. Обзор состояния работ по оптоакустике сверхтекучих жидкостей по тепловому механизму

Прежде всего заметим, что к настоящему времени развиты различные варианты метода опто- и фотоакустики, которые широко применяются для экспериментального исследования кинетических, акустических, оптических и теплофизических свойств различного рода жидких и твердотельных образцов, включая неоднородные, гиротропные и наносистемы (см., например, [64-81]). Подробное изложение полученных результатов в этом направлении является содержанием многочисленных обзоров [82-92] и монографий [93-102]. В настоящем разделе мы остановимся на тех работах, которые имеют прямое отношение к сверхтекучим жидкостям.

**Сверхтекучий гелий.** Отметим, что впервые Романовым и Салиховым [103] теоретически был рассмотрен вопрос о лазерном возбуждении второго звука в сверхтекучем гелии по тепловому механизму. В дальнейшем, благодаря работам Салихова [104-122] последовательно и поэтапно были развиты различные аспекты теории оптоакустической генерации звуковых волн обоих звуков в сверхтекучем гелии по тепловому механизму. Ниже вкратце изложим основные результаты этих работ.

Романов и Салихов [103] исходили из системы уравнений двухжидкостной гидродинамики He-II, предложенной ещё Ландау [4] и для вели-

чины возмущения температуры  $T'(r, t)$  получили волновое уравнение

$$\frac{1}{u_2^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \Delta T' = \frac{1}{\rho C_p u_2^2} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \kappa \Delta \frac{\partial T'}{\partial t} \right). \quad (1.2.1)$$

где

$$f(r, t) = \frac{2\alpha I_0}{\pi w^2} \varphi(t) \exp\left[-\frac{2r^2}{w^2}\right] \quad (1.2.2)$$

есть тепловой источник, обусловленный поглощением падающего луча исследуемой системой,  $I_0$  - интенсивность падающего луча,  $\alpha$  - оптический коэффициент поглощения. Принимая во внимание, что функция  $f(r, t)$  является сферически симметричной, авторы для решения (1.2.1) воспользовались интегральным преобразованием Ханкеля по  $r$ . В (1.2.2) изучались два вида временной зависимости интенсивности падающего луча.

1. Система облучается непрерывным лазерным лучом и  $\varphi(t) = \Theta(t)$ . Для этого случая было получено следующее выражение для теплового импульса:

$$T'(r, t) = \frac{\alpha I_0}{2\pi \rho C_v} \int_0^\infty ds J_0(rs) \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}[w^2 s^2 + \chi s^2 t]\right)}{\sqrt{u_2^2 - \frac{1}{4} s^2 \chi^2}} \times \sin\left(\sqrt{u_2^2 - \frac{1}{4} s^2 \chi^2} st\right), \quad (1.2.3)$$

где  $J_0(x)$  - функция Бесселя.

2. Система облучается модулированным по гармоническому закону лазерным лучом и  $\varphi(t) = \exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  - частота модуляции падающего луча. Очевидно, что в этом случае в исследуемой системе возбуждается цилиндрическая волна второго звука, описываемая выражением

$$T'(r, t) = \frac{\alpha \omega I_0 H_0^{(1)}(kr)}{4\rho C_v u_2^2} \exp\left(-i\omega t - \frac{1}{8} k^2 w^2\right), \quad (1.2.4)$$

где  $H_0^{(1)}(x)$  - цилиндрическая функция Ханкеля. При выполнении условия  $r \gg \omega u_2$  (дальняя волновая зона) форма этой волны определяется выражением

$$T'(r, t) = \frac{\alpha \omega I_0 \exp\left(-\frac{1}{4} k^2 w^2\right)}{2\sqrt{2\pi k r} \rho C_v u_2^2} \times \exp\left[-i\omega(t - r/u_2) + \frac{1}{4} i\pi\right]. \quad (1.2.5)$$

Авторами, с использованием выражения (1.2.4), был выполнен численный расчет формы теплового импульса и для оптического коэффициента поглощения использовано значение  $\alpha = 1 \text{ cm}^{-1}$  [123,124], соответствующее линии  $\lambda = 630\text{A}^0$ .

Известно, что важной характеристикой ОА-волн является передаточная функция. В [111-117] был получен явный вид этих функций для первого и второго звуков в He-II. Исходной является следующая система взаимосвязанных волновых уравнений для колебаний давления и температуры в сверхтекучем гелии, заполняющем полупространство  $z \geq 0$ :

$$\frac{1}{u_1^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p - \rho_0 \alpha_T u_2^2 \Delta T = \frac{\alpha_T}{C_p} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.2.6)$$

$$\frac{1}{u_2^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - (1+b) \Delta T - \frac{T_0 \alpha_T u_1^2}{\rho C_p u_2^2} \Delta p = \frac{1}{\rho C_p u_2^2} (1+b) \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.2.7)$$

где  $\alpha_T$  - коэффициент теплового расширения,  $C_p$  - удельная теплоемкость,  $b = T_0 \alpha_T^2 u_1^2 / C_p$ , соответственно;  $f(t, z) = \alpha I_0 e^{-\alpha z} \varphi(t)$ ,  $I_0$  - мощность падающего луча. Очевидно, что необходимо отдельно определить вид передаточных функций для жесткой и мягкой границ.

Для жесткой границы были получены следующие выражения:

$$p(\omega, z) = [K_{11(r)}(\omega) \exp(iq_1 z) + K_{12(r)}(\omega) \exp(iq_2 z)] f(\omega) \quad (1.2.8)$$

$$T(\omega, z) = [K_{21(r)}(\omega) \exp(iq_1 z) + K_{22(r)}(\omega) \exp(iq_2 z)] f(\omega), \quad (1.2.9)$$

где  $q_1 = (\omega/u_1)$ ,  $q_2 = (\omega/\tilde{u}_2)$ ,  $\tilde{u}_2 = u_2(1+b)^{1/2}$ ,  $f(\omega) = I_0 \varphi(\omega)$  - спектр падающего лазерного луча. Видно, что для He-II функция  $K_{ij(r)}(\omega)$  является матрицей, поскольку имеет четыре составляющих. Также нетрудно заметить, что эти величины описывают двухконтурный состав возбуждаемых волн, т.е. каждый из этих волн состоит из суперпозиции обычных и необычных частей. Так, например, возмущения температуры распространяются со скоростями  $u_2$  и  $u_1$  (быстрый второй звук); возмущения давления соответственно со скоростями  $u_1$  и  $u_2$  (медленный первый звук). Пренебрегая малыми параметрами, авторы получили следующие выражения для этих функций:

$$K_{11(r)} = \frac{\alpha_T u_1 a F_1(\omega)}{C_p}, \quad K_{22(r)} = \frac{i F_2(\omega) G(\omega)}{\rho C_p u_2^2}, \quad K_{12(r)}(\omega) = -i \frac{\alpha_T F_2(\omega) G(\omega)}{C_p \delta}, \quad K_{21(r)}(\omega) = \frac{b a F_1(\omega)}{\rho C_p u_1 \delta},$$

где

$$F_1(\omega) = \alpha(q_1^2 + \alpha^2)^{-1}, \quad F_2(\omega) = \alpha(q_2^2 + \alpha^2)^{-1}, \quad G(\omega) = \frac{M + iN}{K + iL}, \quad g = \kappa_m / \kappa,$$

$$M = \frac{\omega a g (1 - 2\varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2} + \alpha \omega, \quad N = \omega a g + \frac{\alpha \rho C_p u_2^2}{\kappa}, \quad K = -\frac{\rho C_p u_2}{\kappa \sqrt{1 + b}} - \frac{a g (1 - 2\varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = a \kappa_m / \alpha \kappa,$$

$$L = \frac{\omega}{u_2 \sqrt{1 + b}} - \frac{a g}{(1 - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2}, \quad \delta = 1 - (\tilde{u}_2 / u_1)^2, \quad a = 1 / \mu, \quad \mu = (2k / \rho C_p \omega)^{1/2} -$$

длина тепловой диффузии,  $\alpha_K = R_K^{-1}$ ,  $R_K$  - сопротивление Капицы,  $\kappa_m, \kappa$ , - коэффициенты теплопроводности твердого тела и He-II соответственно.

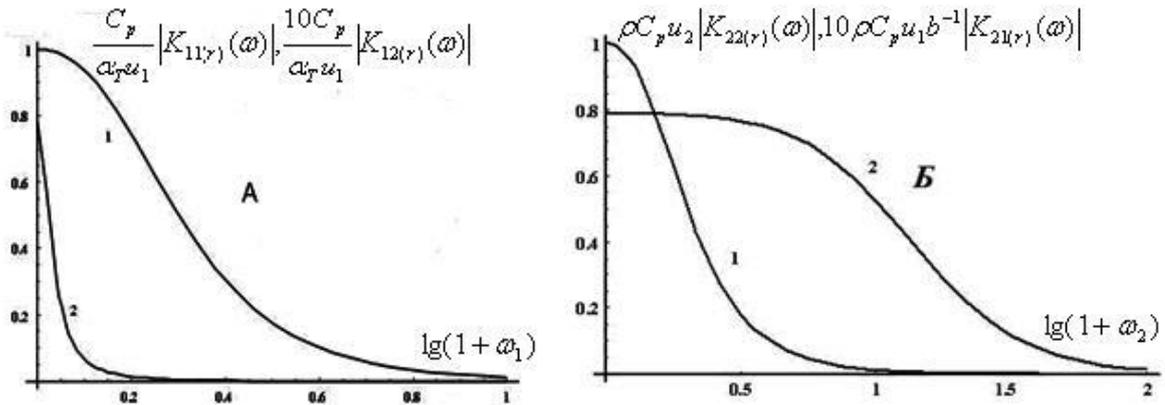


Рис.1.1. Частотная зависимость безразмерных величин: А-  $C_p(\alpha_T u_1)^{-1} |K_{11(r)}(\omega)|$  (кривая 1) и  $10C_p(\alpha_T u_1)^{-1} |K_{12(r)}(\omega)|$  (кривая 2) от  $\omega_1 = \omega / a u_1$ ; Б-  $\rho C_p u_2 |K_{22(r)}(\omega)|$  (кривая 1) и  $10\rho C_p u_1 b^{-1} |K_{21(r)}(\omega)|$  (кривая 2) от безразмерной частоты  $\omega_2 = \omega / a \tilde{u}_2$ .  $T = 1K$ .

На рис.1.1 иллюстрированы результаты численных расчётов амплитуды нормированных передаточных функций, из которых обнаруживается наличие двух составляющих, соответствующих возбуждаемым волнам первого и второго звуков. В [115], выполняя обратное преобразование Фурье, были получены следующие выражения:

$$p(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{11(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{12(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_2} d\omega, \quad (1.2.10)$$

$$T(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{21}(\omega) I_0(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{22}(\omega) I_0(\omega) e^{-i\omega\tau_2} d\omega, \quad (1.2.11)$$

где  $\tau_1 = t - zu_1^{-1}$ ,  $\tau_2 = t - zu_2^{-1}$ . Когда падающий импульс лазерного луча имеет гауссову форму с шириной  $\tau_L$ , справедливо равенство  $\varphi(t) = \pi^{-1} \exp(-t^2 / \tau_L^2)$ , а Фурье образ определяется как  $\varphi(\omega) = \tau_L \exp(-\omega^2 \tau_L^2 / 4)$ . Тогда возбуждаемые акустические импульсы описываются выражениями

$$\frac{p_1(\tau_1, z)}{P_A} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} e^{-0.25\varepsilon_1^2 x^2} \cos(\tau_1 a u_1 x) dx, \quad \frac{p_2(\tau_2, z)}{P_A} = -\frac{2}{\pi \delta} \frac{u_2^2}{u_1^2} \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} e^{-0.25\varepsilon_2^2 x^2} \cos(\tau_2 a u_2 x) dx$$

$$\frac{T_1(\tau_1, z)}{T_A} = \frac{2b}{\pi \delta} \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} e^{-0.25\varepsilon_1^2 x^2} \cos(\tau_1 a u_1 x) dx, \quad \frac{T_2(\tau_2, z)}{T_A} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (1+x^2)^{-1} e^{-0.25\varepsilon_2^2 x^2} \cos(\tau_2 a u_2 x) dx,$$

где  $P_A = (\tau_L a_T a u_1^2 I_0 / 2C_P)$ ,  $T_A = (\tau_L a I_0 / 2\rho C_P)$   $\varepsilon_1 = \tau_L a u_1$  и  $\varepsilon_2 = \tau_L a u_2$ .

Для определения временной формы генерируемых волн первого и второго звуков авторами проведено численное интегрирование этих выражений с широким изменением параметра  $\tau_L a u_1$ , из которого можно заключить, что:

1) максимальное значение амплитуды всех компонентов ОА-импульсов нелинейно уменьшается с ростом величин  $\tau_L a u_1$  и  $\tau_L a u_2$ ;

2) временное поведение всех ОА-импульсов для малых значений  $\tau_L a u_i \ll 1$  описывается суперпозицией двух симметричных функций и имеет вид

$$(1 - \theta(\tau_i)) \exp[a u_i \tau_i] + \theta(\tau_i) \exp[-a u_i \tau_i],$$

где  $\theta(\tau_j)$  - единичная функция Хевисайда;

3) в области вариаций величин  $(a u_1)^{-1} \ll \tau_L \ll (a u_2)^{-1}$  импульсы, имеющие скорость  $u_1$  будет состоять из двух симметричных экспоненциальных кривых, а скорость  $u_2$  имеет гауссовую форму;

4) когда длительность падающего излучения  $\tau_L$  значительно больше величин  $\tau_1 = 1/a u_1$  и  $\tau_2 = 1/a u_2$ , временное поведение всех генерируемых ОА-импульсов становится гауссовым и принимает профиль импульса падающего луча. На рис.1.2 иллюстрированы результаты численного расчета временного поведения ОА – импульсов для одного из вариантов, которые показывают

двухконтурный состав генерируемых импульсов первого и второго звуков. Этот вывод соответствует результатам работы [112-118].

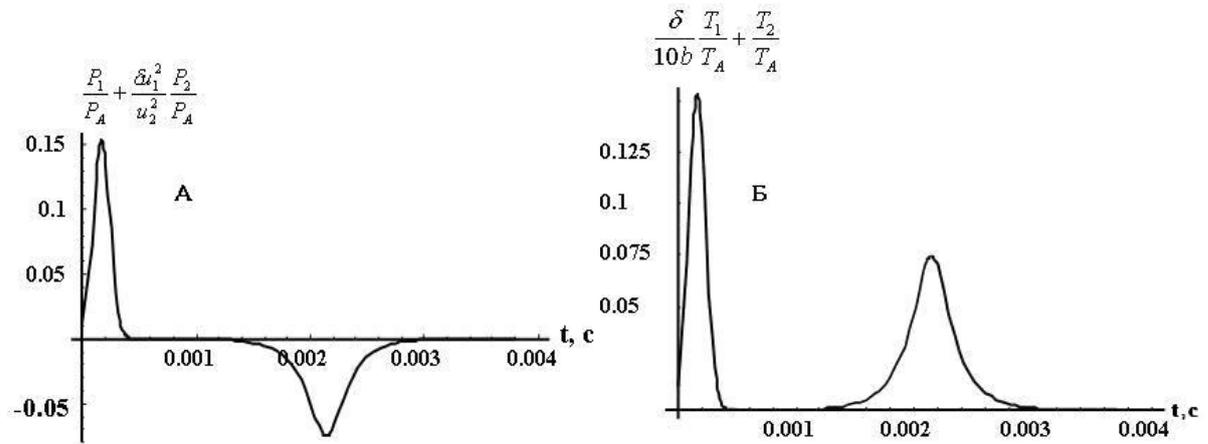


Рис. 1.2. Временная зависимость  $\frac{P_1(t)}{P_A} + \frac{\delta u_2^2}{u_1^2} \frac{P_2(t)}{P_A}$  (А) и  $\frac{\delta T_1(t)}{10bT_A} + \frac{T_2(t)}{T_A}$  (Б) при  $z=4\text{см}, \alpha = 300\text{м}^{-1} \tau_L = 10^{-4} \text{с}$ .

Из полученных результатов авторы пришли к выводу, что имеются две возможности определения численного значения величины сопротивления Капицы  $R_K$  из измерения амплитуд ОА – импульсов:

1. Система алгебраических уравнений для  $K_{12(r)}(\omega)$ , составленная для нескольких частот, позволяет определить значение  $R_K$ ;
- 2) Численное решение системы алгебраических уравнений, которые формируются из выражения для величины  $|K'_{22(r)}(\omega)|$ , написанного для нескольких частот.

Авторами также был получен явный вид передаточных функций ОА-импульсов звуковых волн, когда система имеет мягкую границу, т.е. контактирует со своим собственным паром. Эти функции имеют следующий вид [114]:

$$K_{11(f)}(\omega) = -\frac{i\omega\alpha_t F_1}{C_P} + \frac{i\omega\alpha_t u_1^2 F_2 G_{(f)}(\omega)}{C_P (u_1^2 - \tilde{u}_2^2)} + \frac{i\omega\alpha\alpha_T F_1 F_2}{C_P}, \quad K_{12(f)}(\omega) = -\frac{i\omega\alpha_t F_2}{C_P} \frac{G_{(f)}(\omega)}{1 - \tilde{u}_2^2 / u_1^2},$$

$$K_{21(f)}(\omega) = -\frac{i\omega b}{\rho C_P} \frac{F_1}{u_1^2 - \tilde{u}_2^2}, \quad K_{22(f)}(\omega) = \frac{i\omega F_2 G_{(f)}(\omega)}{\rho C_P u_2^2} + \frac{i\omega b F_1}{\rho C_P} \left( \frac{1}{u_1^2 - \tilde{u}_2^2} + \frac{\alpha F_2}{\tilde{u}_2^2} \right),$$

где  $G_{(f)} = f_{1(f)}(\omega) + if_{2(f)}(\omega)$ ,  $g_1 = k/k_g$ ,  $\alpha_g = \sqrt{\omega/2\chi_g}$ ,  $M_0 = \frac{\omega}{2\chi_g} + [g_1q_2 - (\frac{\omega}{2\chi_g})^{1/2}]^2$ ,

$$f_{1(f)}(\omega) = -\frac{1}{M_0} \left[ \frac{\omega}{\chi_g} - g_1(q_2 - \alpha(\frac{\omega}{2\chi_g})^{1/2}) \right], \quad f_{2(f)}(\omega) = -\frac{g_1}{M_0} [aq_2g_1 + (q_2 - \alpha)(\frac{\omega}{2\chi_g})^{1/2}],$$

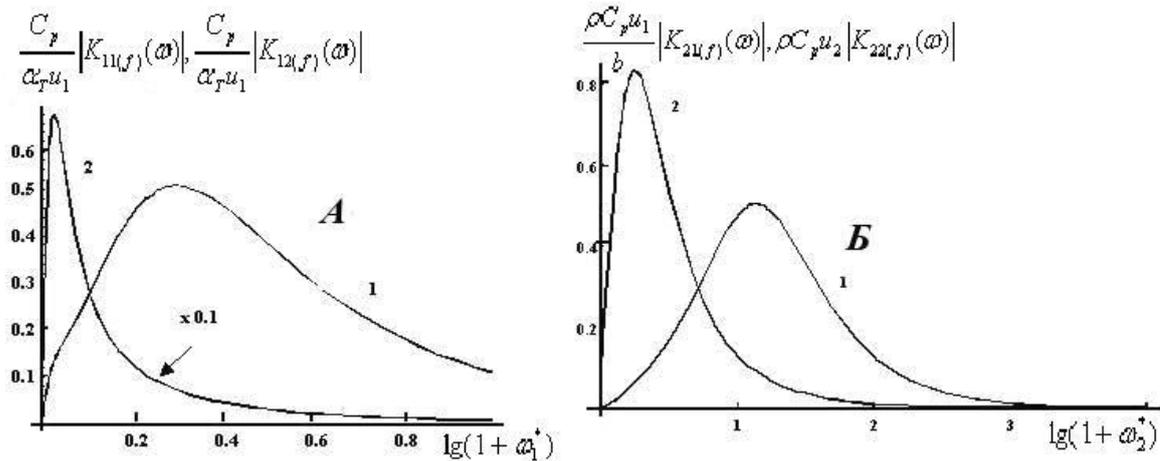


Рис.1.3. (А). Зависимость безразмерных величин  $C_p(\alpha_T u_1)^{-1}|K_{11(f)}(\omega)|$  и  $C_p(\alpha_T u_1)^{-1}|K_{12(f)}(\omega)|$  от частоты  $\omega_1 = \omega/au_1$  при  $T=1K$ ; (Б) Зависимость безразмерных величин  $\rho C_p u_1 b^{-1}|K_{21(f)}(\omega)|$  и  $\rho C_p u_2 b^{-1}|K_{22(f)}(\omega)|$  от частоты  $\omega_2 = \omega/au_2$ ,  $T=1K$ .  $M_0 = \frac{\omega}{2\chi_g} + [g_1q_2 - (\frac{\omega}{2\chi_g})^{1/2}]^2$ ,  $\chi_g = (\kappa_g / \rho_g C_{pg})$ - температуропроводность газа.

На рис. 1.3 представлено временное поведение этих функций, полученное численным расчетом. Из этого рисунка следует, что функции  $|K_{11(f)}(\omega)|$  и  $|K_{21(f)}(\omega)|$  имеют максимальное значение на частоте  $\omega_1 = au_1$ , а  $|K_{12(f)}(\omega)|$  и  $|K_{22(f)}(\omega)|$  при  $\omega_2 = au_2$ . Для пространственно- временного профиля ОА-импульсов авторами было получено следующее выражение:

$$\frac{P_{1f}(\tau_1, z)}{P_A} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-0.25\varepsilon_1^2 x^2) \sin(\tau_1 au_1 x)}{1+x^2} dx,$$

$$\frac{T_{1f}(\tau_1, z)}{T_A} = -\frac{2b}{\pi\delta} \int_0^{\infty} \frac{x \exp(-0.25\varepsilon_1^2 x^2)}{1+x^2} \sin(au_1 \tau_1) dx,$$

$$\frac{P_{2f}(\tau_2, z)}{P_A} = -\frac{2}{\pi\delta} \int_0^\infty \frac{x \exp(-0.25\varepsilon_1^2 x^2)}{1+x^2} [f_{1(f)}(au_2 x) \sin(au_2 \tau_2 x)] dx,$$

$$\frac{T_{2f}(\tau_2, z)}{T_A} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x \exp(-0.25\varepsilon_1^2 x^2)}{1+x^2} [f_{1(f)}(au_2 x) \sin(au_2 \tau_2 x)] dx,$$

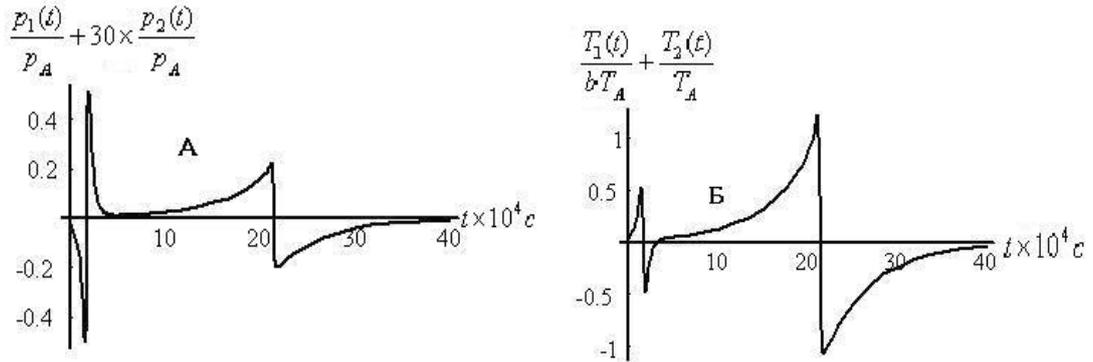


Рис.1.4. Временная зависимость безразмерных величин  $\frac{p_1(t)}{P_A} + \frac{30p_2(t)}{P_A}$  (А) и

$\frac{T_1(t)}{T_A} + \frac{T_2(t)}{bT_A}$  (Б) при  $z=4\text{см}, \alpha = 100\text{см}^{-1}, \tau_L = 2 \cdot 10^{-5} \text{с}$ .

Авторами выполнен численный расчет вида этих функций и было обнаружено, что:

1. временной профиль величины  $P_{1f}(\tau_1, z)/P_A$  для коротких импульсов с  $\tau_L \ll (au_1)^{-1}$  состоит из двух экспоненциальных кривых и переходной области шириной  $\sim \tau_L$ ;

2. если импульс падающего луча длинный с  $\tau_L \gg (au_1)^{-1}$ , тогда временные зависимости являются кривыми с пологими максимумами и минимумами. Результаты этих расчетов в реальном масштабе времени показаны на рис. 1.4, из которых обнаруживается наличие двух импульсов, как для колебания температуры, так и давления.

Салиховым и Одиловым был рассмотрен случай, когда фотоакустический сигнал генерируется сверхтекучим гелием в газовой среде, а ее детектирование осуществляется микрофоном. Ими была использована одномерная

трехслойная модель ФА- камеры, которая состоит из трех слоев - пары гелия, сверхтекучий гелий и подложка с толщинами  $l_g, l$  и  $l_b$  соответственно. Подложка и буферный газ при этом считались прозрачными. Тогда систему уравнений, состоящую из волнового уравнения для колебания температуры в сверхтекучем гелии, уравнений теплопроводности для газового слоя и подложки, можно написать в виде [118-122]:

$$\rho_g C_{pg} \frac{\partial T_g}{\partial z} = \kappa_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z \leq l_g \quad (1.2.12)$$

$$\frac{1}{u_2^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - (1+b) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1+b}{\rho C_p u_2^2} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad -l \leq z \leq 0 \quad (1.2.13)$$

$$\rho_b C_{pb} \frac{\partial T_b}{\partial z} = \kappa_b \frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2}, \quad -l \leq z \leq -(l+l_b), \quad (1.2.14)$$

где  $f = 0.5aI_0 e^{i\omega t} [e^{az} + R e^{-2al} e^{-az}]$ ,  $R$  - коэффициент отражения луча от подложки,  $k_i$  - коэффициенты теплопроводности, а  $C_{pi}$  - удельная теплоемкость соответствующих слоев. Второе слагаемое в выражении  $f$  соответствует отраженному лучу, вклад которого может стать существенным для случая слабого поглощения. Авторами при решении граничной задачи получен явный вид выражения для колебания давления в газовом слое для случаев, когда:

- 1) подложка-тепловой изолятор;
- 2) произвольная подложка.

Для более общего случая – произвольной подложки, это выражение имеет вид

$$\delta p(\omega) = \frac{Y(1+i)\omega\mu_g\alpha}{(\alpha^2 + q_2^2)} \times \frac{(1+B/D)(r-g)\exp(iq_2l) + (1-B/D)(r+g)\exp(-iq_2l) - 2r(1-iq_2B/\alpha D)\exp(-\alpha l)}{(g+1)(1+B/D)\exp(iq_2l) - (g-1)(1-B/D)\exp(-iq_2l)} \quad (1.2.15)$$

Где  $Y = \gamma p_0 \sqrt{1+b} I_0 / [4T_0 l_g \rho C_p u_2^2]$ ,  $g = ikq_2 / \kappa_g \sigma_g$ ,  $B = [1 - \frac{i\rho C_p u_2^2}{\kappa\omega}]^{-1} \kappa_b \sigma_b / ikq_2$ ,

$D = (1 - R_K k_b \sigma_b)$ ,  $r = \kappa\beta / \kappa_g \sigma_g$ ,  $\sigma_j = (1+i)\mu_j^{-1}$ ;  $\mu_j(\omega) = \sqrt{(2\chi_j/\omega)}$ ,  $\kappa_j$  и

$\chi_j = (\kappa_j / \rho_j C_{pj})$ . Выражение (1.2.15) можно представить в виде

$$\delta p(\omega) = |\delta p(\omega)| \exp(i\Psi(\omega)) , \quad (1.2.16)$$

где  $|\delta p(\omega)|$  и  $\Psi(\omega)$  - амплитуда и фаза ФА-сигнала.

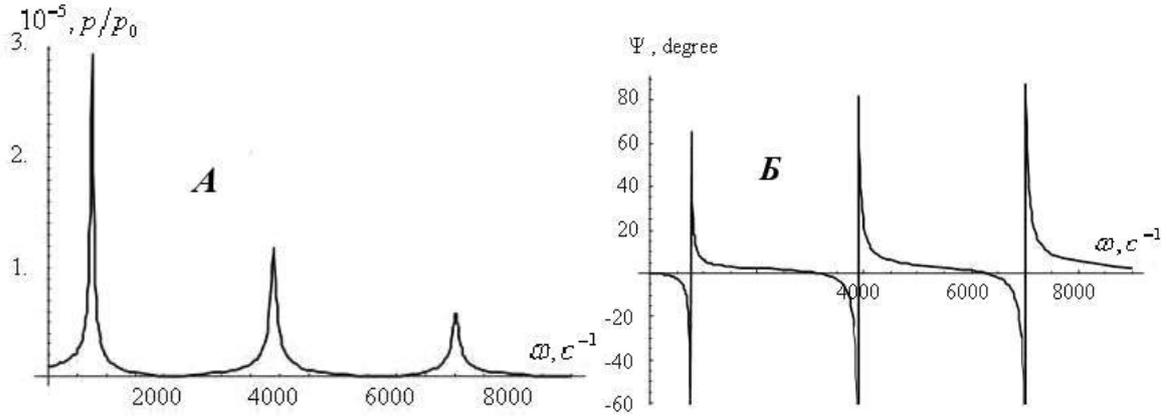


Рис.1.5. Частотная зависимость амплитуды  $p(\omega)/p_0$  (А) и фазы  $\Psi(\omega)$  (Б), возбуждаемого ФА- сигнала для случая  $al \gg 1$ . ( $T = 1.5K$ , подложка кварцевое стекло).

Результаты численного расчета частотной зависимости амплитуды и фазы ФА- сигнала представлены на рис.1.5, из которых следует, что: частотная зависимость амплитуды и фазы ФА-спектра представляют собой набор резонансных контуров, положения максимумов которых определяются выражением  $\omega_{n(\max)} \approx l^{-1}u_2(\frac{\pi}{4} + \pi n)$ , а положение ее минимумов соответствует частотам  $\omega_{n(0)} \approx 0.5\pi u_2 l^{-1}$  и отстоят друг от друга на величину  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 0.5\pi u_2 l^{-1}$ .

**Сверхтекучий раствор  $^3\text{He}-^4\text{He}$ .** В силу ряда обстоятельств некоторые аспекты теории лазерного возбуждения акустических волн обоих звуков звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  были рассмотрены раньше, чем в сверхтекучем He-II. Это связано с публикацией работы Салихова [105], где из системы уравнений двухскоростной гидродинамики для раствора, предложенной Халатниковым, была получена следующая система взаимосвязанных волновых уравнений для колебания давления и температуры:

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - u_1^2 \left(1 + \frac{\rho_s \beta^2}{\rho_n} + \frac{\beta u_2^2 \alpha_T}{\bar{\sigma}}\right) \Delta P' + \frac{\rho_0 \beta u_1^2 u_2^2 C_p}{T_0 \bar{\sigma}} \Delta T' = - \frac{\beta u_1^2}{T_0 \sigma_0} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1.2.17)$$

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - u_2^2 \left(1 - \frac{\beta u_1^2 \alpha_T}{\bar{\sigma}}\right) \Delta T' - \frac{T_0}{\rho_0 C_p} [(u_1^2 - u_2^2) \alpha_T + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 \alpha_T u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \bar{\sigma} \beta + \frac{\beta \alpha_T^2 u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}}] \Delta P' = \frac{1}{\rho_0 C_p \sigma_0} (\bar{\sigma} - \beta u_1^2 \alpha_T) \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (1.2.18)$$

где

$$\beta = \frac{\bar{\sigma}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{Pc} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_{Pc} + \frac{c_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c}\right)_{PT}. \quad \bar{\sigma} = \sigma_0 - c_0 \partial \sigma / \partial c.$$

В [105] получено решение этой системы для некоторых случаев. Ниже вкратце приведены эти результаты.

1. Раствор облучается непрерывным лучом лазера, при этом  $\varphi(t) = \Theta(t)$  и для  $P'(t, r)$  и  $T'(t, r)$  получаем

$$P'(t, r) = -\frac{\alpha I_0 \beta U_1^2 C_1}{T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} \int_0^\infty ds J_0(sr) f_0(s) \left[ \sin(s C_1 t) - \frac{C_2}{C_1} \sin(s C_2 t) \right], \quad (1.2.19)$$

$$T'(t, r) = -\frac{\alpha I_0 \bar{\sigma}}{\rho_0 C_p \sigma_0 C_2} \int_0^\infty ds J_0(sr) f_0(s) \left[ (1 + G_2) \sin(s C_2 t) - G_1 \frac{C_2}{C_1} \sin(s C_1 t) \right], \quad (1.2.20)$$

где

$$G_1 = \frac{U_1^2 (\alpha_T \beta C_1^2 - \bar{\sigma} \gamma)}{\bar{\sigma} (C_1^2 - C_2^2)}; \quad G_2 = \frac{U_1^2 (\alpha_T \beta C_2^2 - \bar{\sigma} \gamma)}{\bar{\sigma} (C_1^2 - C_2^2)}, \quad C_1^2 = U_1^2 \left(1 + \frac{U_1^2}{U_1^2 + U_2^2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2\right),$$

$$C_2^2 = U_2^2 \left(1 + \frac{U_1^2}{U_1^2 - U_2^2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta\right)^{-1}, \quad \bar{\gamma} = \frac{U_1^2}{U_1^2 - U_2^2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 = \frac{C_1^2 - U_1^2}{U_1^2} = \frac{U_2^2 - C_2^2}{C_2^2} > 0.$$

Первое слагаемое в выражении (1.2.19) соответствует импульсу первого звука, а второе - колебаниям давления на волне второго звука, причем оно всегда имеет противоположную фазу. Из-за того, что  $\beta \approx \frac{c_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial c} < 0$ , величина амплитуды первого звука  $P_{\max} = -\alpha I_0 \beta C_1^3 / T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)$  будет иметь положительное значение. Первое слагаемое в выражении (1.2.20) является обычным тепловым импульсом второго звука, а второе - описывает колебание температуры при распространении первого звука в данном растворе. Следует обратить внимание на то, что согласно выражению (1.2.19) (или (1.2.20)) знак фазы  $T'_{(2)}$  в зависимости от знака величины  $G_1$  может быть как противоположным, так и совпадающим со знаком фазы обычного импульса второго звука. В области

концентраций и температур, где  $\alpha_T < 0$ , фазы  $P'_{(2)}(t, r)$  и  $T'_{(2)}(t, r)$  в волне второго звука будут противоположны, а при  $\alpha_T > 0$ , когда  $\alpha_T \beta U_1^2 < \sigma \bar{\gamma}$  или  $G_1 < 0$ , фазы будут совпадать. Результаты численного расчета по этим формулам полностью подтвердили именно такое поведение формы импульсов и их амплитуд.

2. Интенсивность падающего лазерного луча меняется по гармоническому закону, при этом справедливы выражения

$$P'(t, r) = -\frac{\alpha \omega I_0 \beta U C_1^2}{2T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} H_0^{(1)}(q_1 r) \exp\left(-\frac{q_1^2 \omega^2}{8}\right) - H_0^{(1)}(q_2 r) \exp\left(-\frac{q_2^2 \omega^2}{8}\right) e^{-i\omega t}, \quad (1.2.21)$$

$$T'(t, r) = -\frac{\alpha \omega I_0 \bar{\sigma}}{2\rho_0 \sigma_0 C_p C_2^2} [(1 + G_2) H_0^{(1)}(q_2 r) \exp\left(-\frac{q_2^2 \omega^2}{8}\right) - \frac{G_1 C_2^2}{C_1^2} H_0^{(1)}(q_1 r) \exp\left(-\frac{q_1^2 \omega^2}{8}\right)] e^{-i\omega t}. \quad (1.2.22)$$

Выражения (1.2.21) и (1.2.422) показывают, что в рассматриваемом случае облучаемая система излучает цилиндрическую волну. В дальней волновой зоне, когда  $r \gg C_{1,2} / \omega$ , справедливы выражения

$$P'(t, r) = -\frac{\alpha \omega I_0 \beta C_1^2 \exp(-r(\omega t + \pi/4))}{T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2) \sqrt{2\pi r}} [q_1^{-1/2} \exp(i r q_1 - \frac{q_1^2 w^2}{8}) - q_2^{-1/2} \exp(i r q_2 - \frac{q_2^2 w^2}{8})], \quad (1.2.23)$$

$$T'(t, r) = -\frac{\alpha \omega I_0 \bar{\sigma} C_1^2 \exp(-i(\omega t + \pi/4))}{\rho_0 C_p \sigma_0 C_2^2 \sqrt{2\pi r}} [\frac{1 + G_2}{\sqrt{q_2}} \exp(i r q_1 - \frac{q_2^2 w^2}{8}) - \frac{G_1 C_2^2}{C_1^2 \sqrt{q_1}} \exp(i r q_2 - \frac{q_2^2 w^2}{8})]. \quad (1.2.24)$$

Из выражений (1.2.23) и (1.2.24) следует, что в области низких частот амплитуды возбуждаемых колебаний растут по закону  $\sim \sqrt{\omega}$  и имеют максимумы на частотах  $\omega_{\max, 2} \approx \sqrt{2} C_{1,2} / w$ . При  $w = 0.05 \text{ см}$   $\omega_2 \approx 10^5 \text{ с}^{-1}$  для второго звука и  $\omega_1 \approx 10^6 \text{ с}^{-1}$  для первого соответственно.

### 1.3. Обзор состояния работ по оптоакустике сверхтекучего гелия и раствора $\text{He}^3\text{-He}^4$ по стрикционному механизму

Систематическое теоретическое исследование особенностей лазерного возбуждения акустических волн обоих звуков в сверхтекучих жидкостях по стрикционному механизму проведено в цикле работ Салихова с учениками [125-138]. Ниже вкратце изложим эти результаты.

**Сверхтекучий гелий.** Для этой системы с учетом, как стрикционного, так и теплового механизмов, упомянутыми авторами была получена следующая система волновых уравнений для акустических возмущений температуры и давления [125]:

$$\frac{1}{u_1^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - \Delta P' - 2\Gamma_{(1)} \Delta \frac{\partial P'}{\partial t} = \frac{\alpha_T}{C_p} \frac{\partial f}{\partial t} - \left[1 + \frac{\alpha_T \rho_0 T_0 \rho_s \sigma_0}{C_p \rho_n}\right] L \Delta I + \rho_0 \alpha_T u_2^2 \Delta T, \quad (1.3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_2^2} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \Delta T' - 2\Gamma_2 \Delta \frac{\partial T'}{\partial t} &= \frac{1}{\rho C_p u_2^2} \left(1 + \frac{T_0 u_1^2 \alpha_T^2}{C_p}\right) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\alpha_T u_1^2 T_0}{\rho_0 C_p u_2^2} \Delta P - \\ &- \frac{\sigma_0 \rho_s T_0}{\rho_n \rho_0 C_p u_2^2} \left[1 + \frac{\alpha_T \rho_n u_1^2}{\rho_s \sigma_0} \left(1 + \frac{\rho_0 \rho_s T_0 \sigma_0 \alpha_T}{\rho_n C_p}\right)\right] L \Delta I \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Здесь  $L = Y/c$ ,  $Y = \rho_0 (\partial n / \partial \rho)_T$  - параметр оптоакустической связи,  $c$  - скорость света в вакууме. Были рассмотрены следующие четыре случая, когда временной профиль падающего лазерного луча является непрерывным, прямоугольным, гауссовым и гармоническим.

