Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО "Северо-Восточный федеральный университет им. М.К.Аммосова" в г. Мирном

На правах рукописи

Константинова Туйаара Петровна

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ ФОРМАМИ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
Гадоев М.Г.
доктор физико-математических наук,
член-корр. НАНТ, профессор Исхоков С.А.

Мирный — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертационная работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка, заданных в ограниченной области Ω n-мерного евклидова пространства R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Исследуемые операторы порождаются с помощью полуторалинейных интегро-дифференциальных форм, коэффициенты которых имеют степенное вырождение на границе области и, в общем случае, могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Исследование разрешимости краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений является одним из бурно развивающихся областей теории дифференциальных уравнений. Как отмечено авторами многих обзорных работ, существуют многообразные способы вырождения, которые требуют применения соответствующих разных методов и в настоящее время не существует единой теории, которая охватывала бы все результаты этого направления.

Применяемый нами метод основан на элементах теории весовых функциональных пространств (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.). Первый результат типа теорем вложения для весовых пространств функций многих переменных был получен в 1938 г. в работе В.И.Кондрашова [38]. Систематическое изучение весовых пространств с весом, равным расстоянию до границы области в положительной степени, а так же их приложения к решению краевых задач для вырождающихся на границе ограниченной области эллиптических дифференциальных уравнений, впервые было проведено в монографии Л.Д. Кудрявцева [39]. Обзор работ и подробная библиография по весовым функциональным пространствам содержатся в монографиях С.М. Никольского [55], Х.Трибеля [61, 62] и статьях О.В. Бесова, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, С.М. Никольского [6], Л.Д. Кудрявцева, С.М. Никольского [43].

Достаточно полный обзор полученных результатов в теории краевых задач для вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений содержится в работах В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко [21], С.З. Левендорского, Б.П. Панеях [44], С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [56], О.А. Олейника, Е.В. Радкевича [57], М.М. Смирнова [59], С.А. Терсенова [60], Х. Трибеля [61] и С.В. Успенского, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкина [63]. Наши исследования в основном примыкают к исследованиям, проведенным в работах Б.Л. Байдельдинова [1, 2], К.Х. Бойматова [8] – [14], К.Х. Бойматова, С.А. Исхокова [15, 16], А.А. Вашарина [18], А.А. Вашарина, П.И. Лизоркина [19], С.А. Исхокова [25, 26, 28, 29], С.А. Исхокова, А.Ё. Куджмуродова [32, 33, 34, 35], Л.Д. Кудрявцева [39] – [42], П.И. Лизоркина [45], П.И. Лизоркина, С.М. Никольского [47, 48], П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [46], Н.В. Мирошина [49] – [53].

В указанных выше работах [1, 2], [8] – [14], [15, 16], [18], [19], [25, 26, 28], [39] – [42], [45], [46], [49] – [53], в которых рассматривались вырождающиеся эллиптические уравнения в ограниченной области n-мерного евклидова пространства, коэффициенты дифференциальных операторов имели форму произведения ограниченной функции и степени расстояния до границы области. В отличие от этого, в работах [29, 32, 33, 34, 35], предполагалось, что младшие коэффициенты принадлежат некоторым весовым L_p – пространствам.

Случай, когда исследуемые дифференциальные операторы порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейних форм, сопряжен многими техническими трудностями и впервые рассматривался в работе К.Х. Бойматова [9]. Позже этот случай исследовался в работах К.Х. Бойматова [10] – [14], К.Х. Бойматова и С.А. Исхокова [15, 16], С.А. Исхокова [25, 27, 28], С.А. Исхокова и А.Г. Каримова [30, 31].

В настоящей диссертационной работе разрешимость вариационной задачи Дирихле впервые исследуется в случае, когда вырождающиеся эллиптические операторы порождаются некоэрцитивными полуторалинейными формами, и их младшие коэффициенты принадлежат некоторым весовым L_p – пространствам. Предварительно доказаны некоторые вспомогательные интегральные неравенства, в которых оцениваются нормы произведения производных функций из весовых функциональных пространств.

Разрешимость задачи Дирихле для различных классов вырождающихся эллиптических уравнений исследовалась в работах J.H. Chabrowski [64, 65, 66], D. Kim [71], S.V. Lototsky [73], A.C. Cavalheiro [67], H. Chen, P. Luo [68], H. Chen, X. Liu [69]. В этих работах также применяется метод, основанный на предварительном изучении свойств соответствующих весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных.

Относительно работ по вырождающимся эллиптическим уравнениям, в которых применяются методы, отличные от метода настоящей диссертационной работы, отметим также монографии S. Levendorskii [72], E.W. Stredulinsky [75], P.R. Popivanov, D.K. Palagachev [74], С.А. Терсенова [60].

Цель диссертации. Целью диссертационной работы является исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными и неоднородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границе области в случае, когда соответствующая полуторалинейная форма может не удовлетворять условию коэрцитивности. А также получение достаточных условий дискретности спектра таких операторов и изучение их спектральных асимптотик.

Здесь и далее коэрцитивность формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [56]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\| \cdot \|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство с нормой $\| \cdot \|_+$ плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Re} P[u, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Объекты исследования. Объектом исследования являются эллиптические операторы высокого порядка с суммируемыми коэффициентами и со степенным вырождением на границе области, которые порождаются с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм.

Методы исследования. Применяемый в диссертации метод основан на элементах функционального анализа и теории пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных со степенным весом (теоремы вложения, эквивалентные нормировки, прямые и обратные теоремы о следах, теоремы о плотности гладких функций и т.д.).

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

1. Доказана теорема о существовании и единственности решения однородной вариационной задачи Дирихле для нового класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, не содержащих промежуточных коэффициентов, соответствующая полуторалинейная форма которых, в общем случае, не удовлетворяет условию коэрцитивности.

2. Впервые исследована разрешимость однородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области с суммируемыми младшими коэффициентами в случае, когда полуторалинейные формы, соответствующие эллиптическим операторам, могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

3. Доказаны теоремы существования и единственности решения неоднородной вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области с суммируемыми младшими коэффициентами в случае, когда соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Выделен случай, когда неоднородные граничные условия задаются в явном виде и их количество зависит от степени вырождения старших коэффициентов исследуемого оператора. Доказано неравенство, в котором норма решения неоднородной вариационной задачи Дирихле сверху оценивается через нормы граничных функций и правой части уравнения.

4. Установлена полнота и суммируемость в смысле Абеля - Лидского системы корневых вектор-функций несамосопряженного оператора A, порожденного некоэрцитивной полуторалинейной формой. Доказана дискретность спектра этого оператора и изучена асимптотика функции $N(t)$ – число собственных значений оператора A не превосходящих по модулю t, с учетом их алгебраических кратностей.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы при развитии теории вариационных задач для вырождающихся эллиптических операторов высокого порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм, а также при исследовании спектральных свойств таких операторов.

Практическая ценность работы определяется прикладной значимостью вырождающихся дифференциальных уравнений в решении прикладных задач механики и других разделов физики.

Степень достоверности результатов проведенных исследований. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгими математическими доказательствами всех утверждений, приведенных в диссертации, подтверждается исследованиями других авторов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и неоднократно обсуждались автором на следующих семинарах и конференциях:

- семинар кафедры фундаментальной и прикладной математики Политехнического института (филиала) Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова в г. Мирном под руководством д.ф.-м.н., проф. С.А. Исхокова и д.ф.-м.н. М.Г. Гадоева (2011-2016);

- общеинститутский семинар Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан под руководством д.ф.-м.н. член-корреспондента АН РТ, проф. З.Х. Рахмонова (ноябрь, 2015);

- Четвертая международная конференция «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования», посвященная 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д. Кудрявцева (Москва, 25 – 29 марта 2013 г.);

- Международная научно-практическая конференция «Наука и инновационные разработки - Северу» посвященная 20-летию Политехнического института (филиала) Северо-Восточного Федерального университета им. М.К.Аммосова (г. Мирный, 12 - 14 марта 2014 г.);

- Международная научная конференция «Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел», посвященная 75-летию профессора Т.С.Сабирова (г. Душанбе, 29 - 30 октября 2015 г.);

- Международная научная конференция «Современные проблемы математики и её приложений», посвящённая 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (г. Душанбе, 14-15 марта 2018 г.);

- Международная научная конференция «Современные проблемы математического анализа и теории функций», посвящённой 70-летию со дня рождения академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова М.Ш. (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [76] – [86], список которых приведен в конце диссертации. Работы [76] – [81] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых и научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. В работах, написанных совместно с С.А. Исхоковым, М.Г. Гадоевым и И.А.Якушевым соавторам принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Краткое содержание диссертации

Работа состоит из настоящего введения, трёх глав и списка литературы. Используется тройная нумерация теорем, лемм, следствий и формул, в которой первый номер совпадает с номером главы, второй указывает на номер параграфа, а третий – на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формул в данном параграфе. Для удобства чтения в начале каждой главы приводится краткая информация о ее содержании.

Во введении даётся обоснование актуальности темы диссертации, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены её основные результаты.

Первая глава диссертации состоит из четырех параграфов и посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границе области, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм. В первом параграфе введены определения основных нормированных пространств функций, сформулированы их основные свойства и доказаны некоторые вспомогательные весовые интегральные неравенства.

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа и $1 \leq p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л. Соболева производные порядка r с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| =$$
$$= \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \quad (0.0.1)$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1+k_2+\cdots+k_n$ – длина мультииндекса k,

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

– обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k, $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, т.е. бесконечно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\rho(x) \leq dist\{x, \partial\Omega\} \leq M\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \leq M_k\rho^{1-|k|}(x),$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k; M, M_k – некоторые положительные постоянные.

Основные свойства пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ изучены в работах П.И.Лизоркина, С.М.Никольского [47, 48], С.М.Никольского, П.И.Лизоркина и Н.В.Мирошина

[56], К.Х.Бойматова [8], С.А.Исхокова [26]. Согласно результатам этих работ для любого натурального числа r и вещественных чисел $\alpha,\ p$, причем $1 \leq p < \infty$, множество $C_0^\infty(\Omega)$ (множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω) плотно в пространстве $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Пространство $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ тесно связано с функциональным пространством $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, которое определяется как пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка r с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

В отличие от пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ множество $C_0^\infty(\Omega)$ не всегда плотно в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим через $\overset{0}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Если $\mathbb{B}$ одно из пространств $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $\overset{0}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, то символом $\mathbb{B}'$ обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\mathbb{B}$, наделенное нормой сопряженного пространства, а символом $\langle F,\, v\rangle$, где $F \in \mathbb{B}'$ и $v \in \mathbb{B}$, обозначим значение функционала F на функцию v.

Символом $L_{p;\alpha}(\Omega)$ обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u;\ L_{p;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{\alpha p}(x)\, |u(x)|^p\, dx \right\}^{1/p}.$$

Далее в первом параграфе первой главы приведены некоторые вспомогательные леммы и доказаны некоторые вспомогательные интегральные неравенства, которые в последующих параграфах применяются при доказательстве основных результатов.

Второй параграф первой главы посвящен весовому аналогу неравенства Гординга для эллиптических операторов дивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. Рассматривается следующая полуторалинейная интегро-дифференциальная форма

$$\mathfrak{A}[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx,$$

коэффициенты $b_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями.

Основной результат второго параграфа сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1.2.1. *Пусть коэффициенты $b_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности*

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} b_{kl}(x) \xi^k \xi^l \geq c|\xi|^{2r}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$; число $c > 0$ не зависит от x и ξ.

Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$, что

$$\operatorname{Re} \mathfrak{A}[u,\, u] \geq C_1 \|u, V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 - C_2 \|u, L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|^2 \qquad (0.0.2)$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

В **третьем параграфе первой главы** изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов дивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. Рассматривается интегро-дифференциальная полуторалинейная форма

$$B_\lambda[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \\ + \lambda \int_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (0.0.3)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями. Предполагается, что:

(I) функции $a_{kl}(x), |k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

(II) существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0,\, \pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right| < \varphi, \tag{0.0.4}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right\} \geq c\,|\xi|^{2r} \tag{0.0.5}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus 0$.

Здесь и далее функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\, \pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1}\, \xi_2^{k_2} \cdots \xi_n^{k_n}, |\xi| = \left\{ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \right\}^{1/2}.$$

Следуя работам Н.В.Мирошина [49, 53] рассматривается вариационная задача Дирихле для оператора

$$L_\lambda[u](x) = \sum_{|k|=|l|=r} (-1)^r \left(\rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \right)^{(l)} + \lambda \rho^{2(\alpha - r)}(x) u(x)$$

в следующей постановке:

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U,\, v] = < F, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежащее пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Замечание 1.3.1. Если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая и число α такое, что

$$\alpha + \frac{1}{p} \notin \{1,\, \ldots,\, r\}, \quad -\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p},$$

то решение $U(x)$, $x \in \Omega$, задачи D_λ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали, а целое число s_0 такое, что $r-\alpha-1/p \leq s_0 < r-\alpha+1-1/p$. Поэтому, в общем случае, граничные условия в задачи D_λ формально будем считать однородными.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\alpha < r$ и выполнены условия (I) - (II). Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка*

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \leq M \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

В четвертом параграфе первой главы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле для общих эллиптических операторов (содержащих ненулевые младшие коэффициенты) в ограниченной области, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм. Рассматривается следующая интегро-дифференциальная полуторалинейная форма

$$B_\lambda[u,v] = \sum_{|k|,|l|\leq r} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx + \\ + \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \quad (0.0.6)$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha-r+|k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, на которых ниже накладываются некоторые условия. Отметим, что форма (0.0.6), в отличие от формы (0.0.3) имеет младшие коэффициенты $a_{kl}(x), |k|+|l| \leq 2r-1$.

Изучается разрешимость следующей вариационной задачи:

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in (V^r_{2;\alpha}(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U, v] = < F, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Предполагается, что:

(III) младшие коэффициенты $a_{kl}(x), |k|+|l| \le 2r-1,\ |k|, |l| \le r$ формы (0.0.6) принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где число p_{kl} определяется следующим образом:

$$1)\ p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|k|} + \varepsilon, |l| = r,\ n > 2(r-|k|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|} + \varepsilon, |k| = r,\ n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

2) если $|k| \le r-1, |l| \le r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon,\ n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon},\ n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|k|+\varepsilon},\ n > 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} - любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε - достаточно малое положительное число.

Основной результат четвертого параграфа первой главы сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1.4.1. *Пусть $0 \le \alpha < r$ и выполнены условия (I)-(III). Тогда найдется число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка*

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \le M_0 \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \right\|,$$

где число M_0 не зависит от λ и F.

Замечание 1.4.1. Разрешимость вариационной задачи Дирихле и некоторые спектральные вопросы для эллиптических операторов, связанных с полуторалинейной формой вида (0.0.6), ранее изучались в работах К.Х. Бойматова [10, 11, 14], С.А. Исхокова [25], К.Х. Бойматова и С.А. Исхокова [15] в предположении, что все коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k|, |l| \le r$, формы (0.0.6) непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют условиям

$$|\arg A(x,\, \zeta)| < \varphi, \tag{0.0.7}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \le M\mathrm{Re}\,\{\gamma(x)A(x,\, \zeta)\} \tag{0.0.8}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r}$. В этих условиях

$$A(x,\, \zeta) = \sum_{|k|,\,|l|\le r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l},$$

$\gamma(x)$ – некоторая непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, которая не обращается в нуль, φ – некоторое положительное число меньше π, число $M > 0$ не зависит от x, ζ.

Отметим, что в отличие от наших условий (0.0.4), (0.0.5) в (0.0.7), (0.0.8) участвуют и младшие коэффициенты формы (0.0.6), и даже в случае, когда форма (0.0.6) имеет только старшие коэффициенты, условия (0.0.4), (0.0.5) слабее, чем условия (0.0.7), (0.0.8).

Вторая глава диссертационной работы посвящена изучению разрешимости вариационной задачи Дирихле **с неоднородными граничными условиями** для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм. Она состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены определения основных весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных и сформулированы их основные свойства. В этом же параграфе приведены некоторые вспомогательные леммы.

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ был получен В.И. Кондрашовым [38].

Систематическое исследование пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ принадлежит Л.Д. Кудрявцеву [39]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков, среди которых отметим работы С.М. Никольского [54], О.В. Бесова, Я. Кадлеца, А. Куфнера [5], О.В. Бесова [3], Х. Трибеля [62] и др. Более подробную библиографию работ по исследованиям весовых пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, опубликованных до 1988 г. можно найти в обзорной работе С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [56].

С помощью теоремы вложения разных метрик для весовых пространств $W\,^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ в первом параграфе второй главы доказывается следующая вспомогательная лемма:

Лемма 2.1.1 *Пусть* $p > 1$ *и числа* λ_{kl}*, определенные для мультииндексов* k, l*, удовлетворяющих условиям* $|k|,\, |l| \le r$*,* $|k| + |l| \le 2r - 1$*, такие, что* $\lambda_{kl} > 1$*,* $1/\lambda_{kl} \le 2/p$*. Тогда для всех* $u(x)$*,* $v(x) \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\alpha_{kl}}(\Omega) \right\| \le M \left\| u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\|$$

где

$$\alpha_{kl} = -\frac{1}{\lambda_{kl}} + \varepsilon_1 + \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{p}\right)_+ + \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{p}\right)_+ ,$$

ε_1 *– достаточно малое положительное число; константа* $M > 0$ *не зависит от* u*,* v*.*

Здесь и далее $(\mu)_+ = \mu$, если $\mu \ge 0$, и $(\mu)_+ = 0$ в противном случае.

Во втором параграфе второй главы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями. Рассматривается полуторалинейная интегро-дифференциальная форма

$$\mathbb{B}[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \qquad (0.0.9)$$

и предполагается, что ее комплекснозначные коэффициенты $b_{kl}(x)$, $x \in \Omega$, $|k|, |l| \le r$, удовлетворяют следующим условиям:

(IV) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, формы (0.0.9) имеют вид

$$b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ удовлетворяют условиям (I), (II);

(V) коэффициенты $b_{kl}(x)$ при $|k|$, $|l| \le r$ и $|k|+|l| \le 2r-1$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl};\,\delta_{kl}}(\Omega)$, где $\mu_{kl} > 1$ и

$$\delta_{kl} = 1 - \frac{1}{\mu_{kl}} - \varepsilon_2 - \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{2}\right)_+ - \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{2}\right)_+ ,$$

где ε_2 – достаточно малое положительное число.

Изучается разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (0.0.9):

Задача $\mathbb{D}$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] = \langle F,\, v \rangle \quad \left(\forall v \in C_0^\infty(\Omega)\right), \tag{0.0.10}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{0.0.11}$$

Замечание 2.2.1. Если $\Phi(x) \notin \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, то условие (0.0.11) означает, что решение $U(x)$ задачи $\mathbb{D}$ и заданная функция $\Phi(x)$ имеют одни и те же ненулевые следы на границе $\partial\Omega$ области Ω. Если граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^1 и $\alpha \le -1/p$ или $\alpha \ge r - 1/p$, то

$$W^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Поэтому граничные условия в задаче $\mathbb{D}$ будут неоднородными только в случае

$$-\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2}. \tag{0.0.12}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при выполнении условий (I)–(III) коэффициенты полуторалинейной формы (0.0.9) удовлетворяют условиям теоремы 1.4.1. Так как

$$\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) = V^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$$

при условии

$$\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,\, 2,\, \ldots,\, r\}, \tag{0.0.13}$$

то согласно теореме 1.4.1 найдется число $\lambda_1 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ уравнение

$$\mathbb{B}[V,\, v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha - 2r}(x) U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega))\,, \tag{0.0.14}$$

где $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ имеет единственное решение $V(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и при этом имеет место неравенство

$$\left\|V;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{0.0.15}$$

где положительная постоянная M не зависит от выбора функционала F.

Далее предположим, что для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ уравнение (0.0.14) при $\lambda = 0$ имеет единственное решение $V(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и для него выполняется неравенство (0.0.15). Тогда справедлива следующая

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены условия (IV)–(V), (0.0.12), (0.0.13).*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ существует единственное решение $U(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи $\mathbb{D}$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\{\left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|\right\}, \tag{0.0.16}$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора F и Φ.

Доказательство этой теоремы с помощью следующей леммы сводится к случаю вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями.

Лемма 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.2 любая функция* $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ *по формуле*

$$\langle \mathbb{G},\, v\rangle = -\mathbb{B}[\Phi,\, v]$$

порождает функционал $\mathbb{G}$*, который принадлежит пространству* $\left(\overset{\circ}{W}\,{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ *и найдется положительная постоянная* M *такая, что*

$$\left\|\mathbb{G};\, \left(\overset{\circ}{W}\,{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \le M\left\|\Phi(x);\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

При некоторых дополнительных ограничениях на параметр α можно задавать неоднородные граничные условия в задаче $\mathbb{D}$ в явном виде. Пусть число α такое, что

$$-\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2}.$$

Определим целое число s_0 неравенством

$$r - \alpha - \frac{1}{2} \le s_0 < r - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Тогда при условии $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$, для заданных граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

найдется функция $\Phi \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^s\Phi}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали, и имеет место следующее неравенство

$$\left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1}\left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\|.$$

В этом случае, условие (см. (0.0.11))

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}\,{}^r_{2;\,\alpha}(\Omega),$$

которое имеется в задаче $\mathbb{D}$, принимает следующий вид

$$\left.\frac{\partial^s U(x)}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1. \tag{0.0.17}$$

Поэтому в сделанных выше предположениях задачу $\mathbb{D}$ можно сформулировать следующим образом

Задача $\mathcal{D}$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{0.0.18}$$

требуется найти решение $U(x)$ уравнения (0.0.10) из пространства $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющее граничным условиям (0.0.18).

Применяя теорему 2.2.2 получаем следующий результат о разрешимости задачи $\mathcal{D}$.

Теорема 2.2.3. *Пусть $0 < \alpha < r - 1/2$, граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и выполнены все условия теоремы 2.2.2.*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций (0.0.18) существует единственное решение $U(x)$ задачи $\mathcal{D}$ и при этом справедливо неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\{ \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F и граничных функций (0.0.18).

В **третьей главе диссертационной работы** доказана одна оценка нормы резольвенты и изучены спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов. Глава состоит из пяти параграфов. Основные результаты главы изложены в первом параграфе, а их доказательства приведены в последующих четырёх параграфах. Отметим, что для удобства изложения, сначала доказывается теорема 3.1.2, а затем приводится доказательство теоремы 3.1.1.

Также как в предыдущих главах работы предполагается, что операторы заданы в ограниченной области, их младшие коэффициенты принадлежат некоторым L_p-пространствам со степенным весом и соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Ранее, во многих работах, где изучалась оценка резольвенты несамосопряженных операторов, порожденных с помощью полуторалинейных форм, доказывалось неравенство вида $\|(A-\lambda E)^{-1}\| < M|\lambda|^{-1/2}$. В нашей работе доказано одно представление резольвенты исследуемого оператора A, которое позволяет получить неравенство такого типа с показателем 1 вместо $1/2$. Также доказано, что оператор A имеет дискретный спектр, и изучена асимптотика функции $N(t)$ – число собственных значений оператора A, не превосходящих по модулю t, с учетом их алгебраических кратностей.

Пусть Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть r – натуральное, α – вещественное числа. Для мультииндекса $k=(k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n)$ обозначим

$$D_x^k = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{i\partial x_2}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{\partial}{i\partial x_n}\right)^{k_n}.$$

Далее для удобства записи обозначим пространство $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ через H_+, а норму пространства $W^r_{2,\alpha}(\Omega)$ – через $\|\cdot;\, H_+\|$.

Символом H_- обозначим пополнения пространства $H=L_2(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, H_-\| = \sup|(u,\, v)|,$$

где $(\cdot,\,\cdot)$ – скалярное произведение в H и верхняя грань берется по всем $v\in H_+$ таким, что $\|v;\, H_+\|=1$.

Элементы из H_- отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над H_+. Действие функционала

$F \in H_-$ на элемент $u \in H_+$ будем обозначать символом $< F, u >$.

На функциях $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx, \qquad (0.0.19)$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ – комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям (I)–(III) (см. теорему 1.4.1.).

Здесь ε - достаточно малое положительное число, функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \cdots \xi_n^{k_n}, |\xi| = \left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B'[u, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int_\Omega p_k(x) p_l(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx,$$

Согласно теореме 1.2.1 в сделанных выше предположениях существуют постоянные $c_0 > 0$, $c_1 \ge 0$ такие что

$$\operatorname{Re} B_0'[u, u] \ge c_0 \|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 - c_1 \|u; L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad (0.0.20)$$

где

$$B_0'[u, u] = B'[u, v] - \left(\gamma\, \rho^{2(\alpha-r)} a_{00} u, u\right).$$

Следовательно, если коэффициент $a_{00}(x)$ формы (0.0.19) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \gamma(x) a_{00}(x) \ge c_2, \quad x \in \Omega, \qquad (0.0.21)$$

где $c_2 > c_1$ и c_1 - постоянная из (0.0.20), то

$$\operatorname{Re} B'[u, u] \ge c_0' \|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega); \; c_0' > 0.$$

Форма (0.0.19) является непрерывной в H_+. Поэтому оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством $< \mathcal{A}u, v >= B[u, v]$ $v \in H_+$, действует из H_+ в H_-.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены все условия (I)–(III), (0.0.21). Пусть* $\alpha < r$ *и* $\alpha + 1/2 \notin \{1, \ldots, r\}$. *Тогда существует единственный замкнутый оператор* A *в пространстве* $L_2(\Omega)$, *обладающий следующими свойствами:*

(i) $D(A) \subset L_2(\Omega)$, $(Au, v) = B[u, v]$ *для всех* $v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ *и всех* $u \in D(A)$,

(ii) найдется число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *такое, что оператор* $A - \lambda_0 E$ *непрерывно обратим.*

Оператор A *совпадает с сужением оператора* $\mathcal{A}$ *в* $L_2(\Omega)$, *т.е.*

$$D(A) = \left\{ u \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega) : \mathcal{A}u \in L_2(\Omega) \right\}, \quad Au = \mathcal{A}u \ \forall u \in D(A).$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}[u, v] = \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) D^k_x u(x) \overline{D^k_x v(x)} dx + \int\limits_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \qquad (0.0.22)$$

с областью определения $D[\mathcal{P}] = \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Существует единственный самосопряженный оператор P в $L_2(\Omega)$, связанный с формой (0.0.22) равенством

$$\mathcal{P}[u, v] = \Big((P + E)^{1/2} u, \, (P + E)^{1/2} v \Big) \ \forall u, v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

Оператор $(P + tE)^{1/2}$, $t \geq 1$, допускает продолжение до непрерывного оператора $\mathcal{P}(t) : H \to H_-$. Сужение в H оператора $\mathcal{P}^{-1}(t) : H_- \to H$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теорема 3.1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1. Тогда для любого замкнутого сектора* $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |argz| > \varphi\} \cup \{0\}$ *с вершиной в нуле существует положительное число* c_S *такое, что при* $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_s$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} \, Y(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|),$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2} \, Y(\lambda) \, (P + |\lambda| E)^{-1/2},$$

где непрерывный оператор $Y(\lambda):\ H \to H$ *такой, что*

$$\sup_{\lambda \in S,\, |\lambda| > c_s} \|Y(\lambda);\, \mathcal{L}(H)\| < +\infty.$$

Здесь и далее $\mathcal{L}\,(\mathbb{H})$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в нормированном пространстве $\mathbb{H}$. Пространство ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства $\mathbb{H}_1$ в нормированное пространство $\mathbb{H}_2$ обозначим через $\mathcal{L}\,(\mathbb{H}_1;\, \mathbb{H}_2)$.

Следствие 3. *В условиях теоремы 3.1.2 резольвента оператора* A *удовлетворяет оценку* $\big\|(A-\lambda E)^{-1};\, \mathcal{L}(H)\big\| \le M|\lambda|^{-1}$.

Теорема 3.1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1. Тогда оператор* A *имеет дискретный спектр и для функции* $N(t)$ *распределения собственных значений оператора* A *справедлива оценка* $N(t) \le M\, t^{\omega}$ $(t \ge 1)$, *где* $\omega = \max\{\frac{n}{2r},\, \frac{n-1}{2r-2\alpha}\}$.

Далее в работе приводится теорема 3.1.4, которая является аналогом теорем 3.1.1 и 3.1.2 для оператора A^*, сопряженного по соотношению к оператору A. В этой теореме в место оператора $\mathcal{A}$ используется его формально сопряженный оператор $\mathcal{A}^+$, который связан с формой $\overline{B[v,\, u]}$ равенством $<\mathcal{A}^+u,\, v> = \overline{B[v,\, u]}, \quad u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$.

В **заключении** представлены выводы о результатах исследования, перспективы и направления дальнейшего развития.

Глава 1

Вариационная задача Дирихле с однородными граничными условиями

В этой главе исследуется однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границе области, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных интегро-дифференциальных форм. В первом параграфе введены определения основных нормированных пространств функций, сформулированы их основные свойства и доказаны некоторые вспомогательные весовые интегральные неравенства. Во втором параграфе доказывается весовой аналог неравенства Гординга для эллиптических операторов дивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. В третьем параграфе изучается однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов дивергентного вида, имеющих только старшие коэффициенты. Случай общих эллиптических операторов (содержащих ненулевые младшие коэффициенты) рассматривается в четвертом параграфе.

1.1 Функциональные пространства. Вспомогательные интегральные неравенства

В этом параграфе, в основном, приведены известные результаты из теории нормированных пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных в ограниченной области, которые в последующих параграфах неоднократно используются. Приведенные ниже весовые интегральные неравенства также имеют вспомогательный характер.

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)-$ мерной границей $\partial\Omega$. Пусть $r-$ натуральное, α, $p-$ вещественные числа и $1 \le p < \infty$. Символом $V^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные с конечной нормой

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\|u; L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|^p + \|u; L_{p;\,\alpha-r}(\Omega)\|^p\right\}^{1/p}, \qquad (1.1.1)$$

где

$$\|u; L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx\right\}^{1/p},$$

$$\|u; L_{p;\,\alpha-r}(\Omega)\| = \left\{\int\limits_{\Omega} \rho^{p(\alpha-r)}(x)|u(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Здесь и далее $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ – мультииндекс, $|k| = k_1+k_2+\cdots+k_n$ – длина мультииндекса k,

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|}u(x)}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_n^{k_n}}$$

– обобщенная в смысле С.Л. Соболева производная функции $u(x)$ мультииндекса k, $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, т.е. бесконечно дифференцируемая положительная функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\rho(x) \le dist\{x, \partial\Omega\} \le M\rho(x),$$

$$|\rho^{(k)}(x)| \leq M_k \rho^{1-|k|}(x), \qquad (1.1.2)$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса k. На ряду с этой функцией, также вводим обозначение $d(x) = dist\{x, \partial\Omega\}$, $x \in \Omega$.

Основные свойства пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ изучены в работах С.М. Никольского, П.И. Лизоркина и Н.В. Мирошина [47, 48, 56], К.Х. Бойматова [8], С.А. Исхокова [26]. Ниже сформулируем некоторые теоремы, подробные доказательства которых можно найти в указанных выше работах.

Теорема 1.1.1. *1) Для любого натурального числа* r *и вещественных чисел* α, p, *причем* $1 \leq p < \infty$, *множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в* Ω *плотно в пространстве* $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

2) Пусть целое число $s \in [0, r]$. *Тогда справедливо вложение*

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to V^{r-s}_{p;\,\alpha-s}(\Omega).$$

Теорема 1.1.2. *Норма (1.1.1) пространства* $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ *эквивалентна следующей норме*

$$\|u; V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|_* = \left\{ \sum_{|k| \leq r} \int_\Omega \left(\rho^{\alpha - r + |k|}(x) |u^{(k)}(x)| \right)^p dx \right\}^{1/p} \qquad (1.1.3)$$

.