Для случая облучения непрерывным лучом выявлено, что возбуждаемые импульсы являются двухполосными и состоят из двух частей - основной ( $P_1'(t, r), T_2'(t, r)$ ), представляющей обычные, оптоакустические импульсы, и дополнительной ( $P_2'(t, r), T_1'(t, r)$ ), обусловленной взаимодействием различных звуковых мод [130]. Следующие выражения описывают эти импульсы:

$$\frac{P_1'(t, r)}{P_A} = \frac{r^2}{2} \int_0^\infty \left[A_1 + \frac{u_1^2 A_2}{C_1^2 - C_2^2} \cos(C_1 s t)\right] \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad \frac{P_2'(t, r)}{P} = \frac{r^2}{2} \frac{u_1^2 A_3}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \cos(C_2 s t) \varphi(s) J_0(rs) s ds \quad (1.3.3)$$

$$\frac{T_1'(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \int_0^\infty \left[B_1 + \frac{u_2^2 B_2}{C_1^2 - C_2^2} \cos(C_1 s t)\right] \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad \frac{T_2'(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \frac{u_2^2 B_3}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \cos(C_2 s t) \varphi(s) J_0(rs) s ds \quad (1.3.4)$$

Здесь  $P_A = D_1 L P_0 (\pi r^2)^{-1}$ ,  $T_A = D_2 L P_0 (\pi r^2)^{-1}$  - амплитуды возбуждаемых волн,  $\varphi(s) = \exp[-w^2 s^2 / 8]$ ,  $P_0$ ,  $w$  - мощность и радиус перетяжки луча;

$$A_1 = b_1 - \frac{D_2}{D_1} \alpha_T u_2^2 \rho_0^2, \quad A_2 = \frac{A_1 C_2^2}{u_1^2} - 1, \quad A_3 = 1 - \frac{A_1 C_1^2}{u_1^2}, \quad B_1 = 1 - \frac{b D_1}{D_2 \alpha_T \rho_0 u_2^2}, \quad B_2 = B_1 \cdot \frac{C_2^2}{u_2^2} - 1,$$

$$B_3 = 1 - B_1 \cdot \frac{c_1^2}{u_2^2}, \quad D_1 = 1 + \varepsilon_1, \quad D_2 = [1 + \varepsilon_2(1 + \varepsilon_1)]\varepsilon_3, \quad \varepsilon_1 = \alpha_T T_0 \rho_s \sigma_0 / \rho_n C_p, \quad \varepsilon_2 = \alpha_T \rho_n u_1^2 / \rho_s \sigma_0, \quad C_i^2 \approx u_i^2 (1 + W)^{-1},$$

$$\varepsilon_3 = \sigma_0 \rho_s T_0 / \rho_n \rho_0 C_p u_2^2, \quad W = \beta u_2^2 / (u_1^2 - u_2^2) \quad \beta = \alpha_T^2 u_1^2 T_0 / C_p.$$

Обычному импульсу первого звука, распространяющегося со скоростью  $C_1$  соответствует величина  $P_1'(t, r)$ , а  $P_2'(t, r)$  описывает импульс этого же звука, но имеющего скорость  $C_2$ . Величина  $T_2'(t, r)$  соответствует импульсу обычного второго звука, а  $T_1'(t, r)$  этому же импульсу, имеющему скорость  $C_1$ .

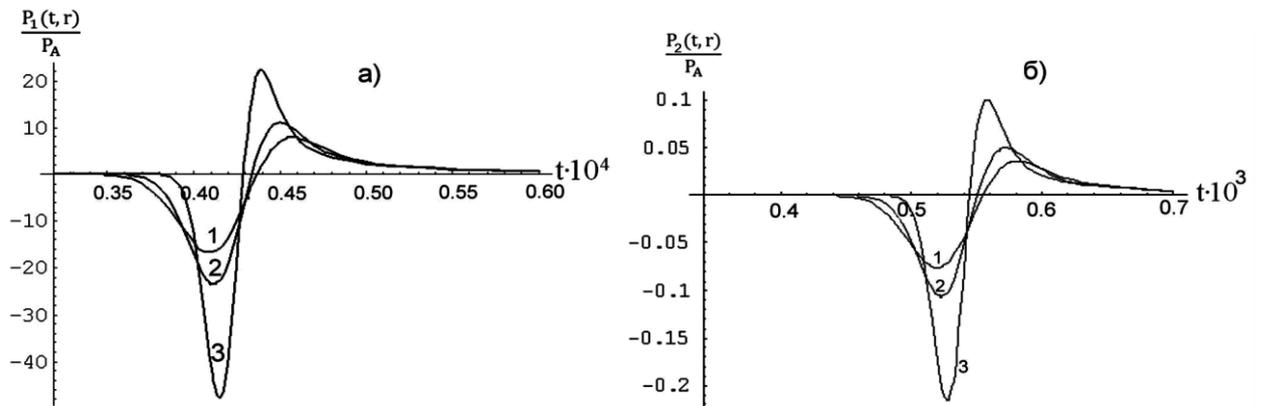


Рис.1.6. Временная зависимость импульсов  $P_1'(t, r)$  (а) и  $P_2'(t, r)$  (б) первого звука в He-II, генерируемых по электрострикционному механизму при  $T_0 = 1.4K$ ,  $r = 0.01m$  и  $w = 1.10^{-3}m$  (кривая 1),  $w = 8.10^{-4}m$  (кривая 2).  $w = 5.10^{-4}m$  (кривая 3).

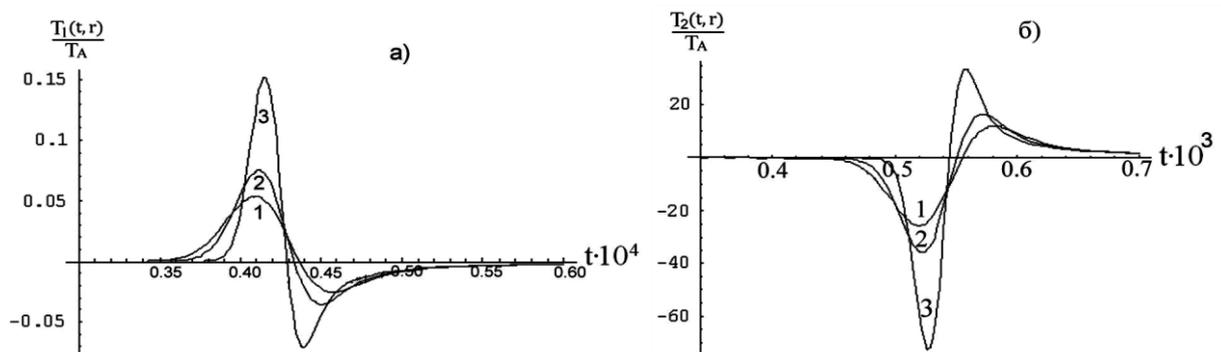


Рис.1.7. Временная зависимость импульсов  $T_1'(t, r)$  (а) и  $T_2'(t, r)$  (б) второго звука в He-II, возбуждаемых по электрострикционному механизму при  $T_0 = 1.4K$ . Параметры соответствуют рис. 1.6.

Результаты численного расчета временного поведения ОА-сигналов для трех значений ( $w=1\text{mm}, 0.8\text{mm}, 0.5\text{mm}$ ) радиуса перетяжки луча приведены на рис. 1.6 (а и б), 1.7 (а и б). Выявлен двухконтурный состав всех импульсов и уменьшение их амплитуды с ростом радиуса перетяжки падающего луча; первые максимумы для всех обнаруженных импульсов ОА-сигналов соответствуют  $ct_1 \approx r/C_1$  и  $t_2 \approx r/C_2$ .

Для случая, когда падающий луч изменяется по гармоническому закону, оказалось, что в системе возбуждаются цилиндрические волны обоих звуков, вид которых описывается выражениями [130]

$$\frac{P'(t, r)}{P_A} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{N_1}{D_1} q_1^2 H_0(q, r) e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{N_2}{D_1} q_2^2 H_0^{(1)}(q_2, r) e^{-\frac{w^2 q_2^2}{8}} \right] e^{-i(\alpha t - 0.5\pi)}, \quad (1.3.5)$$

$$\frac{T'(t, r)}{T_A} = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{N_3}{D_2} q_1^2 H_0(q, r) e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{N_4}{D_2} q_2^2 H_0^{(1)}(q_2, r) e^{-\frac{w^2 q_2^2}{8}} \right] e^{-i(\alpha t - 0.5\pi)}. \quad (1.3.6)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$N_1 = \frac{D_1 C_1^2 - [D_1(1 + \beta) - D_2 \rho_0 \alpha_T u_2^2] u_2^2}{(C_1^2 - C_2^2) C_1^2}, \quad N_3 = \frac{D_2 \tilde{N}_1^2 - (D_2 - \frac{D_1 \beta}{\rho_0 \alpha_T u_2^2}) u_1^2}{(C_1^2 - C_2^2) \tilde{N}_1^2}$$

$$N_2 = \frac{[D_1(1 + \beta) - D_2 \rho_0 \alpha_T u_2^2] u_2^2 - D_1 C_2^2}{(C_1^2 - C_2^2) C_2^2}, \quad N_4 = -\frac{D_2 \tilde{N}_2^2 - (D_2 - \frac{D_1 \beta}{\rho_0 \alpha_T u_2^2}) u_1^2}{(C_1^2 - C_2^2) \tilde{N}_2^2}.$$

Из (1.3.5) и (1.3.6) для случая  $q_2 r \gg 1$ ,  $q_1 r \leq 1$  справедливы выражения:

$$\frac{P'(t, r)}{P_A} = \left[ \frac{0.5\pi N_1 q_1^2}{D_1} H_0(q_1 r) e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{\sqrt{\pi} N_2 q_2^{3/2}}{D_1 \sqrt{2r}} e^{-\frac{w^2 q_2^2}{8} - i\frac{\pi}{4}} \right] e^{-i\alpha t}, \quad (1.3.7)$$

$$\frac{T'(t, r)}{T_A} = \left[ \frac{0.5\pi N_3 q_1^2}{D_2} H_0(q, r) e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{\sqrt{\pi} N_4 q_2^{3/2}}{D_2 \sqrt{2r}} e^{-\frac{w q_2^2}{8} - i\frac{\pi}{4}} \right] e^{-i\alpha t}. \quad (1.3.8)$$

Если одновременно выполняется услови  $q_1 r \gg 1$ , тогда имеют место выражения

$$\frac{P'(t, r)}{P_A} = \left[ \frac{N_1 q_1^{3/2}}{D_1} e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{N_2}{D_1} q_2^{3/2} e^{-\frac{w q_1^2}{8}} \right] \frac{\sqrt{\pi} e^{-i(\alpha t - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2r}}, \quad (1.3.9)$$

$$\frac{T'(t, \omega)}{T_A} = \left[ \frac{N_3 q_1^{3/2}}{D_2} e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{N_4}{D_2} q_2^{3/2} e^{-\frac{w^2 q_2^2}{8}} \right] \frac{\sqrt{\pi} e^{-i(\omega r - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2r}}. \quad (1.3.10)$$

Из (1.3.7)-(1.3.10) видно, что в области низких частот амплитуда генерируемых волн обоих звуков возрастает как  $\sim \omega^{3/2}$ , а затем проходит через максимум и падает экспоненциально. Положения максимумов соответствуют частотам  $\omega_{Max(i)} = \sqrt{6}C_i / w$ , следовательно, области максимумов возбуждаемых волн первого и второго звуков отстоят друг от друга на величину  $C_1 / C_2 \approx 10$ .

Случаи, когда Не-II облучается различными формами импульса падающего излучения также рассмотрены этим авторами. Так, например, для случая, когда Не-II облучается импульсом луча прямоугольного профиля для генерируемых волны первого и второго звуков получены выражения [134,138]

$$P'(t, r) = P_0(t, r) + P_1(t, r) + P_2(t, r), \quad T'(t, r) = T_0(t, r) + T_1(t, r) + T_2(t, r), \quad (1.3.11)$$

$$P'_i(t, r) = P_{i(1)}(t, r) + P_{i(2)}(t, r), \quad T'_i(t, r) = T_{i(1)}(t, r) + T_{i(2)}(t, r). \quad (1.3.12)$$

В (1.3.11) (1.3.12) использованы обозначения

$$\frac{P'_0(t, r)}{P_A} = \frac{A_1 r^2 \varphi(s)}{2} \int_0^\infty [1 - \Theta(t - \tau)] J_0(rs) s ds, \quad \frac{T'_0(t, r)}{T_A} = \frac{B_1 r^2 \varphi(s)}{2} \int_0^\infty [1 - \Theta(t - \tau)] \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad (1.3.13)$$

$$\frac{P'_{1(1)}(t, r)}{P_A} = \frac{r^2}{2} \frac{u_1^2 A_2}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \text{Cos}(C_1 s t) \varphi(s) J_0(rs) s ds,$$

$$\frac{P'_{1(2)}(t, r)}{P_A} = -\frac{r^2}{2} \frac{u_1^2 A_2}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \text{Cos}[C_1 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad (1.1.14)$$

$$\frac{P'_{2(1)}(t, r)}{P_A} = \frac{r^2}{2} \frac{u_1^2 A_3}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \text{Cos}(C_2 s t) \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad \frac{P'_{2(2)}(t, r)}{P_A} = -\frac{r^2}{2} \frac{u_1^2 A_3}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty [\text{Cos} C_2 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad (1.3.15)$$

$$\frac{T'_{1(1)}(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \frac{u_2^2 B_2}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \text{Cos}(C_1 s t) \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad \frac{T'_{1(2)}(t, r)}{T_A} = -\frac{r^2}{2} \frac{u_2^2 B_2}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty [\text{Cos} C_1 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) s ds \quad (1.3.16)$$

$$\frac{T'_{2(1)}(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \frac{u_2^2 B_3}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty \text{Cos}(C_2 s t) \varphi(s) J_0(rs) s ds, \quad \frac{T'_{2(2)}(t, r)}{T_A} = -\frac{r^2}{2} \frac{u_2^2 B_3}{C_1^2 - C_2^2} \int_0^\infty [\text{Cos} C_2 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) s ds \quad (1.3.17)$$

Величины  $P_0(r, t)$  и  $T_0(r, t)$  по профилю соответствуют форме импульса луча и, по существу, являются фоном по отношению к возбуждаемым ОА – импульсам первого и второго звуков, которые состоят из двух частей  $P'_i(t, r)$  и  $T'_i(t, r)$ . Из сравнения выражений для  $P'_i(t, r)$  и  $T'_i(t, r)$  со случаем непрерывного излучения обнаруживается появление слагаемых  $P'_{i(2)}(t, r)$  и  $T'_{i(2)}(t, r)$  с противоположными знаками по отношению к величинам  $P'_{i(1)}(t, r)$  и  $T'_{i(1)}(t, r)$ . Это означает, что при выключении луча появляются те же колебания, которые возбуждались при включении, но с обратным знаком. Авторами проведен численный расчет временных профилей  $P_i(t, r)$  и  $T'_i(t, r)$ , результаты которых иллюстрированы на рис. 1.8 а, б и 1.9 а, б. Из этих рисунков следует, что:

1. Все ОА-импульсы являются двухполюсными, т.е. состоят из фазы разрежения и сжатия для первого звука и фазы охлаждения и нагрева для тепловых волн;

2. Положения импульсов  $P'_{1(1)}(t, r)$ ,  $P'_{2(1)}(t, r)$ ,  $T'_{1(1)}(t, r)$  и  $T'_{2(1)}(t, r)$  не зависят от значения величины  $\tau_L$  и соответствуют  $t_{m(1)} \approx r/C_1$  и  $t_{m(2)} \approx r/C_2$ ;

3. Высокочувствительными к значению величины  $\tau_L$  являются импульсы  $P'_{1(2)}(t, r)$ ,  $P'_{2(2)}(t, r)$ ,  $T'_{1(2)}(t, r)$  и  $T'_{2(2)}(t, r)$ , положения максимумов которых можно определить по  $t_{m(i)} \approx r/C_{1,2} + \tau_L$ ;

4. С уменьшением значения величины  $\tau_L$  происходит сдвиг величин  $P'_{1(2)}(t, r)$  к  $P'_{1(1)}(t, r)$ ,  $P'_{2(2)}(t, r)$  к  $P'_{2(1)}(t, r)$ ,  $T'_{1(2)}(t, r)$  к  $T'_{1(1)}(t, r)$  и  $T'_{2(2)}(t, r)$  к  $T'_{2(1)}(t, r)$ , формируя, таким образом, набор возбуждаемых ОА-импульсов. Также не трудно заметить, что по мере уменьшения  $\tau_L$  происходит наложение  $P'_{1(2)}(t, r)$  с  $P'_{1(1)}(t, r)$  и это приводит к резкому росту ОА- сигнала для  $\tau_1 = 4.10^{-5} c$ , поскольку при этом совпадают фазы сжатия обоих сигналов. Из результатов расчета также обнаруживается уменьшение амплитуды импульсов тепловых волн  $T'_{1(1)}(t, r)$  и  $T'_{1(2)}(t, r)$  при  $T_1 = 1.1K$  по сравнению с  $T_1 = 1.4K$  почти на два порядка, в то время как их фазы противоположны, хотя в этом случае характеристики импульсов  $P'_{1(1)}(t, r)$  и  $P'_{2(1)}(t, r)$  существенно не изменяются.

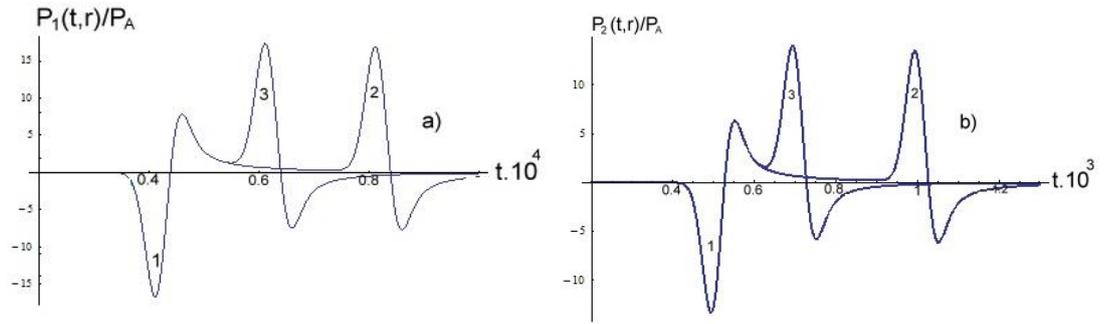


Рис.1.8. Временное поведение импульсов первого звука  $P'_1(t,r)$  (а) и  $P'_2(t,r)$  (б) в He-II при  $T_0 = 1.4K$ ,  $w = 1.10^{-3}m$ ,  $r = 0.01m$ . (а): кривая 1 соответствует  $P'_{1(1)}(t,r)$  и значениям  $\tau_1 = 4.10^{-5}c$ ,  $\tau_2 = 2.10^{-5}c$ ; кривые 2 и 3- функция  $P'_{1(2)}(t,r)$  для тех же значений  $\tau_1 = 4.10^{-5}c$  (2),  $\tau_2 = 2.10^{-5}c$  (3). (б): 1 соответствует  $P'_{2(1)}(t,r)$  и значениям  $\tau_1 = 4.10^{-4}c$ ,  $\tau_2 = 2.10^{-4}c$ ; функции  $P'_{2(2)}(t,r)$  для тех же значений  $\tau_1 = 4.10^{-4}c$  (2) и  $\tau_2 = 2.10^{-4}c$  (3).

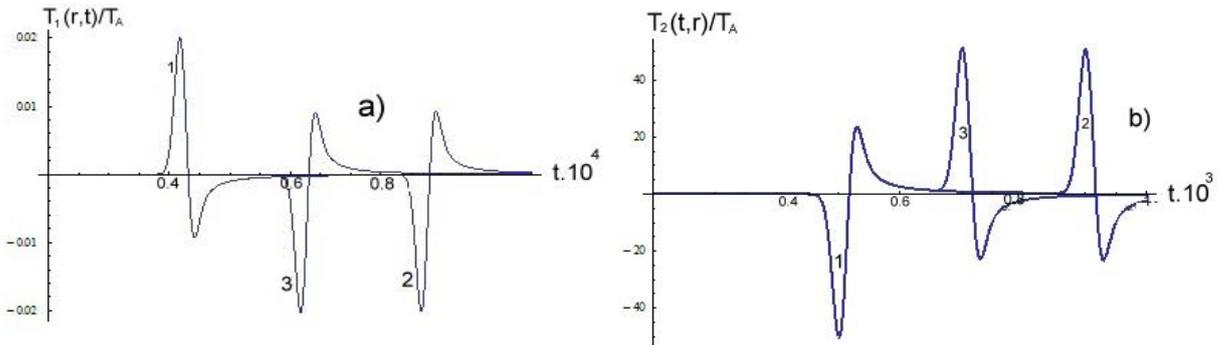


Рис.1.9. Временное поведение импульсов первого звука  $T'_1(t,r)$  (а) и  $T'_2(t,r)$  (б) в He-II при  $T_0 = 1.4K$ . Параметры соответствуют рис.1.8.

Для случая, когда падающий на He-II импульс лазерного луча имеет гауссову форму, получены следующие выражения для импульсов обоих звуков:

$$\frac{P'(\omega, r)}{P_A} = \frac{\pi i}{4} \left[ \frac{N_1}{D_1} w^2 \varphi_1(\omega) q_1^2 H_0(q_1 r) e^{-\frac{w^2 q_1^2}{8}} + \frac{N_2}{D_1} w^2 \varphi_1(\omega) q_2^2 H_0^{(1)}(q_2 r) e^{-\frac{w^2 q_2^2}{8}} \right], \quad (1.3.18)$$

$$\frac{T'(\omega, r)}{T_A} = \frac{i\pi}{4} \left[ \frac{N_3}{D_2} w^2 \varphi_1(\omega) q_1^2 H_0(q_1 r) e^{\frac{-w^2 q_1^2}{8}} + \frac{N_4}{D_2} w^2 \varphi_1(\omega) q_2^2 H_0^{(1)}(q_2 r) e^{\frac{-w^2 q_2^2}{8}} \right]. \quad (1.3.19)$$

Здесь  $\varphi_1(\omega) = \tau_L \exp[-\omega^2 \tau_L^2 / 4]$ . Из выражений (1.3.18) и (1.3.19) нетрудно заметить, что для этого случая в сверхтекучем гелии генерируется спектр цилиндрических волн обоих звуков, каждый из которых представляет собой суперпозицию двух составляющих и распространяющихся в среде соответственно со скоростями первого и второго звуков. Нетрудно заметить, появление дополнительного затухающего фактора  $\exp[-\omega^2 \tau_L^2 / 4]$  в этих выражениях обеспечивает максимальное значение амплитуды этих импульсов на частотах  $\omega_{Max(1)} = \sqrt{3} [w^2 / 2c_1^2 + \tau_L^2]^{-1/2}$ ,  $\omega_{Max(2)} = \sqrt{3} [w^2 / 2c_2^2 + \tau_L^2]^{-1/2}$ .

Для негауссовой формы падающего луча  $\varphi_1(t) = (\alpha t) \exp(-\alpha t)$ , где  $\alpha = 2 / \tau_L$  [99,100]. Тогда для акустических колебаний температуры и давления имеют место следующие выражения:

$$P'(t, r) = \frac{P_A \alpha r^2 u_1^2}{2\sigma_1} \int_0^\infty \{ [e^{-\alpha t} (H_1(s) + H_2(s)t] + M_1(s) \cos(sC_1 t) + M_2(s) \cos(sC_2 t) + \frac{1}{s} [\frac{G_1(s)}{C_1} \sin(sC_1 t) + \frac{G_2(s)}{C_2} \sin(sC_2 t)] \} s^3 \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.20)$$

$$T'(t, r) = \frac{T_A \alpha r^2 u_2^2}{2\sigma_2} \int_0^\infty \{ [e^{-\alpha t} (E_1(s) + E_2(s)t] + M_3(s) \cos(sC_1 t) + M_4(s) \cos(sC_2 t) + \frac{1}{s} [\frac{G_3(s)}{C_1} \sin(sC_1 t) + \frac{G_4(s)}{C_2} \sin(sC_2 t)] \} s^3 \varphi(s) J_0(rs) ds. \quad (1.3.21)$$

В (1.3.20) и (1.3.21) использованы следующие обозначения:

$$H_1 = \Delta_0^{-1} \left\{ \frac{2D_1}{\alpha} [\alpha^4 - s^4 C_1^2 C_2^2] + 2u_2^2 s^2 (D_1 \beta_1 - D_2 \rho_0 \alpha_T u_2^2) \cdot [2\alpha + \frac{s^2}{\alpha} (C_2^2 + C_1^2)] \right\},$$

$$H_2 = \Delta_0^{-1} \left\{ D_1 [s^2 (C_1^2 + C_2^2) \alpha^2 + s^4 C_1^2 C_2^2 + \alpha^4] + (D_1 \beta_1 - D_2 \rho_0 \alpha_T u_2^2) u_2^2 s^2 \cdot [(C_2^2 + C_1^2) s^2 + \alpha^2 + \frac{s^4 C_1^2 C_2^2}{\alpha^2}] \right\},$$

$$E_1 = \Delta_0^{-1} \left\{ \frac{2D_2}{\alpha} [\alpha^4 - s^4 C_1^2 C_2^2] + 2u_1^2 s^2 (D_2 - \frac{\beta D_1}{\rho_0 \alpha_T u_2^2}) \cdot [2\alpha + \frac{s^2}{\alpha} (C_2^2 + C_1^2)] \right\},$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \Delta_0^{-1} \{ D_2 [s^2 (C_1^2 + C_2^2) \alpha^2 + s^4 C_1^2 C_2^2 + \alpha^4] + u_1^2 s^2 (D_2 - \frac{\beta D_1}{\alpha_T \rho_0 u_2^2}) \cdot [(C_2^2 + C_1^2) s^2 + \alpha^2 + \frac{s^4 C_1^2 C_2^2}{\alpha^2}] \}, \\
\Delta_0 &= 2\alpha^4 s^2 (C_2^2 + C_1^2) + 2s^6 C_1^2 C_2^2 (C_2^2 + C_1^2) + \alpha^6 + \frac{C_2^4 C_1^4 s^8}{\alpha^2} + 2s^4 C_1^2 C_2^2 \alpha^2 + \alpha^2 s^4 (C_1^2 + C_2^2)^2, \\
G_1 &= \{ (H_1 \alpha - H_2) C_1^2 - [(D_1 \beta_1 - D_2 \rho_0 \alpha_T u_2^2) u_2^2 \alpha^{-2} - (\alpha H_1 + H_2) s^2 C_1^2 C_2^2 \alpha^{-2}] \} (C_1^2 - C_2^2), \\
G_2 &= \{ [-(H_1 \alpha + H_2) C_2^2 C_1^2 s^2 \alpha^{-2} + (D_1 \beta_1 - D_2 \rho_0 \alpha_T u_2^2) u_2^2 \alpha^{-2}] - (\alpha H_1 - H_2) C_2^2 \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}, \\
G_3 &= \{ (E_1 \alpha - E_2) C_1^2 - [(D_2 - \frac{\beta D_1}{\alpha_T \rho_0 u_2^2}) u_1^2 \alpha^{-2} - (\alpha E_1 + E_2) C_1^2 C_2^2 s^2 \alpha^{-2}] \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}, \\
G_4 &= \{ [-(E_1 \alpha + E_2) C_1^2 C_2^2 s^2 \alpha^{-2} + (D_2 - \frac{\beta D_1}{\alpha_T \rho_0 u_2^2}) u_1^2 \alpha^{-2}] - (\alpha E_1 - E_2) C_2^2 \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}, \\
M_1 &= \{ H_1 [\alpha^2 + s^2 (C_1^2 + C_2^2)] s^{-2} - H_1 C_1^2 - 2\alpha H_2 s^{-2} + \frac{H_1 C_2^2}{s^2 (C_1^2 - C_2^2)} \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}, \\
M_2 &= \{ 2\alpha H_2 s^{-2} - H_1 [\alpha^2 + s^2 (C_1^2 + C_2^2)] s^{-2} + H_1 C_2^2 \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}, \\
M_3 &= \{ E_1 [\alpha^2 + s^2 (C_1^2 + C_2^2)] s^{-2} - E_1 C_1^2 - 2\alpha E_2 s^{-2} \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}, \\
M_4 &= \{ 2\alpha E_2 s^{-2} - E_1 [\alpha^2 + s^2 (C_1^2 + C_2^2)] s^{-2} + E_1 C_2^2 \} (C_1^2 - C_2^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Отличительной чертой этого случая от рассмотренных выше состоит в появлении слагаемых с подинтегральными выражениями  $(sC_1)^{-1} [N_1(s) \sin(sC_1 t)]$  для  $P'_{1(2)}(t, r)$ ,  $[G_2(s) \sin(sC_2 t)] (C_2 s)^{-1}$  для  $P'_{2(2)}(t, r)$ ,  $[G_3(s) \sin(sC_1 t)] (C_1 s)^{-1}$  для  $T'_{1(2)}(t, r)$  и  $[G_4(s) \sin(sC_2 t)] (C_2 s)^{-1}$  для  $T'_{2(2)}(t, r)$ . Оказалось, что фазы этих импульсов противоположны фазам импульсов  $P'_{1(1)}(t, r)$ ,  $P'_{2(1)}(t, r)$ ,  $T'_{1(1)}(t, r)$  и  $T'_{2(1)}(t, r)$ . Следовательно, суммарные импульсы  $P'_i(t, r)$  и  $T'_i(t, r)$  будут определяться как сумма этих частей и для изучения динамики формирования возбуждаемых ОА-импульсов необходимо выполнить численное интегрирование в выражениях (1.3.20) и (1.3.21). Авторам выполнен такой расчет, результаты которых показаны на рис. 1.10 а, б и рис. 1.11 а, б. Оказалось, что все импульсы состоят из фазы разряжения и сжатия для  $P'_i(t, r)$  и нагрева и охлаждения для  $T'_i(t, r)$ , т.е. являются двухполосными. Также выявлено, что уменьшение  $\tau_2 = 1.10^{-5} c$

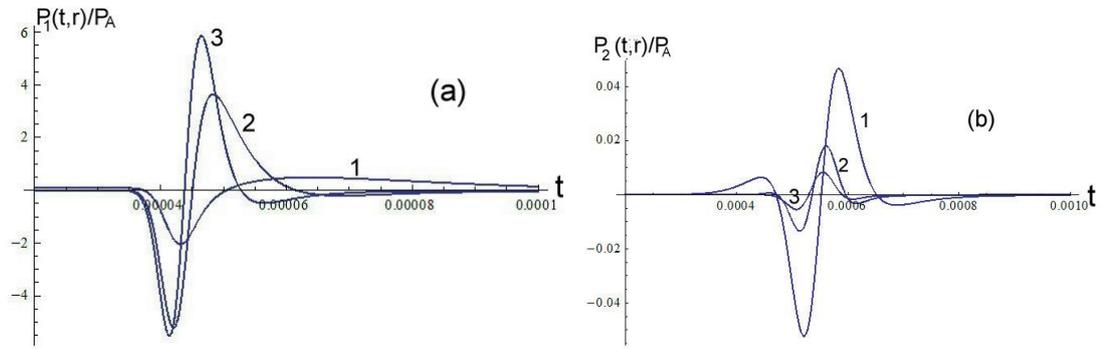


Рис.1.10. Временная зависимость импульсов первого звука  $P_1'(t,r)$  (а) и  $P_2'(t,r)$  (б) в He-II, генерируемых негауссовым импульсом падающего лазерного луча по стрикционному механизму при  $T_0 = 1.4K$ ,  $w = 1.10^{-3} м$ ,  $r = 0.01 м$  и:  $\tau_1 = 5.10^{-5} c$  (1),  $\tau_2 = 1.10^{-5} c$  (2),  $\tau_3 = 5.10^{-6} c$  (3).

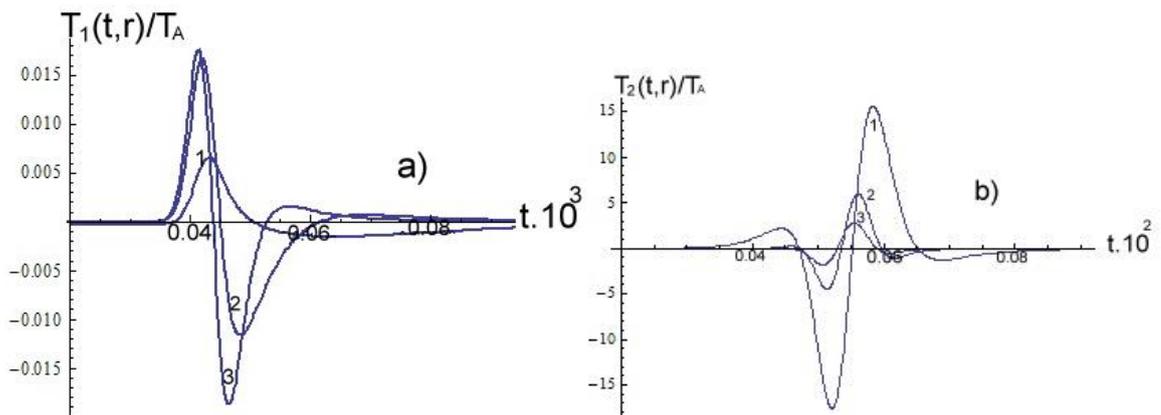


Рис.1.11. Временная зависимость импульсов второго звука  $T_1(t,r)$  (а) и  $T_2(t,r)$  (б) в He-II, возбуждаемых негауссовым импульсом лазерного луча по стрикционному механизму. Параметры соответствуют рис.1.10.

падающего луча приводит к плавному росту  $P_1'(t,r)/P_A$ ,  $T_1'(t,r)/T_A$  и соответствующее спаду  $P_2'(t,r)/P_A$ ,  $T_2'(t,r)/P_A$ , а также сужению и смещению всех импульсов в область малых времён.

**Сверхтекучий раствор  $^3\text{He}-^4\text{He}$ .** Возбуждение ОА-волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  по стрикционному механизму

было разработано в [131, 134], где была получена следующая система взаимосвязанных волновых уравнений для акустического колебания давления и температуры с учетом стрикционного и теплового механизмов:

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - u_1^2 \left(1 + \frac{\rho_s \beta^2}{\rho_n} + \frac{\beta u_2^2 \alpha_T}{\bar{\sigma}}\right) \Delta P' + \frac{\rho_0 \beta u_1^2 u_2^2 C_p}{T_0 \bar{\sigma}} \Delta T' = -\frac{\beta u_1^2}{T_0 \sigma_0} \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - 1\right) u_1^2 L \Delta I, \quad (1.3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - u_2^2 \left(1 - \frac{\beta u_1^2 \alpha_T}{\bar{\sigma}}\right) \Delta T' - \frac{T_0}{\rho_0 C_p} [(u_1^2 - u_2^2) \alpha_T + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 \alpha_T u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \bar{\sigma} \beta + \\ + \frac{\beta \alpha_T^2 u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}}] \Delta P' = \frac{1}{\rho_0 C_p \sigma_0} (\bar{\sigma} - \beta u_1^2 \alpha_T) \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{T_0}{\rho_0 C_p} \left[ \left(\frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - 1\right) \alpha_T u_1^2 - \frac{\bar{\sigma} \rho_s}{\rho_n} \right] L \Delta I \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Выражения [130]

$$P'(t, r) = P_0(t, r) + P_1'(t, r) + P_2'(t, r), \quad T'(t, r) = T_0(t, r) + T_1'(t, r) + T_2'(t, r),$$

в которых

$$\frac{P_0(t, r)}{P_A} = \frac{u_2^2 r^2}{2C_1^2 C_2^2} \int_0^\infty \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad \frac{T_0(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \int_0^\infty \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.24)$$

$$\frac{P_1'(t, r)}{P_A} = -\frac{r^2 u_1^2}{2(C_2^2 - C_1^2)} \left[ \frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - 1 + \frac{u_2^2}{C_1^2} \right] \int_0^\infty \cos(C_1 st) \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.25)$$

$$\frac{P_2'(t, r)}{P_A} = \frac{r^2 u_1^2}{2(C_2^2 - C_1^2)} \left[ \frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - 1 + \frac{u_2^2}{C_2^2} \int_0^\infty \{ \cos(C_2 st) \} \varphi(s) J_0(rs) ds \right], \quad (1.3.26)$$

$$\frac{T_1'(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \frac{C_1^2 C_2^2}{X_2} \left[ \frac{X_1 - X_2 C_1^{-2}}{C_2^2 - C_1^2} \int_0^\infty \cos(C_1 st) \varphi(s) J_0(rs) ds \right], \quad (1.3.27)$$

$$\frac{T_2'(t, r)}{T_A} = \frac{r^2}{2} \frac{C_1^2 C_2^2}{X_2} \frac{X_1 + X_2 C_2^{-2}}{C_2^2 - C_1^2} \int_0^\infty \cos(C_2 st) \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.28)$$

соответствуют возбуждаемым по электрострикционному механизму импульсам обоих звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , когда система непрерывно облучается лазерным лучом. Здесь

$$X_1 = \left(1 - \frac{\rho_s \beta}{\rho_n}\right) \alpha_T u_1^2 + \frac{\bar{\sigma} \rho_s}{\rho_n}, \quad X_2 = u_1^2 \left[ \frac{\bar{\sigma} \rho_s}{\rho_n} (1 + \beta) + u_2^2 \alpha_T \right],$$

а амплитуды возбуждаемых ОА-сигналов определены выражениями

$$P_A = \frac{L P_0}{\pi r^2}, \quad T_A = \frac{T_0 L P_0 X_2}{\pi C_1^2 C_2^2 \rho_0 C_p r^2}.$$

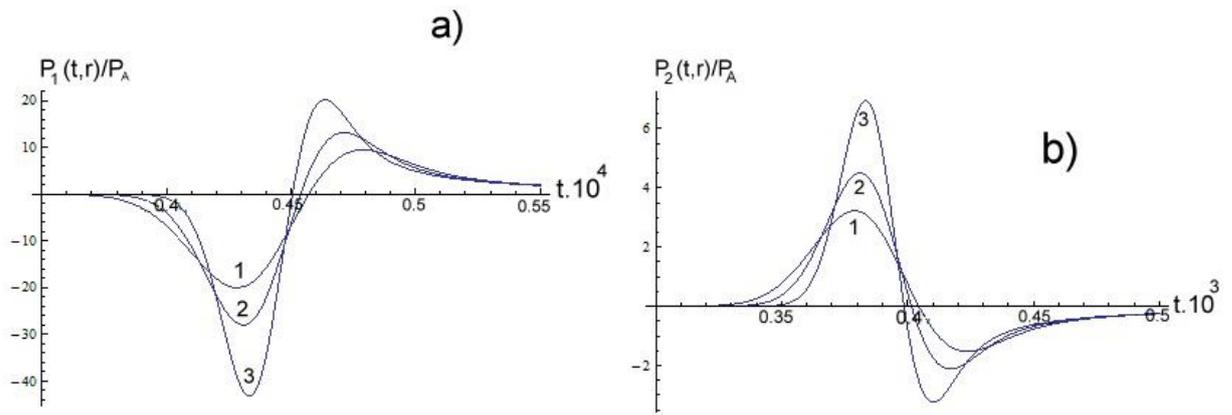


Рис.1.12. Временная зависимость импульсов  $P_1'(t,r)$  (a) и  $P_2'(t,r)$  (b), возбуждаемых по стрикционному механизму в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  при  $c=0.2$ ,  $T_0=1\text{K}$  их значениях  $w_1=10^{-3}\text{m}$  (кривые 1),  $w_2=8\cdot 10^{-4}\text{m}$  (кривые 2),  $w_3=6\cdot 10^{-4}\text{m}$  (кривые 3).