Теорема 1.1.3. *Пусть целое число* $s \in [0, r]$ *и выполняются условия*

$$1 \leq p \leq q_0 < \infty, \quad r - s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q_0} > 0. \qquad (1.1.4)$$

Тогда справедливо вложение

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to V^s_{q_0;\,\alpha - r + s + \frac{n}{p} - \frac{n}{q_0}}(\Omega). \qquad (1.1.5)$$

Пространство $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ тесно связано с функциональным пространством $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, которое определяется нормой

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \|u; L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|^p + \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}.$$

В отличие от пространства $V^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ множество $C_0^\infty(\Omega)$ не всегда плотно в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ обозначим через $\overset{0}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема (см. [56]).

Теорема 1.1.4. 1) *Если* $\alpha + 1/p \notin \{1, \ldots, r\}$ *и область* Ω *удовлетворяет условию конуса, то*

$$V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) = \overset{0}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$$

с точностью до эквивалентности норм.

2) *Если граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *достаточно гладкая и* $-1/p < \alpha < r - 1/p$, *то*

$$\overset{0}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) :\ \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ s = 0,\,1,\,\ldots,\,s_0 - 1 \right\},$$

где $\partial/\partial n$ *– производная по внутренней нормали, а целое число* s_0 *такое, что* $r - \alpha - 1/p \le s_0 < r - \alpha + 1 - 1/p$.

Множество функций $u(x)\,(x \in \Omega)$, для которых конечна полунорма $\left\|u;\ L^r_{p;\alpha}(\Omega)\right\|$, обозначим через $L^r_{p;\alpha}(\Omega)$, а символом $L_{p;\alpha}(\Omega)$ обозначим весовое лебегово пространство с нормой

$$\|u;\ L_{p;\alpha}(\Omega)| = \left\{ \int\limits_\Omega \rho^{\alpha p}(x)\,|u(x)|^p\,dx \right\}^{1/p}.$$

Далее сформулируем некоторые интегральные неравенства, которые являются частными случаями соответствующих результатов работы С.А.Исхокова [29].

Пусть $y \in R^n$, $\quad \varepsilon \in (0,1)$ и m-натуральное число. Введем обозначение

$$J_\varepsilon^{(m)}(y) = \left\{ x \in R^n : \, |x-y| < \frac{m\varepsilon}{(m+1)}\, d(y) \right\}.$$

Заметим, что $d(y) = dist\{y, \partial\Omega\}$ $\quad (y \in \Omega)$ и $J_\varepsilon^{(m)}(y) \subset \Omega$ при всех $y \in \Omega$, $\varepsilon \in (0,1)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Лемма 1.1.1. *Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, m-натуральное число и $\chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)$ – характеристическая функция шара $J_\varepsilon^{(m)}(y)$. Тогда*

$$\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n \le d^{-n}(x)\varkappa_n^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n \int\limits_\Omega \chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)\, dy \le \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n, \quad (1.1.6)$$

где $\varkappa_n$ – площадь единичной сферы в R^n.

Замечание 1.1.1. Аналог неравенства (1.1.6) имеет место и для характеристической функции $\chi_\varepsilon(x,y)$ шара $J_\varepsilon(y) = \{x \in R^n : \, |x-y| < \varepsilon d(y)\}$. Для его получения в (1.1.6) нужно заменить $(1 + 1/m)$ единицей, а $\chi_\varepsilon^{(m)}(x,y)$ – на $\chi_\varepsilon(x,y)$.

Лемма 1.1.2. *Пусть целое число $m \in [0,r)$, $p \ge 1$, $1 \le q_1 \le q_0$, а число q_0 удовлетворяет условиям:*

$$\frac{1}{p} - \frac{r-m}{n} < \frac{1}{q_0} \quad \text{при} \quad n-(r-m)p > 0;$$

q_0 - любое конечное число, при $n-(r-m)p \le 0$.

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\left\| v;\, L^m_{q_0;\,\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_0}-r+m}(\Omega) \right\| \le \tau \left\| v;\, V^r_{p;\alpha}(\Omega) \right\| + c_0\tau^{-\mu} \left\| v;\, L_{q_1;\,\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{q_1}-r}(\Omega) \right\| \quad \left(\forall v \in V^r_{p;\alpha}(\Omega)\right), \quad (1.1.7)$$

где

$$\mu = \frac{q_1^{-1} - q_0^{-1} + mn^{-1}}{q_0^{-1} - p^{-1} + (r-m)n^{-1}}.$$

Лемма 1.1.3. *Пусть r, t – натуральные числа, $p \ge 1$ и $q \ge 1$.*

Для мультииндексов k, l таких, что $|k| < r$, $|l| \leq t$ определим числа q_l, λ_{kl}, s_k посредством следующих соотношений

$$\frac{1}{q_l} = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{t-|l|}{n}, & n > q(t-|l|); \\ \varepsilon_0,\ 0 < \varepsilon_0 \leq 1/q, & n \leq q(t-|l|); \end{cases} \tag{1.1.8}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} > \frac{1}{q_l} + \frac{1}{p} - \frac{r-|k|}{n} \quad \textit{при} \ \ n - p(r-|k|) > 0; \tag{1.1.9}$$

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{q_l} + \varepsilon_1,\ 0 < \varepsilon_1 < 1/p \quad \textit{при} \ \ n - p(r-|k|) \leq 0; \tag{1.1.10}$$

$$\frac{1}{s_k} \geq \frac{1}{\lambda_{kl}} - \frac{1}{q_l}. \tag{1.1.11}$$

Положим

$$\delta_{k,l} = \alpha + \beta - r - t + |k| + |l| + \frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{\lambda_{kl}}. \tag{1.1.12}$$

Тогда для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left\| u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\,\delta_{k,l}}(\Omega) \right\| \leq \left\| v;\, V^t_{q;\,\beta}(\Omega) \right\| \times \\ \times \left\{ \tau \left\| u;\, V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\| + c_0 \tau^{-\mu_k} \left\| u;\, L_{s_k;\,\alpha - r + \frac{n}{p} - \frac{n}{s_k}}(\Omega) \right\| \right\}, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - \lambda_{kl}^{-1} + q_l^{-1} + |k| n^{-1}}{\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1} - p^{-1} + (r-|k|) n^{-1}} \tag{1.1.14}$$

и положительная постоянная c_0 зависит только от n, p, r, $|k|$.

Доказательство. Пусть $|k| < r$, $|l| \leq t$. Число q_l, определенное равенством (1.1.8) удовлетворяет условиям

$$q \leq q_l < \infty, \quad t - |l| - \frac{n}{q} + \frac{n}{q_l} \geq 0$$

и поэтому в силу теоремы 1.1.3 выполняется неравенство

$$\left\| v^{(l)};\, L_{q_l;\,\beta - t + |l| + \frac{n}{q} - \frac{n}{q_l}}(\Omega) \right\| \leq M \left\| v;\, V^t_{q;\beta}(\Omega) \right\| \tag{1.1.15}$$

для всех $v \in V^t_{q;\beta}(\Omega)$.

Нетрудно проверить, что числа

$$q_0 = p_k,\ m = |k|,\ q_1 = s_k,$$

где

$$p_k = \left(\lambda_{kl}^{-1} - q_l^{-1}\right)^{-1}$$

и числа q_l, λ_{kl}, s_k определены соотношениями (1.1.8) - (1.1.11), удовлетворяют условиям леммы 1.1.2. Поэтому для любого $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\left\| u^{(k)};\ L_{p_k;\,\alpha-r+|k|+\frac{n}{p}-\frac{n}{p_k}}(\Omega) \right\| \\ \leq \tau\ \left\| u;\ V^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\| + c_0\tau^{-\mu_k} \left\| u;\ L_{s_k;\,\alpha-r+\frac{n}{p}-\frac{n}{s_k}}(\Omega) \right\|, \quad (1.1.16)$$

где

$$\mu_k = \frac{s_k^{-1} - p_k^{-1} + |k|n^{-1}}{p_k^{-1} - p^{-1} + (r-|k|)n^{-1}}. \quad (1.1.17)$$

Так как

$$\frac{1}{\lambda_{kl}} = \frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_l}, \quad (1.1.18)$$

то учитывая равенство (1.1.12) и применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\left\| u^{(k)}v^{(l)};\ L_{\lambda_{kl};\,\delta_{kl}}(\Omega;\ \sigma_{kl}) \right\|$$

$$\leq \left\| u^{(k)};\ L_{p_k;\,\alpha+\frac{n}{p}-\frac{n}{p_k}-r+|k|}(\Omega) \right\| \left\| v^{(l)};\ L_{q_l;\,\beta-t+|l|+\frac{n}{q}-\frac{n}{q_l}}(\Omega) \right\|.$$

В силу (1.1.15), (1.1.16) из последнего неравенства следует (1.1.13). Равенство (1.1.14) следует из (1.1.17), (1.1.18).

Лемма 1.1.3 доказана.

1.2 Неравенства Гординга для эллиптического оператора со степенным вырождением

Также как в предыдущем параграфе, здесь предполагается, что $\Omega-$ ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)-$

мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть $r-$ натуральное, $\alpha-$ вещественное числа. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{A}[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{1.2.1}$$

коэффициенты $b_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями.

Теорема 1.2.1. *Пусть коэффициенты $b_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют следующему условию эллиптичности*

$$\mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} b_{kl}(x) \xi^k \xi^l \geq c|\xi|^{2r} \tag{1.2.2}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$; число $c > 0$ не зависит от x и ξ.

Тогда существуют такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 0$, что

$$\mathrm{Re}\, \mathfrak{A}[u,\, u] \geq C_1 \|u, V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 - C_2 \|u, L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|^2 \tag{1.2.3}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Замечание 1.2.1. Неравенство (1.2.3) является весовым аналогом неравенства Гординга для сильно эллиптических операторов (см., например, [23, стр. 72] или [24, стр. 245]).

Доказательство теоремы 1.2.1. Пусть y – произвольная фиксированная точка в Ω. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{A}_y[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{R^n} b_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \qquad (u,\, v \in C_0^\infty(R^n)).$$

Из неравенства Гординга для сильноэллиптических операторов с постоянными коэффициентами следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int\limits_{R^n} |u^{(k)}(x)|^2 dx$$
$$\leq M\Big\{ \mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{R^n} b_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx + \int\limits_{R^n} |u(x)|^2 dx \Big\} \tag{1.2.4}$$

для всех $u \in C_0^\infty(R^n)$.

Обозначим через $I(0)$, $I_m(0)$, $m = 1, 2, \ldots$ открытые шары пространства R^n с центрами в начале координат и радиусами 1, $\frac{m}{m+1}$, соответственно.

Лемма 1.2.1. *Для любого натурального числа m существует функция φ_m со следующими свойствами:*

1) $\varphi_m(x) \in C_0^\infty(R^n)$;

2) $\varphi_m(x) = 1$, если $x \in I_m(0)$;

3) $\varphi_m(x) = 0$, если $|x| \geq 1 + \frac{1}{m+1}$;

4) $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ для всех $x \in R^n$;

5) $\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \leq M_1(m+1)^{|k|}$, где M_1 – некоторое положительное число, которое не зависит от k.

Доказательство. Для построения функции с нужными нам свойствами мы используем технику усреднения функций (см., например, [58, с. 311-327]). Пусть $\omega(x)$ – некоторое усредняющее ядро, то есть некоторая неотрицательная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\omega(x) \in C_0^\infty(R^n);$$

$$\operatorname{supp} \omega(x) \subset \overline{B_1} = \{x \in R^n : |x| \leq 1\};$$

$$\int\limits_{R^n} \omega(x) dx = 1.$$

Пусть $u \in L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Продолжим её нулём вне Ω. Средней функцией для $u(x)$ называется функция $u_h(x)$, определенная равенством

$$u_h(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{R^n} \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy = \frac{1}{h^n} \int\limits_{B_h(x)} \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy, \qquad (1.2.5)$$

где $B_h(x)$ – открытый шар радиуса h в R^n с центром в точке x.

Пусть δ – некоторое положительное число. Обозначим через $B_\delta(0)$ – открытый шар радиуса δ в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат.

Через $\theta_\delta(x)$ обозначим, характеристическую функцию шара $B_\delta(0)$, т.е.

$$\theta_\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при}\, x \in B_\delta(0), \\ 0, & \text{при}\, x \notin B_\delta(0), \text{ то есть } |x| \geq \delta. \end{cases}$$

Пусть h – достаточно малое положительное число. Построим усреднения для функции $\theta_\delta(x)$ с радиусом усреднения h:

$$v_{h,\delta}(x) = \frac{1}{h^n} \int\limits_{B_h(x)} \omega\left(\frac{x-y}{h}\right) \theta_\delta(y) dy. \tag{1.2.6}$$

Отметим следующие свойства этой функции (см. [58, с. 316]):

1) $v_{h,\delta}(x)$ бесконечно дифференцируема в R^n;

2) $v_{h,\delta}(x) = 0$, если $|x| \geq \delta + h$;

3) $v_{h,\delta}(x) = 1$, если $|x| \leq \delta - h$

4) $0 \leq v_{h,\delta}(x) \leq 1, \quad \forall x \in R^n$.

Определим функцию $\varphi_m(x)$ равенством

$$\varphi_m(x) = v_{h,\delta}(x), \quad \delta = 1, \quad h = \frac{1}{m+1}, m = 1, 2, \ldots. \tag{1.2.7}$$

Тогда из (1.2.6) следует

$$\varphi_m(x) = (m+1)^n \int\limits_{(m+1)|x-y|<1} \omega\left((m+1)(x-y)\right) \theta_1(y) dy, \tag{1.2.8}$$

где $\theta_1(y)$ – характеристическая функция единичного шара с центром в начале координат. Далее, легко можно проверить, что эта функция обладает всеми свойствами, приведенными в лемме 1.2.1. В частности, дифференцируя равенство (1.2.14) под знаком интеграла, для производных функции $\varphi_m(x)$ получим

$$\varphi_m^{(k)}(x) = (m+1)^n \int\limits_{(m+1)|x-y|<1} \omega^{(k)}\left((m+1)(x-y)\right) (m+1)^{|k|} \theta_1(y) dy.$$

Отсюда следует, что

$$\left|\varphi_m^{(k)}(x)\right| \leq (m+1)^n \int\limits_{(m+1)|x-y|<1} \left|\omega^{(k)}((m+1)(x-y))\right| (m+1)^{|k|} \left|\theta_1(y)\right| dy \leq$$

$$\leq M_0(m+1)^{(n+|k|)} \int\limits_{|x-y|<1/(m+1)} dy = M_0(m+1)^{(n+|k|)} \varkappa_n \frac{1}{(m+1)^n} = M_0\varkappa_n(m+1)^{|k|},$$

где M_0 – некоторое положительное число и $\varkappa_n$ – объем единичного шара в пространстве R^n.

Лемма 1.2.1 доказана.