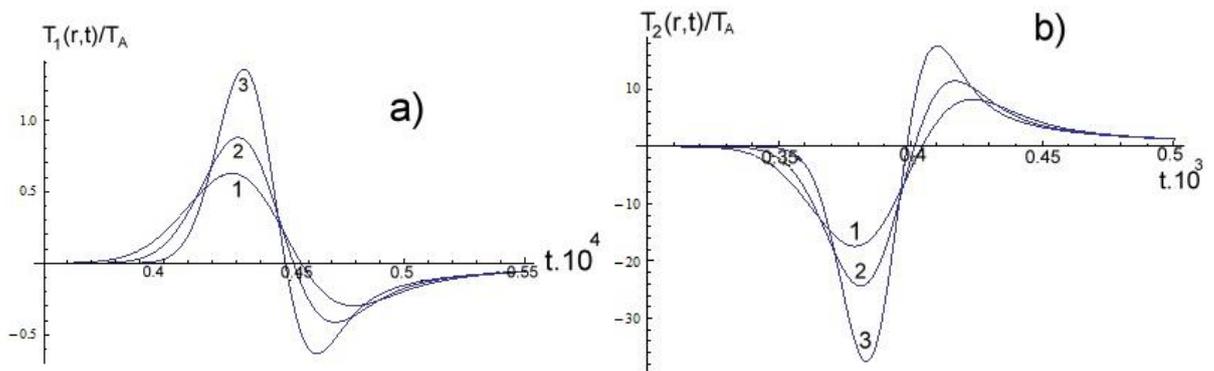


Рис.1.13. Временная зависимость импульсов  $T_1'(t,r)$  и  $T_2'(t,r)$ . Параметры согласно рис. 1.3.12.

Путем численного интегрирования авторы установили временное поведение этих импульсов и зависимости их параметров от характеристик среды и параметров луча ( $r=10^{-2}\text{m}$ ,  $w_1=10^{-3}\text{m}$ ,  $w_2=8\cdot 10^{-4}\text{m}$ ,  $w_3=6\cdot 10^{-4}\text{m}$ ). Результаты расчётов показаны на рис.1.12 и 1.13. Из графиков видно, что положения максимумов значений величин  $P_1'(t,r)$  и  $T_1'(t,r)$  соответствует  $t_{\text{max}} \approx r/C_1$ , а  $P_2'(t,r)$  и  $T_2'(t,r)$  - значению  $t_{\text{max}} \approx r/C_2$ .

Этим же авторами также был рассмотрен случай, когда сверхтекучий раствор облучается импульсом прямоугольной формы лазерного луча, т.е. когда  $\varphi_1(t) = \Theta(t) - \Theta(t - \tau)$  [133]. Полученные выражения для колебаний температуры и давления можно написать в виде

$$P'(t, r) = P_0(t, r) + P_1(t, r) + P_2(t, r), \quad P'_i(t, r) = P_{i(1)}(t, r) + P_{i(2)}(t, r), \quad T'(t, r) = T_0(t, r) + T_1(t, r) + T_2(t, r), \\ T'_i(t, r) = T_{i(1)}(t, r) + T_{i(2)}(t, r),$$

где величины  $P'_0(r, t)$  и  $T'_0(r, t)$  воспроизводят форму импульса луча и считается как фон, а другие величины имеют вид

$$P'_{1(1)}(t, r) = \frac{P_A u_1^2 r^2}{2(C_2^2 - C_1^2)} \cdot \left[ \frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - 1 + \frac{u_2^2}{C_1^2} \right] \int_0^\infty \cos(C_1 s t) \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.29)$$

$$P'_{1(2)}(t, r) = -\frac{P_A u_1^2 r^2}{2(C_2^2 - C_1^2)} \cdot \left[ \frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - 1 + \frac{u_2^2}{C_1^2} \right] \int_0^\infty \cos[C_1 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.30)$$

$$P'_{2(1)}(t, r) = \frac{P_A u_1^2 r^2}{2(C_2^2 - C_1^2)} \cdot \left[ 1 - \frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - \frac{u_2^2}{C_2^2} \right] \int_0^\infty \cos(C_2 s t) \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.31)$$

$$P'_{2(2)}(t, r) = -\frac{P_A u_1^2 r^2}{2(C_2^2 - C_1^2)} \cdot \left[ 1 - \frac{\rho_s \beta}{\rho_n} - \frac{u_2^2}{C_2^2} \right] \int_0^\infty \cos[C_2 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.32)$$

$$T'_{1(1)}(t, r) = \frac{T_A r^2}{2} \cdot \frac{C_1^2 C_2^2 M_3}{X_2} \int_0^\infty \cos(C_1 s t) \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.33)$$

$$T'_{1(2)}(t, r) = -\frac{T_A r^2}{2} \cdot \frac{C_1^2 C_2^2 M_3}{X_2} \int_0^\infty \cos[C_1 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.34)$$

$$T'_{2(1)}(t, r) = \frac{T_A r^2}{2} \cdot \frac{C_1^2 C_2^2 M_4}{X_2} \int_0^\infty \cos(C_2 s t) \varphi(s) J_0(rs) ds, \quad (1.3.35)$$

$$T'_{2(2)}(t, r) = -\frac{T_A r^2}{2} \cdot \frac{C_1^2 C_2^2 M_4}{X_2} \int_0^\infty \cos[C_2 s(t - \tau_L)] \varphi(s) J_0(rs) ds. \quad (1.3.36)$$

Нетрудно заметить, что все эти выражения состоят из двух составляющих, то есть из величин  $P'_1(t, r)$ ,  $P'_2(t, r)$ ,  $T_1(t, r)$  и  $T_2(t, r)$   $T'_1(t, r)$ . Между тем, каждый из составляющих состоит из частей, вызванных включением и выключением луча, то есть как  $P'_i(t, r) = P_{i(1)}(t, r) + P_{i(2)}(t, r)$ ,  $T'_i(t, r) = T_{i(1)}(t, r) + T_{i(2)}(t, r)$ , а фазы импульсов  $P'_{i(2)}(t, r)$ ,  $T'_{i(2)}(t, r)$  имеют обратный знак по отношению к фа-

зам  $P'_{i(1)}(t, r)$ ,  $T'_{i(1)}(t, r)$ . Численные расчеты позволили выявить все особенности формирования ОА-импульсов для рассматриваемых случаев.

Случай, когда интенсивность падающего в раствор  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  лазерного луча изменяется по гармоническому закону, был рассмотрен в [134]. Обнаружилось, что в этом случае будут генерироваться цилиндрические волны обоих звуков, параметры которых описываются выражениями

$$\frac{P'(t, r)}{P_A} = \frac{\pi w^2}{4} \{ R_1 q_1^2 H_0^{(1)}(q_1 r) e^{-w^2 q_1^2 / 8} + R_2 q_2^2 H_0^{(1)}(q_2 r) e^{-w^2 q_2^2 / 8} \} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (1.3.37)$$

$$\frac{T'(t, r)}{T_A} = \frac{\pi C_2^2 w^2}{4} \{ q_1^2 H_0^{(1)}(q_1 r) e^{-w^2 q_1^2 / 8} + \frac{R_4}{R_3} q_2^2 H_0^{(1)}(q_2 r) e^{-w^2 q_2^2 / 8} \} e^{-i(\omega t - \frac{\pi}{2})}, \quad (1.3.38)$$

где

$$R_1 = (1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta) - u_2^2 C_1^{-2}, \quad R_3 = [(\frac{\rho_s}{\rho_n} \beta - 1) u_1^2 \alpha_T - \frac{\rho_s \bar{\sigma}}{\rho_n}] + u_1^2 C_1^{-2} [\frac{\rho_s \bar{\sigma}}{\rho_n} (1 + \beta) + u_2^2 \alpha_T],$$

$$R_2 = u_2^2 C_2^{-2} + (\frac{\rho_s}{\rho_n} \beta - 1), \quad R_4 = [\frac{\rho_s \bar{\sigma}}{\rho_n} - (\frac{\rho_s}{\rho_n} \beta - 1) u_1^2 \alpha_T] - u_1^2 C_2^{-2} [\frac{\rho_s \bar{\sigma}}{\rho_n} (1 + \beta) + u_2^2 \alpha_T].$$

Здесь  $P_A = LP_0 (\pi w^2)^{-1} u_1^2 (C_1^2 - C_2^2)^{-1}$ ,  $T_A = T_0 LP_0 R_3 [\pi w^2 \rho C_p C_2^2 (C_1^2 - C_2^2)]^{-1}$  - амплитуды возбуждаемых волн. Из вида выражений (1.3.37) и (1.3.38) видно, что в этом случае в сверхтекучем гелии будут генерироваться цилиндрические волны обоих звуков, каждый из которых состоит из двух частей. Также из выражений (1.3.37)-(1.3.38) для случаев а)  $q_2 r \gg 1$ ,  $q_1 r \leq 1$  и б)  $q_2 r \gg 1$ ,  $q_1 r \gg 1$  получены простые выражения для возбуждаемых импульсов.

Теоретическое исследование вероятности возбуждения обоих звуков гауссовым импульсом падающего луча проведено в [134]. Было показано, что и в этом случае в сверхтекучем растворе  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  будет возбуждаться спектр цилиндрических волн первого и второго звуков, которые состоят из двух составляющих - быстрых и медленных, описываемых выражениями

$$\frac{P'(\omega, r)}{P_A} = \frac{\pi w^2 \varphi_1(\omega)}{4} \{ R_1 q_1^2 H_0^{(1)}(q_1 r) e^{-w^2 q_1^2 / 8} + R_2 q_2^2 H_0^{(1)}(q_2 r) e^{-w^2 q_2^2 / 8} \} e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad (1.3.39)$$

$$\frac{T'(t, r)}{T_A} = \frac{\pi C_2^2 w^2 \varphi_1(\omega)}{4} \{ q_1^2 H_0^{(1)}(q_1 r) e^{-w^2 q_1^2 / 8} + \frac{R_4}{R_3} q_2^2 H_0^{(1)}(q_2 r) e^{-w^2 q_2^2 / 8} \} e^{i\frac{\pi}{2}}. \quad (1.3.40)$$

Очевидно, что множитель  $\varphi_1(\omega)$  в этих выражениях является весьма важным, поскольку определяет частотную зависимость амплитуд генерируемых волн в волновой зоне. Из анализа выражений (1.3.39) и (1.3.40) для двух случаев, имеющих место в эксперименте, авторы заключают, что частоты, которые соответствуют максимумам амплитуды возбуждаемых ОА- волн обоих звуков, существенным образом зависят от длительности импульса луча.

**Постановка задач исследования.** Из представленного обзора по лазерной генерации акустических волн обоих звуков в сверхтекучих жидкостях следует, что к настоящему времени для сверхтекучего раствора  $^3\text{He}-^4\text{He}$  оказывается теоретически не исследованным целый ряд задач, решение которых и составляет цель настоящей диссертационной работы.

В связи с этим нами были сформулированы следующие три основных задач, охватывающих главные особенности и закономерности формирования ОА-импульсов в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$ :

1. Разработка теории возбуждения ОА- импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$  для трех форм (прямоугольной, гауссовой и негауссовой) падающего лазерного луча, имеющих место в эксперименте;

2. Вывод частотного и временного вида передаточных функций оптоакустических сигналов первого и второго звуков для случаев, когда сверхтекучий раствор  $^3\text{He}-^4\text{He}$  имеет твердую и мягкую границу;

3. Теоретическое описание особенностей возбуждения фотакустического сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}-^4\text{He}$  в буферный газ при газомикрофонном способе регистрации и расчет поля температуры в ФА-камере.

## **ГЛАВА II. ЛАЗЕРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ ОПТОАКУСТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ В СВЕРХТЕКУЧЕМ РАСТВОРЕ $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$**

Из изложенного обзора мы пришли к выводу, что методы лазерной оптоакустики являются весьма информативными и позволяют экспериментально исследовать акустические, теплофизические, оптические и кинетические свойства различных фаз конденсированных сред, в том числе квантовых жидкостей. Особенности возбуждения ОА-сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии по тепловому механизму теретически были исследованы в [102-121]. В [105] впервые была разработана теория генерации волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Однако вопрос о генерации ОА- импульсов первого и второго звуков по тепловому механизму при различных формах импульса лазерного луча, длина волны которого совпадает с областью поглощения раствора, оказался не исследованным. Решение этих задач и является целью настоящей главы работы [139-149].

### **2.1. Возбуждение оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ прямоугольным импульсом лазерного излучения**

Предположим, что сверхтекучим раствором  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$  заполнена цилиндрическая кювета и лазерный луч распространяется вдоль ее оси, а оптический коэффициент поглощения системы мал. Малость оптического коэффициента поглощения необходима для предотвращения нежелательного нагрева среды. Для сверхтекучих жидкостей это означает переход жидкости, как минимум, в нормальную (не сверхтекучую) фазу или состояние пара, поскольку температурный диапазон существования сверхтекучих фаз ограничен достаточно малым интервалом температур ( $\sim 1\text{K}$ ).

Будем исходить из следующей линеаризованной системы волновых

уравнений для акустического возмущения давления  $P'(r,t)$  и температуры  $T'(r,t)$  [105]:

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - u_1^2 \left(1 + \frac{\rho_s \beta^2}{\rho_n} + \frac{\beta u_2^2 \alpha_T}{\bar{\sigma}}\right) \Delta P' + \frac{\rho_0 \beta u_1^2 u_2^2 C_p}{T_0 \bar{\sigma}} \Delta T' = - \frac{\beta u_1^2}{T_0 \sigma_0} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - u_2^2 \left(1 - \frac{\beta u_1^2 \alpha_T}{\bar{\sigma}}\right) \Delta T' - \frac{T_0}{\rho_0 C_p} \left[ (u_1^2 - u_2^2) \alpha_T + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 \alpha_T u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \bar{\sigma} \beta + \right. \\ \left. + \frac{\beta \alpha_T^2 u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}} \right] \Delta P' = \frac{1}{\rho_0 C_p \sigma_0} (\bar{\sigma} - \beta u_1^2 \alpha_T) \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}, \quad (2.1.2)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  - скорости первого и второго звуков,  $\sigma_0$  и  $c_0$  - равновесные значения удельной энтропии и концентрации,  $\rho_0 = \rho_s + \rho_n$ ,  $\rho_s, \rho_n$  - плотность сверхтекучей и нормальной компонент соответственно;  $f(r,t)$  - тепловой источник, обусловленный поглощением

$$f(r,t) = \frac{2\alpha I_0}{\pi w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}} \varphi_2(t), \quad \beta = \frac{\bar{\sigma}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{Pc} \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma}\right)_{Pc} + \frac{c_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c}\right)_{PT},$$

$\varphi_2(t)$  - функция, описывающая временное распределение лазерного импульса,  $I_0$ ,  $w$  - мощность и радиус перетяжки луча соответственно,  $\bar{\sigma} = \sigma_0 - c_0 \partial \sigma / \partial c$   
 $\alpha = \alpha_1 c_0 + (1 + c_0) \alpha_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - парциальные оптические коэффициенты поглощения изотопов  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$  соответственно. Для прямоугольной формы лазерного луча справедливо равенство

$$\varphi_2(t) = [\Theta(t) - \Theta(t - \tau_L)], \quad (2.1.3)$$

где  $\Theta(t)$  и  $\Theta(t - \tau_L)$  - единичные функции Хевисайда,  $\tau_L$  - длительность импульс луча.

В (2.1.1)-(2.1.2) выполнив преобразования Ханкеля по  $r$  и Лапласа по  $t$

$$\tilde{\psi}(p,s) = \int_0^\infty e^{-pt} \left[ \int_0^\infty \psi(t,r) J_0(rs) r dr \right] dt,$$

где  $J_0(rs)$  - функция Бесселя,  $\psi(t,r) = P'(t,r)$  и  $T'(t,r)$ , получим

$$A_{11} \tilde{P}(p,s) + A_{12} \tilde{T}(p,s) = - \frac{\alpha I_0 \beta u_1^2 f(s) \varphi_2(p)}{2\pi T_0 \sigma_0}, \quad (2.1.4)$$

$$A_{21} \tilde{P}(p,s) + A_{22} \tilde{T}(p,s) = \frac{\alpha I_0 f(s) \varphi_2(p)}{2\pi \rho_0 \sigma_0 C_p} (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2). \quad (2.1.5)$$

Здесь

$$\varphi_2(p) = 1 - \exp(-p\tau_L), \quad f(s) = \exp(-w^2 s^2 / 8),$$

$$A_{11} = p^2 + s^2 u_1^2 \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 + \frac{\alpha_T \beta u_2^2}{\bar{\sigma}}\right), \quad A_{12} = -\frac{\rho_0 \beta C_P}{T_0 \bar{\sigma}} u_1^2 u_2^2 s^2,$$

$$A_{21} = \frac{T_0 s^2}{\rho_0 C_P} \left[ \alpha_T (u_1^2 - u_2^2) + \frac{\rho_s}{\rho_n} \alpha_T \beta^2 u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta \bar{\sigma} + \frac{\beta \alpha_T u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}} \right], \quad A_{22} = p^2 + s^2 u_2^2 \left(1 - \frac{\alpha_T \beta u_1^2}{\bar{\sigma}}\right).$$

Условия совместности уравнений (2.1.4) и (2.1.5) приводит к дисперсионному уравнению

$$p^4 + p^2 s^2 (u_1^2 + u_2^2 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 u_1^2) + s^4 u_1^2 u_2^2 = 0,$$

корнями, которой являются  $p_{1,2}^2 = -s^2 C_{1,2}^2$ . Здесь

$$C_1^2 = u_1^2 \left(1 + \frac{u_1^2}{u_1^2 - u_2^2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2\right), \quad (2.1.6)$$

$$C_2^2 = u_2^2 \left(1 + \frac{u_1^2}{u_1^2 - u_2^2} \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2\right)^{-1}. \quad (2.1.7)$$

Тогда решение алгебраической системы уравнений (2.1.4)-(2.1.5) имеет вид

$$\tilde{P}(p, s) = -\frac{\alpha I_0 \beta u_1^2}{2\pi \Gamma_0 \sigma_0} \frac{f_0(s) \varphi_2(p) p^2}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)}, \quad (2.1.8)$$

$$\tilde{T}(p, s) = \frac{\alpha I_0 f_0(s) \varphi_2(p)}{2\pi \rho_0 \sigma_0 C_P} \frac{p^2 (\bar{\sigma} - \alpha_T \beta u_1^2) + \bar{\sigma} s^2 u_1^2}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)}. \quad (2.1.9)$$

Чтобы получить необходимые выражения для измеряемых величин  $P'(r, t)$  и  $T'(r, t)$  необходимо последовательно выполнить обратные преобразования Лапласа и Ханкеля в (2.1.8) и (2.1.9). Выполнив обратное Лаплас-преобразование, из (2.1.8) и (2.1.9) получаем

$$P'(t, r) = -\frac{\alpha I_0 \beta u_1^2 C_1}{2\pi \Gamma_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} \{ [\sin(s C_1 t) - \sin(s C_1 (t - \tau_L))] - \frac{C_2}{C_1} [\sin(s C_2 t) - \sin(s C_2 (t - \tau_L))] \} f(s) s^{-1}, \quad (2.1.10)$$

$$T'(t, r) = -\frac{\alpha I_0 \bar{\sigma}}{2\pi\rho_0 C_p \sigma_0 C_2} \{(1 + G_2)[\sin(sC_2 t) - \sin(sC_2(t - \tau_1))] - G_1 \frac{C_2}{C_1} [\sin(sC_1 t) - \sin(sC_1(t - \tau_L))]\} f(s) s^{-1} . \quad (2.1.11)$$

Здесь использованы обозначения

$$G_1 = \frac{u_1^2 (\alpha_T \beta C_1^2 - \bar{\sigma} \tilde{\gamma})}{\sigma(C_1^2 - C_2^2)}, \quad G_2 = \frac{u_1^2 (\alpha_T \beta C_2^2 - \bar{\sigma} \tilde{\gamma})}{\sigma(C_1^2 - C_2^2)},$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{u_1^2}{(u_1^2 - u_2^2)} \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 = \frac{C_1^2 - u_1^2}{u_1^2} = \frac{u_2^2 - C_2^2}{C_2^2} > 0.$$

Теперь, полученные выражения от обратного преобразования Ханкеля в выражениях (2.1.10) и (2.1.11), представим как суперпозицию отдельных составляющих вида

$$P'(t, r) = P'_1(t, r) + P'_2(t, r), \quad T'(t, r) = T'_{1(1)}(t, r) + T'_{2(1)}(t, r),$$

$$P'_i(t, r) = P'_{i(1)}(t, r) + P'_{i(2)}(t, r), \quad T'_i(t, r) = T'_{i(1)}(t, r) + T'_{i(2)}(t, r),$$

где функции  $P'_{i(1)}(t, r)$ ,  $P'_{i(2)}(t, r)$ ,  $T'_{i(1)}(t, r)$  и  $T'_{i(2)}(t, r)$  определены выражениями

$$P'_{1(1)}(t, r)/P_A = -\int_0^\infty \sin(C_1 t y/r) J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.12)$$

$$P'_{1(2)}(t, r)/P_A = \int_0^\infty \sin(y C_1(t - \tau_1)/r) J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.13)$$

$$P'_{2(1)}(t, r)/P_A = \frac{C_2}{C_1} \int_0^\infty \sin(C_2 t y/r) J_0(y) f(r/y) dy, \quad (2.1.14)$$

$$P'_{2(2)}(t, r)/P_A = -\frac{C_2}{C_1} \int_0^\infty \sin(C_2(t - \tau_L) y/r) J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.15)$$

$$T'_{1(1)}(t, r)/T_A = \frac{G_1 C_2}{C_1} \int_0^\infty \sin(C_1 t y/r) J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.16)$$

$$T'_{1(2)}(t, r) = -\frac{G_1 C_2}{C_1} \int_0^\infty \sin[C_1(t - \tau_L) y/r] J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.17)$$

$$T'_{2(1)}(t, r)/T_A = -(1 + G_2) \int_0^\infty \sin(C_2 t y/r) J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.18)$$

$$T'_{2(2)}(t, r)/T_A = (1 + G_2) \int_0^\infty \sin[C_2(t - \tau_L) y/r] J_0(y) f(y/r) dy, \quad (2.1.19)$$

а амплитуды соответствующих сигналов определяются формулами

$$P_A = \frac{\alpha I_0 \beta u_1^2 C_1}{T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2) r}, \quad T_A = \frac{\alpha I_0 \bar{\sigma}}{\rho_0 C_p \sigma_0 C_2 r}.$$

Из выражений (2.1.12)- (2.1.19), следует, что все импульсы  $P_i'(t, r)$  и  $T_i'(t, r)$  состоят из двух составляющих: при включении возбуждаются  $P_{i(1)}'(t, r)$  и  $T_{i(1)}'(t, r)$ , а при выключении  $P_{i(2)}'(t, r)$  и  $T_{i(2)}'(t, r)$ , которые имеют обратную фазу. Благодаря этому возбуждаются двухполюсные импульсы ОА- сигнала. Между тем, из этих же выражений для  $P_i'(t, r)$  и  $T_i'(t, r)$  следует, что, как при включении, так и при выключении одновременно генерируются по два импульса первого звука, распространяющихся со скоростями  $C_2$  («медленный» первый звук) и  $C_1$  (обычный первый звук) и возбуждаются два импульса второго звука, распространяющихся со скоростями  $C_1$  («быстрый» второй звук) и  $C_2$  (обычный второй звук), соответственно. Очевидно, что при  $\tau_L \rightarrow 0$  величины  $P_i(t, r) = P_{i(1)}(t, r) + P_{i(2)}(t, r)$  и  $T_i(t, r) = T_{i(1)}(t, r) + T_{i(2)}(t, r)$  стремятся к нулю. Следовательно, генерация этих волн происходит в конкуренции волн, генерируемых при включении и выключении. Тогда, очевидно, необходимо провести численные расчеты их амплитуд для различных значений величины  $\tau_L$ , дабы определить окончательную форму возбуждаемых волн.

Результаты такого расчета, проведенного для значений  $r = 10^{-2} m$ ,  $w = 5 \cdot 10^{-4} m$ ,  $\alpha = 100 m^{-1}$ ,  $T = 1,5 K$ ,  $C_0 = 0,25$ ,  $\alpha_T = -1,2 \times 10^{-3} K^{-1}$ ,  $\beta = -0,3$ ,  $u_1 = 220 m/c$ ,  $u_2 = 20 m/c$ ,  $\rho_0 = 120 kg/m^3$ ,  $\rho_s = 90 kg/m^3$ ,  $\rho_n = 30 kg/m^3$ ,  $C_p = 3 \cdot 10^3 Дж/kg.K$  [7],  $\sigma_0 = 2,3 \times 10^3 Дж/kg.K$ ,  $\bar{\sigma} = 620 Дж/kg.K$  [150] показаны на рис. 2.1 и 2.2. Из этих рисунков следует двухполюсность всех сформировавшихся ОА- импульсов, амплитуды которых по мере уменьшения длительности импульса  $\tau_L$  луча уменьшаются и происходит их смещение в область малых времен. Очевидно, что уменьшение амплитуды ОА- сигналов связано с уменьшением энергии луча, когда мощность остаётся фиксированной.

Полученные результаты указывают на то, что величины амплитуд возбуждаемых импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе

$^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  являются вполне измеряемыми и их экспериментальная оценка позволит выполнить измерение как оптических, так и акустических параметров системы в широкой области изменения температуры и концентрации.

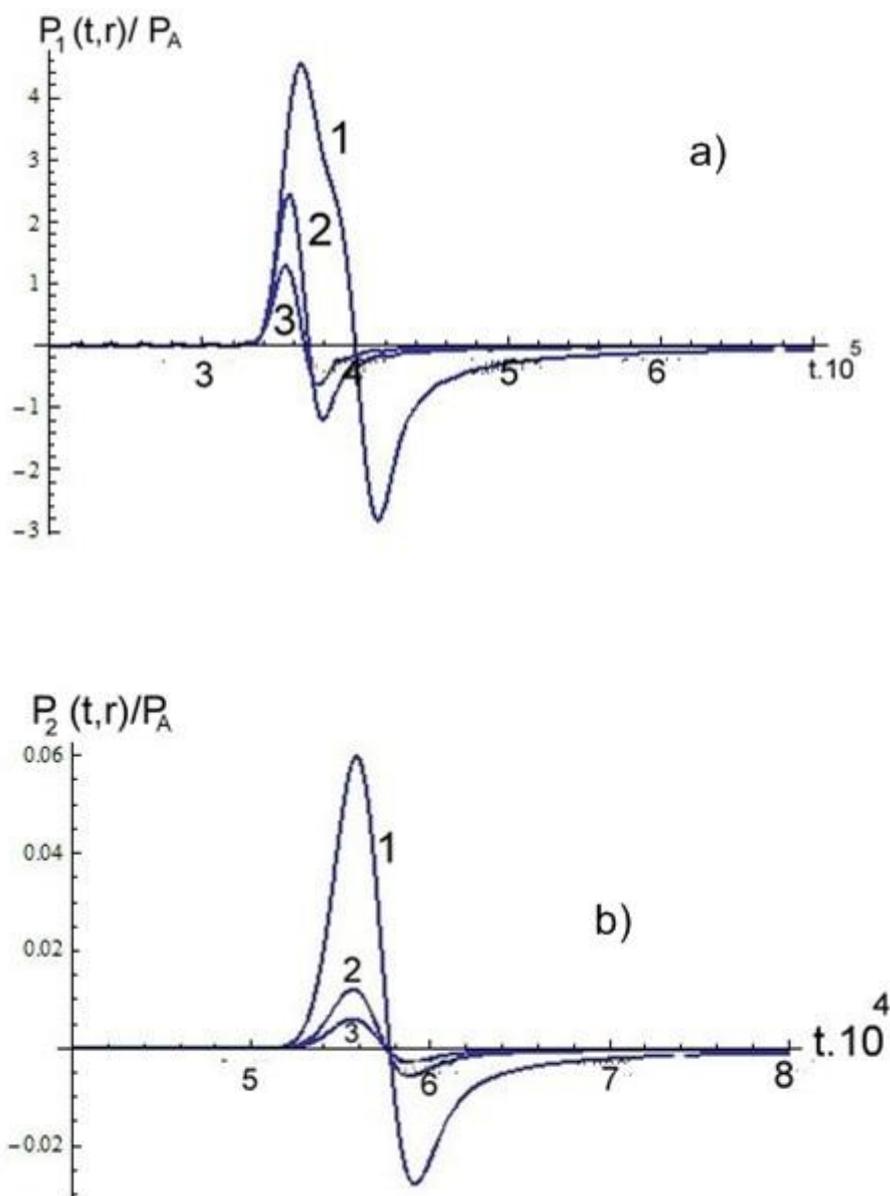


Рис. 2.1. Зависимость величины  $P_1/P_A$  (а) и  $P_2/P_A$  (б) от времени при  $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ c}$  (кривая 1),  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ c}$  (кривая 2),  $\tau_3 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ c}$  (кривая 3).

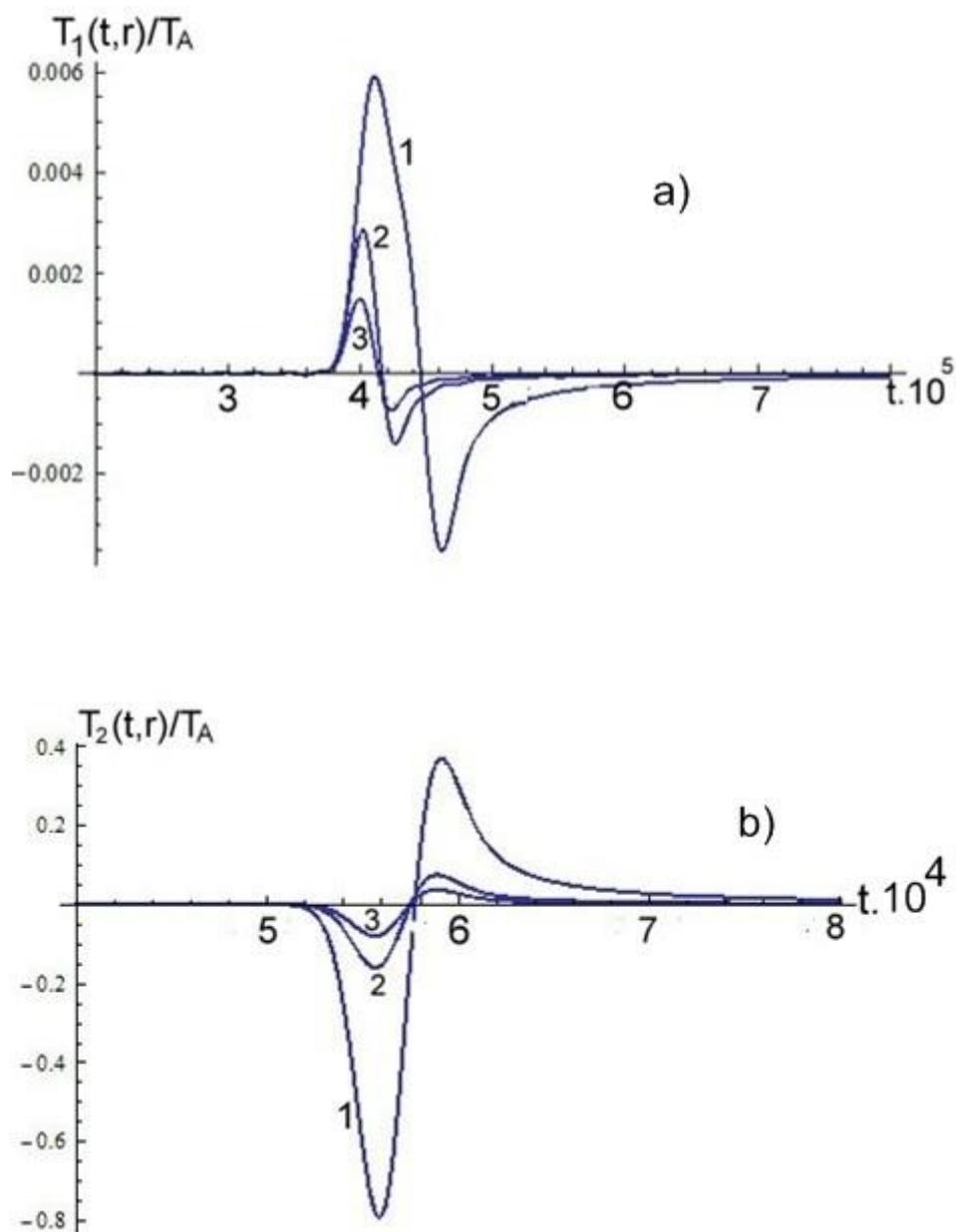


Рис. 2.2. Зависимость величины  $T_1/T_A$  (а) и  $T_2/T_A$  (б) от времени при  $\tau_1 = 5 \cdot 10^{-6} c$  (кривая 1),  $\tau_2 = 1 \cdot 10^{-6} c$  (кривая 2),  $\tau_3 = 1 \cdot 10^{-7} c$  (кривая 3).

## 2.2. Возбуждение оптоакустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ гауссовым импульсом лазерного луча по тепловому механизму

Очевидно, что импульсы лазерного луча могут быть различных форм. Одним из вариантов является гауссова форма импульса луча. В связи с этим представляется весьма интересным исследование особенностей генерации акустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  именно гауссовым импульсом лазерного излучения по тепловому механизму.

Предположим, что луч лазера распространяется вдоль оси цилиндрической кюветы, заполненной исследуемым раствором. Также будем считать, что оптический коэффициент поглощения системы  $\alpha$  мал и имеет место неравенство  $\alpha w \ll 1$ , где  $w$  - радиус перетяжки луча. Воспользуемся линеаризованной системой волновых уравнений (2.1.1) и (2.1.2) для акустических колебаний давления  $P'(r,t)$  и температуры  $T'(r,t)$ . Примем во внимание, что для этого случая функция, описывающая форму лазерного импульса имеет вид  $\varphi_2(t) = \pi^{-1/2} \exp(-t^2 / \tau_L^2)$ .

В системе (2.1.1) и (2.1.2) переходим к спектру Фурье

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad A(r,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.2.1)$$

где  $A(t,r) = P'(t,r)$  или  $T'(t,r)$ . Ввиду того, что взаимосвязанная система уравнений (2.1.1) и (2.1.2) является радиально симметричной, то для её решения удобно использовать интегральное преобразование Ханкеля по  $r$

$$\bar{A}(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dr r J_0(rs) A(t,r), \quad (2.2.2)$$

Тогда из (2.1.1) и (2.1.2) получим

$$[\omega^2 - u_1^2 s^2 (1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 + \frac{\beta \alpha_T u_1^2}{T \sigma_0})] \bar{P}' + \frac{\rho_0 \beta u_1^2 u_2^2 C_p s^2}{T \bar{\sigma}} \bar{T}' = - \frac{i \omega \beta u_1^2 \varphi_1(s)}{T \sigma_0} \varphi_2(\omega) \quad (2.2.3)$$

$$\frac{T_0 s^2}{\rho_0 C_p} [\alpha_T (u_1^2 - u_2^2) - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta \bar{\sigma} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \alpha_T \beta^2 u_1^2 + \frac{\beta \alpha_T^2 u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}}] \bar{P}'(\omega, s) -$$

$$- [\omega^2 - u_2^2 s^2 (1 - \frac{\beta \alpha_T u_1^2}{\bar{\sigma}})] \bar{T}'(\omega, s) = - \frac{i\omega(\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{\rho_0 \sigma_0 C_p} \varphi_1(s) \varphi_2(\omega) \quad (2.2.4)$$

где

$$\varphi_1(s) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi} \exp(-\frac{w^2 s^2}{8}), \quad \varphi_2(\omega) = \tau_L \exp[-\omega^2 \tau_L^2 / 4].$$

Решение алгебраической системы уравнений (2.2.3)-(2.2.4) имеет следующий вид:

$$\bar{P}'(\omega, s) = - \frac{i\omega \alpha I_0 \beta u_1^2 \varphi_1(s) \omega^2 \varphi_2(\omega)}{T_0 \sigma_0 [\omega^4 - \omega^2 s^2 (u_1^2 + u_2^2 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 u_1^2) + u_1^2 u_2^2 s^4]} \quad (2.2.5)$$

$$\bar{T}'(\omega, s) = \frac{i\omega \alpha I_0 \varphi_1(s) [\omega^2 (\bar{\sigma} - \alpha_T \beta u_1^2) - u_1^2 \bar{\sigma} s^2] \varphi_2(\omega)}{\rho_0 \sigma_0 C_p [\omega^4 - \omega^2 s^2 (u_1^2 + u_2^2 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 u_1^2) + u_1^2 u_2^2 s^4]} \quad (2.2.6)$$

Корнями дисперсионного уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 s^2 (u_1^2 + u_2^2 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 u_1^2) + u_1^2 u_2^2 s^4 = 0$$

являются  $\omega_1^2 = C_1^2 s^2$ ,  $\omega_2^2 = C_2^2 s^2$ . Простое преобразование позволяет переписать выражения (2.2.5) и (2.2.6) следующим образом:

$$\bar{P}'(\omega, s) = \frac{i\omega \alpha I_0 \beta C_1^2 \varphi_1(s) \varphi_2(\omega)}{T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} \left( \frac{1}{s^2 - q_1^2} - \frac{1}{s^2 - q_2^2} \right) \quad (2.2.7)$$

$$\bar{T}'(\omega, s) = \frac{i\omega \alpha I_0 \varphi_1(s) \varphi_2(\omega) \bar{\sigma}}{\rho_0 C_p \sigma_0 C_2^2} \left( \frac{1+G}{s^2 - q_1^2} - \frac{G}{s^2 - q_1^2} \right) \quad (2.2.8)$$

Выполнив обратное преобразование Ханкеля в (2.2.7) и (2.2.8) и вычислив соответствующие интегралы, получим

$$P'(\omega, r) = P'_1(\omega, r) + P'_2(\omega, r), \quad T'(\omega, r) = T'_1(\omega, r) + T'_2(\omega, r),$$

где

$$P'_1(\omega, r) = - \frac{\alpha I_0 \beta C_1^2 \omega \varphi_2(\omega)}{2T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} H_0^{(1)}(q_1 r) \exp(-\frac{q_1^2 w^2}{8}), \quad (2.2.9)$$

$$P'_2(\omega, r) = \frac{\alpha I_0 \beta C_1^2 \omega \varphi_2(\omega)}{2T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} H_0^{(1)}(q_2 r) \exp\left(-\frac{q_2^2 w^2}{8}\right), \quad (2.2.10)$$

$$T'_1(\omega, r) = \frac{\alpha I_0 \bar{\sigma} \varphi_2(\omega)}{2\rho_0 C_P \sigma_0 C_2^2} [(1+G)H_0^{(1)}(q_2 r) \exp\left(-\frac{q_2^2 w^2}{8}\right)], \quad (2.2.11)$$

$$T'_2(\omega, r) = -\frac{\alpha I_0 \bar{\sigma} \varphi_2(\omega)}{2\rho_0 C_P \sigma_0 C_2^2} G H_0^{(1)}(q_1 r) \exp\left(-\frac{q_1^2 w^2}{8}\right). \quad (2.2.12)$$

Из выражений (2.2.9)-(2.2.12) обнаруживается, что в данном случае система одновременно излучает спектр цилиндрических волн первого и второго звуков. Более того, нетрудно заметить, что эти волны состоят из двух частей. Величина  $P'_1(\omega, r)$  описывает обычный первый звук, а  $P'_2(\omega, r)$  - соответствует колебаниям давления со скоростью  $C_2$ , то есть медленному первому звуку. Выражение  $T'_1(\omega, r)$  описывает обычную волну второго звука, а  $T'_2(\omega, r)$  - быстрый второй звук, поскольку её скорость распространения равна  $C_1$ . В реальности медленный первый звук соответствует колебанию давления в волне второго звука, а быстрый второй звук - колебанию температуры в волне первого звука.

В дальнейшем примем во внимание, что при  $z \gg 1$  справедливо асимптотическое выражение функции Ханкеля [151]  $H_0^{(1)}(z) \approx (2/\pi)^{1/2} \exp[i(z - \pi/4)]$ . С учётом этого обстоятельства в дальней волновой зоне  $r \gg C_{1,2}/\omega$ , где, как правило, проводятся акустические измерения, выражения (2.2.9) - (2.2.12) можно написать в следующем виде:

$$P'_1(\omega, r) = -\frac{\alpha I_0 \beta C_1^2 \sqrt{C_1} \tau_L}{2\sqrt{2\pi} T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} \sqrt{\frac{\omega}{\pi r}} \exp\left(-\frac{\omega^2 w^2}{8C_1^2}\right) \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_L^2}{4}\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega r}{C_1} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (2.2.13)$$

$$P'_2(\omega, r) = -\frac{\alpha I_0 \beta C_1^2 \sqrt{C_2} \tau_L}{2T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} \sqrt{\frac{\omega}{\pi r}} \exp\left(-\frac{\omega^2 w^2}{8C_2^2}\right) \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_L^2}{4}\right) \exp\left[i\left(\frac{\omega r}{C_2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (2.2.14)$$

$$T'_1(\omega, r) = -\frac{\alpha I_0 \bar{\sigma} \tau_L (1+G) \sqrt{C_2}}{2\rho_0 C_P \sigma_0 C_2^2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi r}} \exp\left(-\frac{\omega^2 w^2}{8C_2^2}\right) \exp\left[-\frac{\omega^2 \tau_L^2}{4}\right] \exp\left[i\left(\frac{\omega r}{C_2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (2.2.15)$$

$$T'_2(\omega, r) = -\frac{\alpha I_0 \bar{\sigma} \tau_L G \sqrt{C_1}}{2\rho_0 C_P \sigma_0 C_2^2} \sqrt{\frac{\omega}{\pi r}} \exp\left(-\frac{\omega^2 w^2}{8C_1^2}\right) \exp\left[-\frac{\omega^2 \tau_L^2}{4}\right] \exp\left[i\left(\frac{\omega r}{C_1} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (2.2.16)$$

Выражения (2.2.13)-(2.2.16) показывают что:

1) зависимость амплитуды возбуждаемых ОА- волн первого и второго звуков от коэффициента поглощения падающего луча  $\alpha(\lambda)$  является линейной, что указывает на возможность достаточно простого определения этого параметра из измерений амплитуды этих волн;

2) уменьшение амплитуды ОА- волн по мере удаления от оси луча подчиняется зависимости  $\propto r^{-1/2}$  и это соответствует общим свойствам цилиндрических функций;

3) фаза возбуждаемых ОА-сигналов не зависит от длительности импульса падающего луча  $\tau_L$  и равна  $\pi/4$ ;

4) амплитуда всех волн при низких частотах растет как  $\sim \omega^{1/2}$  и, соответственно, для волн первого и второго звуков проходит через максимум на частотах

$$\omega_{1\max} = [0.5w^2C_1^{-2} + \tau_L^2]^{-1/2}, \quad \omega_{2\max} = [0.5w^2C_2^{-2} + \tau_L^2]^{-1/2}.$$

При выполнении условия  $\tau_L \gg w/C_i$  справедливо равенство  $\omega_{i\max} \approx \tau_L^{-1}$ , а для обратного случая  $\tau_L \ll w/C_i$  определяется равенством  $\omega_{i\max} \approx \sqrt{2}C_i/w$ ;

5) зависимость вариации амплитуды возбуждаемых ОА-волн от длительности импульса лазерного луча подчиняется функции  $\tau_L \exp[-\frac{\omega^2 \tau_L^2}{4}]$ .

Обратное преобразование Фурье от (2.2.7) и (2.2.8) позволяет получить следующие выражения для временного поведения колебания давления и температуры:

$$P'(t, r) = -\frac{\alpha I_0 \beta C_1^2 \tau_{2-2}(\omega)}{2T_0 \sigma_0 (C_1^2 - C_2^2)} \int_{\omega}^{\infty} [H_0^{(1)}(q_1 r) e^{-\frac{q_1^2 w^2}{8}} - H_0^{(1)}(q_1 r) e^{-\frac{q_2^2 w^2}{8}}] \omega \exp[-\frac{\omega^2 \tau_{12}}{4}] \cos(\omega t) d\omega. \quad (2.2.17)$$

$$T'(t, r) = \frac{\alpha I_0 \bar{\sigma} \tau_2}{2\rho_0 C_p \sigma_0 C_2^2} \int_{\omega}^{\infty} [(1+G)H_0^{(1)}(q_2 r) e^{-\frac{q_2^2 w^2}{8}} - GH_0^{(1)}(q_1 r) e^{-\frac{q_2^2 w^2}{8}}] \omega \exp[-\frac{\omega^2 \tau_{12}}{4}] \cos(\omega t) d\omega. \quad (2.2.18)$$

Выражения (2.2.17) и (2.2.18) описывают пространственно- временное распределение возбуждаемых ОА-импульсов первого и второго звуков и каждый из них, состоит из суперпозиции двух контуров. Эти контура обу-

словлены взаимной корреляцией колебаний температуры и давления в растворе. Очевидно, что это обстоятельство может служить основанием для получения независимой информации о характеристиках возбуждаемых волн первого и второго звуков.

Подводя итоги раздела, можно утверждать, что при воздействии лазерным лучом гауссовой формы в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  одновременно возбуждается спектр цилиндрических волн первого и второго звуков. Получены выражения, описывающие форму волн для дальней волновой зоны, где, как правило, выполняются детектирование и измерение их параметров.

### **2.3. Генерация импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ негауссовым импульсом лазерного луча по тепловому механизму**

В разделах 2.1 и 2.2 была предложена теория генерации импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  посредством различных форм временной зависимости импульса лазерного излучения (прямоугольной и гауссовой) по тепловому механизму. В настоящем разделе будут рассматриваться особенности возбуждения звуковых волн обоих звуков для случая негауссовой формы падающего лазерного луча.

Воспользуемся системой взаимосвязанных волновых уравнений (2.1.1) и (2.1.2) для колебаний давления и температуры. Для рассматриваемого случая  $\varphi_2(t) = \mathcal{I} \cdot e^{-\gamma t}$ , где  $\gamma = 2/\tau_l$ ,  $\tau_l$  - длительность импульса луча [99].

Выполнив преобразования Ханкеля по  $r$  и Лапласа по  $t$ , из системы волновых уравнений (2.1.1)-(2.1.2) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$b_{11}\tilde{P}(p,s) + b_{12}\tilde{T}(p,s) = -\frac{\alpha I_0 \beta u_1^2 f(s)\phi(p)}{2\pi T_0 \sigma_0}, \quad (2.3.1)$$

$$b_{21}\tilde{P}(p,s) + b_{22}\tilde{T}(p,s) = \frac{\alpha I_0 f(s)\phi(p)}{2\pi\rho_0\sigma_0 C_P} (\bar{\sigma} - \beta\alpha_T u_1^2), \quad (2.3.2)$$

где

$$\varphi(p) = \frac{\mathcal{P}}{(p+\gamma)^2}, \quad f(s) = \exp(-w^2 s^2 / 8),$$

$$b_{11} = p^2 + s^2 u_1^2 \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 + \frac{\alpha_T \beta u_2^2}{\bar{\sigma}}\right), \quad b_{12} = -\frac{\rho_0 \beta C_P}{T_0 \bar{\sigma}} u_1^2 u_2^2 s^2,$$

$$b_{21} = \frac{T_0 s^2}{\rho_0 C_P} \left[\alpha_T (u_1^2 - u_2^2) + \frac{\rho_s}{\rho_n} \alpha_T \beta^2 u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta \bar{\sigma} + \frac{\beta \alpha_T^2 u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}}\right], \quad b_{22} = p^2 + s^2 u_2^2 \left(1 - \frac{\alpha_T \beta u_1^2}{\bar{\sigma}}\right).$$

Дисперсионное уравнение

$$p^4 + p^2 s^2 (u_1^2 + u_2^2 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 u_1^2) + s^4 u_1^2 u_2^2 = 0, \quad (2.3.3)$$

представляет собой условие совместности уравнений (2.3.1) и (2.3.2) и, очевидно, имеет решение  $p_{1,2}^2 = -s^2 C_{1,2}^2$ .

Решение системы уравнений (2.3.1)-(2.3.2) позволяет получить следующие выражения:

$$\tilde{P}(p,s) = -\frac{\alpha I_0 \beta \gamma u_1^2}{2\pi T_0 \sigma_0 (p+\gamma)^2} \frac{f_0(s) p^3}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)}, \quad (2.3.4)$$

$$\tilde{T}(p,s) = \frac{\alpha I_0 f_0(s) \gamma}{2\pi \rho_0 \sigma_0 C_P} \frac{p^3 (\bar{\sigma} - \alpha_T \beta u_1^2) + \bar{\sigma} s^2 u_1^2 p}{(p+\gamma)^2 (p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)}. \quad (2.3.5)$$

Представим эти выражения в виде

$$\tilde{P}(p,s) = -\frac{\alpha I_0 \beta \gamma u_1^2 f(s)}{2\pi T_0 \sigma_0} \left\{ \frac{G_1}{p+\gamma} + \frac{G_2}{(p+\gamma)^2} + \frac{K_1 p + L_1}{p^2 + C_1^2 s^2} + \frac{K_2 p + L_2}{p^2 + C_2^2 s^2} \right\}, \quad (2.3.6)$$

$$\tilde{T}(p,s) = \frac{\alpha I_0 f_0(s) \gamma}{2\pi \rho_0 \sigma_0 C_P} \left[ \frac{E_1}{p+\gamma} + \frac{E_2}{(p+\gamma)^2} + \frac{M_1 p + N_1}{p^2 + C_1^2 s^2} + \frac{M_2 p + N_2}{p^2 + C_2^2 s^2} \right], \quad (2.3.7)$$

затем, выполнив необходимые выкладки для коэффициентов в выражениях (2.3.6) и (2.3.7), получим

$$G_1(s) = \Delta_{01}(s) / \Delta_0(s), \quad G_2(s) = \Delta_{02}(s) / \Delta_0(s), \quad E_1(s) = \Delta_1(s) / \Delta(s), \quad E_2(s) = \Delta_2(s) / \Delta(s),$$

$$L_1(s) = \frac{C_1^2 [\gamma(\gamma^2 + C_2^2 s^2) \Delta_{01}(s) - (\gamma^2 - C_2^2 s^2) \Delta_{02}(s)]}{\gamma^2 (C_1^2 - C_2^2) \Delta_0(s)}, \quad L_2(s) = \frac{C_2^2 (\gamma^2 - C_1^2 s^2) \Delta_{02}(s) - \gamma C_2^2 (\gamma^2 + C_1^2 s^2) \Delta_{01}(s)}{\gamma^2 (C_1^2 - C_2^2) \Delta_0(s)},$$

$$K_1 = \frac{C_1^2[\Delta_{01}(s)\gamma(\gamma^2 + C_2^2s^2) + 2C_2^2s^2\Delta_{02}(s)]}{\gamma^3(C_2^2 - C_1^2)\Delta_0(s)}, \quad K_2 = \frac{C_2^2[\gamma(\gamma^2 + C_2^2s^2)\Delta_{01}(s) + 2C_1^2s^2\Delta_{02}(s)]}{\gamma^3(C_1^2 - C_2^2)\Delta_0(s)},$$

$$N_1(s) = \frac{C_1^2[\gamma\Delta_1(s)(\gamma^2 + C_2^2s^2) + \Delta_2(s)(C_2^2s^2 - \gamma^2)]}{\gamma^2(C_1^2 - C_2^2)\Delta(s)}, \quad N_2(s) = \frac{[\Delta_2(s)(C_2^2\gamma^2 - C_1^2C_2^2s^2) - \gamma\Delta_1(s)(\gamma^2C_2^2 + C_1^2C_2^2s^2)]}{\gamma^2(C_1^2 - C_2^2)\Delta(s)}$$

$$M_1(s) = \frac{\Delta_1(s)(s^2C_2^2 - \gamma^2) - D_1\Delta(s) + 2\gamma\Delta_2(s)}{s^2(C_1^2 - C_2^2)\Delta(s)}, \quad M_2(s) = \frac{\Delta_1(s)(\gamma^2 - s^2C_1^2) + \Delta(s)D_1 - 2\gamma\Delta_2(s)}{s^2(C_1^2 - C_2^2)\Delta(s)},$$

где  $D_1 = \bar{\sigma} - \alpha_T \beta u_1^2$ ,  $D_2 = \bar{\sigma} s^2 u_1^2$ ,

$$\Delta_{01}(s) = \gamma^2[\gamma^4 - 3C_1^2C_2^2s^4 - s^2\gamma^2(C_1^2 + C_2^2)], \quad \Delta_{02}(s) = \gamma^3[\gamma^4 + \gamma^2s^2(C_1^2 + C_2^2) - s^4C_1^2C_2^2],$$

$$\Delta_0(s) = [\gamma^4 + s^2\gamma^2(C_1^2 + C_2^2) + s^4C_1^2C_2^2][\gamma^4 - 3s^4C_1^2C_2^2 - s^2\gamma^2(C_1^2 + C_2^2)] +$$

$$+ 2(s^4\gamma^2C_1^2C_2^2 - 2\gamma^4)[\gamma^4 + \gamma^2s^2(C_1^2 + C_2^2) + s^4C_1^2C_2^2]$$

$$\Delta_1(s) = (D_1\gamma^2 - D_2s^2)[\gamma^4 - s^2\gamma^2(C_1^2 + C_2^2) - s^4C_1^2C_2^2] - 2\gamma^2D_1(\gamma^4 + 2C_1^2C_2^2s^4),$$

$$\Delta_2(s) = 2\gamma^3D_1[C_1^2C_2^2s^4 + \gamma^2(C_1^2 + C_2^2)s^2 - \gamma^4] - \gamma(D_1\gamma^2 - D_2s^2)(\gamma^4 + 2C_1^2C_2^2s^4),$$

$$\Delta(s) = [C_1^2C_2^2s^4 + \gamma^2(C_1^2 + C_2^2)s^2 - \gamma^4][\gamma^4 - s^2\gamma^2(C_1^2 + C_2^2) - s^4C_1^2C_2^2] -$$

$$- [C_1^2C_2^2s^4 - \gamma^4 - \gamma^2s^2(C_1^2 + C_2^2)][\gamma^4 + 2C_1^2C_2^2s^4]$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа в (2.3.6) и (2.3.7), получим следующие выражения для измеряемых в ОА - эксперименте величин  $P'(r,t)$  и  $T'(r,t)$ :

$$\tilde{P}(p,s) = -\frac{\alpha I_0 \beta \gamma u_1^2 f(s)}{2\pi T_0 \sigma_0} \{e^{-\gamma t} (G_1 + G_2 t) + K_1 \cos(sC_1 t) + K_2 \cos(sC_2 t) +$$

$$+ \frac{1}{s} [\frac{L_1}{C_1} \sin(sC_1 t) + \frac{L_2}{C_2} \sin(sC_2 t)]\}, \quad (2.3.8)$$

$$\tilde{T}(p,s) = \frac{\alpha I_0 \gamma f(s)}{2\pi \rho_0 \sigma_0 C_p} \{e^{-\gamma t} (E_1 + E_2 t) + M_1 \cos(sC_1 t) + M_2 \cos(sC_2 t) +$$

$$+ \frac{1}{s} [\frac{N_1}{C_1} \sin(sC_1 t) + \frac{N_2}{C_2} \sin(sC_2 t)]\} \quad (2.3.9)$$

Обратное преобразование Ханкеля в (2.3.8) и (2.3.9) позволяет получить следующие выражения для колебаний давления и температуры:

$$P'(t,r) = \frac{P_A (C_1^2 - C_2^2) \gamma r}{2\pi C_1} \int_0^\infty \{[e^{-\alpha t} (G_1(s) + G_2(s)t) + K_1(s) \cos(sC_1 t) + K_2(s) \cos(sC_2 t) +$$

$$+ \frac{1}{s} [\frac{L_1(s)}{C_1} \sin(sC_1 t) + \frac{L_2(s)}{C_2} \sin(sC_2 t)]] \varphi(s) J_0(rs) s ds \quad (2.3.10)$$

$$T'(t, r) = \frac{T_A \gamma C_2 r}{2\pi \bar{\sigma}} \int_0^{\infty} \{ [e^{-\alpha t} (E_1(s) + E_2(s)t) + K_1(s) \cos(sC_1 t) + K_2(s) \cos(sC_2 t) + \frac{1}{s} [\frac{L_1(s)}{C_1} \sin(sC_1 t) + \frac{L_2(s)}{C_2} \sin(sC_2 t)] \varphi(s) J_0(rs) \} ds \quad (2.3.11)$$

Из выражения (2.3.10) видно, что генерируемые ОА- импульсы первого звука состоят из импульсов «медленного» и обычного первого звука, распространяющихся со скоростями  $C_2$  и  $C_1$  соответственно. Между тем, из выражения (2.3.11) следует, что в растворе одновременно возбуждаются импульсы обычного и «быстрого» второго звуков, распространяющихся со скоростями  $C_2$  и  $C_1$  (быстрый второй звук) соответственно. В этих выражениях слагаемые с экспонентой  $\exp(-\gamma t)$  являются тепловым фоном для обоих звуков, а  $t \exp(-\gamma t)$  совпадают с формой лазерного луча и имеют максимум при  $t_{(1)} = \gamma^{-1}$ , которые с ростом параметра  $\gamma$  смещаются в область  $t \rightarrow 0$ . В реальности, как показали оценки, амплитуда этих функций на два и более порядка ниже по сравнению с реальными импульсами ОА. Тогда, очевидно, и в рассматриваемом случае в сверхтекучем растворе одновременно генерируются импульсы первого и второго звуков, каждый из которых состоит из медленных и быстрых частей. Очевидно, что реальные формы возбуждаемых импульсов ОА первого и второго звуков для рассматриваемого случая могут быть получены путем численного расчёта выше выписанных интегралов:

$$P'_{(1)}(t, r) = \frac{P_A (C_1^2 - C_2^2) \gamma r}{2\pi C_1} \int_0^{\infty} [K_1(s) \cos(sC_1 t) + \frac{L_1(s)}{sC_1} \sin(sC_1 t)] \varphi(s) J_0(rs) ds,$$

$$P'_{(2)}(t, r) = \frac{P_A (C_1^2 - C_2^2) \gamma r}{2\pi C_1} \int_0^{\infty} [K_2(s) \cos(sC_2 t) + \frac{L_2(s)}{sC_1} \sin(sC_2 t)] \varphi(s) J_0(rs) ds$$

$$T'_{(1)}(t, r) = \frac{T_A C_2 \gamma r}{2\pi \bar{\sigma}} \int_0^{\infty} [M_1(s) \cos(sC_1 t) + \frac{N_1(s)}{sC_1} \sin(sC_1 t)] \varphi(s) J_0(rs) ds,$$

$$T'_{(2)}(t, r) = \frac{T_A C_2 \gamma r}{2\pi \bar{\sigma}} \int_0^{\infty} [M_2(s) \cos(sC_1 t) + \frac{1}{sC_2} N_2 \sin(sC_2 t)] \varphi(s) J_0(rs) ds.$$

Таким образом, в рамках настоящего раздела нами предложена теория генерации ОА-импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  негауссовым импульсом лазерного луча по тепловому механизму.

# ГЛАВА III. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ВРЕМЕННОЙ ПРОФИЛЬ ОПТОАКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ЗВУКОВ В СВЕРХТЕКУЧЕМ РАСТВОРЕ $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$

## 3.1. Волновые уравнения оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе при тепловом механизме генерации

Некоторые аспекты лазерной генерации акустических волн первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  впервые были рассмотрены в [105], а недавно нами были исследованы особенности генерации этих волн различными формами импульса лазерного луча, о которых было упомянуто в предыдущей главе. Однако целый ряд особенностей этого процесса оказался не исследованным. Прежде всего, это спектр передаточных функций- Фурье образов отклика системы на воздействие импульса лазерного излучения. Целью настоящей главы работы является определение вида передаточных функций ОА-импульсов второго и первого звуков в сверхтекучем растворе для случая, когда система:

- 1) с жесткой границей, т.е. контактирует с твердым телом;
- 2) с мягкой границей, т.е. контактирует с собственным паром [152-161].

Как и выше, воспользуемся следующей системой взаимосвязанных волновых уравнений для акустических колебаний температуры  $T'(t, r)$  и давления  $P'(t, r)$  [105]:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - u_1^2 \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 + \frac{\beta \alpha_T u_2^2}{\bar{\sigma}}\right) \Delta p' + \frac{\rho_0 \beta c_p u_1^2 u_2^2}{T_0 \bar{\sigma}} \Delta T' = - \frac{\alpha \beta u_1^2 e^{-\alpha z}}{T_0 \sigma_0} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - u_2^2 \left(1 - \frac{\beta \alpha_T u_2^2}{\bar{\sigma}}\right) \Delta T' - \frac{T_0}{\rho_0 c_p} [(u_1^2 - u_2^2) \alpha_T + \frac{\rho_s}{\rho_n} \alpha_T \beta^2 u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta \bar{\sigma} + \\ + \frac{\beta \alpha_T^2 u_1^2 u_2^2}{\bar{\sigma}}] \Delta p' = \frac{\alpha e^{-\alpha z}}{\rho_0 \sigma_0 c_p} (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2) \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Описание использованных здесь обозначений дано в предыдущей главе.

Для решения сформулированной граничной задачи необходимо привлечение следующего уравнения теплопроводности для контактирующего твёрдого тела:

$$\rho_m C_{pm} \frac{\partial T'_m}{\partial t} = \kappa_m \frac{\partial^2 T'_m}{\partial z^2}, \quad z < 0, \quad (3.1.3)$$

где  $\rho_m, C_{pm}, \kappa_m$  - плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности этой среды, соответственно.

### 3.2. Частотная зависимость передаточных функций первого и второго звуков в растворе ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ при контакте с твердым телом

Другим существенным отличием сверхтекучих жидкостей от классических является то, что на границе твердое тело-жидкость возникает скачок температуры, впервые открыт Капицей [19]. Тогда граничные условия, необходимые для совместного решения системы уравнений (3.1.14)-(3.1.3), можно записать в виде [2-3]

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (3.2.1)$$

$$\alpha_K (T' - T'_m) \Big|_{z=0} = -\kappa_m \left. \frac{\partial T'_m}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3.2.2)$$

$$\left\{ \omega \kappa + \frac{i \rho_0 C_p \mu_2^2}{T_0 \bar{\sigma}} \left[ T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0 \right] \right\} \left. \frac{\partial T'_m}{\partial z} \right|_{z=0} = \omega \kappa_m \left. \frac{\partial T'_m}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3.2.3)$$

где  $\alpha_K$  - коэффициент Капицы [19],  $Z = \rho(\mu_3 - \mu_4)$ ,  $\mu_3, \mu_4$  - химические потенциалы изотопов  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$  соответственно,  $B = T^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Z}{\rho T} \right)_{\rho, c} - \frac{k_T}{T_0} \left( \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right)_{T, c} \right) \right]$ .

В (3.1.1)-(3.1.3) выполним Фурье-преобразования, для чего искомые функции представим в виде

$$\Psi(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega, t) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (3.2.4)$$

где  $\Psi(t, z) = p'(t, z)$  или  $T'(t, z)$ . Тогда будем иметь

$$A_{11} \frac{d^2 p'}{dz^2} + q_1^2 p'(\omega, z) - A_{12} \frac{d^2 T'}{dz^2} = -\frac{i\omega\alpha\beta f(\omega)}{T_0\sigma_0} e^{-\alpha z}, \quad (3.2.5)$$

$$A_{21} \frac{d^2 T'}{dz^2} + q_2^2 T'(\omega, z) + A_{22} \frac{d^2 p'}{dz^2} = \frac{i\omega(\bar{\sigma} - \beta \cdot \alpha_T u_1^2)\alpha f(\omega)}{\rho_0\sigma_0 c_p u_2^2} e^{-\alpha z} \quad (3.2.6)$$

$$\frac{d^2 T'_m}{dz^2} + q_m^2 T'_m(\omega, z) = 0, \quad (3.2.7)$$

где  $f(\omega) = I_0\varphi(\omega)$  - спектр падающего излучения,  $q_i = \omega/u_i$ , - волновые числа первого и второго звуков,  $\chi_m = \kappa_m / \rho_m C_{pm}$  - коэффициент температуропроводности твердого тела,  $q_m = [i\omega/\chi_m]^{1/2}$  - волновое число тепловой волны в контактирующей среде,

$$A_{11} = \left(1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta^2 + \frac{\beta\alpha_T}{\bar{\sigma}} u_2^2\right); \quad A_{12} = \frac{\rho_0\beta c_p u_2^2}{T_0\bar{\sigma}}; \quad A_{21} = 1 - \frac{\beta\alpha_T}{\bar{\sigma}} u_2^2;$$

$$A_{22} = \frac{T_0}{\rho_0 c_p u_2^2} \cdot [(u_1^2 - u_2^2)\alpha_T + \frac{\rho_s}{\rho_n} \alpha_T \beta^2 u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta\bar{\sigma} + \frac{\beta\alpha_T^2}{\bar{\sigma}} u_1^2 \cdot u_2^2].$$

Третье слагаемое в уравнении (3.2.5) описывает колебание давления в волне второго звука, а соответствующий член в уравнении (3.2.6) представляет собой колебание температуры в волне первого. По существу, эти слагаемые описывают взаимодействие мод второго и первого звуков. Очевидно, что эти взаимодействия являются небольшими по сравнению с основными акустическими модами. Следовательно, эти слагаемые в уравнениях (3.2.5)-(3.2.6) можно принять как величины с малыми амплитудами и воспользоваться методом теории возмущения для получения решения этой системы, то есть общий вид акустических колебаний давления и температуры можно представить в виде  $p(\omega, z) = p^{(0)}(\omega, z) + p^{(1)}(\omega, z)$ ,  $T'(\omega, z) = T^{(0)}(\omega, z) + T^{(1)}(\omega, z)$ . В нулевом приближении, т.е. когда взаимодействующих мод нет, пренебрегаются третьи члены в уравнениях (3.2.5) и (3.2.6). В этом случае эта система уравнений распадается на следующие два независимых уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 p^{(0)}}{dz^2} + \tilde{q}_1^2 p^{(0)} = -\frac{i\omega\beta\alpha f(\omega)e^{-\alpha z}}{A_{11}T_0\sigma_0}, \quad (3.2.8)$$

$$\frac{d^2 T^{(0)}}{dz^2} + \tilde{q}_2^2 T^{(0)} = \frac{i\omega(\bar{\sigma} - \beta\alpha_T u_1^2)\alpha f(\omega)e^{-\alpha z}}{A_{21}\rho_0\sigma_0 u_2^2 C_p} \quad (3.2.9)$$

Решая дифференциальные уравнения второго порядка (3.2.8)-(3.2.9) методом вариаций постоянных, будем иметь

$$p^{(0)} = G_1 e^{i\tilde{q}_1 z} + G_2 e^{-i\tilde{q}_1 z} - \frac{i\omega\beta\alpha f(\omega)e^{-\alpha z}}{T_0\sigma_0 A_{11}(\alpha^2 + \tilde{q}_1^2)}, \quad (3.2.10)$$

$$T_0(\omega, z) = R_1 e^{i\tilde{q}_2 z} + R_2 e^{-i\tilde{q}_2 z} + iFf(\omega)e^{-\alpha z}, \quad (3.2.11)$$

где  $\tilde{q}_1^2 = \omega^2 / U_1^2$ ,  $\tilde{q}_2^2 = \omega^2 / U_2^2$ ,  $U_1 = u_1(A_{11})^{1/2}$ ,  $U_2 = u_2(A_{21})^{1/2}$ ,  $\Phi_1 = \alpha(\alpha^2 + \tilde{q}_1^2)^{-1}$ ,  $G_i$  и  $R_i$  - постоянные интегрирования.

Условие отсутствия бегущей волны первого звука к границе соответствует равенству  $G_2 = 0$  [99,100]. Приняв во внимание это обстоятельство и используя граничное условие (3.2.1), из (3.2.10) будем иметь

$$G_1 = -\frac{\omega\beta\alpha f(\omega)}{T_0\sigma_0\tilde{q}_1 A_{11}} \Phi_1.$$

Тогда справедливо выражение

$$p^{(0)} = [\alpha\tilde{q}_1^{-1} \exp(i\tilde{q}_1 z) - i \exp(-\alpha z)] \frac{\omega\beta\alpha f(\omega)\Phi_1}{T_0\sigma_0 A_{11}}. \quad (3.2.12)$$

Однако для определения величины  $R_1$  мы не можем воспользоваться граничными условиями (3.2.2.) и (3.2.3) для потока тепла. Это связано с тем, что при применении этих условий мы получим принципиально отличающиеся граничные условия для  $T^{(1)}(\omega, z)$ , а именно  $T^{(1)}(\omega, z) = 0$  или  $dT^{(1)}(\omega, z)/dz = 0$ , которые диаметрально противоположны друг другу. Нам представляется, что последовательным является нахождение  $T^{(1)}(\omega, z)$  из уравнения (3.2.6), а затем применение выше выписанных граничных условий для величины  $T'(\omega, z) = T^{(0)}(\omega, z) + T^{(1)}(\omega, z)$ . Эта возможность также обусловлена тем, что величина  $p^{(0)}(\omega, z)$  определена согласно выражения (3.2.12).

Нетрудно заметить, что для  $T^{(1)}(\omega, z)$  справедливо уравнение

$$\frac{d^2 T'^{(1)}}{dz^2} + \tilde{q}_2^2 T'^{(1)}(\omega, z) + A_{22}(A_{21})^{-1} \frac{d^2 p'^{(0)}}{dz^2} = 0. \quad (3.2.13)$$

Подставляя выражение (3.2.12) в (3.2.13), затем решая это уравнение тем же методом вариации постоянных, будем иметь

$$T^{(1)}(z, \omega) = \gamma_1 e^{i\tilde{q}_2 z} + \gamma_2 e^{-i\tilde{q}_2 z} + \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 F_1 f(\omega)}{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2} e^{i\tilde{q}_1 z} + \frac{i\alpha \tilde{q}_2 F_1 f(\omega)}{\alpha^2 + \tilde{q}_2^2} e^{-\alpha z} . \quad (3.2.14)$$

В (3.2.14) величины  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  являются постоянными интегрирования, а

$$F_1 = \frac{\alpha \beta \omega A_{22} \Phi_1}{A_{21} A_{11} T_0 \sigma_0 \tilde{q}_2} .$$

Тогда с учетом выражения (3.2.14) для  $T'(z, \omega)$  получим равенство

$$\begin{aligned} T'(z, \omega) &= T^{(0)}(z, \omega) + T^{(1)}(z, \omega) = \\ &= +\tilde{R}_1 e^{i\tilde{q}_2 z} + \tilde{R}_2 e^{-i\tilde{q}_2 z} + \frac{\tilde{q}_2 \tilde{q}_1 F_1 f(\omega)}{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2} e^{i\tilde{q}_1 z} + \frac{i\omega \Phi_2 f(\omega)}{\sigma_0} \left[ \frac{A_{22} \alpha \beta \Phi_1}{T_0 A_{11} A_{21}} + \frac{\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2}{\rho_0 C_p U_2^2} \right] e^{-\alpha z} , \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

где  $\tilde{R}_i = R_i + \gamma_i$ . Очевидно, что величина  $\tilde{R}_2 = 0$ , что соответствует случаю отсутствия бегущих волн второго звука к границе [99, 100]. Теперь для нахождения величины  $\tilde{R}_1$  используем два оставшихся условия (3.2.2) и (3.2.3).

Примем во внимание, что решение уравнения (3.2.7) имеет вид

$$T_m = (z, \omega) = \gamma_3 e^{q_m z} ,$$

где  $\tilde{q}_m = (1+i)a_m$ ,  $a_m = 1/\mu_m$ ,  $\mu_m = (2\chi_m/\omega)^{1/2}$  - длина тепловой диффузии в твердом теле. Тогда, выполняя достаточно длинную процедуру вычисления, будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= -f(\omega) \left\{ \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 F_1}{(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\tilde{q}_1 F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right] + \frac{\omega \Phi_2 F_2}{\sigma_0} \left[ i + \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\alpha F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 - (\omega \kappa_m q_m)^{-1} \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \tilde{q}_2 F_3 \right\}^{-1} . \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

В выражении (3.2.16) использованы следующие обозначения:

$$F_2 = \frac{\beta \alpha \Phi_1 A_{22}}{A_{11} A_{21} T_0} + \frac{\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2}{\rho_0 C_p u_2^2}, \quad F_3 = z_1 + iz_2, \quad z_1 = \omega \kappa, \quad z_2 = \frac{\rho_0 C_p u_2^2}{T_0 \bar{\sigma}} \left[ T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0 \right] .$$

Принимая во внимание, что  $\tilde{R}_i = R_i + \gamma_i$ , в (3.2.16) выделим слагаемые, которые принадлежат  $R_1$  и  $\gamma_1$ . Для этого проведем сравнение выражения (3.2.16) с (3.2.14) и будем иметь

$$R_1 = -f(\omega) \left\{ F \left[ i + \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\alpha F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right] \right\} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right\}^{-1}, \quad (3.2.17)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & -f(\omega) \left\{ \frac{\tilde{q}_1 \tilde{q}_2 F_1}{(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\tilde{q}_1 F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right] + \frac{\omega \Phi_2 A_{22} \alpha \beta \Phi_1}{\sigma_0 T_0 A_{11} A_{21}} \left[ i + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\alpha F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right] \right\} \times \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k} \right) \frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega \kappa_m q_m} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Тогда для  $T^{(0)}(\omega, z)$  можно написать выражение

$$T^{(0)}(\omega, z) = R_1 e^{i\tilde{q}_2 z} + i F f(\omega) e^{-\alpha z} \quad (3.2.19)$$

и уравнение для  $p^{(1)}(\omega, z)$  примет вид

$$\frac{d^2 p^{(1)}}{dz^2} + \tilde{q}_1^2 p^{(1)}(\omega, z) = \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{d^2 T^{(0)}}{dz^2}. \quad (3.2.20)$$

Выражение

$$p^{(1)}(\omega, z) = \lambda_1 e^{i\tilde{q}_2 z} + \lambda_2 e^{-i\tilde{q}_1 z} + \frac{A_{12} f(\omega)}{A_{11}} \left[ \frac{\hat{R}_1 \tilde{q}_2^2}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2} e^{i\tilde{q}_2 z} + i \alpha \Phi_1 F e^{-\alpha z} \right] \quad (3.2.21)$$

является решением (3.2.20), где  $\lambda_i$  - постоянная интегрирования,  $\hat{R}_1 = R_1 / I_0 \varphi(\omega)$  Полагая  $\lambda_2 = 0$  (условие отсутствия излучения в направлении стенки [99,100]) и используя граничное условие  $(\partial p^{(1)} / \partial p^{(1)})_{z=0} = 0$ , для  $\lambda_1$  будем иметь

$$\lambda_1 = - \frac{A_{12} f(\omega)}{\tilde{q}_1 A_{11}} \left( \frac{\hat{R}_1 \tilde{q}_2^3}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2} - \alpha^2 F \Phi_1 \right). \quad (3.2.22)$$

С учетом (3.2.21) и (3.2.12) искомое выражение для величины  $p'(\omega, z)$  можно представить в виде

$$p'(\omega, z) = p^{(0)}(\omega, z) + p^{(1)}(\omega, z) = p'_1(\omega) e^{i\tilde{q}_1 z} + p'_2(\omega) e^{i\tilde{q}_2 z} + p'_3(\omega) e^{-\alpha z}. \quad (3.2.23)$$

Аналогичным образом, окончательное выражение для  $T'(\omega, z)$  примет вид

$$T'(\omega, z) = T^{(0)}(\omega, z) + T^{(1)}(\omega, z) = T_1(\omega) e^{i\tilde{q}_1 z} + T_2(\omega) e^{i\tilde{q}_2 z} + T_3(\omega) e^{-\alpha z}. \quad (3.2.24)$$

Последнее слагаемое в (3.2.24) соответствует нагреву среды и в дальнейшем его опускаем. Выражения для  $p_1(\omega)$ ,  $p_2(\omega)$ ,  $T_1(\omega)$ ,  $T_2(\omega)$  представим в виде

$$p_1(\omega) = K_{11(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad p_2(\omega) = K_{12(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad (3.2.25)$$

$$T_1(\omega) = K_{21(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad T_2(\omega) = K_{22(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega). \quad (3.2.26)$$

Здесь величины  $K_{ij(r)}(\omega)$  являются искомыми ПФ ОА-сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе, выражения для которых можно написать в следующем виде:

$$K_{11(r)}(\omega) = -\frac{\alpha\beta\omega\Phi_1}{A_{11}T_0\sigma_0\tilde{q}_1} + \frac{A_{12}F}{\tilde{q}_1A_{11}}\left\{\alpha^2\Phi_1 + \frac{\tilde{q}_2^3}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2}\left[i + \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\alpha F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]\right\} \times \left[1 - \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]^{-1},$$

$$K_{12(r)}(\omega) = -\frac{A_{12}}{A_{11}}\frac{\tilde{q}_2^2 F}{(\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2)}\left[i + \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\alpha F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right] \times \left\{1 - \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right\}^{-1},$$

$$K_{21(r)}(\omega) = \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2}\frac{\alpha\beta\omega A_{22}\Phi_1}{A_{21}A_{11}T_0\sigma_0},$$

$$K_{22(r)}(\omega) = -\left\{\frac{\tilde{q}_1\tilde{q}_2 F_1}{(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2)}\left[1 - \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\tilde{q}_1 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right] + \frac{\omega\Phi_2 F_2}{\sigma_0}\left[i + \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\alpha F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]\right\} \times \left\{1 - \left(1 - \frac{i\kappa_m q_m}{\alpha_k}\right)\frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right\}^{-1}.$$

Нетрудно заметить, что величины  $K_{ii(r)}(\omega)$  являются достаточно сложными функциями частоты  $\omega$ , однако все эти функции можно представить в виде  $K_{ii(r)}(\omega) = K_{ii(r)}^{(0)} + \Delta K_{ii(r)}$ , где  $\Delta K_{ii(r)}(\omega)$  - слагаемые, обусловленные взаимодействием мод, а  $K_{ii(r)}^{(0)}$  соответствует случаю его отсутствия. Следовательно, справедливы выражения

$$K_{11(r)}(\omega) = K_{11(r)}^{(0)} + \Delta K_{11(r)}, \quad K_{22(r)}(\omega) = K_{22(r)}^{(0)} + \Delta K_{22(r)},$$