Пусть $u(x) \in C^\infty(I(0))$. Тогда продолжая функцию $v_m(x) = \varphi_m(x)u(x)$ вне $I(0)$ нулем, получаем $v_m \in C_0^\infty(R^n)$. Так как $v_m(x) = u(x)$ для всех $x \in I_m(0)$, то из неравенства (1.2.4) для $v_m(x)$ следует, что

$$\sum_{|k|=r} \int\limits_{I_m(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx \leq M_0 \left\{ \operatorname{Re} \mathfrak{A}_y[v_m,\, v_m] + \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2\, dx \right\} \qquad (1.2.9)$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, представим форму $\mathfrak{A}_y[v_m,\, v_m]$ в виде

$$\mathfrak{A}_y[v_m,\, v_m] = \mathfrak{A}_y^{(1)}[v_m,\, v_m] + \mathfrak{A}_y^{(2)}[v_m,\, v_m], \qquad (1.2.10)$$

где

$$\mathfrak{A}_y^{(1)}[v_m,\, v_m] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I(0)} b_{kl}(y)\varphi_m^2(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx,$$

$$\mathfrak{A}_y^{(2)}[v_m,\, v_m] = {\sum}' \int\limits_{I(0)} C_{k,\mu}C_{l,\nu}b_{kl}(y)\varphi_m^{(\mu)}(x)\varphi_m^{(\nu)}(x)u^{(k-\mu)}(x)\overline{u^{(l-\nu)}(x)}dx. \qquad (1.2.11)$$

Здесь $C_{k,\mu}$, $C_{l,\nu}$ - некоторые константы и символом $\sum'$ обозначено суммирование по всем мультииндексам $k,\, l,\, \mu,\, \nu$ таким, что $|k| = |l| = r,\ \mu \leq k,\ \nu \leq l,\ |\mu + \nu| \neq 0$.

Далее оценим форму $\mathfrak{A}_y^{(2)}[u,\, v]$. Так как коэффициенты $b_{kl}(y)$ ограничены, то из (1.2.11) следует

$$\left|\mathfrak{A}_y^{(2)}[v_m,\, v_m]\right| \le M_2 \sum{}' \int\limits_{I(0)} |b_{kl}(y)| \left|\varphi_m^{(\mu)}(x)\right| \left|\varphi_m^{(\nu)}(x)\right| \left|u^{(k-\mu)}(x)\right| \left|u^{(l-\nu)}(x)\right| dx \le$$

$$\le M_3 \sum{}' \int\limits_{I(0)} (m+1)^{\mu|+|\nu|} \left|u^{(k-\mu)}(x)\right| \left|u^{(l-\nu)}(x)\right| dx. \quad (1.2.12)$$

Далее докажем, что при $|k| = |l| = r,\ \mu \le k,\ \nu \le l,\ |\mu+\nu| \ne 0$ для любого достаточно малого положительного числа τ существует конечное число $M(\tau) > 0$ такое, что

$$\int\limits_{I(0)} \left|u^{(k-\mu)}(x)\right| \left|u^{(l-\nu)}(x)\right| dx \le$$

$$\le \tau \sum_{|k|=r} \int\limits_{I(0)} \left|u^{(k)}(x)\right|^2 dx + M(\tau) \int\limits_{I(0)} |u(x)|^2 dx. \quad (1.2.13)$$

Для наглядности рассмотрим случай $|\mu| = 1,\ |\nu| = 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Согласно теорем вложения с малым параметром для пространств Соболева (см., например, [17, неравенство (1.5)]), если $|s| \le r-1$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\left\|u^{(s)}; L_2(Q)\right\| \le \varepsilon \left\|u; L_2^r(Q)\right\| + c_0 \varepsilon^{-\sigma_s} \left\|u; L_2(Q)\right\|, \quad u \in W_2^r(Q), \quad (1.2.14)$$

где c_0 – некоторая постоянная и $\sigma_s = |s|/(r-|s|)$. Используя это неравенство при $s = k-\mu$, имеем

$$\int\limits_{I(0)} \left|u^{(k-\mu)}(x)\right| \left|u^{(l)}(x)\right| dx \le \left\|u^{(s)};\ L_2(I(0))\right\| \left\|u^{(l)};\ L_2(I(0))\right\| \le$$

$$\le \varepsilon \left\|u; L_2^r(I(0))\right\|^2 + c_0 \varepsilon^{-\sigma_s} \left\|u; L_2(I(0))\right\| \left\|u; L_2^r(I(0))\right\|. \quad (1.2.15)$$

С другой стороны, используя неравенство

$$2A \cdot B \le A^2 + B^2, \quad A \ge 0,\ B \ge 0,$$

при

$$A = \delta \left\| u; L_2^r(I(0)) \right\|, \quad B = \frac{1}{2\delta} \left\| u; L_2(I(0)) \right\|, \quad \delta > 0,$$

получим

$$\left\| u; L_2(I(0)) \right\| \left\| u; L_2^r(I(0)) \right\| \le \delta^2 \left\| u; L_2^r(I(0)) \right\|^2 + \frac{1}{4\delta^2} \left\| u; L_2(I(0)) \right\|^2.$$

Отсюда и из (1.2.15) следует

$$\int\limits_{I(0)} \left| u^{(k-\mu)}(x) \right| \left| u^{(l)}(x) \right| dx \le (\varepsilon + c_0 \varepsilon^{-\sigma_s} \delta^2) \left\| u; L_2^r(I(0)) \right\|^2 + c_0 \varepsilon^{-\sigma_s} \frac{1}{4\delta^2} \left\| u; L_2(I(0)) \right\|^2.$$

Так как в этом неравенстве ε, δ – произвольные достаточно малые положительные числа, то при подходящем подборе этих чисел получаем неравенство (1.2.13) для $|\mu| = 1$, $|\nu| = 0$.

Так как $|\mu| \le r$, $|\nu| \le r$, то из (1.2.12) и (1.2.13) имеем

$$\left| \mathfrak{A}_y^{(2)}[v_m, v_m] \right| \le M_4 (m+1)^{2r} \tau \left\| u; L_2^r(I(0)) \right\|^2 + M_4 (m+1)^{2r} M(\tau) \left\| u; L_2(I(0)) \right\|^2.$$

Отсюда, подбирая

$$\tau = \frac{\varepsilon}{M_4 (m+1)^{2r}}, \quad \text{то есть} \quad M_4 (m+1)^{2r} \tau = \varepsilon,$$

получим неравенство

$$\left| \mathfrak{A}_y^{(2)}[v_m, v_m] \right| \le \varepsilon \left\| u; L_2^r(I(0)) \right\|^2 + K(\varepsilon, m) \left\| u; L_2(I(0)) \right\|^2, \qquad (1.2.16)$$

где ε – достаточно малое положительное число.

Отметим, что

$$K(\varepsilon, m) \to \infty \text{ при } m \to \infty, \, \varepsilon \to 0. \qquad (1.2.17)$$

Ниже при оценке некоторых интегралов, нам понадобится следующая вспомогательная лемма:

Лемма 1.2.2. *Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$, m-натуральное число и $\chi_{\varepsilon, m}(z, y)$ – характеристическая функция шарового слоя*

$$J_{\varepsilon, m}(y) = \left\{ z \in R^n : \frac{m\varepsilon}{m+1} d(y) \le |z - y| < \varepsilon d(y) \right\}$$

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon,m}(z,y)\,dy \le \varkappa_n \varepsilon^n d^n(z) \left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^n} - \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right], \quad (1.2.18)$$

где $\varkappa_n$ *– площадь единичной сферы в* R^n.

Доказательство. Для удобства чтения вводим обозначение

$$F_{\varepsilon,m}(z) = \int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon,m}(z,y)\,dy. \quad (1.2.19)$$

Для всех $y \in \Omega$ и всех $z \in J_\varepsilon(y) = \{z \in R^n : |z-y| < \varepsilon d(y)\}$ выполняются неравенства

$$(1-\varepsilon)d(y) \le d(z) \le (1+\varepsilon)d(y).$$

Следовательно,

$$d(y) \le (1-\varepsilon)^{-1}d(z), \quad (1+\varepsilon)^{-1}d(z) \le d(y) \quad (z \in J_\varepsilon(y),\, y \in \Omega)\,. \quad (1.2.20)$$

Пусть $z \in J_{\varepsilon,m}(y)$. Тогда

$$\frac{m}{m+1}\varepsilon d(y) \le |z-y| < \varepsilon d(y).$$

Теперь используя неравенства (1.2.20) переходим из $d(y)$ в $d(z)$. В результате получим

$$\frac{m}{m+1}\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}d(z) \le |z-y| < \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}d(z).$$

В силу этих неравенств из (1.2.19) следует

$$F_{\varepsilon,m}(z) \le \int\limits_{\frac{m}{m+1}\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}d(z) \le |z-y| < \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}d(z)} dy \eqqcolon F^0_{\varepsilon,m}(z). \quad (1.2.21)$$

Правая часть этого неравенства равна объему шарового слоя с радиусами

$$r_1 = \frac{m}{m+1}\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}d(z), \quad r_2 = \varepsilon(1-\varepsilon)^{-1}d(z).$$

Поэтому она равна

$$F^0_{\varepsilon,m}(z) = \varkappa_n\,(r_2^n - r_1^n) =$$

$$= \varkappa_n \varepsilon^n d^n(z) \left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^n} - \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right]. \quad (1.2.22)$$

Здесь, так же как и выше, $\varkappa_n$ – объем единичного шара в R^n. В силу (1.2.21), (1.2.22) из равенства (1.2.19) следует оценка (1.2.18).

Лемма 1.2.2 доказана.

Теперь переходим к оценке значения формы $\mathfrak{A}_y^{(1)}[v_m,\, v_m]$. Принимая во внимание свойство 2) функций $\varphi_m(x)$, представим форму $\mathfrak{A}_y^{(1)}[v_m,\, v_m]$ в виде

$$\mathfrak{A}_y^{(1)}[v_m,\, v_m] = \mathfrak{A}_{y,m}^{(11)}[u,\, u] + \mathfrak{A}_{y,m}^{(12)}[u,\, u], \tag{1.2.23}$$

где

$$\mathfrak{A}_{y,m}^{(11)}[u,\, u] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I_m(0)} b_{kl}(y) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx,$$

$$\mathfrak{A}_{y,m}^{(12)}[u,\, u] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{I^{(m)}(0)} b_{kl}(y) \varphi_m^2(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx,$$

$$I^{(m)}(0) = I(0) \setminus I_m(0) = \left\{ x \in R^n : \frac{m}{m+1} < |x| < 1 \right\}.$$

Согласно условиям теоремы коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, ограничены. Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского получаем неравенство

$$\left| \mathfrak{A}_{y,m}^{(12)}[u,\, u] \right| \leq M_1 \left\| u;\, L_2^r(I^{(m)}(0)) \right\|^2, \tag{1.2.24}$$

где

$$\left\| u;\, L_2^r(I^{(m)}(0)) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{I^{(m)}(0)} \left| u^{(k)}(x) \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Ввиду представлений (1.2.10), (1.2.23) из (1.2.9) следует, что

$$\|u;\, L_2^r(I_m(0))\|^2 - M_0 \left| \mathfrak{A}_y^{(2)}[v_m,\, v_m] \right| - M_0 \left| \mathfrak{A}_{y,m}^{(12)}[u,\, u] \right| \leq M_0 \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{y,m}^{(11)}[u,\, u].$$

Далее, считая число m достаточно большим и применяя неравенство

(1.2.16) при $\varepsilon = 1/m$, а также неравенство (1.2.24), приходим к неравенству

$$\|u;\, L_2^r(I_m(0))\|^2 - \frac{1}{m} M_0 \|u; L_2^r(I(0))\|^2 - M_0 \left(K(1/m,\, m) + 1\right) \|u; L_2(I(0))\|^2 - \\ - M_0 M_1 \left\|u;\, L_2^r(I^{(m)}(0))\right\|^2 \le M_0 \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{y,m}^{(11)}[u,\, u] \qquad (\forall u \in C^\infty(I(0)))\,.$$

Следовательно,

$$\|u;\, L_2^r(I_m(0))\|^2 - M_0 \frac{1}{m} \|u;\, L_2^r(I(0))\|^2 - M_3 \left\|u;\, L_2^r(I^{(m)}(0))\right\|^2 - \\ - C_m \|u;\, L_2(I(0))\|^2 \le M_0 \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{y,m}^{(11)}[u,\, u] \qquad (\forall u \in C^\infty(I(0)))\,, \quad (1.2.25)$$

где M_0, M_3, C_m– положительные числа и $C_m \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$.

Пусть v – произвольная функция из класса $C_0^\infty(\Omega)$. Отображение $z \longrightarrow x$, определенное равенством $x = (z - y)/\varepsilon d(y)$ отображает шар

$$J_\varepsilon(y) = \{z \in R^n :\, |z - y| < \varepsilon d(y)\}$$

в единичный шар $I(0)$, $J_\varepsilon^{(m)}(y)$ в $I_m(0)$, а шаровый слой $J_{\varepsilon,\, m}(y)$ в шаровый слой $I^{(m)}(0)$.

Так как $J_\varepsilon(y) \subset \Omega$ при $\varepsilon \in (0, 1)$, то функция $\widehat{v}_y(x) = v\left(x\varepsilon d(y) + y\right)$ определена для всех $x \in I(0)$ и принадлежит классу $C^\infty(I(0))$.

Дла фиксированной точки $y \in \Omega$ рассмотрим функцию

$$u(x) = \widehat{v}_y(x) = v\left(x\varepsilon d(y) + y\right).$$

Отметим, что

$$u^{(k)}(x) = \varepsilon^{|k|} d^{|k|}(y) \widehat{v}_y^{(k)}(x)$$

для любого мультииндекса k. С учетом этого равенства, неравенство (1.2.25) для функции $u(x) = \widehat{v}_y(x)$ примет вид

$$\varepsilon^{2r} d^{2r}(y) \left\{ \|\widehat{v}_y;\, L_2^r(I_m(0))\|^2 - M_0 \frac{1}{m} \|\widehat{v}_y;\, L_2^r(I(0))\|^2 - M_3 \left\|\widehat{v}_y;\, L_2^r(I^{(m)}(0))\right\|^2 \right\} - \\ - C_m \|\widehat{v}_y;\, L_2(I(0))\|^2 \le \varepsilon^{2r} d^{2r}(y) M_0\, \widehat{v}_y \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{y,m}^{(11)}[u,\, u]$$

для всех $u \in C^{\infty}(I(0))$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\sum_{|k|=r}\left\{\int\limits_{I_m(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx - M_0\frac{1}{m}\int\limits_{I(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx - M_3\int\limits_{I^{(m)}(0)}\left|\widehat{v}_y^{(k)}(x)\right|^2 dx\right\} -$$

$$- C_m\varepsilon^{-2r}d^{-2r}(y)\int\limits_{I(0)}\left|\widehat{v}_y(x)\right|^2 dx \le M_0 \operatorname{Re}\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{I_m(0)} b_{kl}(y)\widehat{v}_y^{(k)}(x)\overline{\widehat{v}_y^{(l)}(x)}dx.$$

В интегралах этого неравенства проведем замену переменных интегрирования $z = y + x\varepsilon d(y)$, умножим обе части полученного неравенства на $d^{2\alpha-n}(y)$ и результат интегрируем по $y \in \Omega$. Отметим, что

$$z = y + x\varepsilon d(y), \quad dz = \varepsilon^n d^n(y)dx, \quad dx = \varepsilon^{-n}d^{-n}(y)dz.$$

Учитывая эквивалентность функций $d(y)$ и $\rho(y)$, в итоге получим

$$\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy$$

$$- M_0\frac{1}{m}\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy$$

$$- M_3\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)\left(\int\limits_{J_{\varepsilon,\,m}(y)}\left|v^{(k)}(z)\right|^2 dz\right)dy$$

$$- C_m\,(\varepsilon)^{-2r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r-n}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)}\left|v(z)\right|^2 dz\right)dy \le$$

$$\le M_0 \operatorname{Re}\mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v], \quad (1.2.26)$$

где

$$\mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v] = \sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-n}(y)b_{kl}(y)\left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz\right)dy.$$

Теперь переходим к оценке интегралов левой части неравенства (1.2.26). Применяя лемму 1.1.1, для интеграла первой суммы получим

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon^{(m)}(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$
$$= \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z,y) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$
$$\geq (1+\varepsilon)^{-2\alpha}(1-\varepsilon)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 \left(\int\limits_{\Omega} \chi_\varepsilon^{(m)}(z,y) dy \right) dz$$
$$\geq M_4 (1+\varepsilon)^{-2\alpha}(1-\varepsilon)^n \varkappa_n \times$$
$$\times \left(\frac{\varepsilon m}{(1+\varepsilon)(m+1)} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz. \quad (1.2.27)$$

Здесь M_4 – некоторая константа, которая возникает в результате замены $d(z)$ через $\rho(z)$.

Теперь применяя лемму 1.1.1 (см. замечание 1.1.1) оценим интеграл во второй суммы в левой части неравенства (1.2.26):

$$\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_\varepsilon(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy$$
$$\leq M_5 (1-\varepsilon)^{-2\alpha}(1+\varepsilon)^n \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz, \quad (1.2.28)$$

где M_5 – некоторая постоянная.

Далее применяя лемму 1.2.2, для интеграла в третьей сумме в левой части неравенства (1.2.26) получим

$$
\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{J_{\varepsilon,\,m}(y)} \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy =
$$

$$
\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-n}(y) \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon,\,m}(z,y) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right) dy \leq
$$

$$
\leq M_6 (1-\varepsilon)^{-2\alpha} (1+\varepsilon)^n \varepsilon^n \varkappa_n \times
$$

$$
\times \left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^n} - \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \right] \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz, \quad (1.2.29)
$$

где M_6 – некоторая постоянная.

Переходим к оценке последнего интеграла в в левой части неравенства (1.2.26). Применяя лемму 1 получим

$$
\int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r-n}(y) \left(\int\limits_{J_{\varepsilon}(y)} |v(z)|^2 dz \right) dy
$$

$$
\leq M_7 (1+\varepsilon)^{2r+n-2\alpha} \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(z) |v(z)|^2 dz, \quad (1.2.30)
$$

где M_7 – некоторая постоянная.

Теперь применяя полученные выше оценки (1.2.27) – (1.2.30) из неравенства (1.2.26) получаем

$$
M_4 (1+\varepsilon)^{-2\alpha} (1-\varepsilon)^n \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon m}{(1+\varepsilon)(m+1)} \right)^n \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right\} -
$$

$$
- M_5 M_0 \frac{1}{m} (1-\varepsilon)^{-2\alpha} (1+\varepsilon)^n \varkappa_n \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^n \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(z) \left| v^{(k)}(z) \right|^2 dz \right\} -
$$

$$
\begin{aligned}
&- M_6(1-\varepsilon)^{-2\alpha}(1+\varepsilon)^n\varepsilon^n\varkappa_n\times\\
&\quad\times\left[\frac{1}{(1-\varepsilon)^n}-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right]\left\{\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz\right\}-\\
&\qquad- M_7C_m\varepsilon^{-2r}(1+\varepsilon)^{2r+n-2\alpha}\varkappa_n\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r}(z)\left|v(z)\right|^2dz\le\\
&\qquad\qquad\le M_0\operatorname{Re}\mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v].
\end{aligned}
$$

Обе части этого неравенства делим на

$$
M_4(1+\varepsilon)^{-2\alpha}(1-\varepsilon)^n\varkappa_n\varepsilon^n m^n(1+\varepsilon)^{-n}(m+1)^{-n}
$$

и используя равенства

$$
\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(z)\left|v^{(k)}(z)\right|^2dz=\left\|v;\,L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2,
$$

$$
\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha-2r}(z)\left|v(z)\right|^2dz=\left\|v;\,L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2,
$$

приходим к следующему неравенству

$$
\begin{aligned}
&[1-C_1(\varepsilon,\,m)]\left\|v;\,L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2-C_2(\varepsilon,\,m)\varepsilon^{-2r}\left\|v;\,L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\right\|^2\le\\
&\qquad\le\varepsilon^{-n}C_3(\varepsilon,\,m)\operatorname{Re}\mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v],\quad(1.2.31)
\end{aligned}
$$

где:

$$
C_3(\varepsilon,\,m)=M_{10}(1+\varepsilon)^{2\alpha}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n;
$$

$$
C_2(\varepsilon,\,m)=C(m)\,(1+\varepsilon)^{2r}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{2n}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n,
$$

где $C(m)=C_mM_7/M_4>0$ и $C(m)\to+\infty$ при $m\to+\infty$;

$$
\begin{aligned}
C_1(\varepsilon,\,m)&=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{2\alpha+2n}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\times\\
&\qquad\times\left[M_8\frac{1}{m}+M_9\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)^n}-\left(\frac{m}{m+1}\right)^n\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Из приведенных равенств следует, что

$$C_3(\varepsilon,\, m) \le M_{10} \quad \text{для всех} \quad \varepsilon \in (0;\, 0,5), \quad m \ge 2; \tag{1.2.32}$$

$$C_2(\varepsilon,\, m) \to +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad m \to +\infty;$$

$$C_1(\varepsilon,\, m) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad m \to +\infty. \tag{1.2.33}$$

Здесь $M_8,\, M_9,\, M_{10}$ – некоторые постоянные.

С учетом неравенства (1.2.32) из (1.2.31) имеем

$$\begin{aligned}[1 - C_1(\varepsilon,\, m)] \left\| v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega) \right\|^2 - C_2(\varepsilon,\, m)\varepsilon^{-2r} \left\| v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega) \right\|^2 \le \\ \le \varepsilon^{-n} M_{11} \operatorname{Re} \mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v]. \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

Вводим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{A}^{(1)}_{\varepsilon,m}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z,y) b_{kl}(y) dy \right) \rho^{2\alpha-n}(z) u^{(k)}(z) \overline{v^{(l)}(z)} dz$$

$$\left(u, v \in C_0^\infty(\Omega)\right).$$

Учитывая ограниченность коэффициентов $b_{kl}(y)\, (|k| = |l| = r)$ имеем

$$\begin{aligned} &\left| \mathfrak{A}^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v] - \mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v] \right| \\ &\quad \le \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z,y) |b_{kl}(y)| \left| \rho^{2\alpha-n}(y) - \rho^{2\alpha-n}(z) \right| dy \right) \times \\ &\qquad\qquad \times \left| v^{(k)}(z) \right| \left| v^{(l)}(z) \right| dz \\ &\quad \le M \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z,y) \left| 1 - \left(\frac{\rho(y)}{\rho(z)} \right)^{2\alpha} \left(\frac{\rho(z)}{\rho(y)} \right)^n \right| dy \right) \times \\ &\qquad\qquad \times \rho^{2\alpha}(z) \rho^{-n}(z) \left| v^{(k)}(z) \right| \left| v^{(l)}(z) \right| dz. \end{aligned} \tag{1.2.35}$$

Заметим, что

$$(1-\varepsilon)\rho(y) \le \rho(x) \le (1+\varepsilon)\rho(y). \tag{1.2.36}$$

для всех $x,\, y \in \Omega$ таких, что

$$|x - y| < \varepsilon\, \rho(y). \tag{1.2.37}$$

Из соотношений (1.2.36) следует, что

$$(1+\varepsilon)^{-2\alpha}(1-\varepsilon)^n \le \left(\frac{\rho(y)}{\rho(z)}\right)^{2\alpha}\left(\frac{\rho(z)}{\rho(y)}\right)^n \le (1+\varepsilon)^n(1-\varepsilon)^{-2\alpha}$$

для всех $y,\, z\in\Omega$, удовлетворяющих неравенству (1.2.37). Поэтому применяя лемму 1.1.1 и неравенство Коши - Буняковского из (1.2.35) для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$ получим

$$\left|\mathfrak{A}^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-\mathfrak{A}_{\varepsilon,m}[v,v]\right| \le \varepsilon^n\mu_1(\varepsilon,\, m)\left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2, \tag{1.2.38}$$

где $\mu_1(\varepsilon,\, m)>0$ и $\mu_1(\varepsilon,\, m)\longrightarrow 0$ при $\varepsilon\longrightarrow 0,\;\; m\to+\infty$.

Вводим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{A}^{(2)}_{\varepsilon,m}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_\Omega \chi^{(m)}_\varepsilon(z,y)dy\right)b_{kl}(z)\rho^{2\alpha-n}(z)u^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)}dz$$

для $u,v\in C_0^\infty(\Omega)$.

Так как коэффициенты b_{kl}, $|k|=|l|=r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и Ω – ограниченная область, то для любого достаточно малого числа $\nu>0$ существует число $\varepsilon>0$ такое, что

$$|b_{kl}(y)-b_{kl}(z)|<\nu$$

для любого $y\in\Omega$ и любого

$$z\in J_\varepsilon(y)=\big\{z\in R^n:\, |z-y|<\varepsilon\rho(y)\big\}.$$

Поэтому в силу леммы 1.1.1 и неравенства Коши - Буняковского для любого достаточно малого $\nu>0$ существует $\varepsilon_\nu>0$ такое, что

$$\left|\mathfrak{A}^{(1)}_{\varepsilon,m}[v,v]-\mathfrak{A}^{(2)}_{\varepsilon,m}[v,v]\right| \le \varepsilon^n\nu\left\|v;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|^2 \tag{1.2.39}$$

для всех $v\in C_0^\infty(\Omega)$ и любого $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_\nu)$.

Далее заметим, что для любой вещественнозначной функции $\Phi(z) \in L_1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$c_{n,m} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{m}(z,y)dy \right) \rho^{-n}(z)\Phi(z)dz$$
$$\leq \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{n} \int\limits_{\Omega} \Phi(z)dz + \left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{n} - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n} \right] \int\limits_{\Omega} \Phi^{-}(z)dz, \quad (1.2.40)$$

где $\Phi^{-}(z) = \left(|\Phi(z)| - \Phi(z)\right)/2, \quad c_{n,m} = (1+m^{-1})^{n}/\varkappa_{n}$.

Действительно, так как функции $\Phi^{+}(z) = \left(|\Phi(z)| + \Phi(z)\right)/2$ и $\Phi^{-}(z)$ неотрицательны, то в силу леммы 1.1.1 справедливы неравенства

$$c_{n,m} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{m}(z,y)dy \right) \rho^{-n}(z)\Phi^{+}(z)dz \leq \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{n} \int\limits_{\Omega} \Phi^{+}(z)dz,$$

$$c_{n,m} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \chi_{\varepsilon}^{m}(z,y)dy \right) \rho^{-n}(z)\Phi^{-}(z)dz \geq \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{n} \int\limits_{\Omega} \Phi^{-}(z)dz.$$

Отсюда в силу равенства $\Phi(z) = \Phi^{+}(z) - \Phi^{-}(z)$ следует (1.2.40).

Применяя неравенство (1.2.40) при

$$\Phi(z) = \mathrm{Re} \sum_{|k|=|l|=r} b_{kl}(z)\rho^{2\alpha}(z)v^{(k)}(z)\overline{v^{(l)}(z)},$$

в силу ограниченности коэффициентов $b_{kl}(z)\,(|k| = |l| = r)$ для всех $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ получим

$$\mathrm{Re}\,\mathfrak{A}_{\varepsilon,m}^{(2)}[v,v] \leq \varepsilon^{n} M \left\{ \mathrm{Re}\,\mathfrak{A}[v,v] + \mu_2(\varepsilon) \left\| v;\, L_{2;\,\alpha}^{r}(\Omega) \right\|^{2} \right\}, \quad (1.2.41)$$

где $M > 0$ и $\mu_2(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-n} - (1+\varepsilon)^{-n}$.

Теперь объединяя (1.2.34), (1.2.38), (1.2.39) и (1.2.41) приходим к неравенству

$$\left(1 - C_1(\varepsilon,\, m) - \mu_1(\varepsilon,\, m) - M_{12}\mu_2(\varepsilon) - \nu\right) \left\| v;\, L_{2;\,\alpha}^{r}(\Omega) \right\|^{2}$$
$$- C_3(\varepsilon,\, m)\varepsilon^{-2r} \left\| v;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega) \right\|^{2} \leq M_{13}\,\mathrm{Re}\,\mathfrak{A}[v,v] \quad \left(\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)\right). \quad (1.2.42)$$

Так как (см. (1.2.33)) $C_1(\varepsilon, m) \longrightarrow 0$, $\mu_1(\varepsilon) \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$, $\varepsilon \to 0$ и $\mu_2(\varepsilon) \longrightarrow 0$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$, то подбирая число m достаточно большим, а числа ε, ν – достаточно малым, из (1.2.42) получим

$$\mathrm{Re}\,\mathfrak{A}[u, u] \geq C_3 \|u, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 - C_4 \|u, L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|^2$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$; C_3, C_4 – положительные постоянные. Отсюда следует неравенство (1.2.3).

Теорема 1.2.1 доказана.

1.3 Задача Дирихле с однородными граничными условиями, связанная с некоэрцитивной формой, имеющей только старшие коэффициенты

Пусть Ω– ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$– мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть r– натуральное, α, λ– вещественные числа. Рассмотрим интегродифференциальную полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx +$$
$$+ \lambda \int_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x) u(x) \overline{v(x)} dx, \quad (1.3.1)$$

коэффициенты $a_{kl}(x)$ которой являются комплекснозначными функциями. Предполагается, что функции $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$, существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right| < \varphi, \quad (1.3.2)$$

$$\mathrm{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \right\} \geq c\, |\xi|^{2r} \quad (1.3.3)$$

для всех $x \in \Omega, \xi \in R^n \setminus 0$. Здесь и далее функция $argz$ принимает значения на отрезке $(-\pi, \pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \cdots \xi_n^{k_n}, |\xi| = \left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\right\}^{1/2}.$$

Приведенный ниже пример 1.3.1 показывает, что форма (1.3.1) при выполнении условий (1.3.2), (1.3.3) может не удовлетворять условию коэрцитивности. Как уже отмечалось во введении, в настоящей диссертационной работе понятие коэрцитивность формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [56]: если H_0 – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$ и нормой $\| \cdot \|_0$, H_+ – другое гильбертово пространство с нормой $\| \cdot \|_+$ плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\mathrm{Re} P[u, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \geq \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

Пример 1.3.1. (см. пример 1 работы [15]). Пусть $p(x)$ – четная непрерывная на отрезке $[-2; 2]$ функция такая, что

$$0 < c_1 \leq p(x) \leq c_2 < +\infty, x \in [-2; 2].$$

В пространстве $L_2(-2; 2)$ рассмотрим форму

$$\mathfrak{A}_0[u, v] = \int\limits_{-2}^{2} p(x) e^{i\beta(x)} u'(x) \overline{v'(x)} dx, D\left[\mathfrak{A}_0\right] = \overset{\circ}{W}{}_2^1(-2; 2), \tag{1.3.4}$$

где $\beta(x)$ – непрерывная на отрезке $[-2; 2]$ функция, $|\beta(x)| \leq \pi/2, x \in [-2; 2]$ и

$$\beta(x) = \begin{cases} -\pi/2, & -2 \leq x \leq -1, \\ \pi/2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Так как здесь не предполагается дифференцируемость функций $p(x)$, $\beta(x)$, то нельзя задавать дифференциальный оператор P, ассоциированный с формой (1.3.4), равенством

$$P(u) = -\left(p(x)e^{i\beta(x)}u'(x)\right)'.$$

Нетрудно проверить, что форма (1.3.4) удовлетворяет условиям (1.3.2), (1.3.3) и условие коэрцитивности для формы (1.3.4) имеет следующий вид

$$\operatorname{Re}\mathfrak{A}_0[u,\,u] + \mu_0'\int\limits_{-2}^{2}|u(x)|^2dx \geq \delta_0'\int\limits_{-2}^{2}|u'(x)|^2dx \tag{1.3.6}$$

для всех $u \in C_0^\infty(-2;\,2)$.

Далее докажем, что неравенство (1.3.6) не имеет место и следовательно **форма (1.3.4) является некоэрцитивной**.