где

$$K_{11(r)}^{(0)}(\omega) = -\frac{\alpha\beta\tilde{U}_1\Phi_1}{A_{11}T_0\sigma_0}, \quad K_{22(r)}^{(0)}(\omega) = -iF\left\{\left[1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{i\alpha F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right] \times \left[1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]^{-1}\right\},$$

$$\Delta K_{11(r)}^{(0)}(\omega) = \frac{A_{12}F}{\tilde{q}_1 A_{11}}\left\{\alpha^2\Phi_1 + \frac{i\tilde{q}_2^3}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2}\left[1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{i\alpha F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]\right\} \times \left[1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]^{-1},$$

$$\Delta K_{22(r)}^{(0)}(\omega) = -\left\{\frac{\tilde{q}_1 F_1}{(\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2)}\left[1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{\tilde{q}_1 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right] + \frac{i\omega\alpha\beta A_{22}\Phi_1\Phi_2}{A_{11}A_{21}T_0\sigma_0}\left[1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{i\alpha F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right]\right\} \times \left\{1 + \left(1 + \frac{i\kappa_m q_m}{R_k}\right)\frac{\tilde{q}_2 F_3}{\omega\kappa_m q_m}\right\}^{-1}$$

Из приведенных выражений для  $\Delta K_{ii(r)}(\omega)$  нетрудно заметить, что максимальные значения этих величин соответствуют частоте  $\omega = 0$  и определяются выражениями

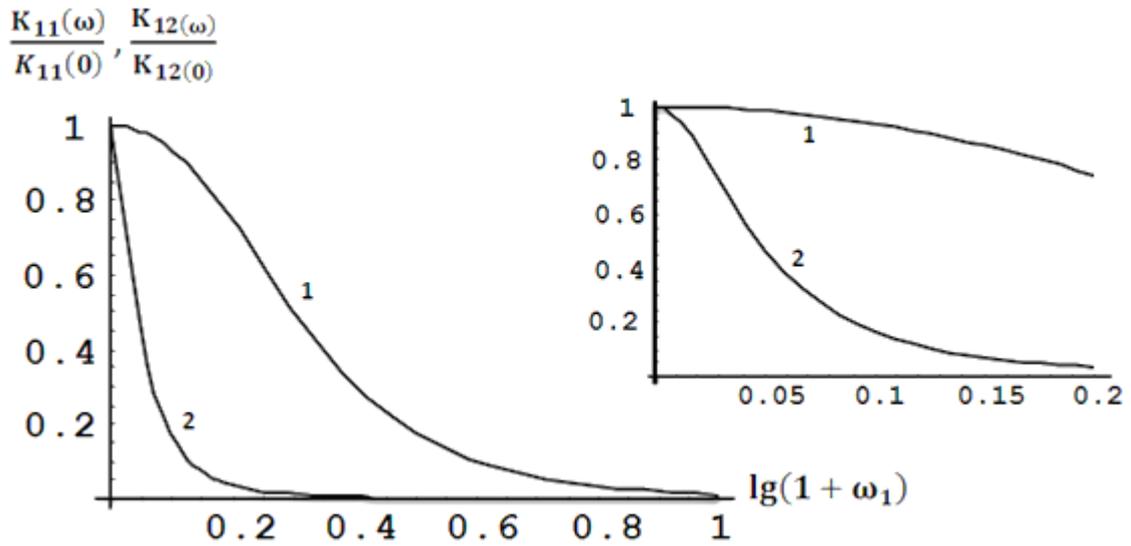
$$K_{11(r)}^{(0)}(0) = \frac{\beta u_1}{T_0 A_{11} \sigma_0}; \quad K_{12(r)}^{(0)}(0) = \frac{u_1 u_1^2 \beta (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{T_0 \sigma_0 A_{11} \bar{\sigma} (u_1^2 - u_2^2)};$$

$$K_{21(r)}^{(0)}(0) = \frac{\beta A_{22} u_1 u_1^2 \beta (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{T_0 \sigma_0 A_{11} A_{21} \bar{\sigma} (u_2^2 - u_1^2)}; \quad K_{22(r)}^{(0)}(0) = \frac{\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2}{\rho_0 \sigma_0 C_p u_2}.$$

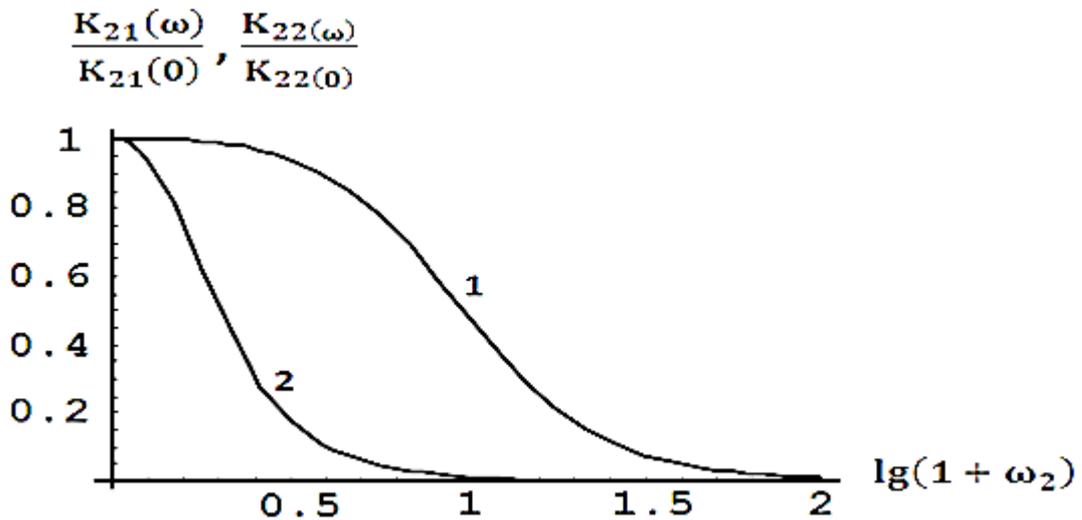
Между тем, также очевидно, что, прежде всего, необходимо оценить порядок величин  $|\Delta K_{11(r)} / K_{11(r)}^{(0)}|$  и  $|\Delta K_{22(r)} / K_{22(r)}^{(0)}|$ . Такая оценка была выполнена для значений термодинамических параметров, которые приведены в таблице. Результаты расчетов показали, что  $|\Delta K_{11(r)} / K_{11(r)}^{(0)}| \leq 10^{-2}$  и  $|\Delta K_{22(r)} / K_{22(r)}^{(0)}| \leq 10^{-4}$ . Следовательно, при выполнении численных расчетов частотной зависимости ПФ  $K_{11(r)}(\omega)$  и  $K_{22(r)}(\omega)$  поправками  $\Delta K_{11(r)}$  и  $\Delta K_{22(r)}$  можно пренебречь. Также численные расчеты показали, что с большим запасом справедливы оценки  $A_{11} \approx 1$  и  $A_{21} \approx 1$ . Контактующим твердым телом считается кварцевое стекло с теплофизическими параметрами:  $C_{pm} = 0.0025 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ ,  $\kappa_m = 0.03 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$  [16],  $R_K = 17.4 \text{ В/м}^2\text{К}$  [21].

Результаты численного расчета частотной зависимости элементов матрицы  $K_{ij}(\omega)$  иллюстрированы на рис. 3.1 и 3.2. Расчеты были выполнены для  $T_0 = 1 \text{ К}$  и концентрации  $c_0 = 0.2$ . Другие необходимые термодинамические, акустические и теплофизические параметры приведены в табл. 1.

Таким образом, в рамках настоящего раздела получены необходимые выражения для частотной зависимости элементов матрицы передаточных функций  $K_{ij}(\omega)$ . Из результатов численного расчета обнаруживается, что все генерируемые ОА- импульсы первого и второго звуков являются двухконтурными и их характеристики являются достаточно чувствительными к термодинамическому состоянию среды. Следовательно, измерение параметров этого сигнала позволяет определить значения различных физических величин этой жидкости, в том числе величину сопротивления Капицы.



**Рис.3.1.** Зависимость величин  $|K_{11(r)}^{(0)}(\omega)/K_{11(r)}^{(0)}(0)|$  кривая 1) и  $|K_{12(r)}^{(0)}(\omega)/K_{21(r)}^{(0)}(0)|$  (кривая 2) от  $\omega_1 = \omega/\omega_{11}$  при  $T = 1K$  (на вставке выделены низкочастотные части этих спектров).



**Рис. 3.2.** Зависимость величин  $|K_{22(r)}^{(0)}(\omega)/K_{22(r)}^{(0)}(0)|$  (кривая 1) и  $|K_{21(r)}^{(0)}(\omega)/K_{21(r)}^{(0)}(0)|$  (кривая 2) от частоты  $\omega_2 = \omega/\omega_{22}$  при  $T = 1K$ .

Численные значения термодинамических и теплофизических величин, необходимые для расчета формы спектра ПФ в растворе  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  [6].

Таблица 1

C	T (K)	$\rho_s$ $\frac{kg}{m^3}$	$\rho_n$ $\frac{kg}{m^3}$	$u_1$ $\frac{m}{c}$	$u_2$ $\frac{m}{c}$	$\sigma_0$ $\frac{J}{kg.K}$	$\bar{\sigma}$ , $\frac{J}{kg.K}$	$10^3 \cdot \alpha_T$ $K^{-1}$	$\beta$	$C_p$ $\frac{J}{kg.K}$	$k$ $\frac{Вт}{м.К}$	$\frac{\partial \sigma}{\partial c}$ , $\frac{J}{kg.K}$
0.2	х	83	45	224	26	1586	384	-7	-0.12	933	0.26	6010
0.33	х	45	74	214	18	2364	826	-7	-0.16	714	-	4660
0.33	1.5	14	105	207	11	3084	821	-7	-0.16	564	-	6860
0.2	1.5	51	77	218	21	2215	648	-9	-0.12	853	-	7835

### 3.3. Временное поведение оптоакустических сигналов первого и второго звуков в растворе ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$ , контактирующем с твердым телом

Очевидно [85,90,99], что в ОА-экспериментах имеется возможность одновременного обнаружения и измерения, как частотной, так и временной зависимостей амплитуд возбуждаемых ОА-импульсами волн в конденсированных средах, включая сверхтекучие. Особенности частотного распределения передаточных функций (ПФ) для двух возможных граничных условий в сверхтекучем растворе  ${}^3\text{He}-{}^4\text{He}$  были подробно исследованы в предыдущем разделе, однако вопрос о временном поведении этих функций для этого случая остался не исследованным. Восполнение этого пробела и является целью настоящего раздела работы.

Воспользуемся выражениями

$$p(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{11(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{12(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_2} d\omega, \quad (3.3.1)$$

$$T(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{21(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{22(r)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_2} d\omega, \quad (3.3.2)$$

описывающими пространственно-временное поведение акустических колебаний температуры и давления, где

$$\tau_1 = t - \frac{z}{\tilde{u}_1}, \quad \tau_2 = t - \frac{z}{\tilde{u}_2},$$

$\varphi(\omega)$  - Фурье - образ падающего на среду импульса лазерного луча, а  $I_0$  её интенсивность. Обычно, для подобных задач выбирают гауссовый вид функции

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{\tau_L^2}\right],$$

где  $\tau_L$  - её ширина. В этом случае справедливо равенство

$$\varphi(\omega) = \tau_L \exp\left[-\frac{\omega^2 \tau_L^2}{4}\right].$$

Выражения (3.3.1) и (3.3.2) можно представить в виде

$$p_r(\tau_1, \tau_2, z) = p_{1r}(\tau_1, z) + p_{2r}(\tau_2, z), \quad T_r(\tau_1, \tau_2, z) = T_{1r}(\tau_1, z) + T_{2r}(\tau_2, z),$$

Тогда для случая гауссовой формы падающего лазерного импульса имеют место следующие выражения

$$p_{1r}(\tau_1, z) = -\frac{\alpha I_0 \beta \tau_L u_1}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-0.25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega\tau_1]}{a^2 + q_1^2} d\omega, \quad (3.3.3)$$

$$p_{2r}(\tau_2, z) = -\frac{i\delta_1 \alpha \beta \tau_L I_0}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega R_{(r)}(\omega) \exp[-0.25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega\tau_2]}{a^2 + q_1^2} d\omega, \quad (3.3.4)$$

$$T_{1r}(\tau_1, z) = \frac{A_{22} u_1 \alpha^2 \beta \delta_2 \tau_L I_0}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-0.25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega\tau_2]}{a^2 + q_1^2} d\omega, \quad (3.3.5)$$

$$T_{2r}(\tau_2, z) = \frac{i\alpha \bar{\sigma} \tau_L I_0}{2\pi \rho_0 C_p \sigma_0 u_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega R_{(r)} \exp[-0.25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega\tau_2]}{a^2 + q_1^2} d\omega, \quad (3.3.6)$$

где  $\delta_1 = u_1^2(u_1^2 - u_2^2)^{-1}$ ,  $\delta_2 = u_2^2(u_1^2 - u_2^2)^{-1}$ .

Выражения (3.3.3) и (3.3.5) являются наиболее простыми и соответствуют импульсам обычного первого звука и «быстрого» второго звука. Используя обозначения  $P_{A(r)} = (\alpha I_0 \tau_L \beta u_1^2 / 2T_0 \sigma_0)$  и  $T_{A(r)} = (\alpha \beta \tau_L I_0 / 2\rho C_p)$ , эти выражения перепишем в виде

$$\frac{P_{1f}(\tau_1, z)}{P_{A(r)}} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-0.25\varepsilon_1^2 x^2) \cos(\tau_1 \alpha u_1 x)}{1+x^2}, \quad (3.3.7)$$

$$\frac{T_{1f}(\tau_1, z)}{T_{A(r)}} = \frac{2H}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-0.25\varepsilon_1^2 x^2)}{1+x^2} \cos(\tau_1 \alpha u_1 x). \quad (3.3.8)$$

Здесь

$$H = \frac{\delta_2 u_1^2}{u_2^2 \sigma_0} [(u_1^2 - u_2^2) \alpha_T + \frac{\rho_s}{\rho_n} \alpha_T \beta^2 u_1^2 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\beta \alpha_T^2}{\bar{\sigma}} u_1^2 u_2^2].$$

Наличие знака минус в выражении (3.3.7) подчеркивает противофазность колебаний  $P_1(\tau_1, z)$  и  $T_1(\tau_1, z)$ . Очевидно, что для определения особенностей временного поведения ОА-сигналов необходимо провести численное интегрирование согласно выше написанным выражениям, которые состоят из двух частей. Нами выполнен такой расчет при тех же условиях, что и в предыдущем разделе и его результаты представлены на рис. 3.3-3.5. Обратим внимание на то, что на этих рисунках приведены зависимости нормированных амплитуд, как первого, так и второго импульсов ОА-сигналов обоих звуков в исследуемой среде от реального времени, а также от безразмерных времен  $\alpha u_1 \tau_L$  и  $\alpha u_2 \tau_L$ . Из рис. 3.3-3.5 следует:

1) гауссова форма временного поведения передаточных функций и спад интенсивности ОА-сигналов с ростом ширины импульса лазерного луча; положения максимумов всех возбуждаемых импульсов соответствуют  $t_{\max} \approx z/u_1$  и  $t_{\max} \approx z/u_2$ ;

2) нелинейное уменьшение максимального значения амплитуды всех компонентов ОА-сигналов с ростом величин  $\tau_L \alpha u_1$  и  $\tau_L \alpha u_2$ ;

3) формы всех ОА-сигналов представляют собой суперпозицию двух симметричных экспоненциальных кривых, то есть  $(1 - \theta(\tau_i)) \exp[\alpha u_i \tau_i] + \theta(\tau_i) \exp[-\alpha u_i \tau_i]$ , если  $\tau_L \alpha u_i \ll 1$ ;  $\theta(\tau_j)$  - ступенчатая функция Хевисайда;

4) спектры первого и второго контуров будут резко отличаться в области величин  $(\alpha u_1)^{-1} \ll \tau_L \ll (\alpha u_2)^{-1}$ ; первый контур будет состоять из двух

симметричных экспоненциальных кривых и соответствует первому звуку, а частотное распределение второго звука будет иметь гауссову форму;

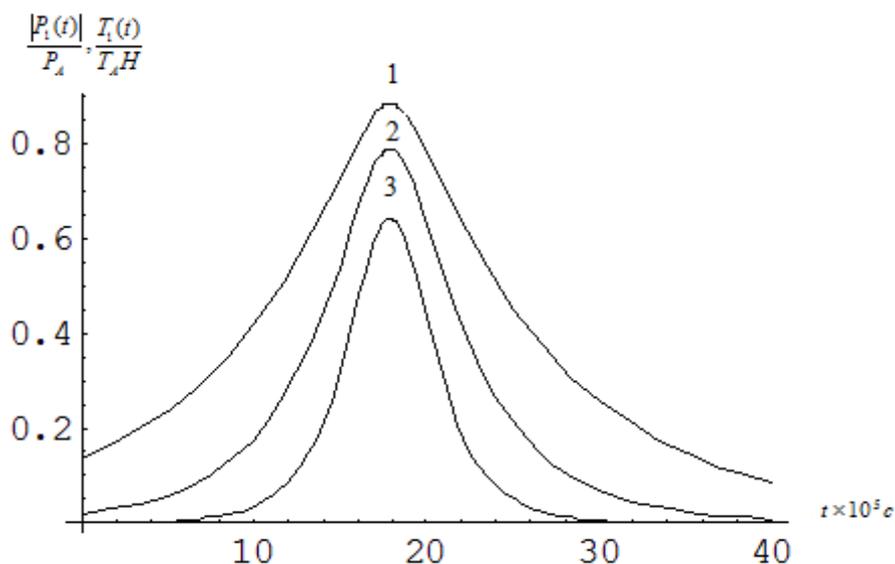


Рис.3.3. Временной профиль величин  $\frac{p_{1r}(\tau, z)}{p_A}$  и  $\frac{T_r(t)}{T_A H}$  при  $T = 1K$ ,  $c = 0.2$ ,  $z = 0.04m$ ,  $\tau_L = 2 \times 10^{-5}c$  и  $\alpha = 50m^{-1}$  (кривая 1),  $\alpha = 100m^{-1}$  (кривая 2),  $\alpha = 200m^{-1}$  (кривая 3).

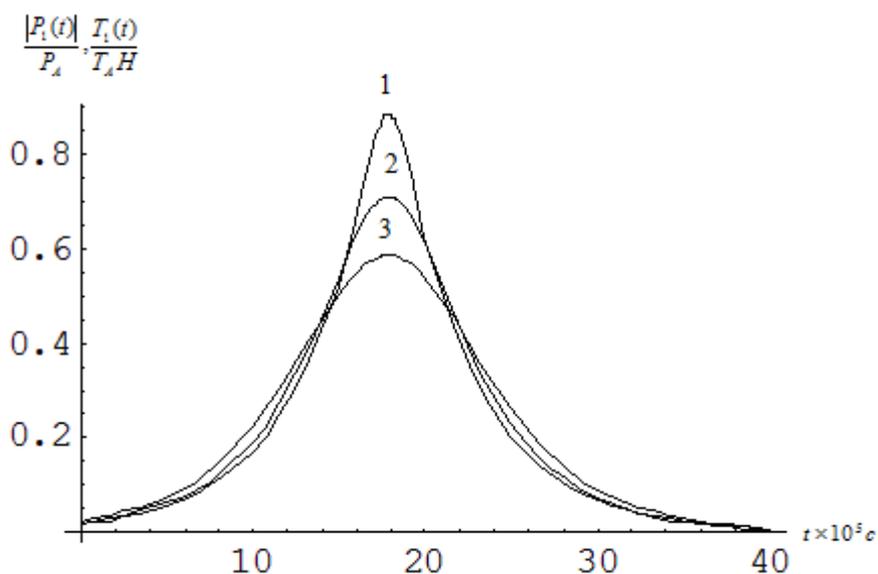


Рис.3.4. Временной профиль величин  $\frac{p_{1r}(\tau, z)}{p_A}$  и  $\frac{T_r(t)}{T_A H}$  при  $T = 1K$ ,  $c = 0.2$ ,  $z = 0.04m$ ,  $\alpha = 100m^{-1}$  и  $\tau_L = 1 \times 10^{-5}c$  (кривая 1),  $\tau_L = 3 \times 10^{-5}c$  (кривая 2),  $\tau_L = 5 \times 10^{-5}c$  (кривая 3).

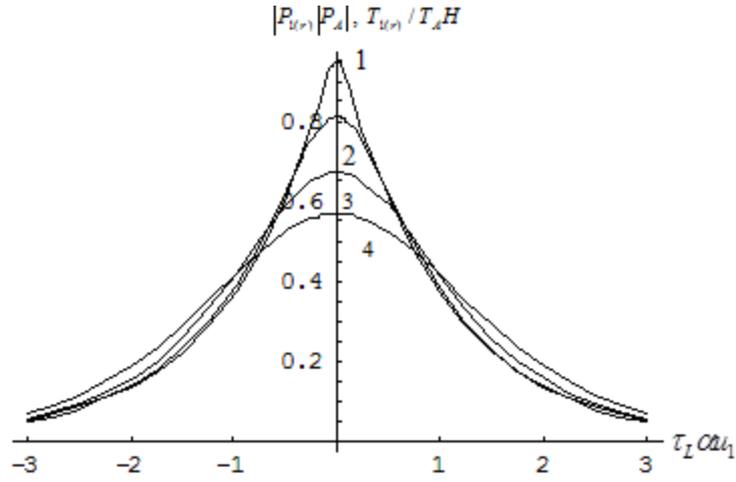


Рис. 3.5. Профиль ОА-сигнала обычного первого и быстрого второго звуков для жесткой границы при  $\alpha_1 \tau_L = 0.1$  (кривая 1),  $\alpha_1 \tau_L = 0.4$  (кривая 2),  $\alpha_1 \tau_L = 0.8$ , (кривая 3),  $\alpha_1 \tau_L = 1.2$  (кривая 4).

5) форма ОА-сигналов постепенно переходит к гауссовой, а именно принимает форму лазерного импульса, в случае  $\alpha_1 \tau_L \gg 1$ , то есть когда длительность лазерного луча значительно больше величин  $\tau_1 = 1/\alpha_1$  и  $\tau_2 = 1/\alpha_2$ .

Чтобы выполнить численный расчет формы импульсов  $p_{2r}(\tau_2, z)$  и  $T_{2r}(\tau_2, z)$  подынтегральную функцию  $R_r(\omega)$  перепишем в виде  $R_r(\omega) = (R_{1r} + iR_{2r})(\omega R_{0r})^{-1}$ , где

$$R_{1r} = N_1 M_1 + N_2 M_2 = \left\{ \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + \frac{1}{u_2 \kappa_m} [z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] \right\} \left[ \omega \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}}) - z_2 \right] + \\ + [z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] [z_2 - z_1 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] \frac{\alpha}{u_2 \kappa_m^2},$$

$$R_{2r} = N_2 M_1 - N_1 M_2 = \frac{\alpha}{\kappa_m} [z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] \left[ \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + \frac{1}{u_2 \kappa_m} [z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] \right] - \\ - \frac{1}{u_2 \kappa_m} (z_2 - z_1 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})) \left[ \omega \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + \frac{\alpha}{\kappa_m} z_1 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}}) - z_2 \right],$$

$$R_{r0} = M_1^2 + M_2^2 = \left\{ [k_m u_2 \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})]^2 + [z_2 - z_1 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})]^2 \right\} (u_2 \kappa_m)^{-2},$$

$$M_{1r} = \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + \frac{1}{u_2 \kappa_m} [z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})], \quad M_{2r} = [z_2 - z_1 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] \frac{1}{u_2 \kappa_m},$$

$$N_{1r} = [\omega \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}} + \frac{\alpha}{\kappa_m} (z_1 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}}) - z_2)], \quad N_{2r} = [z_1 + z_2 (1 - \frac{\kappa_m}{R_k} \sqrt{\frac{2\omega}{\chi_m}})] \frac{\alpha}{\kappa_m}.$$

Тогда выражения (3.3.4) и (3.3.6) можно переписать в виде

$$P_{2r}(\tau_2, z) = -\frac{\delta_1 \alpha \beta \tau_L I_0}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[R_{1r} \sin \omega \tau_2 - R_{2r} \cos \tau_2 + i(R_1 \cos \omega \tau_2 + R_{2r} \sin \omega \tau_2)] \exp(-0.25 \omega^2 \tau_2^2)}{R_{r0}(\omega)(\alpha^2 + q_2^2)} d\omega,$$

$$T_{2r}(\tau_2, z) = -\frac{\alpha \sigma \tau_L I_0}{2\pi \rho_0 C_p u_2^2 \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{1r} \sin \omega \tau_2 - R_{2r} \cos \tau_2 + i(R_1 \cos \omega \tau_2 + R_{2r} \sin \omega \tau_2)] \exp(-0.25 \omega^2 \tau_2^2)}{R_{r0}(\omega)(\alpha^2 + q_2^2)} d\omega.$$

В дальнейшем, ограничиваясь лишь реальной частью этих выражений, для  $P_{2f}(\tau_1, z)/P_A$  и  $T_{2f}(\tau_1, z)/P_A$  будем иметь

$$\frac{P_{2f}}{P_A} = \frac{2H_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[R_{f1}(\alpha u_2 x) \sin(\alpha u_2 \tau_2 x) - R_{f2} \cos(\alpha u_2 \tau_2 x)] \exp[-0.25 \alpha^2 u_2^2 \tau_L^2 x^2]}{R_{f0}(\alpha u_2 x)(1+x^2)} dx,$$

$$\frac{T_{2f}}{T_A} = \frac{2H_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[R_{f1}(\alpha u_2 x) \sin(\alpha u_2 \tau_2 x) - R_{f2} \cos(\alpha u_2 \tau_2 x)] \exp[-0.25 \alpha^2 u_2^2 \tau_L^2 x^2]}{R_{f0}(\alpha u_2 x)(1+x^2)} dx,$$

где  $H_1 = u_2 (2\alpha u_1^2)^{-1}$ ,  $H_2 = \bar{\sigma} (2\alpha \beta \sigma_0 u_2^2)^{-1}$ .

Результаты расчета величины  $P_{2r}(t, z)$  и  $T_{2r}(t, z)$  показали, что:

1) вторые слагаемые в этих выражениях значительно меньше первых и по этой причине ими можно пренебречь;

2) формы временного профиля этих величин аналогичны временным поведением  $P_{1r}(t, z)$  и  $T_{1r}(t, z)$ , лишь с той разницей, что положения максимумов соответствуют величине  $t_{\max} \approx z/u_2$ .

### 3.4. Передаточные функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ с мягкой границей

В предыдущих разделах работы были получены общие выражения для передаточных функций оптоакустических сигналов первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  для случая, когда система контактирует с твёрдым телом, то есть обладает жесткой границей. Отметим, что для простых жидкостей наличие этих функций было бы вполне достаточно, чтобы исследовать полный спектр передаточных функций (ПФ) не только для случая твердой границы, но и для мягкой (свободной). Это обусловлено тем, что для простых жидкостей существует простая связь между ПФ, соответствующими различным границам [99,100]. Однако для сверхтекучих жидкостей такая связь отсутствует, что обусловлено наличием скачка температуры между твердым телом и сверхтекучей жидкостью-скачок Капицы. В этой связи возникает необходимость определения вида ПФ ОА-импульсов первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  для случая, когда она имеет мягкую границу, что и является целью настоящего раздела работы.

Очевидно, что и для рассматриваемого случая справедлива система взаимосвязанных волновых уравнений (3.2.2.)-(3.1.2) для акустических колебаний давления  $p'(t,r)$  и температуры  $T'(t,r)$ . Также, для решения сформулированной задачи необходимо привлечение следующего уравнения теплопроводности для контактирующей мягкой среды с коэффициентом теплопроводности  $\kappa_g$ :

$$\rho_g C_{Pg} \frac{\partial T_m}{\partial t} = \kappa_g \frac{\partial^2 T_g}{\partial z^2}. \quad z < 0 \quad (3.4.1)$$

Выполняя Фурье-преобразование (3.1.1), (3.1.2) и (3.4.1.), будем иметь

$$A_{11} \frac{d^2 p'}{dz^2} + q_1^2 p'(\omega, z) - A_{12} \frac{d^2 T'}{dz^2} = -\frac{i\omega\alpha\beta f(\omega)}{T_0\sigma_0} e^{-\alpha z}, \quad (3.4.2)$$

$$A_{21} \frac{d^2 T'}{dz^2} + q_2^2 T'(\omega, z) + A_{22} \frac{d^2 p'}{dz^2} = \frac{i\omega(\bar{\sigma} - \beta\alpha_T u_1^2)\alpha f(\omega)}{\rho_0 \sigma_0 c_p u_2^2} e^{-\alpha z}, \quad (3.4.3)$$

$$\frac{d^2 T_g}{dz^2} + q_g^2 T_g = 0, \quad (3.4.4)$$

Как и в предыдущем разделе, для решения системы уравнений (3.4.2)-(3.4.5) воспользуемся теорией возмущения, то есть общий вид акустических колебаний давления и температуры представим в виде

$$p(\omega, z) = p^{(0)}(\omega, z) + p^{(1)}(\omega, z), \quad T'(\omega, z) = T^{(0)}(\omega, z) + T^{(1)}(\omega, z).$$

В приближении невзаимодействующих мод, когда пренебрегаются третьи члены в уравнениях (3.4.2) и (3.4.3), эта система принимает вид

$$\frac{d^2 p^{(0)}}{dz^2} + \tilde{q}_1^2 p^{(0)} = -\frac{i\omega\beta\alpha f(\omega)e^{-\alpha z}}{A_{11}T_0\sigma_0}, \quad (3.4.5)$$

$$\frac{d^2 T^{(0)}}{dz^2} + \tilde{q}_2^2 T^{(0)} = \frac{i\omega(\bar{\sigma} - \beta\alpha_T u_1^2)\alpha f(\omega)e^{-\alpha z}}{A_{21}\rho_0\sigma_0 u_2^2 C_p}, \quad (3.4.6)$$

Для решения системы (3.4.5)-(3.4.6) необходимо иметь набор граничных условий, которые для рассматриваемого случая можно написать в виде [5,15]

$$p|_{z=0} = 0, \quad T|_{z=0} = T_m|_{z=0}, \quad k \frac{\partial T}{\partial z}|_{z=0} = k_g \frac{\partial T_m}{\partial z}|_{z=0}. \quad (3.4.7)$$

Решая уравнения (3.4.5)-(3.4.6) методом вариации постоянных, будем иметь

$$p^{(0)} = \eta_1 e^{i\tilde{q}_1 z} + \eta_2 e^{-i\tilde{q}_1 z} - \frac{i\omega\beta\Phi_1 f(\omega)e^{-\alpha z}\phi}{A_{11}T_0\sigma_0} \quad (3.4.8)$$

$$T_0(\omega, z) = \xi_1 e^{i\tilde{q}_2 z} + \xi_2 e^{-i\tilde{q}_2 z} + iFf(\omega)e^{-\alpha z}. \quad (3.4.9)$$

Здесь

$$\Phi_i = \alpha(\alpha^2 + \tilde{q}_i^2)^{-1}, \quad F = \frac{\omega(\bar{\sigma} - \beta\alpha_T u_1^2)\Phi_2}{\rho C_p \sigma_0 \tilde{U}_2^2},$$

а  $\eta_i$  и  $\xi_i$  являются постоянными интегрирования.

В (3.4.8) положим  $\eta_2 = 0$ , что соответствует условию отсутствия бегущей волны первого звука к границе [99,100]. Учитывая это обстоятельство и используя первое граничное условие в (3.4.7), из (3.4.8) получим  $\eta_1 = \frac{i\omega\beta\Phi_1 f(\omega)}{T_0\sigma_0 A_{11}}$ .

Тогда выражение (3.4.8) можно переписать в виде

$$p^{(0)} = (e^{iq_1 z} - e^{-\alpha z}) \frac{i\omega\beta\Phi_1 f(\omega)}{T_0\sigma_0 A_{11}}. \quad (3.4.10)$$

Ввиду того, что для  $T'(\omega, z)$  справедливы два последующих условия в (3.4.7), использование какой-либо из них в отдельности приводит к ошибочным результатам. В этой связи сперва необходимо найти величину  $T^{(1)}(\omega, z)$ , а затем  $T'(\omega, z)$  и потом использовать два последних граничных условия (3.4.7) для нахождения величин, аналогичных  $R_1$ . Из (3.4.9) для  $T^{(1)}(\omega, z)$  можно написать уравнение

$$\frac{d^2 T^{(1)}}{dz^2} + \tilde{q}_2^2 T^{(1)}(\omega, z) + A_{22}(A_{21})^{-1} \frac{d^2 p^{(0)}}{dz^2} = 0, \quad (3.4.11)$$

решение коего имеет вид

$$T^{(1)} = \theta_1 e^{iq_2 z} + \theta_2 e^{iq_1 z} + F_1(\omega) \left[ \frac{q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} e^{iq_1 z} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + q_2^2} e^{-\alpha z} \right], \quad (3.4.12)$$

где величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  являются постоянными интегрирования, а

$$F_1 = \frac{i\omega\beta A_{22}\Phi_1}{A_{21}A_{11}T_0\sigma_0}.$$

Тогда для  $T' = T^{(0)} + T^{(1)}$  справедливо равенство

$$T'(z, \omega) = \tilde{\xi}_1 e^{iq_1 z} + \tilde{\xi}_2 e^{iq_2 z} + F_1 f(\omega) \frac{\tilde{q}_1^2}{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2} e^{iq_1 z} + f(\omega)\Phi_2 \left[ \alpha F_1(\omega) + \frac{i\omega(\bar{\sigma} - \beta\alpha_T u_1^2)}{\rho_0 C_p \tilde{U}_2^2 \sigma_0} \right] e^{-\alpha z}, \quad (3.4.13)$$

где  $\tilde{\xi}_i = \xi_i + \theta_i$ . Условие отсутствия бегущих волн второго звука к границе позволяет считать величину  $\tilde{\xi}_2 = 0$ . Выражение  $T_g(z, \omega) = \gamma_3 e^{\tilde{q}_m z}$  является решением уравнения (3.4.3), где  $\gamma_3$  - постоянная интегрирования,  $\tilde{q}_g = (1+i)a_g$ ,  $a_g = 1/\mu_g$ ,  $\mu_g = (2\chi_g/\omega)^{1/2}$  - длина тепловой диффузии в газовой среде. Тогда, используя два оставшихся условия, из (3.4.7) для величины  $\tilde{\xi}_1$  получим следующее выражение:

$$\tilde{\xi}_1 = \left\{ F_1(\omega) \left[ \frac{\tilde{q}_1^2}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2} \left( \frac{k_g q_g}{k\tilde{q}_2} - \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2} \right) + \alpha \Phi_2 \left( \frac{k_g q_g}{k\tilde{q}_2} - \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \right] + iF \left( \frac{k_g q_g}{k\tilde{q}_2} - \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \right\} f(\omega) \left( 1 - \frac{k_g q_g}{k\tilde{q}_2} \right)^{-1}. \quad (3.4.14)$$

Чтобы определить поправку  $p^{(1)}(\omega, z)$  в функции  $p(\omega, z)$  необходимо решить уравнение

$$\frac{d^2 p^{(1)}}{dz^2} + \tilde{q}_1^2 p^{(1)}(\omega, z) = \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{d^2 T^{(0)}}{dz^2}. \quad (3.4.15)$$

В (3.4.13) положим  $\xi_2 = 0$  (отсутствие бегущей волны второго звука по направлению к границе). Тогда решение уравнения (3.4.14) можно написать в виде

$$p^{(1)} = \delta_1 e^{i\tilde{q}_1 z} + \delta_2 e^{-i\tilde{q}_1 z} + \frac{A_{12} i F(\omega) f(\omega) \tilde{q}_2^2}{A_{11} (\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2)} \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_1} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} \right)^{-1} e^{i\tilde{q}_2 z} + \frac{A_{12} \alpha^2 F(\omega) f(\omega)}{A_{11} (\alpha^2 + \tilde{q}_1^2)} e^{-\alpha z}, \quad (3.4.16)$$

где  $\delta_i$ - постоянные интегрирования. В (3.4.16) положим  $\delta_2 = 0$ , а затем, используя граничное условие  $p^{(1)}|_{z=0} = 0$ , получим

$$\delta_1 = - \frac{A_{12} \tilde{q}_2^2 F(\omega) f(\omega)}{A_{11} (\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2)} \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_1} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} \right)^{-1} - \frac{A_{12} F(\omega) \alpha^2 f(\omega)}{A_{11} (\alpha^2 + \tilde{q}_1^2)}. \quad (3.4.17)$$

С учетом (3.4.10) и (3.4.16) искомые выражения для величин  $p'(\omega, z)$  и  $T'(\omega, z)$  можно представить в виде

$$p'(\omega, z) = p^{(0)}(\omega, z) + p^{(1)}(\omega, z) = p'_1(\omega) e^{i q_1 z} + p'_2(\omega) e^{i q_2 z} + p'_3(\omega) e^{-\alpha z}. \quad (3.4.18)$$

$$T'(\omega, z) = T^{(0)}(\omega, z) + T^{(1)}(\omega, z) = T_1(\omega) e^{i q_1 z} + T_2(\omega) e^{i q_2 z} + T_3(\omega) e^{-\alpha z}. \quad (3.4.19)$$

Последние слагаемые в (3.4.18) и (3.4.19) соответствуют нагреву среды и в дальнейшем их опускаем, выражения для  $p_1(\omega)$ ,  $p_2(\omega)$ ,  $T_1(\omega)$ ,  $T_2(\omega)$  представим в виде

$$p_1(\omega) = K_{11(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad p_2(\omega) = K_{12(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad (3.4.20)$$

$$T_1(\omega) = K_{21(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad T_2(\omega) = K_{22(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega), \quad (3.4.21)$$

где величины  $K_{ij(f)}(\omega)$  являются искомыми передаточными функциями ОА-сигналов первого и второго звуков для рассматриваемого случая в данном растворе. Выражения для  $K_{ij(f)}(\omega)$  можно написать в следующем виде:

$$K_{11(f)}(\omega) = \frac{i\omega \Phi_1}{T_0 \sigma_0 A_{11}} - \frac{A_{12} \omega (\bar{\sigma}) - \beta \alpha_T u_1^2 \Phi_2}{A_{11} \rho C_p \sigma_0 \tilde{U}_2^2} \left[ \alpha \Phi_1 + i \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} \right)^{-1} \right], \quad (3.4.22)$$

$$K_{12(f)}(\omega) = \frac{A_{12} \tilde{q}_2^2 i \omega}{A_{11} (\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2)} \frac{(\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2) \Phi_2}{\rho C_p \sigma_0 \tilde{U}_2^2} \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \left( 1 - \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} \right)^{-1}, \quad (3.4.23)$$

$$K_{21(f)}(\omega) = \frac{A_{22} i \omega \beta \Phi_1}{A_{21} A_{11} T_0 \sigma_0} \frac{\tilde{q}_1^2}{\tilde{q}_1^2 - \tilde{q}_2^2}, \quad (3.4.24)$$

$$K_{22(f)}(\omega) = \left\{ \frac{A_{22}F_1}{A_{21}} \left[ \frac{\tilde{q}_1^2}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2} \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} - \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2} \right) + \alpha \Phi_2 \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \right] + iF \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \right\} \left( 1 - \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} \right)^{-1}. \quad (3.4.25)$$

Выражения (3.4.22)-(3.4.25) являются искомыми для рассматриваемого случая мягкой границы и в рамках рассмотренного случая описывают полный спектр частот составляющих элементов матрицы ПФ  $K_{ij(f)}(\omega)$ . Для сверхтекучего раствора  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  нетрудно заметить, что эти функции являются сложными функциями акустических и термодинамических параметров как раствора, так и контактирующей среды и все эти особенности могут быть определены выполнением соответствующих численных расчетов.