Пусть $\mathfrak{F}$ обозначает класс четных функций $u \in C_0^\infty(-2;\,2)$, обращающихся в нуль на отрезке $[-1;\,1]$. Нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{A}_0[u,\,u] = 0$$

для всех $u \in \mathfrak{F}$. Поэтому условие (1.3.6) для всех $u \in \mathfrak{F}$ примет вид

$$\int\limits_{-2}^{2}|u(x)|^2dx \geq (\delta_0'/\mu_0')\int\limits_{-2}^{2}|u'(x)|^2dx. \tag{1.3.7}$$

Пусть $v(x) \in C_0^\infty(1;\,2)$. Положим $u(x) = v(x)$ при $x \in (1;\,2)$, $u(x) = v(-x)$ при $x \in (-2;\,-1)$ и $u(x) = 0$ при $x \in [-1;\,1]$. Тогда $u \in \mathfrak{F}$ и из неравенство (1.3.7) следует, что

$$\int\limits_{1}^{2}|v'(x)|^2dx \leq M\int\limits_{1}^{2}|v(x)|^2dx, \quad M = (\mu_0'/\delta_0') > 0,$$

для всех $v(x) \in C_0^\infty(1;\,2)$. Проведя замену переменной интегрирования $x = t + 1,5$ в интегралах этого неравенства получим

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2}|v'(t)|^2dt \leq M\int\limits_{-1/2}^{1/2}|v(t)|^2dt \tag{1.3.8}$$

для всех $v(t) \in C_0^\infty(-1/2;\, 1/2)$. Это неравенство – неверное. Например, для функции "шапочка" (см. [20] стр. 86)

$$v(t) = \sqrt{\omega_\varepsilon(t)} = \begin{cases} \sqrt{c_\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}\right), & -\varepsilon \le t \le \varepsilon, \\ 0, & |t| > \varepsilon, \end{cases}$$

при $\varepsilon < 1/2$ из неравенства (1.3.8) имеем

$$\varepsilon^{-2}\mathrm{const} \le M.$$

где M – конечное положительное число и ε – достаточно малое положительное число. Поэтому неравенство (1.3.8) не имеет место и следовательно форма (1.3.4) не является коэрцитивной.

Следуя работам Н.В.Мирошина [49, 53] рассмотрим вариационную задачу Дирихле для оператора

$$L_\lambda[u](x) = \sum_{|k|=|l|=r} (-1)^r \left(\rho^{2\alpha}(x) a_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)} + \lambda \rho^{2(\alpha - r)}(x) u(x)$$

в следующей постановке:

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F \in (V_{2;\alpha}^r(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U,\, v] = < F, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.3.9}$$

принадлежащее пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Замечание 1.3.1. Если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая и число α такое, что

$$\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,\, \ldots,\, r\}, \quad -\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2},$$

то согласно теореме 1.1.4 решение $U(x)$, $x \in \Omega$, задачи D_λ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ s = 0,\, 1,\, \ldots,\, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали, а целое число s_0 такое, что $r-\alpha-1/2 \le s_0 < r-\alpha+1-1/2$. Поэтому, в общем случае, граничные условия в задачи D_λ формально будем считать однородными.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\alpha < r$ и выполнены условия (1.3.2), (1.3.3). Тогда найдется число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка*

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \le M \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{1.3.10}$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

Доказательство. Пусть ν – достаточно малое положительное число и пусть $\varphi_j(x)$, $\eta_j(x) \in C^\infty(\Omega)$ $(j=\overline{1,N})$ такие, что:

а) $\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \cdots + \varphi_N^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{\Omega})$;

б) функция $\eta_j(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $supp\,\varphi_j(x)$ и $0 \le \eta_j \le 1$ для всех $x \in \overline{\Omega}$;

в) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех x, $y \in supp\,\eta_j$ $(j=\overline{1,N})$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B^{(0)}_{\lambda;j}[u,v] =$$
$$= \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a^{(0)}_{klj}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx + \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)} u(x)\overline{v(x)}dx, \tag{1.3.11}$$

где

$$a^{(0)}_{klj}(x) = (1-\eta_j(x))\gamma(x_j)a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)\gamma(x)a_{kl}(x). \tag{1.3.12}$$

Так как коэффициенты $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$, то они ограничены. Отсюда следует ограниченность коэффициентов $a^{(0)}_{klj}(x)$. Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского имеем

$$\left|B^{(0)}_{\lambda;j}[u,v]\right| \le M_0 \int\limits_\Omega \sum_{|k|=|l|=r} \rho^{2\alpha}(x)|u^{(k)}(x)||v^{(l)}(x)|dx +$$
$$+|\lambda| \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}|u(x)||v(x)|dx \le$$

$$\leq M_0 \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x)|u^{(k)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2} \times \left\{ \sum_{|l|=r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha}(x)|v^{(l)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2} +$$

$$+|\lambda| \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}|u(x)|dx \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}|v(x)|dx \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq (M_0 + |\lambda|)\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \tag{1.3.13}$$

для всех $u, v \in V^r_{2,\alpha}(\Omega)$. При получении последнего неравенства мы воспользовались равенством

$$\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|\leq r} \int\limits_{\Omega} \left(\rho^{\alpha-r+|k|}(x)|u^{(k)}(x)| \right)^2 dx \right\}^{1/2}. \tag{1.3.14}$$

Из условия (1.3.3) следует, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x_j) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x_j)\xi^k\xi^l \right\} \geq c\,|\xi|^{2r},$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \right\} \geq c\,|\xi|^{2r}$$

для всех $j = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus 0$. В силу этих неравенств из (1.3.12) следует, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{|k|=|l|=r} a^{(0)}_{klj}(x)\xi^k\xi^l \right\} \geq c\,|\xi|^{2r}$$

для всех $j = \overline{1, N}$, $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$. Это неравенство позволяет нам применить теорему 1.2.1 о неравенстве Гординга для эллиптических операторов с вырождением. Применяя эту теорему получим: существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$

$$\operatorname{Re} B^{(0)}_{\lambda;j}[u, u] \geq C_0\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 \tag{1.3.15}$$

для всех $j = \overline{1, N}$, $\quad u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Теперь рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,v]=\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)\widehat{a}_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}u(x)\overline{v(x)}dx,$$

где

$$\widehat{a}_{klj}(x)=[(1-\eta_j(x))a_{kl}(x_j)+\eta_j(x)a_{kl}(x)]\gamma(x_j).$$

Так как

$$a^{(0)}_{klj}(x)-\widehat{a}_{klj}(x)=\eta_j(x)(\gamma(x)-\gamma(x_j))a_{kl}(x)$$

и коэффициенты $a_{kl}(x)$ ограничены, то действуя так же как в доказательстве неравенства (1.3.13) с помощью неравенства Коши-Буняковского получим

$$|B^{(0)}_{\lambda;j}[u,v]-\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,v]|\leq M\,\Lambda\,\|u;L^r_{2;\alpha}(\Omega)\|\cdot\|v;L^r_{2;\alpha}(\Omega)\|$$

для всех $u,v\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Здесь $\Lambda=\sup|\eta_j(x)(\gamma_j(x)-\gamma(x_j))|$, где супремум берется по всем $x\in\Omega$ и всем $j=\overline{1,N}$.

Применяя это неравенство из (1.3.15) находим

$$C_0\|u;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2\leq \mathrm{Re}\left(B^{(0)}_{\lambda;j}[u,u]-\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,u]\right)+\mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,u]\leq$$
$$\leq \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,u]+M\,\Lambda\,\|u;L^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2. \quad (1.3.16)$$

Так как

$$|\eta_j(x)(\gamma(x)-\gamma(x_j))|<\nu \qquad \forall j\in\{1,2,\ldots,N\}$$

и ν – достаточно малое положительное число, то из (1.3.16) следует, что

$$c_0\|u;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2\leq \mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,u] \quad (1.3.17)$$

для всех $u\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Вводим следующую полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$
$$+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \quad (1.3.18)$$

где

$$a_{klj}(x) = (1 - \eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x).$$

Заметим, что

$$\mathcal{B}^{(0)}_{\lambda;j}[u,v] = \gamma(x_j)\mathcal{B}_{\lambda_j;j}[u,v],$$

где

$$\lambda_j = \lambda\gamma^{-1}(x_j).$$

Поэтому из (1.3.17) следует, что при достаточно больших λ

$$c_0\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 \leq \operatorname{Re}\{\gamma(x_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,u]\} \tag{1.3.19}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

При доказательстве основных результатов настоящего параграфа (см. [14, пункт 2]), не нарушая общности, можно считать, что число φ в условии (1.3.2) такое, что $\varphi > \pi/2$. В силу (1.3.2) неравенство (1.3.3) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x)$ заменить на $\exp(i\theta(x))$, где

$$\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2,\ |\arg\gamma(x)|\}(\operatorname{sign}\gamma(x)).$$

Поэтому из неравенства (1.3.19) следует, что

$$c_0\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 \leq \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,u]\} \tag{1.3.20}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Здесь и далее

$$\theta_j = \theta(x_j) \qquad \forall j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Поступая также, как в доказательстве неравенства (1.3.13) находим

$$|\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v]| \leq (M_0 + |\lambda|)\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \tag{1.3.21}$$

для всех $u,\, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

На основе неравенств (1.3.20), (1.3.21) применяя теорему Лакса-Мильграма (см. [56, теорема 2.0.1]) построим оператор

$$\mathcal{R}_j(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to V^r_{2;\alpha}(\Omega)$$

такой, что

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[\mathcal{R}_j(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle \tag{1.3.22}$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ и всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$;

$$\|\mathcal{R}_j(\lambda)F; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \leq M_1 \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \tag{1.3.23}$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$. Здесь число M_1 не зависит от F и от λ, и $\lambda \geq \lambda_0 = \max_{j=\overline{1,N}} \lambda_j$, числа λ_j такие же как в (1.3.15).

Символом Φ_j обозначим оператор умножения на функцию $\varphi_j(x)$ и введем оператор

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j)\Phi_j\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j, \tag{1.3.24}$$

который действует из $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ в $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Так как коэффициенты $a_{kl}(x) \quad (|k| = |l| = r)$ ограничены, то с помощью неравенства Коши-Буняковского доказывается, что

$$\left|\sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx\right| \leq M_0\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|$$

для всех $u,\, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Отсюда следует, что

$$|B_\lambda[u,\, v]| \leq (M_0 + \lambda)\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|$$

для всех $u,\, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Следовательно, оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, определенный равенством

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)F, v] \quad (\forall v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)) \tag{1.3.25}$$

действует из $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ в $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$.

Согласно нашим построениям функции $\varphi_j^2(x)$, $j = \overline{1, N}$, образуют разбиение единицы области Ω, то есть

$$\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \cdots + \varphi_N^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{\Omega}).$$

Поэтому для всех $F \in L_2(\Omega)$ и всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ выполняются следующие равенства

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v) = \int\limits_{\Omega} F(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \varphi_j^2(x)F(x)\overline{v(x)}dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j F,\, \varphi_j). \tag{1.3.26}$$

Здесь и далее символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$.

Так как

$$a_{klj}(x) = (1-\eta_j(x))a_{kl}(x_j) + \eta_j(x)a_{kl}(x).$$

и функция $\eta_j(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\varphi_j$, то функции $a_{klj}(x)$ и $a_{kl}(x)$ на множестве $\operatorname{supp}\varphi_j$ совпадают. Поэтому из равенств (1.3.1), (1.3.24) и (1.3.25) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \left\{ \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\varphi_j \mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx + \right.$$

$$\left. + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x)(\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{\varphi_j(x)v(x)}dx \right\}. \tag{1.3.27}$$

Здесь и далее символ D^k обозначает дифференцирование мультииндекса k.

Пусть $F \in L_2(\Omega)$. В равенстве (1.3.22) заменим F на $\varphi_j F$, а v – на $\varphi_j v$:

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F, \varphi_j v] = (\varphi_j F, \varphi_j v).$$

Отсюда с учетом равенства (1.3.18) следует, что

$$(\varphi_j F, \varphi_j v) =$$
$$= \exp(i\theta_j) \left\{ \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x) \overline{D^l(\varphi_j(x)v(x))} dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x)(\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{\varphi_j(x)v(x)} dx \right\}.$$

Суммируя это равенство по j от 1 до N в силу равенств (1.3.26) имеем

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v) =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \left\{ \sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) D^k(\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x) \overline{D^l(\varphi_j(x)v(x))} dx + \right.$$
$$\left. + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x)(\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x)\overline{\varphi_j(x)v(x)} dx \right\}.$$

Отсюда и из (1.3.27) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \mathbb{K}_\lambda[F,\, v] + \mathbb{L}_\lambda[F,\, v], \tag{1.3.28}$$

где

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) \varphi_j^{(k')}(x) U_{j,\lambda}^{(k'')}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{1.3.29}$$
$$\mathbb{L}_\lambda[F,\, v] =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \sum\nolimits^{(2)} C_{l'}^{l''} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) U_{j,\lambda}^{(k)}(x) \overline{\varphi_j^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)} dx, \tag{1.3.30}$$
$$U_{j,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x), \quad j \in \{1, 2, \ldots,\, N\}.$$

Здесь символ $\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k, l, k', k'' таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k| = |l| = r$, а символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k, l, l', l'' таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k| = |l| = r$.

Утверждение 1.3.1 *Существует положительная функция* $\omega_1(\lambda)$, $\lambda > 0$, *такая, что*

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \leq \omega_1(\lambda) \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \right\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \tag{1.3.31}$$

для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, *и* $\omega_1(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Прежде, чем приступить к непосредственному доказательству утверждения 1.3.1, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.3.1. *Пусть* $B_{\lambda j}$ *– самосопряженный оператор в пространстве* $L_2(\Omega)$, *порожденный симметричной формой*

$$\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;j}}[u, v] = \frac{1}{2}\left\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u, v] + \exp(-i\theta_j)\overline{\mathcal{B}_{\lambda;j}[v, u]}\right\}, \tag{1.3.32}$$

$$D(\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;j}}) = V^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$, *где* λ_0 *– такое же конечное положительное число как в (1.3.15), для любого мультииндекса* k *такого, что* $|k| = r$, *и любого* $j = \overline{1, N}$ *оператор* $\rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda j}$ *является ограниченным оператором в* $L_2(\Omega)$, *а если мультииндекс* k'' *такой, что* $|k''| < r$, *то существует положительная функция* $q(\lambda)$ *такая, что* $q(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$ *и*

$$\left\| \rho^\alpha D^{k''} u;\ L_2(\Omega) \right\| \leq q(\lambda) \|B^{1/2}_{\lambda;j} u; L_2(\Omega)\| \tag{1.3.33}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$

Доказательство. По определению оператора $B_{\lambda;j}$ для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\left(B^{1/2}_{\lambda;j} u, B^{1/2}_{\lambda;j} v\right) = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;j}[u, v], \tag{1.3.34}$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Следовательно,

$$\|B^{1/2}_{\lambda;j} u; L_2(\Omega)\|^2 = Re\left\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u, u]\right\} \tag{1.3.35}$$

и в силу неравенства (1.3.20)

$$\|B_{\lambda;j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\| \geq c_0\|u; V_{2;\alpha}^r(\Omega)\| \qquad (\lambda \geq \lambda_0) \tag{1.3.36}$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда в силу равенства (1.3.14) следует, что

$$\left\|\rho^\alpha D^k u;\ L_2(\Omega)\right\| \leq M_0\|B_{\lambda;j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\|,$$

$$(|k| = r, \quad j = \overline{1, N},\ u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)).$$

Отсюда следует ограниченность оператора $\rho^\alpha D^k B_{\lambda;j}^{-1/2}$.

Рассмотрим случай $|k''| < r$. Из леммы 2.2 работы [29], в частности, следует, что для любого $\tau > 0$ и всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left\|\rho^{\beta-r+m}D^{k''}u;\ L_2(\Omega)\right\| \leq \tau\|u; L_{2;\beta}^r(\Omega)\| + c_0\tau^{-\mu}\left\|\rho^{\beta-r}u;\ L_2(\Omega)\right\|,$$

где $m = |k''|$, $\mu = m/(r-m)$. Обозначая в этом неравенстве $\beta - r + m$ через α приходим к неравенству

$$\left\|\rho^{\alpha}D^{k''}u;\ L_2(\Omega)\right\| \leq \tau\|u; L_{2;\alpha+r-m}^r(\Omega)\| + c_0\tau^{-\mu}\left\|\rho^{\alpha-m}u;\ L_2(\Omega)\right\|.$$

Так как $r - m \geq 1$ и Ω – ограниченная область, то

$$\rho^{r-m}(x) \leq C_1 \quad \text{для всех } x \in \Omega.$$

Поэтому из полученного неравенства следует, что

$$\left\|\rho^{\alpha}D^{k''}u;\ L_2(\Omega)\right\| \leq \tau\|u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| + c_0\tau^{-\mu}\left\|\rho^{\alpha-m}u;\ L_2(\Omega)\right\| \tag{1.3.37}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Поэтому в силу неравенства (1.3.36) из (1.3.37) для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ следует

$$\left\|\rho^{\alpha}D^{k''}u;\ L_2(\Omega)\right\| \leq \tau\|B_{\lambda;j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\| + c_0\tau^{-\mu}\left\|\rho^{\alpha-m}u;\ L_2(\Omega)\right\|, \tag{1.3.38}$$

где $m = |k''| < r$, $\mu = |\widetilde{k}|/(r - |k''|) > 0$ и τ – произвольное положительное число. Обе части неравенства (1.3.38) возведем в квадрат, и приходим к следующему неравенству

$$\left\|\rho^{\alpha}D^{k''}u;\ L_2(\Omega)\right\|^2 \leq \tau^2\|B_{\lambda;j}^{1/2}u; L_2(\Omega)\|^2 + c_1\tau^{-2\mu}\left\|\rho^{\alpha-m}u;\ L_2(\Omega)\right\|^2.$$

Отсюда в силу равенства (1.3.35) следует, что

$$\left\|\rho^{\alpha} D^{k''} u;\ L_2(\Omega)\right\|^2 \leq \tau^2 Re\left\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,u]\right\} + c_1\tau^{-2\mu}\left\|\rho^{\alpha-m} u;\ L_2(\Omega)\right\|^2.$$

Далее заметим, что

$$\tau^2 \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,u]\right\} + c_1\tau^{-2\mu}\left\|\rho^{\alpha-m} u;\ L_2(\Omega)\right\|^2 =$$

$$= \tau^2 \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\} + c_1\tau^{-2\mu}\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-m)}(x)|u(x)|^2dx \leq$$

$$\tau^2 \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_0(\lambda,\tau)\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\},$$

где $K_0(\lambda,\tau)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lambda + c_1\tau^{-2\mu-2} \leq K_0(\lambda,\tau).$$

Так как $\mu+1 = r/(r-m)$, то $K_0(\lambda,\tau)\to\infty$ при $\tau\to 0$ или $\lambda\to\infty$. Поэтому из полученных выше неравенств при $\lambda = 1/\tau$ следует, что

$$\left\|\rho^{\alpha} D^{k''} u;\ L_2(\Omega)\right\|^2 \leq$$

$$\leq \tau^2 \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+p(\tau)\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\}, \quad (1.3.39)$$

где непрерывная положительная функция $p(\tau)$ такая, что $p(\tau)\to\infty$ при $\tau\to 0$. Обратную относительно $p(\tau)$ функцию обозначим через q, и положив $p(\tau)=\lambda$, то есть $\tau=q(\lambda)$, в равенстве (1.3.39) получим

$$\left\|\rho^{\alpha}D^{k''}u;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \le$$
$$\le q(\lambda)^2\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\},$$

где непрерывная положительная функция $q(\lambda)$ такая, что $q(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Отсюда в силу равенства (1.3.35) следует (1.3.33).

Лемма 1.3.1 доказана полностью.

Лемма 1.3.2. (см. [37, гл. 6, теорема 2.1]) *Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ и пусть $t[u,v]$ – плотно определенная замкнутая секториальная билинейная форма в H. Тогда существует такой m – секториальный оператор T такой, что:*

i) $D(T)\subset D(t)$ и $t[u,v]=(Tu,v)_H$ для всех $u\in D(T)$ и $v\in D(t)$;

ii) $D(T)$ является ядром формы t;

iii) если $u\in D(t)$, $w\in H$ и равенство $t[u,v]=(w,v)_H$ справедливо для всех v, принадлежащих ядру формы t, то $u\in D(T)$ и $Tu=w$.

Условие i) определяет m – секториальный оператор T однозначно.

Лемма 1.3.3. (см. [37, гл. 6, теорема 3.2]) *Пусть T есть m-секториальный оператор с вершиной 0 и полууглом θ. Тогда оператор $H=\mathrm{Re}T$ неотрицателен и существует симметричный оператор $B\in\mathscr{B}(\mathbf{H})$ такой, что $\|B\|\le\tan\theta$ и*

$$T=G(1+iB)G,\quad G=H^{1/2}.$$

Здесь $\mathscr{B}(\mathbf{H})$ – пространство ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$.

Билинейная форма $\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v]$ удовлетворяет неравенствам (см. (1.3.20), (1.3.21)):

$$c_0\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|^2 \leq \mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,u]\} \tag{1.3.40}$$

для всех $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$;

$$|\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v]| \leq (M_0 + |\lambda|)\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \tag{1.3.41}$$

для всех $u,\ v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Числа $c_0,\ M_0 > 0$ в этих неравенствах не зависят от $u(x),\ \ v(x)$.

Согласно неравенствам (1.3.40), (1.3.41) билинейная форма $\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v]$ замкнута и секториальна. Поэтому, в силу утверждении i) леммы 1.3.2, существует такой m – секториальный оператор $A_{\lambda;j}$, что

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v] = (A_{\lambda;j}u, v) \tag{1.3.42}$$

$$\left(\forall u \in D(A_{\lambda;j}) \subset V^r_{2;\alpha}(\Omega),\ \ \forall v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right).$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $\mathcal{R}_j(\lambda)f \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ и ввиду равенства (1.3.22)

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[\mathcal{R}_j(\lambda)f, v] = \langle f, v\rangle$$

для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Согласно утверждению iii) леммы 1.3.2, если для $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega),\ \ w \in L_2(\Omega)$ выполняется равенство

$$\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,v] = (w,v)\ \ \forall v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega),$$

то $u \in D(A_{\lambda;j})$ и $A_{\lambda;j}u = w$. Поэтому

$$A_{\lambda;j}\mathcal{R}_j(\lambda)f = f,\ \ \forall f \in L_2(\Omega),$$

то есть

$$\mathcal{R}_j(\lambda)f = A^{-1}_{\lambda;j}f \tag{1.3.43}$$

для всех $f \in L_2(\Omega)$.

Пусть $B_{\lambda;j}$ – самосопряженный оператор, введенный в лемме 1.3.1. Для всех $u, v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\left(B^{1/2}_{\lambda;j}u, B^{1/2}_{\lambda;j}v\right) = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda;j}[u,v],$$

Отсюда при $u(x) = v(x)$ с учетом равенства (1.3.32) получим

$$\left\| B_{\lambda;j}^{1/2} u; L_2(\Omega) \right\|^2 = \mathrm{Re}\big\{ \exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda;j}[u, u] \big\} \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0).$$

Далее применяя неравенств (1.3.20) находим

$$\left\| B_{\lambda;j}^{1/2} u; L_2(\Omega) \right\| \geq C \left\| u; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\| \ (\lambda \geq \lambda_0 > 0)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда следует обратимость оператора $B_{\lambda;j}^{1/2}$ при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Применяя лемму 1.3.3 ([37, гл. 6, теорема 3.2]), получим представление

$$A_{\lambda;j}^{-1} = B_{\lambda;j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda;j}^{-1/2} \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0), \tag{1.3.44}$$

где $X_j(\lambda) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ – некоторый ограниченный оператор и его норма $\|X_j(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1 > 0$, не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$.

Переходим к доказательству утверждения 1.3.1. Равенство (1.3.29) перепишем в виде

$$\mathbb{K}_\lambda[F,\, v] = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \sum\nolimits^{(1)} C_{k'}^{k''} \left(\rho^\alpha a_{klj} \varphi_j^{(k')} U_{j,\lambda}^{(k'')},\, \rho^\alpha v^{(l)} \right), \tag{1.3.45}$$

где

$$U_{j,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_j(\lambda) \Phi_j F)(x), \quad j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Пусть $F \in L_2(\Omega)$. Используя равенства (1.3.42) – (1.3.45), имеем

$$\mathbb{K}_\lambda[F, v] = \sum_{j=1}^{N} \sum\nolimits^{(1)} \exp(i\theta_j) C_{k'}^{k''} (\rho^\alpha a_{klj} \varphi_j^{(k')} D^{k''} A_{\lambda;j}^{-1} \Phi_j F, \rho^\alpha v^{(l)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum\nolimits^{(1)} \exp(i\theta_j) C_{k'}^{k''} (\rho^\alpha a_{klj} \varphi_j^{(k')} D^{k''} B_{\lambda;j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j F, \rho^\alpha v^{(l)}).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$|\mathbb{K}_\lambda[F, v]| \ll \sum_{j=1}^{N} \sum\nolimits^{(1)} \|\mathbb{T}_{k''j}(\lambda) V_{j,\lambda}; L_2(\Omega)\| \times \left\| \mathbb{S}_{j,l} B_{\lambda_0;j}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\|, \tag{1.3.46}$$

где

$$\mathbb{T}_{k''j}(\lambda) = \rho^\alpha D^{k''} B_{\lambda;j}^{-1/2}, \qquad V_{j,\lambda}(x) = X_j(\lambda) B_{\lambda;j}^{-1/2}(\varphi_j F)(x),$$
$$\mathbb{S}_{j,l} = \rho^\alpha D^l B_{\lambda_0;j}^{-1/2}. \tag{1.3.47}$$

Докажем неравенство

$$\|V_{j,\lambda}; L_2(\Omega)\| \leq M \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\right)' \right\|, \tag{1.3.48}$$

которое справедливо при $\lambda \geq \lambda_0$, где $\lambda_0 \geq 1$ – некоторое конечное число. Пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда

$$\left\| B_{\lambda;j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega) \right\|$$
$$\leq \left\| B_{\lambda;j}^{-1/2} B_{\lambda_0;j}^{1/2} \right\| \times \left\| B_{\lambda_0;j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega) \right\|$$
$$\ll \left\| B_{\lambda_0;j}^{-1/2}(\varphi_j F); L_2(\Omega) \right\|. \tag{1.3.49}$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$\left\| B_{\lambda;j}^{1/2} u; L_2(\Omega) \right\|^2 = \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u,u]\big\} =$$
$$= \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_0;j}[u,u]\big\} + \cos(\theta_j)(\lambda - \lambda_0) \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha-2r}(x)|u(x)|^2 dx \geq$$
$$\geq \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda_0;j}[u,u]\big\} = \left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} u; L_2(\Omega) \right\|^2,$$

которое следует из (1.3.35).

Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ можно задать с помощью равенства

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup |(f, v)|, \tag{1.3.50}$$

где супремум берется по всем $v \in L_2(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то в равенстве (1.3.50) можно считать, что супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$.

При $\lambda = \lambda_0$ из равенства (1.3.34) имеем

$$\left(B_{\lambda_0;j}^{1/2} u, B_{\lambda_0;j}^{1/2} v\right) = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;j}[u, v].$$

С другой стороны

$$\mathcal{B}_{\lambda_0;j}[u,u] \gg \left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2,$$

$$|\mathcal{B}_{\lambda_0;j}[u,v]| \le (M_0+\lambda_0)\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \cdot \left\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому, согласно теореме Лакса – Мильграма, уравнение

$$\mathcal{B}_{\lambda_0;j}[u,\widehat{v}] = (w,\widehat{v}) \;\; \forall \widehat{v} \in C_0^\infty(\Omega)$$

имеет решение для любого $w \in L_2(\Omega)$. Следовательно функцию $v \in C_0^\infty(\Omega)$ в (1.3.50) можно представить в виде

$$v = B^{1/2}_{\lambda_0;j} w,$$

то есть

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup\left|\left(f, B^{1/2}_{\lambda_0;j} w\right)\right|,$$

где супремум берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j} w; L_2(\Omega)\right\| = 1.$$

С другой стороны в классе $C_0^\infty(\Omega)$ следующие нормы эквивалентны

$$\left\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \quad \text{и} \quad \left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j} v; L_2(\Omega)\right\|.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left\|B^{-1/2}_{\lambda_0;j}(\varphi_j F); L_2(\Omega)\right\| &= \sup\left|\left(B^{-1/2}_{\lambda_0;j}(\varphi_j F), w\right)\right| = \\ &= \sup\left|\left(B^{-1/2}_{\lambda_0;j}(\varphi_j F), B^{1/2}_{\lambda_0;j} v\right)\right| \ll \sup|(\varphi_j F, v)| \ll \\ &\ll \left\|\varphi_j F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \ll \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \quad (1.3.51)\end{aligned}$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$: $\|w; L_2(\Omega)\| = 1$, второй супремум – по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$: $\left\|B^{1/2}_{\lambda_0 j} w; L_2(\Omega)\right\| = 1$, а третий супремум – по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$: $\left\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| = 1$.

Из (1.3.49), (1.3.51) следует (1.3.48).

Согласно лемме 1.3.1 оператор (см. (1.3.47))

$$\mathbb{S}_{j,l} = \rho^{\alpha} D^{l} B_{\lambda_0;j}^{-1/2}$$

является ограниченным и из (1.3.34), (1.3.21) следует, что

$$\left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\|^2 = |\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0;j}[v,v]| \ll \left\| v; V_{2;\alpha}^{r}(\Omega) \right\|^2$$

для всех $v \in V_{2;\alpha}^{r}(\Omega)$. Поэтому

$$\left\| \mathbb{S}_{j,l} B_{\lambda_0;j}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\| \ll \left\| v; V_{2;\alpha}^{r}(\Omega) \right\|. \qquad (1.3.52)$$

Согласно второй части утверждения леммы 1.3.1 существует положительная функция $\varepsilon_1(\lambda)$ такая, что

$$\left\| \rho^{\alpha} D^{k''} B_{\lambda;j}^{-1/2} \right\| \le \varepsilon_1(\lambda)$$

и $\varepsilon_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно (см. (1.3.47))

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\mathbb{T}_{k''j}(\lambda)\| = 0. \qquad (1.3.53)$$

Ввиду этого равенства из (1.3.46), (1.3.48), (1.3.52) получим оценку (1.3.31).

Утверждение 1.3.1 доказано.

Утверждение 1.3.2. *Существует положительная функция* $\omega_2(\lambda)$, $\lambda > 0$, *такая, что*

$$|\mathbb{L}_{\lambda}[F,\, v]| \le \omega_2(\lambda) \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^{r}(\Omega)\right)' \right\| \cdot \|v; V_{2;\alpha}^{r}(\Omega)\| \qquad (1.3.54)$$

для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in V_{2;\alpha}^{r}(\Omega)$, *и* $\omega_2(\lambda) \to 0$ *при* $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Напомним, что согласно (1.3.30)

$$\mathbb{L}_{\lambda}[F,\, v] = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) \sum\nolimits^{(2)} C_{l'}^{l''} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) U_{j,\lambda}^{(k)}(x) \overline{\varphi_j^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)} dx,$$

где

$$U_{j,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j F)(x), \quad j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

и символ $\sum^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам k, l, l', l'' таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k| = |l| = r$.

Для удобства записи интегралы составляющие форму $\mathbb{L}_\lambda[F,\, v]$ обозначим через $\mathbb{I}_\lambda[F,\, v]$.[1].