Как и в разделе 3.2, величину  $K_{ii(f)}(\omega)$  представим в виде  $K_{ii(f)}(\omega) = K_{ii(f)}^{(0)} + \Delta K_{ii(f)}$ , где  $\Delta K_{ii(f)}(\omega)$ - слагаемые, обусловленные взаимодействием мод, а  $K_{ii(f)}^{(0)}$  соответствует случаю его отсутствия. Следовательно, справедливы выражения

$$K_{11(f)}^{(0)}(\omega) = \frac{i\omega\Phi_1}{T_0\sigma_0 A_{11}}, \quad \Delta K_{11(f)}(\omega) = -\frac{A_{12}\omega(\bar{\sigma}) - \beta\alpha_T u_1^2}{A_{11}\rho C_p \sigma_0 \tilde{U}_2^2} \Phi_2 [\alpha\Phi_1 + i\xi_f],$$

$$K_{22(f)}^{(0)}(\omega) = iFR_f, \quad \Delta K_{22(f)}(\omega) = \frac{A_{22}F_1}{A_{21}} \left[ \frac{\tilde{q}_1^2}{\tilde{q}_2^2 - \tilde{q}_1^2} \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} - \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2} \right) + \alpha \Phi_2 \left( \frac{\kappa_g q_g}{\kappa \tilde{q}_2} + \frac{\alpha}{\tilde{q}_2} \right) \right].$$

Выполненные нами оценки показали, что  $|\Delta K_{11(i)(r)} / K_{11(i)(r)}^{(0)}| \leq 10^{-2}$  и  $|\Delta K_{22(r)} / K_{22(r)}^{(0)}| \leq 10^{-4}$ . Тогда, очевидно, вклады поправок от величин  $\Delta K_{11(i)}$  и  $\Delta K_{22(r)}$  в частотные зависимости  $K_{11(i)}(\omega)$  и  $K_{22(r)}(\omega)$  являются пренебрежимо малыми и ими можно пренебречь. Численные оценки также показали, что с большой точностью можно положить  $A_{11} \approx 1$  и  $A_{21} \approx 1$ .

Нами выполнен численный расчет амплитуды величин  $|K_{ij(f)}^{(0)}(\omega)|$  для температуры  $T_0 = 1\text{K}$  и концентрации  $c_0 = 0.2$ , который представлен на рис. 3.6 и 3.7. Контактующим газовым слоем считается гелий, теплофизические параметры которого при  $T_0 = 1\text{K}$  определяются величинами  $C_{pm} = 7000 \text{ Дж/кг}\cdot\text{K}$ ,  $\rho_g = 0.15 \text{ кг/м}^3$ ,  $\kappa_g = 0.003 \cdot \text{Вт/м}\cdot\text{K}$  [16,21].

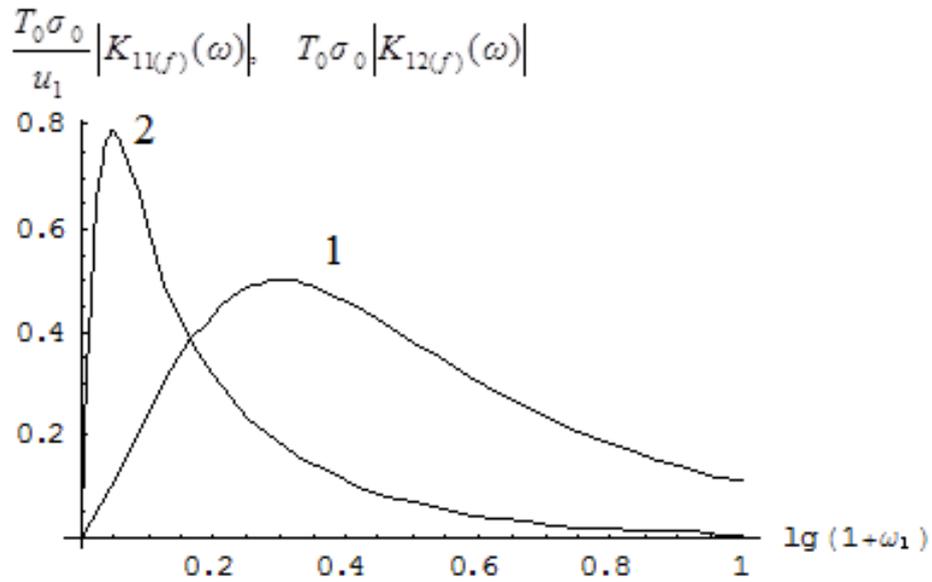


Рис. 3.6. Зависимость величин  $\frac{T_0\sigma_0}{u_1}|K_{11(f)}(\omega)|$  (кривая 1) и  $|T_0\sigma_0 K_{12(f)}(\omega)|$  (кривая 2) от  $\omega_1 = \omega/\alpha u_1$  при  $T = 1K$ .

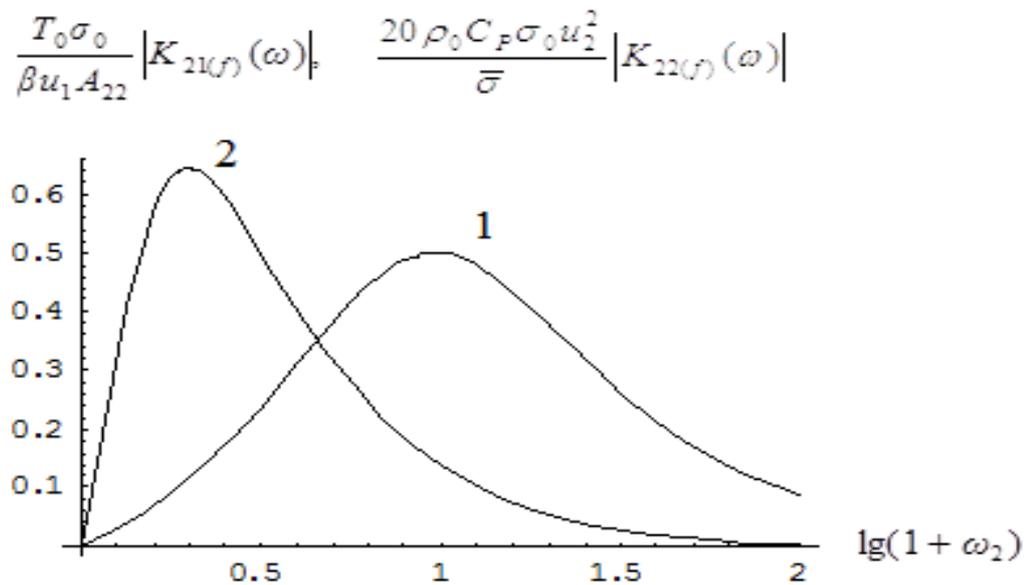


Рис.3.7. Зависимость величин  $\frac{T_0\sigma_0}{\alpha u_1 A_{22}}|K_{21(f)}(\omega)|$  (кривая 1) и  $\frac{20\rho_0\sigma_0 C_p u_2^2}{\tilde{\sigma}}|K_{22(f)}(\omega)|$  (кривая 2) от частоты  $\omega_2 = \omega/\alpha \tilde{u}_2$  при  $T = 1K$ .

Из полученных зависимостей следует, что величины  $|K_{11(f)}(\omega)|$  и  $|K_{21(f)}(\omega)|$  имеют максимум на частоте  $\omega_1 = \alpha u_1$ , в то время как функции  $|K_{12(f)}(\omega)|$  и  $|K_{22(f)}(\omega)|$  имеют максимум при  $\omega_2 = \alpha u_2$ . Частотные зависимости (кривые 1 и 2 на рис. 3.7) показывают, что форма контуров частотной зависимости величин  $|K_{ij(f)}(\omega)|$  для волн обоих звуков существенно не искажены как наличием границ, так и взаимодействием мод.

Подводя итоги настоящего раздела, можно утверждать, что все возбуждаемые ОА- импульсы первого и второго звуков в растворе  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  по тепловому механизму являются двухконтурными и их параметры являются чувствительными к термодинамическому состоянию среды.

### 3.5. Временное поведение оптоакустических сигналов первого и второго звуков в растворе ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ с мягкой границей

В предыдущем разделе получен явный вид частотной зависимости передаточных функций  $K_{ij}(\omega)$  для рассматриваемого случая. Однако вопрос о временном профиле этих функций остался не исследованным. Устранение этого пробела, когда система имеет мягкую границу, и является целью настоящего раздела [155,156,158].

Как и раньше, воспользуемся общими выражениями

$$p(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{11(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{11(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega, \quad (3.5.1)$$

$$T(\tau_1, \tau_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{21(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_1} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_{22(f)}(\omega) I_0 \varphi(\omega) e^{-i\omega\tau_2} d\omega. \quad (3.5.2)$$

Выражения (3.5.1) и (3.5.2) можно представить в виде

$$p_f(\tau_1, \tau_2, z) = p_{1f}(\tau_1, z) + p_{2f}(\tau_2, z), \quad T_f(\tau_1, \tau_2, z) = T_{1f}(\tau_1, z) + T_{2f}(\tau_2, z). \quad (3.5.3)$$

Очевидно, что для полного понимания динамики формирования ОА-импульсов необходимо провести численные расчеты величин  $p_{(f)}(\tau_1, \tau_2, z)$  и  $T_{(f)}(\tau_1, \tau_2, z)$ , как в реальном масштабе времени, так и в единицах безразмерных времен  $\tau_1 u_1 \alpha$ ,  $\tau_2 u_2 \alpha$ . С учетом этого обстоятельства, для гауссовой формы падающего лазерного импульса справедливы выражения

$$p_{1f}(\tau_1, z) = \frac{i\alpha I_0 \beta \tau_L}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp[-0,25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega \tau_1]}{\alpha^2 + q_1^2} d\omega, \quad (3.5.4)$$

$$p_{2f}(\tau_2, z) = -\frac{i\delta_1 \alpha \beta \tau_L I_0}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega R_{(f)}(\omega) \exp[-0,25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega \tau_2]}{\alpha^2 + q_2^2} d\omega, \quad (3.5.5)$$

$$T_{1f}(\tau_1, z) = \frac{iA_{22} \alpha \beta \delta_2 \tau_L I_0}{2\pi T_0 \sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp[-0,25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega \tau_1]}{\alpha^2 + q_1^2} d\omega, \quad (3.5.6)$$

$$T_{2f}(\tau_2, z) = \frac{i\alpha \bar{\sigma} \tau_L I_0}{2\pi \rho_0 C_p \sigma_0 u_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega R_{(f)} \exp[-0,25\omega^2 \tau_L^2 - i\omega \tau_2]}{\alpha^2 + q_2^2} d\omega, \quad (3.5.7)$$

где

$$\delta_1 = u_1^2 (u_1^2 - u_2^2)^{-1}, \quad \delta_2 = u_2^2 (u_1^2 - u_2^2)^{-1}.$$

Выражения (3.5.4) и (3.5.6) являются наиболее простыми, поскольку в них отсутствует функция  $R_{(f)}(\omega)$  и они соответствуют импульсам обычного первого звука и быстрого второго звука. Используя обозначения  $p_{A(f)} = (\alpha I_0 \tau_L \beta u_1^2 / 2T_0 \sigma_0)$  и  $T_{A(f)} = (\alpha \beta \tau_L I_0 / 2\rho C_p)$ , эти выражения перепишем в виде

$$\frac{p_{1f}(\tau_1, z)}{p_{A(f)}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(-0,25\varepsilon_1^2 x^2) \sin(\tau_1 \alpha u_1 x)}{1+x^2} x dx, \quad (3.5.8)$$

$$\frac{T_{1f}(\tau_1, z)}{T_{A(f)}} = \frac{2H}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \exp[-0,25\varepsilon_1^2 x^2]}{1+x^2} \sin(\alpha u_1 \tau_1) dx. \quad (3.5.9)$$

из которых следует, что они определены одними и теми же интегралами. Тогда достаточно численно рассчитать лишь один из них. По этим выражениям нами выполнен численный расчет временного поведения этих величин при  $T_0 = 1K$  и концентрации  $c_0 = 0.2$ . На рис. 3.8- 3.10 приведены результаты этих расчетов, из которых следует, что для коротких импульсов  $\tau_L \ll (au_1)^{-1}$  времен-

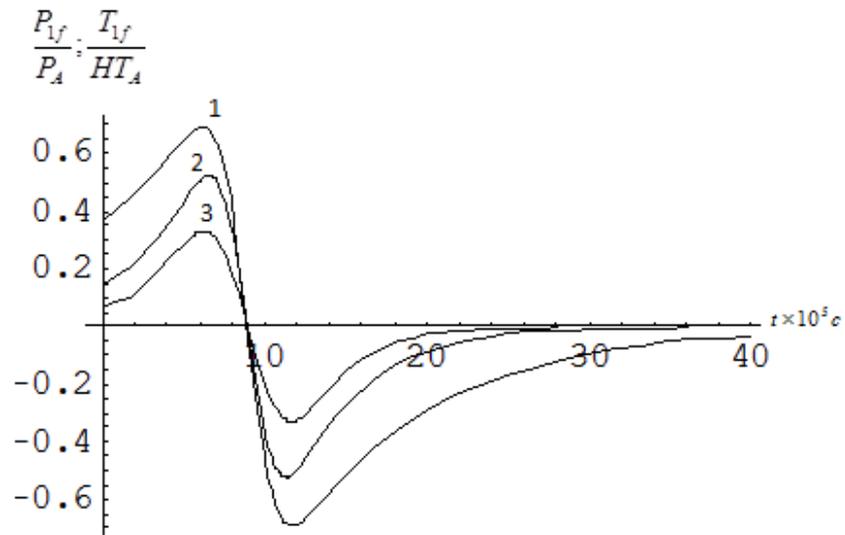


Рис. 3.8. Зависимость  $P_{1f}(\tau_1, z)/P_A$  при  $T=1\text{К}$ ,  $\tau_L=2 \times 10^{-5}\text{с}$ ,  $z=0.02\text{м}$  и  $\alpha=50\text{м}^{-1}$  (кривая 1),  $\alpha=100\text{м}^{-1}$  (кривая 2),  $\alpha=150\text{м}^{-1}$  (кривая 3).

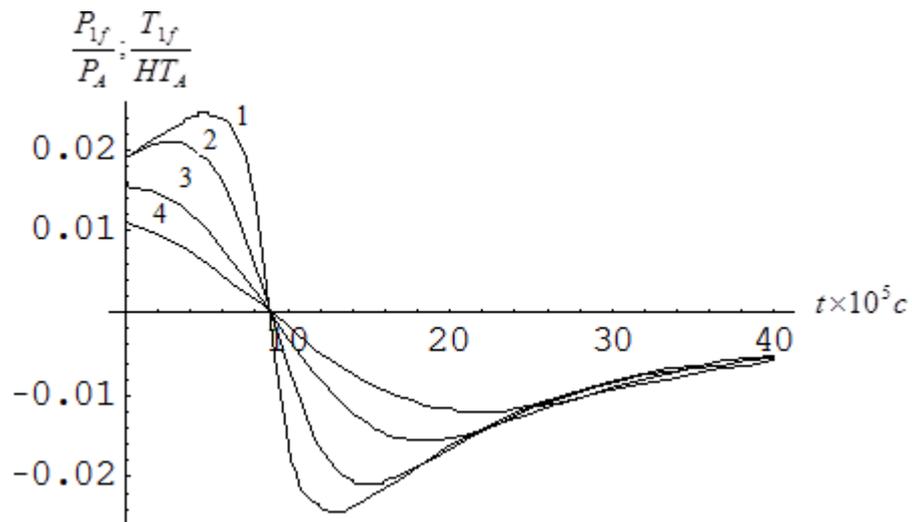


Рис. 3.9. Временная зависимость  $P_{1f}(\tau_1, z)/P_A$  при  $T=1\text{К}$ ,  $\alpha=100\text{м}^{-1}$ ,  $z=0.02\text{м}$  и  $\tau_L=10^{-5}\text{с}$  (кривая 1),  $\tau_L=4 \times 10^{-5}\text{с}$  (кривая 2),  $\tau_L=8 \times 10^{-5}\text{с}$  (кривая 3) и  $\tau_L=1.2 \times 10^{-4}\text{с}$  (кривая 4).

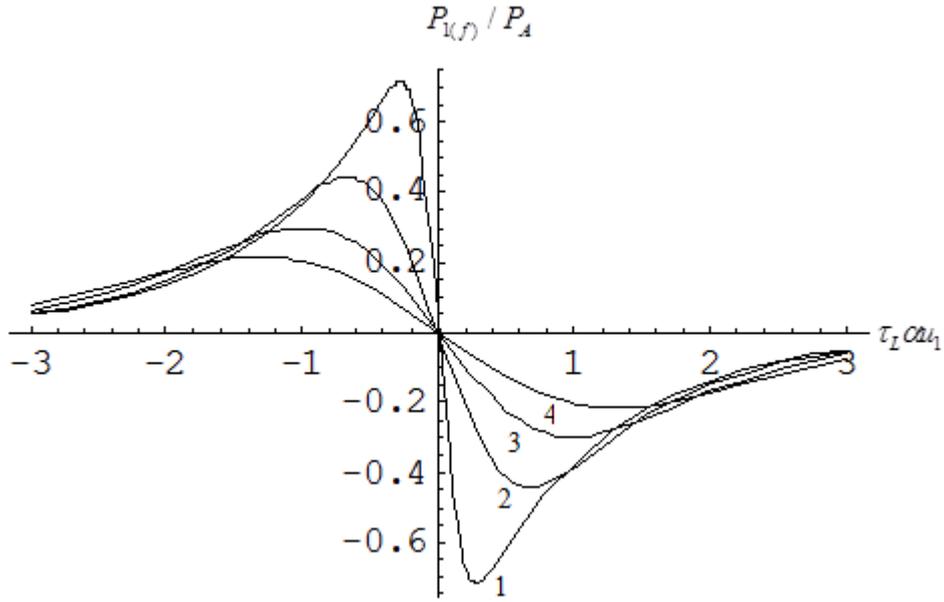


Рис. 3.10. Временная зависимость  $P_{1f}(\tau_1, z)/P_A$  от  $\tau_1 \beta u_1$  при  $T = 1K$ ,  $z = 0.04m$  и  $\tau_1 \alpha u_1 = 0,2$  (кривая 1),  $\tau_1 \alpha u_1 = 0,4$  (кривая 2),  $\tau_1 \alpha u_1 = 0,6$  (кривая 3) и  $\tau_1 \alpha u_1 = 1,4$  (кривая 4)

ное поведение величин  $P_{1f}(\tau_1, z)/P_A$  и  $T_{1f}(\tau_1, z)/H_{1A}$  соответствуют двум экспоненциальным кривым и переходной области шириной  $\sim \tau_L$ . Для длинных импульсов с  $\tau_L \gg (\alpha u_1)^{-1}$  временное распределение является гладким с пологими максимумом и минимумом. При значении  $t \approx z/u_1$  все импульсы  $p_{1f}(\tau_1, z)$  и  $T_{1f}(\tau_1, z)$  имеют нулевые значения.

В связи с тем, что выражения (3.5.5) и (3.5.7) являются весьма сложными, разделим их на реальные и мнимые части и в дальнейшем будем исследовать лишь их реальные части. Тогда будем иметь

$$\frac{P_{2f}}{P_{A(f)}} = \frac{2H_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[R_{f1}(\alpha u_2 x) \sin(\alpha u_2 \tau_2 x) - R_{f2} \cos(\alpha u_2 \tau_2 x)] \exp[-0,25\alpha^2 u_2^2 \tau_L^2 x^2]}{R_{f0}(\alpha u_2 x)(1+x^2)} dx,$$

$$\frac{T_{2f}}{T_{A(f)}} = \frac{2H_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[R_{f1}(\alpha u_2 x) \sin(\alpha u_2 \tau_2 x) - R_{f2} \cos(\alpha u_2 \tau_2 x)] \exp[-0,25\alpha^2 u_2^2 \tau_L^2 x^2]}{R_{f0}(\alpha u_2 x)(1+x^2)} dx,$$

где  $H_1 = u_2(2\alpha u_1^2)^{-1}$ ,  $H_2 = \bar{\sigma}(2\alpha\beta\sigma_0 u_{21}^2)^{-1}$ .

Мы также выполнили численный расчет временных зависимостей величин  $p_{2f}(\tau_1, z)/p_{A(f)}$  и  $T_{2f}(\tau_1, z)/p_{A(f)}$  по этим выражениям и оказалось, что вторые слагаемые в них составляют не более 0.05 от первых и ими можно пренебречь. Результаты расчета временных зависимостей величин  $p_{2f}(\tau_1, z)/p_{A(f)}$  и  $T_{2f}(\tau_1, z)/p_{A(f)}$  показывают, что они аналогичны импульсам  $p_{1f}(\tau_1, z)/p_{A(f)}$  и  $T_{1f}(\tau_1, z)/p_{A(f)}$  с той лишь разницей, что при  $t \approx z/u_2$  имеют нулевое значение.

Таким образом, в рамках настоящего раздела получена явная форма временного поведения передаточных функций первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  с мягкой границей.

## ГЛАВА IV. ОСОБЕННОСТИ ГЕНЕРАЦИИ ФОТОАКУСТИЧЕСКОГО СИГНАЛА СВЕРХТЕКУЧИМ РАСТВОРОМ $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$

**Введение.** Впервые Розенсвайгом и Гершо была предложена теория генерации фотоакустического (ФА) сигнала твердыми телами [95] при его микрофонной регистрации. В дальнейшем эта теория была модифицирована. Оказалось, что метод ФА-спектроскопии позволяет выполнять измерения целого набора физических величин конденсированных сред и это было многократно подтверждено экспериментально (см., например, [96-101]). Однако применение результатов [95] для сверхтекучих систем, включая и сверхтекучий раствор  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , оказалось неприемлемым. Причинами тому являются:

1) уравнение теплопроводности в твердых телах является параболическим, в то время как в классических и сверхтекучих жидкостях оно гиперболическое;

2) на границе сверхтекучий раствор  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ -твердое тело существует скачок температуры (скачок Капицы);

3) в сверхтекучих системах, включая сверхтекучий раствор, поток тепла содержит конвективную компоненту.

С другой стороны, достаточно подробный анализ, выполненный в [45,46,49], убедительно показывает, что к настоящему времени в сверхтекучих жидкостях, в том числе и в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , не раскрыт ряд механизмов неравновесных процессов, протекающих в них. Следовательно, привлечение метода ФА-спектроскопии может существенно расширить возможности экспериментального исследования физических свойств сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Этим и продиктована необходимость создания теории возбуждения ФА- сигнала в этой системе. В [119-121] для сверхтекучего гелия была предложена такая теория, а различные аспекты генерации ОА- сигнала в сверхтекучих жидкостях выполнен в [102-118]. Создание теории генерации ФА- сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в буферный газ, когда регистрация

сигнала осуществляется микрофонным способом [162-167], и является целью настоящей главы диссертации.

#### 4.1. Поле температуры в фотоакустической камере со сверхтекучим раствором $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$

Температурный диапазон существования сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  ограничен  $\lambda$ -линией, которая существенно зависит от концентрации раствора  $c_0$ . Следовательно, возникает необходимость теоретического рассмотрения формирования стационарного температурного поля в этой системе. Решению этой задачи и посвящен настоящий раздел работы.

##### 4.1.1. Вывод уравнения теплопроводности для стационарного случая

Ввиду того, что мы рассматриваем лишь формирование стационарного поля температуры в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , будем считать, что производные от всех гидродинамических величин по времени равны нулю, т.е.  $\partial\rho/\partial t = \partial\vartheta_s/\partial t = \partial\vartheta_n/\partial t = \partial\sigma'/\partial t = \partial c'/\partial t = 0$ . Тогда для сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в поле непрерывного лазерного излучения имеет место следующая система уравнений гидродинамики [6]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta\Delta\vartheta_n + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta_2\right)g\text{raddiv}\vartheta_n + \rho_s\zeta_3g\text{raddiv}(\vartheta_s - \vartheta_n), \quad (4.1.1)$$

$$T_0\rho_0\sigma_0\text{div}\vartheta_n = -\text{div}\bar{q} + \frac{Z}{\rho}\text{div}\bar{g} + f(r), \quad (4.1.2)$$

$$\nabla\left(\mu - \frac{Z}{\rho_0}c\right) = \nabla(\xi_3\text{div}(\bar{j} - \rho_0\vartheta_n) + \xi_1\text{div}\bar{\vartheta}_n). \quad (4.1.4)$$

Здесь  $\rho_s, \rho_n, \bar{\vartheta}_s, \bar{\vartheta}_n$  - сверхтекучая и нормальная компоненты плотности и скорости соответственно,  $\rho_0 = \rho_s + \rho_n$ ,  $\sigma_0$  - удельная энтропия,  $\eta, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  - коэффициенты сдвиговой и объемной вязкостей,  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности,  $T_0$  - равновесная температура,  $Z = \rho_0(\mu_3 - \mu_4)$ ,  $\mu = c_0\mu_3 + (1 - c_0)\mu_4 - \mu_{3,4}$ ,

химические потенциалы изотопов  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ ,  $p$  и  $\mu$  - давление и химический потенциал соответственно,  $f(r)$  - тепловой источник, обусловленный поглощением падающего монохроматического излучения.

Потоки диффузии  $\vec{g}$  и тепла  $\vec{q}$  определены следующим образом [6]:

$$\vec{g} = -\rho D(\nabla c' + \frac{k_T}{T} \nabla T' + \frac{k_p}{p} \nabla p'), \quad (4.1.5)$$

$$\vec{q} = -T^2 \left( \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho T} - \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right) \vec{g} - \kappa \nabla T', \quad (4.1.6)$$

где  $D$ ,  $Dk_T$  и  $Dk_p$  - соответственно коэффициенты диффузии, термодиффузии и бародиффузии.

Поставляя выражения (4.1.5) и (4.1.6) в (4.1.2), получим

$$T_0 \rho_0 \sigma_0 \text{div} \mathcal{G}_n = \kappa \nabla^2 T - (B + \frac{Z}{\rho}) \rho_0 D(\nabla^2 c' + \frac{k_T}{T} \nabla^2 T + \frac{k_p}{T} \nabla^2 P) + f(r), \quad (4.1.7)$$

Где

$$B = T^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Z}{\rho T} \right) - \frac{k_T}{T_0} \left( \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right) \right) \right].$$

С учетом (4.1.3) уравнение (4.1.7) можно переписать в виде

$$k \Delta T = \rho_0 [T_0 \sigma_0 + c_0 (B + \frac{Z}{\rho})] \text{div} \mathcal{G}_n - f(r). \quad (4.1.8)$$

Используя термодинамическое тождество

$$d\mu = \frac{1}{\rho_0} dp - \sigma_0 dT + \frac{Z}{\rho_0} dc \quad (4.1.9)$$

и исключив величины  $v_n$  из (4.1.8), получим

$$\Delta T' - \frac{T'}{\delta^2} = -\frac{f(r)}{k}, \quad (4.1.10)$$

где

$$\delta = \left\{ \frac{k\Lambda}{\left[ \rho_0^2 (T\sigma_0^2 + c_0 \sigma_0 (B + Z/\rho_0)) \right]} \right\}^{1/2},$$

а  $\Lambda = \frac{4}{3} \eta + \xi_2 - 2\rho_0 \xi_1 + \rho_0^2 \zeta_3$  - комбинация кинетических коэффициентов.

Вид уравнения (4.1.10) совпадает с аналогичным уравнением для чистого гелия, полученного в [12], а выражение для  $\delta$  при  $c_0 = 0$  совпадает с видом этой величины для He-II, что является вполне естественно.

#### 4.1.2. Температурное поле в фотоакустической камере с поглощающей подложкой

На рис. 4.1. приведена трехслойная модель ФА-камеры, в которой подложка является поглощающей. Будем считать, что гармонически модулированный лазерный луч с частотой  $\omega$  и интенсивностью  $I_0$  падает на камеру вертикально вдоль оси симметрии цилиндрической ячейки.

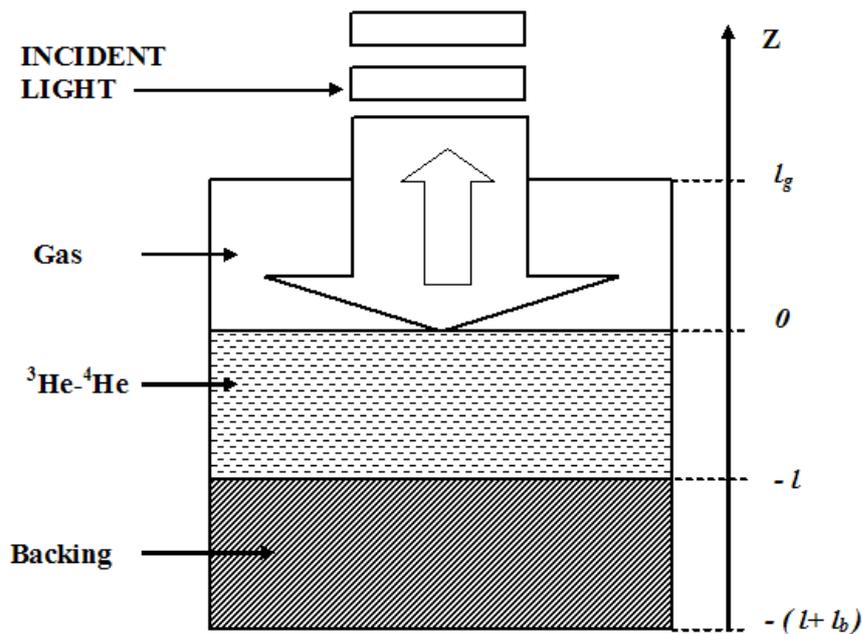


Рис. 4.1. Схематическая иллюстрация фотоакустической камеры.

Для трехслойной модели ФА-камеры в стационарном случае имеет место следующая система линейных уравнений теплопроводности:

$$\frac{d^2 T'_g}{dx^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_g, \quad (4.1.11)$$

$$\frac{d^2 T'}{dx^2} - \frac{T'}{\delta^2} = -\frac{\alpha I_0}{2k} e^{\alpha x}, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (4.1.12)$$

$$\frac{d^2 T'_b}{dx^2} = -\frac{\alpha_1 I_1}{\kappa_b} e^{\alpha_1(l+x)}, \quad -(l+l_b) \leq x \leq -l, \quad (4.1.13)$$

где  $I_1 = (1-R_b)I_0 e^{-\alpha l}$ ,  $\alpha_1$ ,  $R_b$  - коэффициенты поглощения и отражения подложки соответственно,  $l_b$ ,  $l$  и  $l_g$  - толщины подложки, образца и газового слоя соответственно.

Для решения системы дифференциальных уравнений второго порядка (4.1.11)-(4.1.13) необходимо иметь шесть граничных условий, которые следуют из условий непрерывности потоков тепла и температур на границах между слоями и имеют следующий вид [10]:

$$T'_g|_{z=l_g} = 0, \quad T'_g|_{z=0} = T'|_{z=0}, \quad \kappa_g \frac{\partial T'_g}{\partial z}|_{z=0} = \kappa \frac{\partial T'}{\partial z}|_{z=0}, \quad (4.1.14)$$

$$T'_b|_{z=-(l+l_b)} = 0, \quad T'|_{z=-l} = T'_b|_{z=-l}, \quad \kappa \frac{\partial T'}{\partial z}|_{z=-l} = \kappa_b \frac{\partial T'_b}{\partial x}|_{x=-l}. \quad (4.1.15)$$

Граничные условия (4.1.14)-(4.1.15) совместно с системой уравнений (4.1.11)-(4.1.13) являются математической моделью сформулированной задачи, решение которой можно написать в следующем виде:

$$T'_g(x) = \left[ \frac{F_1 + F_2}{(g-1)(b-1)e^{-\delta_1 l} - (g+1)(b+1)e^{\delta_1 l}} - F_0 \right] \frac{l_g - x}{l_g}, \quad (4.1.16)$$

$$T'_s(x) = \frac{F_1 e^{\delta_1 x} + F_2 e^{-\delta_1 x}}{(g-1)(b-1)e^{-\delta_1 l} - (g+1)(b+1)e^{\delta_1 l}} - F_0 e^{\alpha x}, \quad (4.1.17)$$

$$T'_b(x) = \left[ \frac{F_1 e^{\delta_1 l} + F_2 e^{-\delta_1 l}}{(g-1)(b-1)e^{-\delta_1 l} - (g+1)(b+1)e^{\delta_1 l}} - F_0 e^{-\alpha l} + \frac{I_1(1-e^{-\alpha l_b})}{2\alpha_1 \kappa_b} \right] \frac{(x+l+l_b)}{l_b} + \frac{I_1}{2\alpha_1 \kappa_b} (e^{-\alpha_1 l_b} - e^{\alpha_1(x+l)}) \quad (4.1.18)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$g = \frac{\kappa_g \delta}{\kappa l_g}, \quad b = \frac{\kappa_b \delta}{\kappa l_b}, \quad F_0 = 0.5 \alpha I_0 / [\kappa(\alpha^2 - \delta_1^2)], \quad \delta_1 = \delta^{-1},$$

$$F_1 = F_0 [(g-1)(b-\alpha\delta)e^{-\alpha l} + (1+b)(\alpha\delta+g)e^{\delta_1 l}] + \frac{(1-g)I_1}{2\kappa_b} [\alpha_1^{-1} b(1-e^{-\alpha_1 l_b}) - \frac{\kappa_b \delta}{\kappa}],$$

$$F_2 = F_0[(g+1)(\alpha\delta-b)e^{-\alpha l} + (b-1)(\alpha\delta+g)e^{-\delta l}] + \frac{(1+g)I_1}{2\kappa_b}[\alpha_1^{-1}b(1-e^{-\alpha_1 l_d}) - \frac{\kappa_b\delta}{\kappa}].$$

Наиболее интересным является случай прозрачной подложки, для которой  $\alpha_1 = 0$ . В этом случае справедливы выражения

$$T'_g(x) = F_0 \left\{ \frac{(\alpha\delta+g)[(b+1)e^{\delta l} + (b-1)e^{-\delta l} + 2(\alpha\delta-l)e^{-\alpha l}] - 1}{(g-1)(b-1)e^{-\delta l} - (g+1)(b+1)e^{\delta l}} - 1 \right\} \frac{l_g - x}{l_g}, \quad (4.1.19)$$

$$T'_s(x) = F_0 \left\{ \frac{G_1 e^{\delta_1 x} + G_2 e^{-\delta_1 x}}{(g-1)(b-1)e^{-\delta l} - (g+1)(b+1)e^{\delta l}} - e^{\alpha x} \right\}, \quad (4.1.20)$$

$$T'_b(x) = F_0 \left[ \frac{G_1 e^{\delta l} + G_2 e^{-\delta l}}{(g-1)(b-1)e^{-\delta l} - (g+1)(b+1)e^{\delta l}} - e^{-\alpha l} \right] \frac{(x+l+l_b)}{l_b}, \quad (4.1.21)$$

где

$$G_1 = (g-1)(b-\alpha\delta)e^{-\alpha l} - (1+b)(\alpha\delta+g)e^{\delta l}, \quad G_2 = (g+1)(\alpha\delta-b)e^{-\alpha l} + (b-1)(\alpha\delta+g)e^{-\delta l}.$$

Выражения (4.1.19)-(4.1.21) являются искомыми и описывают все особенности пространственного распределения поля температуры в ФА-камере. Из этих выражений следуют линейные зависимости величин температуры от интенсивности падающего луча во всех слоях ФА-камеры.

Выполним оценку максимального значения температуры облучаемой поверхности образца. Достаточно сделать это для наиболее распространенного случая прозрачных подложек. Из (4.1.19) и (4.1.20) для температуры облучаемой поверхности раствора  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  в ФА-камере получим

$$T'_s(0) = T'_g(0) = F_0 \left\{ \frac{G_1 + G_2}{(g-1)(b-1)e^{-\delta l} - (g+1)(b+1)e^{\delta l}} - 1 \right\}. \quad (4.1.22)$$

Оценки показывают, что величина  $\delta \sim (10^{-4} - 10^{-8})\text{м}$ , а толщина жидкого слоя раствора всегда  $l \gg \delta$ , следовательно  $\exp(-l/\delta) \rightarrow 0$ . Тогда, принимая во внимания малость параметра  $g \ll 1$  и то, что длина пробега фотона  $l_\alpha = \alpha^{-1}$  в сверхтекучем растворе  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$  также значительно больше  $\delta$ , из (4.1.22) получим выражение

$$T'_s(0) \approx \frac{\alpha\delta^2 I_0}{2\kappa}. \quad (4.1.23)$$

Из (4.1.23) обнаруживается линейная зависимость величины  $T'_s(0)$  от интенсивности падающего луча и квадратичная зависимость от  $\delta$ . Также

наблюдается обратная зависимость  $T'_s(0)$  от теплопроводности образца, что является вполне естественным. С учетом этих обстоятельств, из (4.1.20) следует, что пространственное распределение температуры в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  соответствует выражению  $T'_s(x)/T'_s(0) \approx e^{-\alpha x}$ , то есть спад температуры жидкости с ростом ее глубины является экспоненциальным.

Другой особенностью нагрева сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в ФА-камере является пороговое значение  $(I_0)_{\text{max}}$ , выше которого в системе происходит фазовый переход. Очевидно, что должно выполняться условие  $T'(0) < (T_\lambda - T_0)$ . Это позволяет получить следующую оценку для предельного значения интенсивности падающего лазерного излучения:

$$(I_0)_{\text{max}} < 2(T_\lambda - T_0)\kappa/(\alpha\delta^2). \quad (4.1.24)$$

Соблюдение этого неравенства обеспечивает выполнение ФА- эксперимента с сохранением сверхтекучей фазы раствора.

#### **4.2. Анализ граничного условия непрерывности потоков тепла на границе твердое тело -сверхтекучий раствор $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$**

Для создания теории генерации ФА- сигнала при его газ-микрофонной регистрации возникает необходимость решения граничной задачи. В настоящем разделе приведем упрощенный вид граничных условий, который является удобным для получения решения ФА-задачи.

Предположим, что твердое тело заполняет полупространство  $z < 0$ , а жидкий раствор  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  полупространство  $z > 0$ . На границе твёрдое тело-жидкий раствор  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  выполняются условия равенства нулю нормальных составляющих потока вещества и полного потока примесей, наличие скачка температуры (скачок Капицы) и непрерывность потока тепла. Тогда справедлива следующая система уравнений [6,14,59]:

$$\rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} = 0, \quad (4.2.1)$$

$$\rho_0 c_0 v_{nz} - \rho D \left[ \frac{\partial c'}{\partial z} + \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial T'}{\partial z} + \frac{k_p}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \right] = 0, \quad (4.2.2)$$

$$T_0 \rho_0 \sigma_0 v_{nz} + q_z - \frac{Z}{\rho} g_z = -\kappa_b \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (4.2.3)$$

Принимая во внимание выражения (4.2.1) и (4.2.2), условие (4.2.3) можно написать в виде

$$T_0 \rho_0 \sigma_0 v_{nz} + \rho D \left( B + \frac{Z}{\rho_0} \right) \left( \frac{\partial c'}{\partial z} + \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial T'}{\partial z} + \frac{k_p}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \right) - \kappa \frac{\partial T'}{\partial z} = -\kappa_b \frac{\partial T_b'}{\partial z}, \quad (4.2.4)$$

где

$$B = T^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Z}{\rho T} \right) - \frac{k_T}{T_0} \left( \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right) \right) \right].$$

Используя условие (4.2.2), выражение (4.2.4) перепишем в виде

$$\rho_0 [T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0] v_{nz} - \kappa \frac{\partial T'}{\partial z} = -\kappa_b \frac{\partial T_b'}{\partial z}. \quad (4.2.5)$$

Принимая во внимание (4.2.1), условие (4.2.5) можно переписать в виде равенства

$$\frac{\rho_0 \rho_s}{\rho_n} [T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0] v_{sz} + \kappa \frac{\partial T'}{\partial z} = \kappa_d \frac{\partial T_b'}{\partial z}. \quad (4.2.6)$$

Воздействуя оператором  $\partial/\partial t$ , из выражения (4.2.6) будем иметь

$$\frac{\rho_0 \rho_s}{\rho_n} [T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0] \frac{\partial v_{sz}}{\partial t} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T'}{\partial z} = \kappa_b \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T_b'}{\partial z}. \quad (4.2.7)$$

Используя уравнение

$$\frac{\partial v_{sz}}{\partial t} + \nabla \left( \mu - \frac{Z}{\rho} c \right) = 0, \quad (4.2.8)$$

термодинамическое равенство

$$\nabla \mu = \frac{Z}{\rho} \nabla c - \sigma_0 \nabla T' + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' \quad (4.2.9)$$

и выполняя линеаризацию

$$\frac{Zc}{\rho} = c' \left( \frac{Z}{\rho} \right) + c_0 \left( \frac{Z}{\rho} \right)', \quad (4.2.10)$$

из (4.2.9) получим равенство

$$\nabla(\mu - \frac{Z}{\rho}c) = -c_0 \nabla(\frac{Z}{\rho})' - \sigma_0 \nabla T' + \frac{1}{\rho_0} \nabla P'. \quad (4.2.11)$$

Тогда из уравнения (4.2.8) получим выражение

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = c_0 \nabla(\frac{Z}{\rho})' + \sigma_0 \nabla T' - \frac{1}{\rho_0} \nabla P'. \quad (4.2.12)$$

Учитывая равенство  $c' = (c_0 / \sigma_0) \sigma'$  [6], из выражения

$$\sigma' = (\frac{\partial \sigma}{\partial c})_{PT} c' + (\frac{\partial \sigma}{\partial p})_{cT} p' + (\frac{\partial \sigma}{\partial T})_{Pc} T' \quad (4.2.13)$$

находим, что

$$\sigma' = \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}} [(\frac{\partial \sigma}{\partial T})_{Pc} T' - \frac{\alpha_T}{\rho_0} P'], T' = (\frac{\partial T}{\partial \sigma})_{Pc} (\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \sigma' + \frac{\alpha_T}{\rho_0} p'), \quad (4.2.14)$$

где

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 - c_0 \partial \sigma / \partial c, \quad \alpha_T = -\rho_0 (\frac{\partial \sigma}{\partial p})_{Tc} = -\rho_0^{-1} (\frac{\partial \rho}{\partial T})_{Pc}$$

есть коэффициент теплового расширения. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} (\frac{Z}{\rho})' &= (\frac{\partial}{\partial P} \frac{Z}{\rho})_{Tc} p' + (\frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho})_{Pc} T' + (\frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho})_{PT} c' = [(\frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho})_{Pc} + \\ &+ \frac{c_0}{\bar{\sigma}} (\frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho})_{PT} (\frac{\partial \sigma}{\partial T})_{Pc}] T' + [(\frac{\partial}{\partial P} \frac{Z}{\rho})_{Tc} - \frac{c_0}{\bar{\sigma}} (\frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho})_{PT} \frac{\alpha_T}{\rho_0}] p' \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Выполнив не сложные выкладки, из выражений (4.2.15) и (4.2.12) получим

$$\frac{\partial v_{sz}}{\partial t} = \frac{\rho_n u_2^2}{\rho_s \bar{\sigma}} (\frac{\partial \sigma}{\partial T})_{Pc} \frac{\partial T'}{\partial z} + \{c_0 [(\frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho})_{Tc} - \frac{c_0}{\bar{\sigma}} (\frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho})_{PT} \frac{\alpha_T}{\rho_0}] - \frac{1}{\rho_0}\} \frac{\partial p'}{\partial z}. \quad (4.2.16)$$

Отметим, что для вывода выражений (4.2.15) и (4.2.16) учитывались равенства

$$(\frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho})_{Tc} = -\frac{1}{\rho^2} (\frac{\partial \rho}{\partial c})_{PT}, \quad (\frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho})_{Pc} = -(\frac{\partial \sigma}{\partial c})_{PT}.$$

Принимая во внимание условие  $(\partial p' / \partial z)_{z=0} = 0$ , которое выполняется на границе жидкость-твердое тело, из выражений (4.2.16) и (4.2.7) получим выражение

$$\frac{\rho_0 u_2^2}{\bar{\sigma}} (\frac{\partial \sigma}{\partial T})_{Pc} [T_0 \sigma_0 + (\frac{Z}{\rho_0} + B) c_0] (\frac{\partial T'}{\partial z})_{z=0} + \kappa \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial T'}{\partial z})_{z=0} = \kappa_b \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial T'_b}{\partial z})_{z=0}, \quad (4.2.17)$$

которое является упрощенным вариантом условия непрерывности потоков тепла на границе твердое тело-сверхтекучий раствор  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ .

В условиях микрофонной регистрации ФА -сигнала тепловой источник имеет гармоническую форму. Это приводит к тому, что и временная зависимость возмущения температуры соответствует  $T'_i(z, t) = T'_i(z, \omega) \exp(i\omega t)$ . С учетом этого обстоятельства из выражения (4.2.17) получим равенство

$$\left\{ \omega \kappa - \frac{i\rho_0 u_2^2}{\bar{\sigma}} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{pc} [T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0] \right\} \frac{\partial T'}{\partial z} = \omega \kappa_b \frac{\partial T'_b}{\partial z}. \quad (4.2.18)$$

Или, принимая во внимание равенство  $C_p = T_0 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{pc}$ , из (4.2.18) получим выражение

$$\left\{ \omega \kappa - \frac{i\rho_0 C_p u_2^2}{T_0 \bar{\sigma}} [T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0] \right\} \frac{\partial T'}{\partial z} = \omega \kappa_b \frac{\partial T'_b}{\partial z}, \quad (4.2.19)$$

которое будет использовано при решении граничных задач в следующих разделах.

### 4.3. Теория генерации фотоакустического сигнала сверхтекучим раствором ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$

Предположим, что ФА-камера заполнена сверхтекучим раствором  ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$ , который находится в равновесии со своим собственным паром или парами одного из изотопов. Гармонически модулированный с частотой  $\omega$  лазерный луч с интенсивностью  $I_0$  перпендикулярно падает на ФА-камеру. Газ и подложку считаем прозрачными. Для трехслойной системы подложка-сверхтекучий раствор-газ (собственные пары) имеет место следующая система уравнений теплопроводности [95]:

$$\rho_g C_{pg} \frac{\partial T'_g}{\partial t} = \kappa_g \frac{\partial^2 T'_g}{\partial z^2}, \quad 0 \leq z \leq l_g \quad (4.3.1)$$

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - u_2^2 (1 - \varepsilon_0) \Delta T' = \frac{1}{\rho_0 \sigma_0 c_p} (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2) \frac{\partial f}{\partial t}, \quad -l \leq z \leq 0, \quad (4.3.2)$$

$$\rho_b C_{pb} \frac{\partial T'_h}{\partial t} = \kappa_b \frac{\partial^2 T'_h}{\partial z^2}, \quad -l \leq z \leq -(l+l_h), \quad (4.3.3)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\beta \alpha_T u_1^2}{\bar{\sigma}}, \quad \beta = \frac{\bar{\sigma}}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{pc} \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_{pc} + \frac{c_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{PT}.$$

Гармоническая форма теплового источника позволяет нам временную зависимость возмущения температуры в уравнениях (4.3.1)-(4.3.3) представить в виде  $T'_g(z,t) = T'_g(z,\omega) \exp(i\omega t)$ ,  $T'(z,t) = T'(z,\omega) \exp(i\omega t)$ ,  $T'_b(z,t) = T'_b(z,\omega) \exp(i\omega t)$ .

Тогда получим

$$\frac{d^2 T'_g}{dz^2} - \sigma_g^2 T'_g = 0, \quad 0 \leq z \leq l_g, \quad (4.3.4)$$

$$\frac{d^2 T'}{dz^2} + \tilde{q}_2^2 T' = -\frac{i\alpha l_0 \omega (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2} e^{\alpha z}, \quad -l \leq z \leq 0, \quad (4.3.5)$$

$$\frac{d^2 T'_b}{dz^2} - \sigma_b^2 T'_b = 0, \quad -l \leq z \leq -(l+l_b), \quad (4.3.6)$$

где  $\sigma_j = (1+i)\mu_j^{-1}$ , а  $\chi_j = (\kappa_j / \rho_j C_{pj})$  и  $\mu_j(\omega) = \sqrt{(2\chi_j / \omega)}$  - коэффициент теплопроводности и длина тепловой диффузии в соответствующих слоях,  $q_2 = \omega / \tilde{u}_2$ ,  $\tilde{u}_2 = u_2 \sqrt{1 - \varepsilon_0}$ .

Условия непрерывности температур и потоков тепла на границах газ-образец и образец-подложка, отсутствие нагрева на торцевых частях ФА - камеры, а также наличие скачка температур на границе жидкость- твердое тело-жидкость составляют необходимые шесть граничных условий для решения системы уравнений (4.3.4)-(4.3.6). С учетом выражения (4.2.19) эти граничные условия примут следующий вид:

$$\kappa_g \frac{\partial T'_g}{\partial z} \Big|_{z=0} = \kappa \frac{\partial T'}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad \left\{ \omega \kappa - \frac{i\rho_0 C_p u_2^2}{T_0 \bar{\sigma}} [T_0 \sigma_0 + \left( \frac{Z}{\rho_0} + B \right) c_0] \right\} \frac{\partial T'}{\partial z} \Big|_{z=-l} = \omega \kappa_b \frac{\partial T'_b}{\partial z} \Big|_{z=-l}, \quad (4.3.7)$$

$$R_K^{-1} (T' - T'_b) \Big|_{z=-l} = -\kappa_b \frac{\partial T'_b}{\partial z} \Big|_{z=-l}, \quad T'_g \Big|_{z=0} = T' \Big|_{z=0}, \quad T'_g \Big|_{z=l_g} = 0, \quad T'_b \Big|_{z=-(l+l_b)} = 0, \quad (4.3.8)$$

где  $R_k$  - сопротивление Капицы для этого раствора [59].

Используя стандартные методы, решения (4.3.4)-(4.3.6) можно представить в виде

$$T'_g(z, \omega) = \Theta \exp(-\sigma_g z), \quad 0 \leq z \leq l_g, \quad (4.3.9)$$

$$T'_s(z) = \gamma_1 \exp(i\tilde{q}_2 z) + \gamma_2 \exp(-i\tilde{q}_2 z) - \frac{i\omega I_0 \omega (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2) \exp(\alpha z)}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2 (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)}, \quad -l \leq z \leq 0, \quad (4.3.10)$$

$$T'_b(z) = W \exp(\sigma_b(z+l)), \quad -(l+l_b) \leq z \leq -l, \quad (4.3.11)$$

которые представляют собой граничные условия, в том числе условие непрерывности температур на торцах ФА-камеры.

Из первых четырех условий (4.3.7)-(4.3.8) для определения коэффициентов  $\Theta, \gamma_1, \gamma_2$  и  $W$  получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \frac{i\omega I_0 (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2) \alpha}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2 (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)} = \Theta, \quad (4.3.12)$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{\alpha^2 I_0 \omega (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2 \tilde{q}_2 (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)} = g\Theta, \quad (4.3.13)$$

$$\gamma_1 e^{-i\tilde{q}_2 l} - \gamma_2 e^{i\tilde{q}_2 l} - \frac{\alpha^2 I_0 \omega (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2 \tilde{q}_2 (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)} e^{-\alpha l} = W * b, \quad (4.3.14)$$

$$\gamma_1 e^{-i\tilde{q}_2 l} + \gamma_2 e^{i\tilde{q}_2 l} - \frac{i\omega I_0 \alpha (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2 (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)} e^{-\alpha l} = W * s. \quad (4.3.15)$$

Здесь использованы обозначения

$$g = \frac{ik_g \sigma_g}{k\tilde{q}_2}, \quad b = \frac{k_b \sigma_b}{ik\tilde{q}_2 (1 - \varepsilon_1)}, \quad \varepsilon_1 = \frac{i\rho C_p \tilde{u}_2^2}{\omega k T_0 \bar{\sigma}} [T_0 \sigma_0 + c_0 (\frac{Z}{\rho_0} + B)], \quad s = 1 - k_b \sigma_b R_k^{-1}.$$

Для определения  $\Theta$  и  $W$  из (4.3.12)- (4.3.15) получим следующую систему уравнений:

$$(1 + g)\Theta - (b + s)W e^{iq_2 l} = F(i + \frac{\alpha}{\tilde{q}_2})(e^{-\alpha l} e^{i\tilde{q}_2 l} - 1). \quad (4.3.16)$$

$$(1 - g)\Theta - W(s - b)e^{-iq_2 l} = F(i - \frac{\alpha}{\tilde{q}_2})(e^{-\alpha l} e^{-i\tilde{q}_2 l} - 1), \quad (4.3.17)$$

где

$$F = \frac{\omega \alpha I_0 (\bar{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{2\rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2^2 (\alpha + q_2^2)}.$$

Очевидно, что при детектировании ФА-сигнала микрофоном достаточно иметь выражение для величины  $\Theta$ -комплексной амплитуды колебания

температуры в этом газовом слое. Из системы уравнений (4.3.16)-(4.3.17) нами получено следующее выражение для этой величины:

$$\Theta = \frac{I_9 \alpha (\tilde{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2)}{2 \rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2 (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)} \times \left[ \frac{(s+b)(i\tilde{q}_2 - \alpha) \exp(i\tilde{q}_2 l) - (s-b)(i\tilde{q}_2 + \alpha) \exp(-i\tilde{q}_2 l) + 2(\alpha s - ib\tilde{q}_2) \exp(-\alpha l)}{(g+1)(s-b) \exp(-i\tilde{q}_2 l) + (g-1)(s+b) \exp(i\tilde{q}_2 l)} \right]. \quad (4.3.18)$$

Нетрудно заметить, что выражение (4.3.18) существенно отличается от соответствующего выражения, полученного в [95]. Следовательно, и частотная зависимость параметров ФА-сигнала для сверхтекучего раствора также будет существенно отличаться от результатов [95]. Для определения характеристик возбуждаемого ФА-сигнала необходимо найти выражение для акустического колебания давления в газовом слое, которое определяется посредством колебания температуры в этом слое следующим образом:

$$\delta p(\omega) = \frac{\mathcal{P}_0 2\pi\mu_g}{T_0 l_g} \bar{T}_g(z, \omega) = \frac{\mathcal{P}_0}{T_0 l_g} \int_0^{2\pi\mu_g} T_g(z, \omega) dz = \frac{\mathcal{P}_0}{T_0 l_g \sigma_g} \Theta. \quad (4.3.19)$$

Выражение (4.3.12) имеет место для модели теплового акустического поршня и соответствует усредненной величине  $T_g(z, \omega)$  по толщине слоя  $2\pi\mu_g$ . Выполняя интегрирование выражения (4.3.19), будем иметь

$$\delta p(\omega) = \frac{Y \alpha (1-i)\mu_g}{\alpha^2 + \tilde{q}_2^2} \left[ \frac{(s+b)(i\tilde{q}_2 - \alpha) e^{i\tilde{q}_2 l} - (s-b)(i\tilde{q}_2 + \alpha) e^{-i\tilde{q}_2 l} + 2(\alpha s - ib\tilde{q}_2) e^{-\alpha l}}{(g+1)(s-b) e^{-i\tilde{q}_2 l} + (g-1)(s+b) e^{i\tilde{q}_2 l}} \right], \quad (4.3.20)$$

где

$$Y = \mathcal{P}_0 I_0 (\tilde{\sigma} - \beta \alpha_T u_1^2) / [4 T_0 l_g \rho_0 \sigma_0 C_p \tilde{u}_2].$$

Уместно подчеркнуть локализованность тепловой волны, распространяющейся из раствора в буферный газ в слое толщиной  $\mu_g$  (длина тепловой диффузии). Оказалось, что толщина этого слоя изменяется периодически и фактически играет роль акустического поршня и генерирует ФА-сигнал.

Выражение (4.3.20) является искомым и описывает колебание давления в газовом слое и позволяет найти зависимости параметров этого сигнала, как от частоты модуляции, так и от физических (акустических, оптических и

теплофизических) параметров среды. Более подробно остановимся на этих вопросах в следующем разделе

#### 4.4. Особенности частотной зависимости параметров фотоакустического сигнала, возбуждаемого сверхтекучим раствором $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$

Выражение (4.3.20) является общим выражением для генерируемого ФА- сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Очевидно, что амплитуда и фаза этого сигнала сложным образом зависят как от физических параметров среды, так и от частоты модуляции падающего луча. Между тем, применимость этого выражения ограничена областью частот

$$\omega \ll \frac{\tilde{u}_2^2}{\chi T_0 \tilde{\sigma}} [T_0 \sigma_0 + c_0 (\frac{Z}{\rho_0} + B)],$$

что связано с условием равновесия между раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  и паром. Это позволяет написать выражение

$$b = \frac{k_b \sigma_b}{ik \tilde{q}_2 \{1 - \frac{i \rho_0 C_p \tilde{u}_2^2}{\omega k T_0 \tilde{\sigma}} [T_0 \sigma_0 + c_0 (\frac{Z}{\rho_0} + B)]\}} \approx \frac{k_b \sigma_b T_0 \tilde{\sigma}}{\rho_0 C \tilde{u}_2 [T_0 \sigma_0 + c_0 (\frac{Z}{\rho_0} + B)]}.$$

С другой стороны, в зависимости от толщины жидкого слоя и величины оптического коэффициента поглощения луча  $\alpha$  может иметь место два существенно отличающихся случая: случаи непрозрачного ( $\alpha l \gg 1$ ) и прозрачного ( $\alpha l \ll 1$ ) жидкого слоя. Подробно рассмотрим эти случаи.

1. Случай непрозрачного (или сильно поглощающего) жидкого слоя  $\alpha l \gg 1$ . Тогда  $\exp(-\alpha l) \rightarrow 0$  и для выражения (4.3.20) справедливо следующее равенство:

$$\delta p(\omega) = \frac{Y k \alpha^2 \mu_g^2}{k_g (\alpha^2 + q_2^2)} \frac{G_1 \cos(q_2 l) + G_2 \sin(q_2 l) + i(G_3 \cos q_2 + G_4 \sin q_2 l)}{g_1 \cos q_2 l + g_2 \sin q_2 l + i[g_3 \cos(q_2 l) + g_4 \sin(q_2 l)]}. \quad (4.4.1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
g_1(\omega) &= 2\left[1 - \frac{\mu_g k_b \omega}{k_g \mu_b \omega_\chi f_d} \frac{\kappa_b}{R_k \mu_b}\right], & g_2(\omega) &= -\frac{\kappa q_2 \mu_g}{\kappa_g} - \frac{2\kappa_b \omega}{\kappa q_2 \omega_\chi f_d \mu_b}, \\
g_3(\omega) &= \frac{2\mu_g \kappa_b \omega}{\kappa_g \mu_b \omega_\chi f_d} \left(1 - \frac{\kappa_b}{\mu_b R_k}\right), & g_4(\omega) &= \frac{\kappa \mu_g q_2}{\kappa_g} + \frac{2\kappa_b \omega}{\kappa q_2 \omega_\chi f_d \mu_b} \left(1 - \frac{2\kappa_b}{R_k \mu_b}\right), \\
G_1(\omega) &= 2\left[1 + \frac{\kappa_b \omega}{\omega_\chi \mu_b f_d \kappa \alpha}\right], & G_2(\omega) &= 2\left[\frac{q_2}{\alpha} - \frac{\kappa_b \omega}{q_2 \omega_\chi f_d \mu_b \kappa}\right], \\
G_3(\omega) &= (\omega) \frac{2\kappa_b \omega}{\kappa \alpha \mu_b \omega_\chi f_d} \left(\frac{2\kappa_b R_k}{\mu_b} - 1\right), & G_4(\omega) &= \frac{2\kappa_b \omega}{\omega_\chi \mu_b f_d q_2 \kappa} \left(1 - 2 \frac{\kappa_b R_k}{\mu_b}\right), \\
\omega_\chi &= \frac{\rho C_p \tilde{u}_2^2}{\kappa T_0 \tilde{\sigma}} \left[T_0 \sigma_0 + c_0 \left(\frac{Z}{\rho_0} + B\right)\right].
\end{aligned}$$

Выражение (4.4.1) представим в виде

$$\delta p(\omega) = |\delta p(\omega)| \exp(i\varphi(\omega)), \quad |\delta p(\omega)| = \frac{Y \kappa \alpha^2 \mu_g^2 R(\omega)}{k_g (\alpha^2 + \tilde{q}_2^2)}, \quad (4.4.2)$$

где

$$R(\omega) = [R_2(\omega) / R_1(\omega)]^{1/2}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega),$$

$$\varphi_1(\omega) = \arctg \frac{M_2(\omega)}{M_1(\omega)}, \quad \varphi_2(\omega) = \arctg \frac{N_2(\omega)}{N_1(\omega)},$$

$$R_2(\omega) = N_1^2(\omega) + N_2^2(\omega), \quad R_1(\omega) = M_1^2(\omega) + M_2^2(\omega),$$

$$N_1(\omega) = [G_1 \cos(q_2 l) + G_2 \sin(q_2 l)], \quad N_2(\omega) = [G_3 \cos(q_2 l) + F_4 \sin(q_2 l)],$$

$$M_1(\omega) = [g_1 \cos(q_2 l) + g_2 \sin(q_2 l)], \quad M_2(\omega) = [g_3 \cos(q_2 l) + g_4 \sin(q_2 l)],$$

а величины  $|\delta p(\omega)|$  и  $\varphi(\omega)$  являются амплитудой и фазой возбуждаемого ФА-сигнала, соответственно.

Очевидно, что для выявления особенностей частотной зависимости амплитуды и фазы генерируемого ФА-сигнала необходимо выполнить численные расчеты этих величин по выше полученным выражениям. Нами выполнен такой расчет для случая, когда  $\alpha = 200 \text{ м}^{-1}$ ,  $T = 1 \text{ К}$ ,  $l = 0.02 \text{ м}$ ,  $l_g = 10^{-2} \text{ м}$ ,  $C_{Pg} = 7 \times 10^3 \text{ Дж/кгК}$ ,  $u_2 = 26 \text{ м/с}$ ,  $u_1 = 224 \text{ м/с}$ ,  $\rho = 128 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_b = 2 \times 10^3 \text{ кг/м}$ ,  $C_p = 933 \text{ Дж/кгК}$ ,  $C_{pb} = 0.0025 \text{ Дж/кгК}$ , [21]  $R_k = 0.057 \text{ м}^2 \text{ К/Вм}$   $\kappa_g = 0.003 \text{ Вм/мК}$ ,  $\kappa_b = 0.03 \text{ Вм/мК}$ . ( $R_k$ -кварцевое стекло).[16]

На рис. 4.2-4.6 иллюстрированы результаты расчета. Отметим, что в данном случае роль подложки играет кварцевое стекло. Вторые слагаемые в выражениях для функций  $g_1(\omega)$ ,  $g_2(\omega)$ ,  $g_4(\omega)$ ,  $G_1(\omega)$  и  $G_2(\omega)$  являются прене-

брежимо малыми по сравнению с первыми. Тогда справедливы приближенные равенства

$$g_1(\omega) \approx 2, \quad g_2(\omega) \approx -\frac{\kappa q_2 \mu_g}{\kappa_g}, \quad g_4(\omega) \approx \frac{\kappa q_2 \mu_g}{\kappa_g}, \quad G_1(\omega) \approx 2, \quad G_2(\omega) \approx \frac{2q_2}{\alpha}.$$

В области частот, реализующихся в ФА-экспериментах, с большим запасом можно принять  $g_3(\omega) \approx 0$ ,  $G_3(\omega) \approx 0$  и  $G_4(\omega) \approx 0$ . Это приводит к тому, что  $N_2(\omega) \approx 0$  и фаза  $\varphi_2(\omega) \approx 0$ . Частотная зависимость функции  $R_1(\omega)$  формируется в конкуренции между периодическим изменением функций  $M_1(\omega)$  и  $M_2(\omega)$ , которые являются противофазными, при  $M_1(\omega) = 0$  функция  $M_2(\omega)$

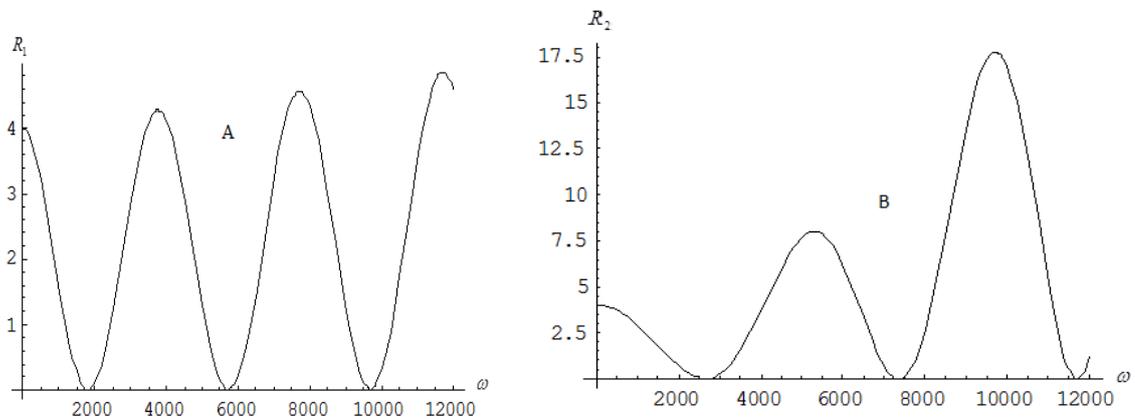


Рис. 4.2. Частотная зависимость функции  $R_1(\omega)$  (кривая А) и  $R_2(\omega)$  (кривая Б) при  $T_0 = 1.К$ ,  $l = 2 \times 10^{-2} м$  и  $\alpha = 200 м^{-1}$ .

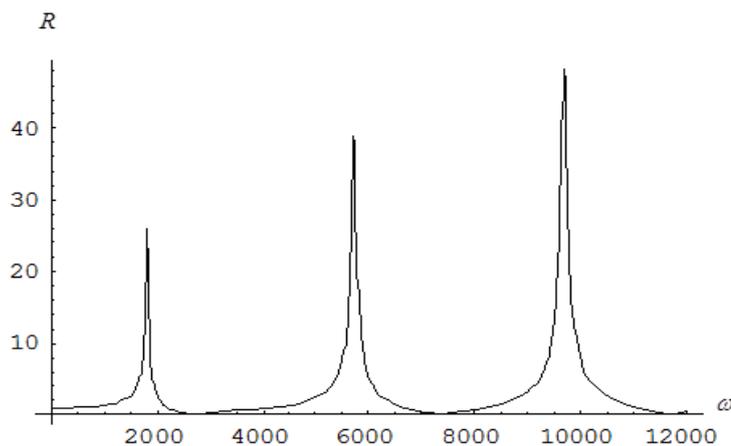


Рис. 4.3. Частотная зависимость функции  $R(\omega) = R(\omega)/R(\omega)$  (значения параметров аналогичны рис. 4.2).

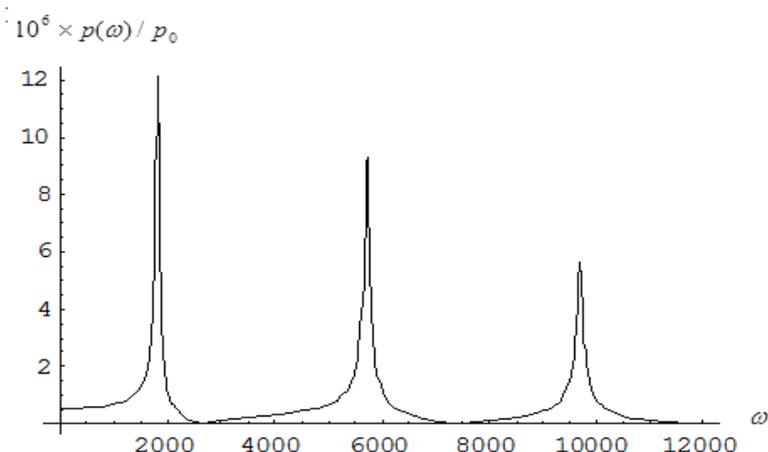


Рис. 4.4. Частотная зависимость амплитуды ФА-сигнала  $p(\omega)/p_0$  (значения параметров аналогичны рис.4.2.).

имеет максимальное значение и, наоборот, при  $M_2(\omega)=0$  функция  $M_1(\omega)$  максимальна. В результате имеем явную частотную зависимость  $R_1(\omega)$ , представленную на рис. 4.2А. Частотная зависимость функции  $R_2(\omega)$  формируется во взаимодействии линейно нарастающей функции  $G_2(\omega)$  с знакопеременной функцией  $\text{Sin}(q_2l)$ . В результате имеет место та зависимость, которая приведена на рис. 4.2Б.

Из рис.4.2 видно, что численные значения функций  $R_1(\omega)$  и  $R_2(\omega)$  являются величинами одного и того же порядка, а их частотные зависимости являются противофазными. Это приводит к тому, что частотная зависимость функции  $R(\omega)$  имеет набор импульсов или гармоник, положения минимумов и максимумов которых примерно совпадает с соответствующими положениями  $R_1(\omega)$  (см. рис. 4.3). На рис. 4.4 представлена общая картина зависимости амплитуды ФА-сигнала от частоты, из которой следует, что:

- 1) положения максимумов гармоник определяются  $\omega_{\max(n)} = (0.5\pi + n\pi)u_2 / l$ ;
- 2) смещение положения пиков можно определить согласно выражению  $\Delta\omega_{\max} = \pi u_2 / l \approx 4 \times 10^3 \text{ c}^{-1}$ .

Зависимость величины фазы ФА- сигнала от частоты представлена на рис. 4.5, из которой следует, что на частотах  $\omega_{n(0)} = n\pi u_2 / l$  эта функция имеет

нули, а при  $\omega_n = (\frac{\pi}{4} + n\pi)u_2/l$  максимумы.

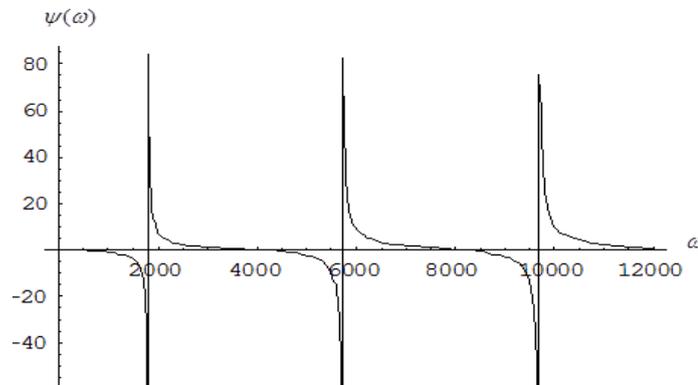


Рис. 4.5. Зависимость фазы ФА-сигнала от частоты (значения параметров аналогичны рис. 4.2)

2) Жидкий слой является слабо поглощающим. Тогда  $\alpha l \ll 1$ ,  $\exp(-l\alpha) \approx 1$  и из (4.3.20) для ФА-сигнала получим выражение

$$\delta p(\omega) = \frac{Yk\alpha^2\mu_g^2}{k_g(\alpha^2 + q_2^2)} \frac{E_1(\omega) + iE_2(\omega)}{g_1\cos(q_2l) + g_4\sin(q_2l) + i[g_2\cos(q_2l) + g_3\sin(q_2l)]}, \quad (4.4.3)$$

где

$$E_1(\omega) = G_1(\cos q_2l - 1) + G_2\sin q_2l, \quad E_2(\omega) = G_3\cos q_2l + G_4\sin q_2l + G_5,$$

$$G_5(\omega) = \frac{2\kappa_b\omega}{\omega_\chi\mu_b f_d \alpha \kappa} \left(1 - 2\frac{\kappa_b R_k}{\mu_b}\right).$$

Выражение (4.4.3) перепишем в виде

$$\delta p = |\delta p| \exp[i\psi], \quad |\delta p| = \frac{Yk\alpha^2\mu_g^2 R_0(\omega)}{k_g(\alpha^2 + q_2^2)}, \quad (4.4.4)$$

где

$$R_0(\omega) = [R_3(\omega)/R_1(\omega)]^{1/2}, \quad \psi = \psi_2 - \psi_1, \quad R_3(\omega) = [E_1^2(\omega) + E_2^2(\omega)]^{1/2}, \quad \psi_2 = \arctg(E_2/E_1), \quad \psi_1(\omega) = \varphi_1(\omega).$$

Нетрудно заметить, что и в этом случае частотная зависимость параметров ФА-сигнала определяется соответствующими зависимостями функций  $R_1(\omega)$ ,  $R_3(\omega)$ ,  $\psi_1(\omega)$  и  $\psi_2(\omega)$ . Нами выполнен численный расчет частотной зависимости амплитуды и фазы ФА-сигнала при  $\alpha = 5\text{ м}^{-1}$ ,  $T = 1\text{ К}$ ,  $l = 0.02\text{ м}$ . Дру-

гие параметры те же, что использованы выше. Результаты расчета показаны на рис.4.6.-4.9.

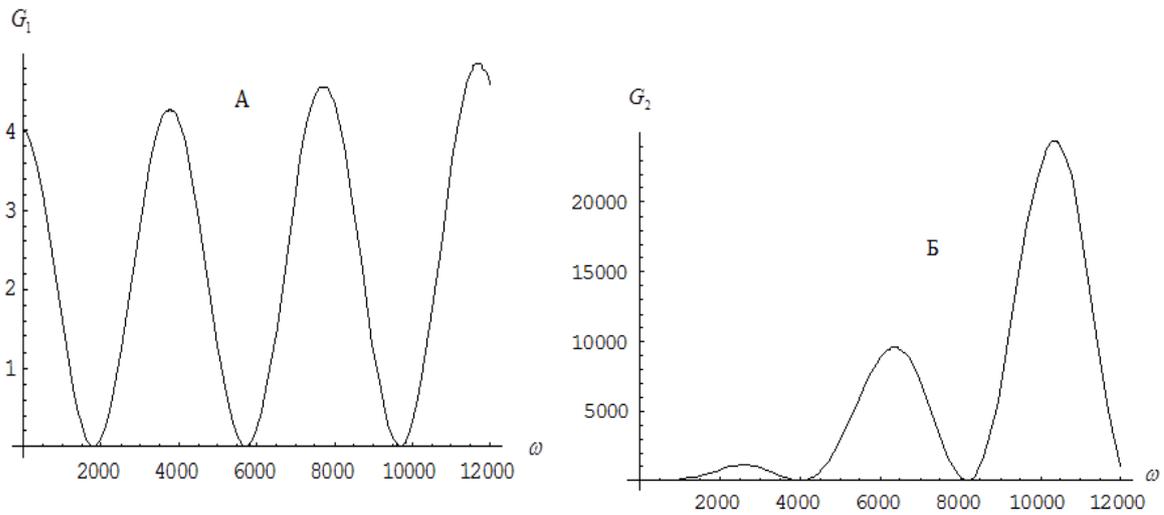


Рис. 4.6. Частотная зависимость функции  $R_1(\omega)$  (кривая А) и  $R_3(\omega)$  (кривая Б) при  $T_0 = 1.K$ ,  $l = 2 \times 10^{-2} м$  и  $\alpha = 5 м^{-1}$ .

Сравнивая результаты расчета рис. 4.4 и 4.8, можно заключить, что спад амплитуды ФА-сигнала с уменьшением коэффициента поглощения является нелинейным. Вместе с тем, из сравнения рис. 4.5. и 4.9. обнаруживается, что фаза ФА-сигнала при этом существенно не изменяется.

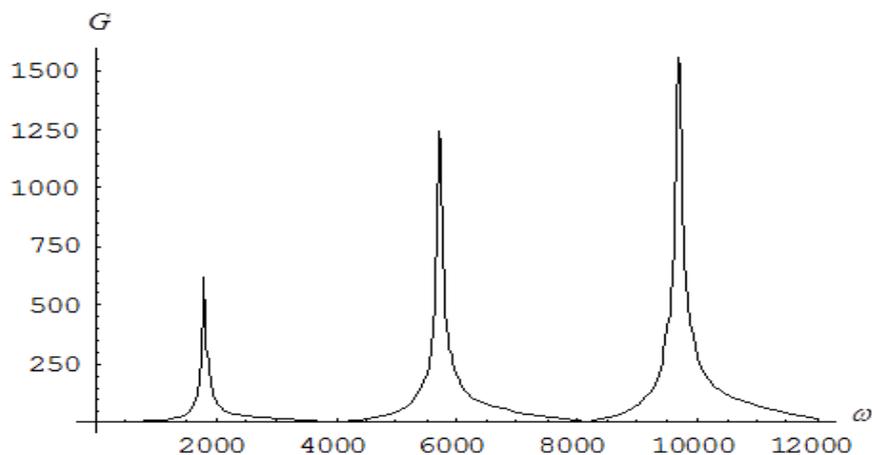


Рис.4.7. Частотная зависимость функции  $R_0(\omega)$ .

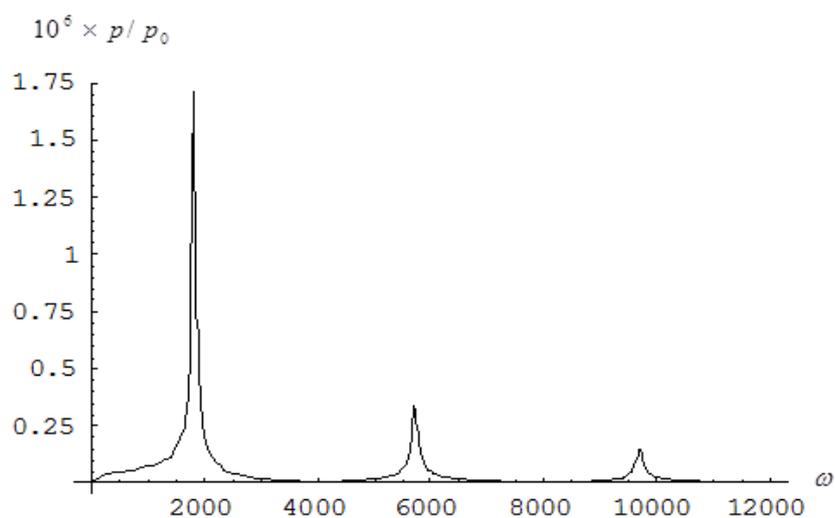


Рис.4.8. Частотная зависимость амплитуды ФА-сигнала  $p(\omega)/p_0$  (значения параметров аналогичны рис.4.6).

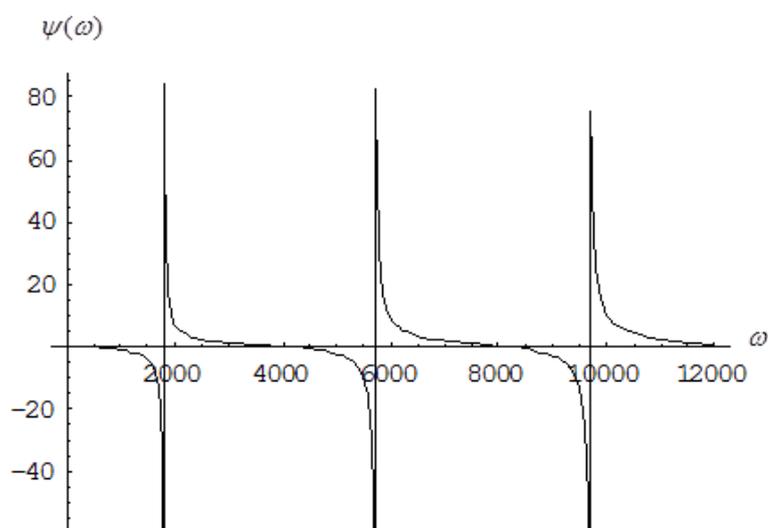


Рис.4.9. Зависимость фазы ФА-сигнала от частоты (значения параметров аналогичны рис.4.6).

Результаты численного расчета частотной зависимости амплитуды и фазы ФА-сигнала показывают, что частотное распределения этих параметров описываются набором импульсов или гармоник. Очевидно, что появление этих импульсов прямым образом обусловлено слабо затухающим вторым звуком в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}-^4\text{He}$ .

Подводя итоги настоящей главы, можно утверждать, что нами проработана теория возбуждения ФА-сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в буферный газ. Здесь же найдены основные особенности частотной зависимости амплитуды и фазы этого сигнала. Очевидно, что экспериментальная реализация предложенного нами ФА-метода для сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  позволит надежно определять оптические, теплофизические и акустические величины исследуемой системы, а также теплофизические свойства подложки и буферного газа при гелиевых температурах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Разработана теория генерации оптоакустических импульсов второго и первого звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  по тепловому механизму импульсами прямоугольной, гауссовой и негауссовой форм лазерного излучения. Численными расчетами установлено, что при прямоугольной форме лазерного излучения все генерируемые оптоакустические импульсы имеют двухполюсную форму и происходит их смещение в область малых времен, а их амплитуда уменьшается по мере уменьшения длительности импульса лазерного луча. Обнаружена возможность генерации спектра цилиндрических волн обоих звуков, которые состоят из быстрых и медленных составляющих. Найдена зависимость амплитуды этих волн от коэффициента поглощения падающего луча, расстояния от оси луча, частоты генерации и длительности импульса падающего луча.

2. Получены общие выражения для элементов матрицы передаточных функций ОА-волн обоих звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , как для случая жесткой, так и мягкой границ. Путем численного расчета выявлено, что:

-частотные зависимости всех ПФ являются двух контурными и их характеристики достаточно чувствительными к термодинамическому состоянию среды, следовательно, измерения параметров этого сигнала позволяют определить значения различных физических величин этой системы, в том числе величину сопротивления Капицы;

-при гауссовой форме падающего луча с шириной  $\tau_L$  и жесткой границе временной профиль ПФ также имеет гауссову форму, положения максимумов которых соответствуют  $t_{\max} \approx z/u_1$  и  $t_{\max} \approx z/u_2$ ;

-для случая мягкой границы системы временные зависимости ПФ для длинных импульсов падающего луча являются кривыми с пологими максимумом и минимумом, а для коротких импульсов состоят из двух экспоненциальных кривых с переходной областью шириной  $\sim \tau_L$ .

3. Создана теория генерации ФА-сигнала сверхтекучим раствором в буферный газ. Получена оценка для предельного значения интенсивности падающего лазерного излучения, соблюдение которого обеспечивает выполнение ФА-эксперимента с сохранением сверхтекучей фазы раствора. Проведен анализ выражения для акустического колебания давления в буферном газе и получены достаточно простые выражения для амплитуды и фазы ФА - сигнала, соответствующие этим случаям. Выполнен численный расчет частотной зависимости параметров ФА- сигнала для двух предельных случаев и обнаружено, что частотные распределения этих параметров описываются набором импульсов или гармоник, появление которых прямым образом обусловлено наличием слабозатухающего второго звука в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .

## Литература

- [1]. Кеезом В. Гелий. //- М.: Из-во Иностранной литературы, –1949. – С.542
- [2] .Daunt J.G. Smttn R.S. The problem of liquid helium -some recent Aspects//  
Rev. Mod. Phys. –1954. –V.26. – №2. –Р.172-236.
- [3].Халатников И.М. Гидродинамика гелия II // УФН.–1956. –Т.60. –Вып.1 –  
С.69-160.
- [4]. Халатников И.М. Теория кинетических явлений в HeII// УФН. –1956.-  
Вып.8. –с.673-753.
- [5]. Халатников И.М. Теория сверхтекучести// -М.: Наука, –1971. –320.с
- [6]. Есельсон Б.Н., Григорьев В.Н., Иванцов В.Г., Рудаковский Э.Я.,  
Саникидзе Д.Г., И.А.Сербин И.А.// Растворы квантовых жидкостей  $^4\text{He}$ -  
 $\text{He}^4$ // М.- Наука. –1973. –424 с.
- [7]. Б. Н. Есельсон., М.И. Каганов, Э.Я. Рудаковский, И.А. Сербин.// Звук в  
сверхтекучей жидкости. УФН. –1974 . –Т.112. –Вып. 4.–С.591- 636.
- [8]. В.Л. Гинзбург, А.А Собянин. Сверхтекучесть гелия- II вблизи  $\lambda$ - точки  
// УФН. –1976. –Т.120.-Вып.2. –С.153-216.
- [9]. Maris J. Phonon-phonon interactions in liquid helium // Rev. Mod. Phys.  
–1977. – V.49. –№2. –Р.341-359.
- [10]. Патерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. –М.:Из-во Мир,  
–1978, –.520 с.
- [11]. Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. –М.:Из-  
во Мир, –1978. –304 с.
- [12]. Кресин В.З. Сверхпроводимость и сверхтекучесть. –М.:Из-во Наука,  
–1978. – 188 с.
- [13]. Есельсон Б.Н., Григорьев В.Н., Иванцов В.Г., Рудаковский Э. Я. Свойства  
жидкого и твердого гелия. –М: Из. –во Стандартов, –1978. –128 с.
- [14]. Саникидзе Д.Г. Волновые процессы в сверхтекучей жидкости. – Тбили  
си, из.-во «Мецниереба», –1981. – 152 с.
- [15]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. – М.: Наука.– 1986. –733 с.
- [16]. Аметистов Е.Б., Григорьев В.А. Теплообмен в He-II. –М.: Из-во

- Энергоатомиздат, –1986. – 144с.
- [17]. Wilks J. The Properties of Liquid and Solid Helium, –1987 Oxford, Clarendon Press. –P.478.
- [18]. Адаменко И.Н. Динамика классических и квантовых жидкостей. – К.: УМКВО, – 1988. –119 с.
- [19]. Swartz E.T., Pohl R.O. Thermal boundary resistance // Rev.Mod. Phys. –1989. –V.61. – № 3 . –P.605-668.
- [20]. Немировский С.К. Нелинейная акустика сверхтекучего гелия //УФН. –1990. –Т.160. –Вып.6. –С.51-95.
- [21]. Pobell F. Matter and method at low temperatures. – N.Y. Springer–Verlag, –1996. –P.250.
- [22]. Зиновьева К.Н. Особенности прохождения акустической энергии из жидкого гелия в металлы// ФНТ. –1997. –Т.23. –№5/6.–С.485-497.
- [23]. Hohenberg P.C., Martin P.C. Microscopic theory of superfluid helium// Ann.Phys. – 2000. –V. 281. – P.636-705.
- [24]. Кондаурова Л.П., Немировский С.К. Численное исследование эволюции интенсивных волн второго звука в турбулентном сверхтекучем гелии// Теплофизика и аэромеханика.–2008. –Т.15. –№2. –С.237- 246.
- [25]. Efimov V.B., Ganshin A.N., Kolmakov G.V., McClintock P.V. E. and Mezhev- Deglin L.P.// Observation of acoustic turbulence in a system of nonlinear second sound waves in superfluid  $^4\text{He}$ // –ФНТ. –2008. V.34. – №(4/5), –с.367.
- [26]. Efimov V.B., Ganshin A.N., McClintock P.V.E. Statistical properties of strongly nonlinear waves within a resonator.// Phys Rev E, –2008. –V.78.– P.066611.
- [27]. Pashitskiĭ E.A., Vilchinskiĭ S.I., and Chumachenko A.V. “Infrared” singularities in the field theory of superfluidity and temperature corrections to the first and second sound velocities in helium II.//. Low Temperature Physics. –2008. –V.34. –p.320.
- [28]. Efimov V.B., Ganshin A.N., Kolmakov G. V., McClintock P. V. E. and

- Mezhov-Deglin L.P.// Acoustic Turbulence in Superfluid  $^4\text{He}$ .// JLTP. – 2009. –V.156, –№3/6. –P.95-115.
- [29]. Кондаурова Л.П., Андрющенко В.А., Немировский С.К.//Численное моделирование динамики вихревого клубка. Вычислительные технологии. – 2010. -Т.15. –№2. –С.41- 51.
- [30]. Ganshin A.N., Kolmakov G.V., Mezhov-Deglin L.P., McClintock P.V.E. Experiments on wave turbulence: evolution and growth of second sound acoustic turbulence in superfluid  $^4\text{He}$  confirm self-similarity// – New Journal of Physics. –2010. –V.12. –P.083047 (10pp)
- [31]. Efimov V. B., Ganshin A.N., Kolmakov G. V., McClintock P.V.E. and Mezhov-Deglin L.P. Rogue waves in superfluid helium.// Euro Phys. J., Special Topics//. –2010. –V.185. – P.181-193.
- [32]. Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Numerical study of the diffusive like decay of the vortex tangle without mutual friction // Low Temperature Physics. –2011. –V.37. –№5. –P.413-415.
- [33]. Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K. Numerical study on decay of the vortex tangles in superfluid helium at zero temperature// Phys. Rev. B. –2012. – V.86.–№13. –P.134506-1- 134506-12.
- [34]. Kondaurova L.P., Pomyalov A., Procaccia I. Structure of quantum vortex tangle in  $\text{He}^4$  counter flow turbulence.// Phys. Rev. B.–2014. – V.89. –№1. – P. 014502-1 - 014502-23.
- [35].Walter F. Wreszinski. Landau superfluids as nonequilibrium stationary states// Journal of Mathematical Physics. –2015. – V.56. – pp. 011901.
- [36]. Demosthenes Kivotides., Energy spectra of finite temperature superfluid helium-4 turbulence// Physics of Fluids. –2014. – V.26, –p.105105
- [37]. Bao S., Guo W., L'vov V. S., and Pomyalov A. Statistics of turbulence and intermittency enhancement in superfluid  $^4\text{He}$  counterflow //Phys. Rev. B. – 2018. –V.98, –pp.174509 .
- [38]. Emil Varga., Jian Gao., Wei Guo. and Ladislav Skrbek. Intermittency enhancement in quantum turbulence in superfluid  $^4\text{He}$ .//, Phys. Rev.3.

- Fluids. –2018. –pp. 094601.
- [39]. Victor S., L'vov and Anna Pomyalov. Theory of energy spectra in superfluid  $\text{He}^4$  counterflow turbulence.// Phys. Rev. –2018. –V.97,–pp.214513.
- [40]. Gao J, Guo W, Yui S., Tsubota M., and Vinen W.F.. Dissipation in quantum turbulence in superfluid  $4\text{He}$  above 1 K. //Phys. Rev. –2018 –V.97, – pp. 184518.
- [41]. Ефимов В.Б., Акустическая турбулентность волн второго звука в сверхтекучем гелии// УФН. –2018, – Т.188,–Вып.10,–С.1025–1048.
- [42]. Гриценко И.А., Дубчак Т.А., Михайленко К.А., Соколов С.С., Шешин Г.А. Нелинейные явления при колебаниях кварцевого камертона, погруженного в сверхтекучей гелий.// физика низких температур. –2018. –Т.44. –№44. – С.46-52.
- [43]. Brian Mastracci, and Wei Guo. An apparatus for generation and quantitative measurement of homogeneous isotopic turbulence  $\text{He-II}$ .//Review of Scientific Instruments.// –2018.–V.89, –pp.015107.
- [44]. Sabouret G. Bradburyet F. R., Bert J. A., and Lyon S. A. Signal and charge transfer efficiency of few electrons clocked on microscopic superfluid helium channels.// Appl. Phys. Lett.–2008.–V.92. –pp.082104.
- [45]. Gunaranjan Chaudhry, J.G.Brisson in. Thermodynamic Properties of Liquid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  Mixtures Between 0-10 bar below 1.5K//–2010.–№158(5). –P.806-853.
- [46]. Бахвалова В.А., Гриценко И.А., Рудаковский Э.Я., Чаговец В.К., Шешин Г.А. Исследования кинетических процессов онцентрированном растворе  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$  методом колеблющегося камертона.//–2015. –Т.41.вып 7, – С.644-651.
- [47]. Бирченко А.П., Михин Н.П., Неонета А.С., Рудаковский Э.Я., Фисун Я.Ю Влияние промежуточной ОЦК фазы на эволюцию сверхтекучих включений в ГПУ матрице раствора  $3\text{He}$  в  $4\text{He}$ // –2016. –Т.42. Вып. 9. –С.929-935.
- [48]. Jihee Yang, Gary G. Ihas, and Dan Ekdahl., Second sound tracking system

//–2017.–V.88.–pp.104705.

- [49]. Гриценко И.А., Майданов В.А., Рубец С.П., Рудавский Э.Я., Рыбалко А.С. Влияние кинетики фазового расслоения на кинетику гомогенизации твердых растворов  $^4\text{He}$ - $^3\text{He}$ . //–2018.–Т.44. –С.398-401.
- [50]. Vikhtinskaya T.G., Nemchenko K.E. and Rogova S.Yu. Excitation of concentration and temperature fluctuations by vibrating bodies in superfluid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  solution // Low Temperature Physics. –2018. – V.44.–pp. 1066.
- [51]. Hideki Yayama, Yugo Nishimura, Hiroka Uchiyama, Hiroshi Kawai, Jean-Paul van Woensel, and Ali G. Hafez., Electric response induced by second sound in superfluid helium// Low Temperature Physics –2018. –V.44. –pp. 1090.
- [52]. Dalban-Canassy M., Hilton D. K., Van Sciver S. W. Experimental investigation of heat transfer through porous media in superfluid helium// –2015. –V.66. –P. 53-62.
- [53]. Miller K., Brisson J. G. Adiabatic expansion of  $^3\text{He}$  in  $^4\text{He}$  // Cryogenics, –2018.–V.96. –P.83-89.
- [54]. Ефимов В.Б., Орлова А.А., Кондаурова Л.П., Горкун А.Г., Теплопередача при импульсном нагреве в сверхтекучем гелии.// Физика низких температур. –2019. –Т.45. –№9. –С.1158-1164.
- [55]. Рудавский Э.Я., Чаговец В.К., Шешин Г.А., Вракина В.А. Механизмы диссипации колебаний камертона в сверхтекучих растворах  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$ . //Физика низких температур. –2020. – Т.46. –№ 1. –С. 49-56.
- [56]. Одилов О.Ш. Лазерная оптоакустическая спектроскопия сверхтекучего гелия. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук// ТНУ, Душанбе. –2010. –135с.
- [57]. Лейло Бехруз С.К. Особенности лазерного электрострикционного возбуждения волн первого и второго звуков в сверхтекучем гелии и растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. ТНУ, Душанбе. –2015. –136с.
- [58]. Капица П.Л. Вязкость жидкого гелия при температурах ниже лямбда-

- Точки. // ДАН СССР. – 1938. –Т.18. – № 18. –С.21-23.
- [59]. Ландау Л.Д. Теория сверхтекучести гелия.// ЖЭТФ. –1941. –Т.11. –С.581- 598.
- [60]. Пешков В. П. Второй звук в гелии-II.// ДАН СССР. –1944. –Т.45. – №9. –С.385- 386.
- [61]. Лифшиц, Е.М. Излучение звука в гелии-II.// ЖЭТФ. – 1944. – Т.14. – Вып.3-4. – С.116-120.
- [62]. Есельсон Б. Н., Каганов М.И., Рудаковский Э.Я., Серби И.А. Возбуждение первого и второго звука в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .// ЖЭТФ.–1966. –Т.51. –Вып.6. – С.1930-1933.
- [63]. Вигдорчик Н.Е., Иоффе И.В., Возможность параметрического возбуждения первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в магнитном поле.// ФНТ. –1988. –Т.14. -№2. – С.115-117.
- [64]. Rosencwaig A., Gersho A. Theory of the photoacoustic effect with Solids. // J . Appl. Phys. –1976. - V.47. - №1.- P.64-69.
- [65]. Митюрин Г.С., Черненко Е.В., Сердюков А.Н. Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок.// Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – Т.25, – № 4. – С.20-26.
- [66]. Митюрин Г.С., Черненко Е.В., Свиридова В.В., Сердюков А.Н. Формирование фотодефлекционного отклика в гидротропной сверх решётке, облучаемой бес селевым световым пучком.// Проблемы физики, математики, техники. – 2016. – Т.27. № 2. – С.18-23.
- [67]. Митюрин Г.С, Лебедева Е.В., Сердюков А.Н. Фотодефлекционная спектроскопия хиральных углеродных нанотрубок.// Проблемы физики, математики, техники. –2016. –Т.27, № 4. –С.19-26.
- [68]. Глазов А.Л., Калиновский В.С., Контрош Е.В., Муратиков К.Л. Исследование процесса отвода тепла на границе полупроводник-керамика в солнечных элементах лазерным термоволновым методом.// Письма в журнал технической физики, –2016. –Т. 42, –С.33-40.

- [69]. Глазов А.Л., Морозов Н.Ф., Муратиков К.Л. О влиянии внешних напряжений на поведение фотоакустических сигналов внутри отпечатка Вика на поверхности стали.// Письма в журнал технической физики, –2016. –Т.42.–С.23-29.
- [70]. Michael J. Eric M. Strohm, Moore, Michael C. Kolios. High resolution ultrasound and photoacoustic imaging of single cells Photoacoustics.//–2016. –V.4. P.36-42.
- [71]. Emmanuel Bossy., Sylvain Gigan. Photoacoustics with coherent light. Photoacoustics./ –2016. –V.4. –P.22–35.
- [72]. Митюрин Г.С., Лебедева Е.Н., Сердюков А.Н. Фототермическое преобразование бесселевых световых пучков в плотном слое хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок. Проблемы физики, математики, техники//– 2017. –Т.33. –№ 4. –С.17-34.
- [73]. Elena Petrova, Anton Liopo, Alexander A., Oraevsky Sergey, Ermilov A. Temperature-dependent optoacoustic response and transient through zero Grüneisen parameter in optically contrasted media.// Photoacoustics. – 2017. –V.7. –P.36-46.
- [74]. Dmitry A. Nedosekin, Tariq Fahmi, Zeid A., Nima, Jacqueline Nolan, Vladimir P. Zharov. Photoacoustic flow cytometry for nanomaterial research.// Photoacoustics . – 2017. –V.6. – P.16-25.
- [75]. Heechul Yoon, Geoffrey P. Luke, Stanislav Y. Emelianov./Impact of depth-dependent optical attenuation on wavelength selection for spectroscopic photoacoustic imaging// Photoacoustics. –2018. –V.12 . –P.46-54.
- [76]. Егоров С.В., Фемто, пикосекундная «терагерцевя» оптоакустика.// Известия РАН. Серия Физическая. –2018. –Т.82, –№5, –С.532-537.
- [77]. Mucong Li, Yuqi Tang., Junjie Yao. Photoacoustic tomography of blood oxygenation: A mini review.// Photoacoustics. –2018. –V.10.–P.65-73.

- [78]. Mityurich G.S., Lebedeva E.V., Aleksiejuk M., Serdyukov A.N. Thermo-optical excitation of sound by Bessel light beams in layered media with internal stress. *Problems of Physics, Mathematics and Technics.* // – 2018. – Т.36. – № 3. – P.39-43.
- [79]. Lei Meng, Olivier Deschaume, Lionel Larbanoix, Eduard Fron, Christ Gloireux. Photoacoustic temperature imaging based on multi-wavelength excitation. *Photoacoustics.* // –2019. –V.13. –P.33-45.
- [80]. Márcia Martinho Costa, Anant Shah, Ian Rivens, Carol Box., Gail ter Haar. Quantitative photoacoustic imaging study of tumours in vivo: Baseline variations in quantitative measurements// *Photoacoustics.*–2019. –V.13. –P. 53-65.
- [81]. Бункин Ф.Б., Комиссаров В.М. Оптическое возбуждение звуковых волн. *Акуст. журн.* –1973. –Т.19. –№ 3. –с.305-320.
- [82]. Лямшев Л.М., Седов Л.В. Оптическая генерация звука в жидкости. Тепловой механизм.//*Акуст. журн.* –1981. –Т.27. –№ 1. –С. 5-23.
- [83]. Лямшев Л.М., Наугольных К.А. Оптическая генерация звука. Нелинейные эффекты. Обзор.// *Акуст. журн.* –1981. –Т.27. –№ 5. –С.641-668.
- [84]. Винокуров С.А. Определение оптических и теплофизических характеристик конденсированных сред оптико-акустическим методом. // *ЖПС.* –1985. –Т. 42. –№ 1. –С.5-16.
- [85]. Tam A.C. Applications of photoacoustic sensing techniques.// *Rev. Mod. Phys.* –1986. –V.58. –№ 2. –P.381-431.
- [86]. Sigrist, M.W. Laser generation of acoustic waves in liquids and gases.// *J. Appl. Phys.* –1986. –V.60. –№ 7. –P. R83-R122.
- [87]. Алимарин И.П., Дурнев В.Ф., Рунов В.К. Оптико-акустическая спектрометрия конденсированных сред и ее аналитическое использование. // *Журн. анал. хим.* –1987. Т.42. –№ 1. –С.5-28.
- [88]. Лямшев, Л.М. Лазеры в акустике.// *УФН.* –1987. –Т.151. –№3. –479с.

- [89]. Vargas H., Miranda L.C.M. Photoacoustic and Related photothermal techniques.// *Phys. Rep.* –1988. –V.161. –№2. –P.43-101.
- [90]. Hutchins D.A. Ultrasonic generation by pulsed lasers.// In: *Physical Acoustics*. Ed. by W.P. Mason, R.N. Thurston. New York: Academic Press, –1988 –V.18. –P.21-123.
- [91]. Бункин Ф.В., Комисаров В.М. *Акуст. Журнал.*// –1988. –Т.34. –№ 3. –С.437-444.
- [92]. Егерев С.В., Лямшев Л.М., Пученков О.В. Лазерная динамическая оптоакустическая диагностика конденсированных сред.// *УФН.* –1990. –Т.160. –№ 9. –С.111-154.
- [93]. Almond D.P., Patel P.M. *Photothermal Science and Techniques.*// London: Chapman and Hall. –1966. – 450p.
- [94]. Горелик Д.О., Сахаров Б.Б. *Оптико-акустический эффект в физико-химических измерениях.*// М.: Изд-востандартов, –1969. –186с.
- [95]. Rosencwaig, A. *Photoacoustics and Photoacoustic Spectroscopy*// *Biophys Bioeng.* –1980. – V.9. –310p.
- [96]. Жаров В.П., Летохов В.С. *Лазерная оптикоакустическая спектроскопия*// –М.: Наука, –1984. –320с.
- [97]. Агеев Б.Г., Пономарев Ю.Н., Тихомиров Б.А. *Нелинейная оптико-акустическая спектроскопия молекулярных газов*// Новосибирск: Наука. –1987. –128с.
- [98]. McDonald F.A., Wetsel G.C. Jr. Theory of photothermal and photoacoustic effects in condensed matter// In: *Physical Acoustics*. V.18. Ed. by W.P. Mason, R.N. Thurston. San Diego. California: Academic Press. –1988. –V.18. P. 167-277.
- [99]. Лямшев Л.М. *Лазерное термооптическое возбуждение звука*// М.:Наука, –1989. –237с.
- [100]. Гусев В.Э., Карабутов А.А. *Лазерная оптоакустика.*// М.: Наука.–1991. –304с.

- [101]. Mandelis A. Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology//. New York: Elsevier, –1992. –V.1. –542с.
- [102]. Виноградов Б.А. Действие лазерного излучения на полимерные материалы.// В 2-хкн.- М.: Наука. –2006. –443с.
- [103]. Romanov V.P., Salikhov T.Kh. Optical method of stimulation of the second sound on superfluid helium// Phys. Let. –1991. –V.161. –№2. –P.161-163.
- [104]. Салихов Т.Х. Оптические возбуждения четвертого звука в сверхтекучем гелии.// ДАН РТ. –1994. –Т.37. –№5-6. –С.31-34.
- [105]. Salikhov T.Kh. Optical generation of the first and second sounds in superfluid  $^3\text{He}$ – $^4\text{He}$  solutions // Low. Temp. Phys. –1999.–V.25.–№10.–P.760-764.
- [106]. Салихов Т.Х. Термооптическое возбуждение акустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем гелии// ДАН РТ. –1999. –Т.42. –№9. –С.29-36.
- [107]. Salikhov T. The theory of lasers generation first and second sounds in superfluid helium.// Abstracts of the 11<sup>th</sup> International conference on photoacoustic and photothermal phenomena. Kyoto. –2000. –P.04-10.
- [108]. Одилов О.Ш., Салихов Т.Х. Лазерная генерация оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии импульсом лазерного излучения.// ДАН РТ. –2003. –Т.XLVI. –№ 10. –С.94 -98.
- [109]. Одилов О.Ш., Салихов Т.Х. Особенности генерации ОА сигнала второго звука в He-II, граничащего с твердым телом.// Вестник ТГНУ, –2004, –№4, –С.48-51.
- [110]. Одилов О.Ш., Салихов Т.Х. К теории термооптической генерации второго звука в сверхтекучем гелии.//Вестник ТГНУ, –2004. –№4, –С.64-69.
- [111]. Salikhov T.Kh., Odilov O.Sh. The generation pulse of the first and second sounds in superfluid helium by laser beam pulse.// Abstract Books of ICPPP (Brazil, Rio), –2004.–pp.04P05.

- [112]. Одилов О.Ш., Солихов Т.Х. Передаточные функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в He-II со свободной поверхностью.// ДАН РТ. – 2005. –Т.XLVIII. – № 5–6. –С.24 - 31.
- [113]. Одилов О.Ш., Солихов Т.Х. Влияние диссипации на параметры оптоакустического сигнала первого и второго звуков в сверхтекучем гелии.// ДАН РТ. –2006. –Т. 49. –№ 3. –С.234 - 238
- [114]. Солихов Т.Х., Одилов О.Ш. Передаточные функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в He-II, граничащем с твердым телом.// ДАН РТ. –2007. –Т.50. –№ 6. –С. 510-515
- [115]. Salikhov T.Kh., Odilov O.Sh., Khan A.W. The spectrum of transfer functions of optoacoustic signals of the first and second sounds in superfluid helium.// Abstract books of the 14 ICPPP, Cairo, January, –2007, –145p.
- [116]. Солихов Т.Х., Одилов О.Ш. Особенности временного поведения оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии, граничащем с твердым телом.// ДАН РТ. –2008. –Т.51.-№ 7. –С.514 - 520.
- [117]. Salikhov T.Kh., Odillov O.Sh. Specific features of the Transfer Function of the optoacoustic signals of the first and second sounds in He-II which boundary with solids. Abstracts of the” 4-th International Conferences of Liquid Matter: Modern Problems” (Kiev, Ukraine),-2008. –229p.
- [118]. Солихов Т.Х., Одилов О.Ш. Оптоакустический метод определения сопротивления Капицы.// Труды международной конференции «Оптические методы исследования потоков» (ОМИП-2009), МЭУ (технический Университет), –2009. –С.452-456.
- [119] Солихов Т.Х., Одилов О.Ш. Температурное поле в фотоакустической камере со сверхтекучим гелием и нетеплопроводящей подложкой.// ДАН РТ, – 2009, –Т.52, -№4, С.283-288.
- [120]. Salikhov T.Kh., Odillov O.Sh. The photoacoustic effect in the supefluid Helium. Book of Abstracts, 15 ICPPP, Leuven, Belgium, 19-23 July,–2009. –208p.

- [121]. Солихов Т.Х., Одилов О.Ш. Фотоакустический сигнал сверхтекучего гелия с подложкой из теплового изолятора// ДАН РТ. –2009. –Т.52. – №5. –С.362-368.
- [122]. Солихов Т.Х., Одилов О.Ш. Особенности генерации фотоакустического сигнала сверхтекучего гелия// ДАН РТ, –2009, –Т.52, –№9, –С.688-696.
- [123]. Surko С.М., Packerd R.E., Dick G.I. et al. Spectroscopic study of the luminescence of liquid helium the vacuum ultraviolet// Phys. Rev. Lett., –1970. – V.24.–№12. –Р.657-659.
- [124]. Sockton M., Keto I.M., Fitzsimmons W.A. Spectrum of electron bombarded superfluid helium // Phys. Rev. Lett.,–1972. –V.5. –№1. –Р.372-380.
- [125]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Вклад электрострикционного механизма в волновых уравнения для оптоакустических сигналов первого и второго звуков в He-II// Вестник ТНУ, –2011. –№ 8(72). –с.3-7.
- [126]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Генерация оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии непрерывным лазерным излучением посредством электрострикционного механизма//Вестник ТНУ, –2012. –№ 1/1(77) –с.99-103.
- [127]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Генерация оптоакустических волн первого и второго звуков в He-II гармонически модулированным интенсивностью лазерным излучением посредством электрострикционного механизма// Докл. АН РТ, –2012. –Т.54. –№ 6. –С.465-472.
- [128]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Генерация оптоакустических волн первого и второго звуков в He-II гауссовым импульсом лазерного излучения посредством электрострикционного механизма// Вестник ТНУ, – 2012 –№ 1/2(81). –с.63-65.
- [129]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Генерация оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии негауссовым импульсом лазерного излучения посредством электрострикционного механизма// Докл. АН РТ, –2012. –Т.55. –№ 9. –С.721-727.

- [130]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Волновые уравнения оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  с учетом теплового и стрикционного механизмов // Вестник ТНУ, –2012. –№ 1/3(85). –с.124-127.
- [131]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Особенности возбуждения оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии импульсом прямоугольного лазерного излучения посредством электрострикционного механизма.// Вестник ТНУ, –2013. –№ 1/1(102). –с.87-90.
- [132]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Одилов О.Ш. Генерация оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$  непрерывным и прямоугольным импульсом лазерного излучения посредством электрострикционного механизма// ДАН РТ– 2013. –Т.56. №3. –С.201-208.
- [133]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Хакимов Ф.Х. Динамика формирования оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем гелии под действием прямоугольного импульса лазерного излучения посредством электрострикционного механизма// Вестник ТНУ, –2013. – № 1/2(106). –с.105-110.
- [134]. Салихов Т.Х., Лейла С.К., Хакимов Ф.Х. Возбуждение волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $\text{He}^3$ - $\text{He}^4$  гармонически модулированными и гауссовыми импульсами лазерного излучения посредством электрострикционного механизма// Вестник ТНУ, –2013. –№ 1/2(106). – с.135-140.
- [135]. Salikhov T.Kh., Leila S.K. Specific feature lasers generation of the optoacoustic waves of the first and second sounds in superfluid helium by true electrostriction mechanism// Book of Abstracts, 17 ICPPP, Suzhou, Jiangsu, China, 20–24 October, –2013. –p.112.
- [136]. Leyla Safaei Kuchaksaroi . The study of optoacoustic excitation and generation of first and second sound waves in superfluid  $^4\text{He}$  considering electro-

- striction mechanism/ Leyla Safaei Kuchaksaroi//Journal of modern physics – 2017. –V.6. –№12. –P.45-58.
- [137].Leyla Safaei Kuchaksaroi. Rectangular laser light effects on optoacoustic waves of first and second sound superfluid helium considering electrostrictive mechanism// International Journal of engineering Innovation and Research –2015. –V.4. -№3. –P.390-397.
- [138].Leyla Safaei Kuchaksaroi . The study of optoacoustic first and second sound waves in superfluid helium under the effect of Gaussian light considering electrostriction mechanism// Journal of modern physics –2015. –V.6 . –№7. –P.855-862.
- [139].Салихов Т.Х., Одилов О.Ш., Давлатджонова Ш.Х. Спектр передаточных функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , граничащем с твердым телом. Материалы межд. конферен. «Современные вопросы молекулярной спектроскопии конденсированных сред» посвященной 50-летию кафедры оптики и спектроскопии (г.Душанбе, 11-12 ноября 2011. года), –с.277-278.
- [140].Салихов Т.Х., Одилов О.Ш., Давлатджонова Ш.Х. Особенности генерации импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  импульсом прямоугольной формы лазерного излучению//. «Материалы национальной конференции «современные проблемы физики конденсированного состояния» (посвященный 70-летию засл. дят. науки и техники, профессора Бобоева Т.Б.), 20-21 декабря 2012г, Душанбе, – с.57-58.
- [141].Салихов Т.Х., Одилов О.Ш., Давлатджонова Ш.Х. Возбуждение оптоакустических импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  импульсом прямоугольной формы лазерного излучения //Вестник ТНУ, –2013. –№ 1/1(102). –С.106-110.
- [142].Salikhov T.Kh., Odilov O.Sh., Davlatdjonova Sh.Kh. Transfer function of the optoacoustic signals of the first and second sounds in the superfluid solution

$^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  which boundary with solids.// Book of Abstracts, 17 ICPPP, Suzhou, Jiangsu, China, October 20 to 24, –2013. –95p.

- [143]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Передаточные функции оптоакустического сигнала в сверхтекучем растворе, граничащем с твердым телом. //Труды 10-ой международной конференции по компьютерному анализу проблемы науки и технологии. (НИИ ТНУ), Душанбе, 30-31-го декабря, –2015. –С.92-94
- [144]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Особенности генерации акустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  импульсом лазерного излучения гауссовой формы. Тепловой механизм//Сборник материалов Международная научно-практическая конференция, посвященная 1150-летию персидско-таджикского учёного-энциклопедиста, врача, алхимика и философа Абу бакра Мухаммада ибн Закирия Рази. Душанбе, –2015. –27-28 Май, И-Т Химии. –С.76-77
- [145]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Особенности возбуждение волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  импульсом гауссовой формой лазерного излучения и тепловым механизмом// Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы физики конденсированного состояния» (ТНУ НИИ, 24 октября – 2015.) –С.60-63.
- [146]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Генерация импульсов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  негауссовым лазерным излучением. Тепловой механизм// Вестник ТНУ. –2015. –№1/5(169), –С.61-65.
- [147]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Возбуждение оптоакустических волн первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  гауссовой формой импульса лазерного излучения и тепловым механизмом// ДАН РТ, –2015. – №. 5. –С.389-393.
- [148]. Salikhov T.Kh., Davlatjonova Sh. Kh. Features of the optoacoustics generation of the first and second sound in superfluid solution  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  by the

- gaussian pulse of the laser radiation //Book of Abstracts of 7<sup>th</sup> International conference of Physics of Liquids Matter: Modern Problems" (PLMMP-2016), Kyiv, 27-30 May, – 2016. –54p.
- [149]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Анализ особенности спектра передаточных функции первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , имеющий контакт с твердым телом// (Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорского-преподавательского состава и сотрудников ТНУ), посвященный «25-летию государственной независимости РТ», 20-27 апреля, -2016. –С.525-526.
- [150]. Rocwell D.A., Benjamin R.F., Graytak T.J// Brillouin scattering from superfluid  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  solution// - J. Low. Temp. –1975. –V.18. –№5/6, –P.389-485.
- [151]. Ватсон Г.Н. теория бесселовых функции. Часть I. М.: ИЛ-1979-798с.
- [152]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Матрица передаточных функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  со свободной границей// Материалы II Международной конференции «Химия алифатических и циклических производных глицерина и аспекты их применение», ТНУ, 8-9 декабря, –2016. – С.121–125.
- [153]. Давлатджонова Ш.Х. Передаточные функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , граничащем с твердым телом.//Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2017. –№1. –С.105-111.
- [154]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Передаточные функции оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  со свободной границей.// Вестник ТНУ. Серия естественных наук. –2017. – №2. –С.141-145.
- [155]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Частотная зависимость передаточных функции первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  со свободной границей// Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава

ва и сотрудников ТНУ, посвященный международному десятилетию действия «Вода для устойчивого развития, 2018-2028 годы», «Году развития туризма и народных ремесел», «140-ой годовщине со дня рождения Героя Таджикистана С.Айни» и «70-ой годовщине со дня создания Таджикского национального университета», (ТНУ, апрель) – 2018. –С.640-641.

- [156]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Особенности частотной зависимости передаточных функций первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , имеющем контакт с твердым телом// Вестник ТНУ. Серия естественных наук. – 2018. –№1. –С.137-141.
- [157]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х., Рахмонов Р.К. Временное поведение передаточных функций первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  со свободной границей// ДАН РТ.-2019.- Т. 62.- № 5-6. -С.309-316.
- [158]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Временное поведение передаточных функций первого и второго звуков в растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ , имеющем контакт с твердым телом// Вестник ТНУ. Серия естественных наук.- 2019.-№3.- С.77-83.
- [159]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х., Зафари Умар Оптоакустический метод определения скачка Капицы в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско-преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященный «20-й годовщине дня национального единства» и «году молодежи» ТНУ, апрель, –2017. –597с.
- [160]. Солихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х., Зафари Умар Особенности генерации оптоакустических сигналов первого и второго звуков в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ // Материалы республиканской научно-теоретической конференции профессорско- преподавательского состава и сотрудников ТНУ, посвященный «20-й годовщине дня национального единства» и «году молодежи», (ТНУ, апрель), –2017. –600с.

- [161]. Солихов Т.Х., Зафари Умар, Давлатджонова Ш.Х. Температурное поле сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  в поле тонкого лазерного излучения // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. –2017. –№4. –С.107-113.
- [162]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х., З.Умар., Ходжахонов И.Т. Температурное поле в фотоакустической камере с сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  // ДАН РТ.-2017. –Т.60. –№ 6-8. –С.313-319.
- [163]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х., Зафари Умар. Фотоакустический метод определения скачка Капицы в сверхтекучем растворе  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ . Труды XIV Международной научно-технической конференции «Оптические методы исследования потоков» // Москва, 26- 30 июня –2017. – С.471-477.
- [164]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х. Теория генерации фотоакустического сигнала сверхтекучим раствором  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  // Вестник ТНУ. – 2017. –№2. – С.72-77.
- [165]. Salikhov T.Kh. Davlatjonova Sh.Kh. Theory of the photoacoustic effect with superfluid solution  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$ .// 8th international Conference Physics of Liquid Matter Modern Problems. May 18-22, PLMMR. – 2018. (4-6p) p.77.
- [166]. Салихов Т.Х., Давлатджонова Ш.Х., Рахмонов Р.К. Особенности частотной зависимости параметров фотоакустического сигнала сверхтекучего раствора  $^3\text{He}$ - $^4\text{He}$  // ДАН РТ.-2020. –Т.63.–№ 11-12 –С.713-720.