Так как (см. (1.3.43), (1.3.44))

$$\mathcal{R}_j(\lambda) = A^{-1}_{\lambda;j} = B^{-1/2}_{\lambda;j} X_j(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda;j} \ \ (\lambda \geq \lambda_0 > 0),$$

то форму $\mathbb{I}_\lambda[F,\, v]$ можно записать в виде

$$\mathbb{I}_\lambda[F,\, v] = \left(\rho^\alpha a_{klj} D^k B^{-1/2}_{\lambda;j} X_j(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda;j} \Phi_j F,\, \rho^\alpha \varphi^{(l')}_j D^{l''} v\right).$$

Далее вводим обозначение

$$V_{j,\lambda}(x) = X_j(\lambda) B^{-1/2}_{\lambda;j} \Phi_j F \tag{1.3.55}$$

и используя равенство $D^{l''} v = D^{l''} B^{-1/2}_{\lambda_0;j} B^{1/2}_{\lambda_0 j} v$ имеем

$$\mathbb{I}_\lambda[F,\, v] = \left(B^{-1/2}_{\lambda_0;j} D^{l''} \varphi^{(l')}_j \rho^\alpha a_{klj} \rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda;j} V_{j,\lambda},\, B^{1/2}_{\lambda_0;j} v\right). \tag{1.3.56}$$

Положим

$$\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''} = a_{klj} \rho^\alpha \varphi^{(l')}_j D^{l''} B^{-1/2}_{\lambda_0;j}. \tag{1.3.57}$$

Тогда

$$\mathbb{T^*}_{j,\lambda_0,l''} = B^{-1/2}_{\lambda_0;j} D^{l''} \varphi^{(l')}_j \rho^\alpha a_{klj}$$

и равенство (1.3.65) примет следующий вид

$$\mathbb{I}_\lambda[F,\, v] = \left(\mathbb{T^*}_{j,\lambda_0,l''} \rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda;j} V_{j,\lambda},\, B^{1/2}_{\lambda_0;j} v\right).$$

Вводим обозначение

$$\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k} = \rho^\alpha D^k B^{-1/2}_{\lambda_0;j}. \tag{1.3.58}$$

Тогда имеем

$$\mathbb{I}_\lambda[F,\, v] = \left(\mathbb{T^*}_{j,\lambda_0,l''} \mathbb{P}_{j,\lambda_0,k} B^{1/2}_{\lambda_0;j} B^{-1/2}_{\lambda;j} V_{j,\lambda},\, B^{1/2}_{\lambda_0;j} v\right). \tag{1.3.59}$$

[1]Зависимость $\mathbb{I}_\lambda[F,\, v]$ от j, k, l, l', l'' в данном контексте не существенны, поэтому в ее обозначение эти символы не используются.

Так как $B_{\lambda;j}$ – самосопряженный оператор, ассоциированный с формой (см. лемму 1.3.1) $\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;j}}[u,v]$, то

$$\left\|\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)u;\,L_2(\Omega)\right\|^2\le 2\left\{\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}u;\,L_2(\Omega)\right\|^2+(\lambda-\lambda_0)\left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2\right\}$$

$$\le\{\text{Так как}\,\alpha<r\,\text{и}\ \Omega-\text{ограниченная область, то}\quad c_0\le\theta'_j\rho^{\alpha-r}(x),\ \forall x\in\Omega\}\le$$

$$\le M_0\left\{\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}u,\,B^{1/2}_{\lambda_0;j}u\right)+\theta'_j(\lambda-\lambda_0)\left(\rho^{\alpha-r}u,\,\rho^{\alpha-r}u\right)\right\}=$$

$$=M_0\left[\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda_0;j}}[u,u]+\theta'_j(\lambda-\lambda_0)\left(\rho^{2\alpha-2r}u,\,u\right)\right]=$$

$$=M_0\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;j}}[u,u]=M_0\left(B^{1/2}_{\lambda;j}u,\,B^{1/2}_{\lambda;j}u\right)=M_0\left\|B^{1/2}_{\lambda;j}u;\,L_2(\Omega)\right\|^2.$$

Следовательно, существует число $M_1>0$ такое, что

$$\left\|\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)B^{-1/2}_{\lambda;j}\right\|\le M_1 \tag{1.3.60}$$

при $\lambda\ge\lambda_0$. Здесь $\theta'_j=\operatorname{Re}\exp(i\theta_j)$.

Используя неравенство (1.3.60) из (1.3.68) имеем

$$|\mathbb{I}_\lambda[F,\,v]|\le M_2\left\|\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0;j}\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1}\right\|\times$$

$$\times\left\|V_{j,\lambda};\,L_2(\Omega)\right\|\cdot\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}v;\,L_2(\Omega)\right\|. \tag{1.3.61}$$

Ниже докажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\|\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 j}\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1}\right\|=0. \tag{1.3.62}$$

Для этого нам понадобится следующая лемма, которая является частным случаем леммы 7.1 из [22, гл.V].

Лемма 1.3.4. *Пусть H - положительный самосопряженный оператор и $\mathbb{T}$ - вполне непрерывный оператор. Тогда равномерно выполняется соотношение*

$$\lim_{\mu\to\infty}\|\mathbb{T}(E+\mu H)\|=0.$$

Используя равенство

$$B^{1/2}_{\lambda_0;j}\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1}=\left(E+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}B^{-1/2}_{\lambda_0;j}\right)^{-1}$$

имеем

$$\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0;j}\left(B^{1/2}_{\lambda_0;j}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1}= \\ =\mathbb{T}\left(E+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}H\right)^{-1}, \quad (1.3.63)$$

где

$$\mathbb{T}=\mathbb{T}^*{}_{j,\lambda_0,l''}\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}, \qquad H=B^{-1/2}_{\lambda_0;j}.$$

Так как $|l''|\le r-1$, то оператор $\mathbb{T}_{j,\lambda_0,l''}$ - вполне непрерывен. Поэтому из ограниченности оператора $\mathbb{P}_{j,\lambda_0,k}$ следует вполне непрерывность оператора $\mathbb{T}$. Далее применяя лемму 1.3.4 из (1.3.63) получаем (1.3.62).

Из (1.3.61) в силу соотношения (1.3.62) следует, что

$$|\mathbb{I}_\lambda[F,\,v]|\le\delta_*(\lambda)\,\|V_{j,\lambda};\,L_2(\Omega)\|\cdot\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}v;\,L_2(\Omega)\right\| \quad (1.3.64)$$

где $\delta_*(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to 0$.

Далее заметим, что (см. (1.3.55), (1.3.41))

$$\|V_{j,\lambda};\,L_2(\Omega)\|\le\|X_j(\lambda)\|\left\|B^{-1/2}_{\lambda;j}F;\,L_2(\Omega)\right\|\ll\left\|F;\,\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}v;\,L_2(\Omega)\right\|\ll\left\|v;\,V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|.$$

В силу этих неравенств из (1.3.64) следует (1.3.54).

Утверждение 1.3.2 доказано.

Применяя неравенства (1.3.31), (1.3.54), установленные, соответственно, в утверждениях 1.3.1 и 1.3.2, из (1.3.28) получим

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle-\langle F,\,v\rangle|\le(\omega_1(\lambda)+\omega_2(\lambda))\left\|F;\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|\cdot\|v;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|$$

для всех $F\in L_2(\Omega)$, $v\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Так как $\omega_1(\lambda)\to 0$, $\omega_2(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$, то существует число $\lambda_0\ge 1$ такое, что

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle-\langle F,\,v\rangle|\le\frac{1}{2}\left\|F;\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|\cdot\|v;V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \quad (1.3.65)$$

для любого $\lambda\ge\lambda_0$ и всех $F\in L_2(\Omega)$, $v\in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Так как $L_2(\Omega)$ плотно в $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, то оценка (1.3.65) верна для всех $F\in\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$.

Из оценки (1.3.65) следует, что при $\lambda > \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}(\lambda)$ имеет вид $\mathbb{R}(\lambda) = E + \mathbb{G}(\lambda)$, где норма оператора

$$\mathbb{G}(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$$

не превосходит $1/2$. Поэтому оператор

$$\mathbb{R}(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$$

непрерывно обратим и

$$\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1}.$$

Оператор $\mathcal{R}_j(\lambda)$, определенный равенством (1.3.22), действует из $\left(\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ в $\overset{\circ}{W}{}^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Поэтому из (1.3.24) следует, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ также действует из $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ в $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Следовательно, для любого функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F \quad (\lambda \geq \lambda_0), \tag{1.3.66}$$

принадлежит пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Далее будем считать, что $\lambda \geq \lambda_0$ и λ_0 – достаточно большое число. Тогда из равенства (1.3.25) следует, что

$$B_\lambda[\mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Поэтому, при $\lambda \geq \lambda_0$, функция $U(x)$, определенная равенством (1.3.66) удовлетворяет равенству

$$B_\lambda[U, v] = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Следовательно, функция (1.3.66) является решением задачи D_λ. Так как при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, то из (1.3.23) и (1.3.24) следует, что функция (1.3.66) удовлетворяет оценке (1.3.10) теоремы 1.3.1, то есть

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \leq M \left\|F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\|,$$

где число M не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

Для доказательства единственности решения задачи D_λ рассмотрим сопряженную задачу: для заданного функционала $F \in \left(V_{2,\alpha}^r(\Omega)\right)'$ найти функцию $U_1 \in V_{2,\alpha}^r(\Omega)$ удовлетворяющую равенству

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_{2,\alpha,\varphi}^r(\Omega). \tag{1.3.67}$$

Так как коэффициенты билинейной формы $\overline{B_\lambda[v, U_1]}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3.1, поступая так же как выше, можно построить операторы $\mathcal{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ $(\lambda \in [\lambda_0^*, \infty))$ принадлежит пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega))$ и удовлетворяет уравнению (1.3.67).

Пусть функция $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$B_\lambda[u, v] = 0 \quad (\forall v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)), \tag{1.3.68}$$

где $\lambda \geq \lambda_0' = \max\{\lambda_0^*, \lambda_0\}$. Пусть F – произвольный элемент пространства $\left(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\right)'$. Так как $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$, то, полагая $v = U_1$ в (1.3.68), получаем

$$B_\lambda[u, U_1] = 0,$$

то есть

$$\overline{B_\lambda[u, U_1]} = 0.$$

С другой стороны, функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (1.3.67). Поэтому $\langle F, u \rangle = 0$ для всех $F \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$. Учитывая вложение $V_{2;\alpha}^r(\Omega) \to \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega)\right)'$ и полагая $F = u$, имеем $\langle u, u \rangle = 0$, то есть $u = 0$.

Теорема 1.3.1 доказана полностью.

1.4 Задача Дирихле с однородными граничными условиями, связанная с некоэрцитивной формой, младшие коэффициенты которой принадлежат некоторым весовым лебеговым пространствам

Пусть, так же как в §1.3, Ω– ограниченная область в R^n с замкнутой $(n-1)$– мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющая условию конуса. Пусть $\rho(x)$–регуляризованное расстояние от $x\in\Omega$ до $\partial\Omega$, r– натуральное, α,λ– вещественные числа. Рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B_\lambda[u,v]=\sum_{|k|,|l|\le r}\int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$
$$+\lambda\int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx, \quad (1.4.1)$$

где $p_k(x)=\rho^{\alpha-r+|k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, на которых ниже накладываются некоторые условия. Отметим, что форма (1.4.1), в отличие от формы $B_\lambda[u,v]$, рассмотренной в §1.3, имеет младшие коэффициенты $a_{kl}(x), |k|+|l|\le 2r-1$.

Так же как в §1.3, рассмотрим вариационную задачу Дирихле, связанную с формой (1.4.1).

Задача D_λ**.** Для заданного функционала $F\in(V^r_{2;\alpha}(\Omega))'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B_\lambda[U,\,v]=<F,v>\quad \forall v\in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.4.2)$$

принадлежащее пространству $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Также как в §1.3 (см. замечание 1.3.1) заметим, что если граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая и число α такое, что

$$\alpha+\frac{1}{2}\notin\{1,\,\dots,\,r\},\quad -\frac{1}{2}<\alpha<r-\frac{1}{2},$$

то согласно теореме 1.1.4 решение $U(x)$, $x \in \Omega$, задачи D_λ удовлетворяет однородным граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^s U}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, \; s = 0, \, 1, \, \ldots, \, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали, а целое число s_0 такое, что $r-\alpha-1/2 \le s_0 < r-\alpha+1-1/2$. Поэтому, в общем случае, граничные условия в задачи D_λ формально будем считать однородными.

Предположим, что коэффициенты $a_{kl}(x)$ формы (1.4.1) удовлетворяют следующим условиям:

I) старшие коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

II) существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left|\arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\right| < \varphi, \tag{1.4.3}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l\right\} \ge c\,|\xi|^{2r} \tag{1.4.4}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus 0$.

III) младшие коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k|+|l| \le 2r-1$, $|k|, |l| \le r$, принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где число p_{kl} определяется следующим образом:

$$1) \; p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|k|} + \varepsilon, |l| = r, \; n > 2(r-|k|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|} + \varepsilon, |k| = r, \; n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

2) если $|k| \le r-1, |l| \le r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon, \ n > 2(r-|k|), \ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon}, \ n \le 2(r-|k|), \ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|k|+\varepsilon}, \ n > 2(r-|k|), \ n \le 2(r-|l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} - любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε - достаточно малое положительное число.

Замечание 1.4.1. Разрешимость вариационной задачи Дирихле и некоторые спектральные вопросы для эллиптических операторов, связанных с полуторалинейной формой вида (1.4.1), ранее изучались в работах К.Х. Бойматова [10, 11, 14], С.А. Исхокова [25], К.Х. Бойматова и С.А. Исхокова [15] в предположении, что все коэффициенты $a_{kl}(x)$, $|k|$, $|l| \le r$, формы (1.4.1) непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяют условиям

$$|\arg A(x,\,\zeta)| < \varphi, \tag{1.4.5}$$

$$\sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \le M \mathrm{Re}\,\{\gamma(x) A(x,\,\zeta)\} \tag{1.4.6}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\le r}$. В этих условиях

$$A(x,\,\zeta) = \sum_{|k|,\,|l| \le r} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l},$$

$\gamma(x)$ – некоторая непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, которая не обращается в нуль, φ – некоторое положительное число меньше π, число $M > 0$ не зависит от x, ζ.

Отметим, что в отличие от наших условий (1.4.3), (1.4.4) в (1.4.5), (1.4.6) участвуют и младшие коэффициенты формы (1.4.1), и даже в случае, когда форма (1.4.1) имеет только старшие коэффициенты, условия (1.4.3), (1.4.4) слабее, чем условия (1.4.5), (1.4.6).

Теорема 1.4.1. *Пусть $0 \le \alpha < r$ и выполнены условия I)-III). Тогда найдется число $\lambda_0 \ge 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка*

$$\|U; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \le M_0 \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \right\|, \tag{1.4.7}$$

где число M_0 не зависит от λ и F.

Доказательство существования решения. Полуторалинейную форму $B_\lambda[u,v]$ представим в виде

$$B_\lambda[u,v] = B^*_\lambda[u,v] + B_*[u,v], \tag{1.4.8}$$

где

$$B_*[u,v] = \sum_{\substack{|k|,|l|\le r,\\ |k|+|l|\le 2r-1}} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \tag{1.4.9}$$

$$B^*_\lambda[u,v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_\Omega \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx +$$
$$+ \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Поступая также как при доказательстве теоремы 1.3.1 параграфа 1.3 при $\lambda \ge \lambda_0$ строится ограниченный оператор

$$\mathfrak{R}_0(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to V^r_{2;\alpha}(\Omega)$$

такой, что

$$B^*_\lambda[\mathfrak{R}_0(\lambda)F, v] = \langle F, v\rangle \tag{1.4.10}$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Далее определим оператор

$$\mathbb{R}_0(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)',$$

действующий по формуле

$$\langle \mathbb{R}_0(\lambda)F, v\rangle = B_\lambda[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v] \tag{1.4.11}$$

для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$. Тогда из (1.4.8) и (1.4.10) следует, что

$$\langle \mathbb{R}_0(\lambda)F, v\rangle = \langle F, v\rangle + B_*[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v] \tag{1.4.12}$$

для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$.

Ниже мы докажем следующее утверждение

Утверждение 1.4.1. *В условиях теоремы 1.4.1 существует положительная функция $\delta(\lambda)$ такая, что $\delta(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$ и*

$$|B_*[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v]| \leq \delta(\lambda) \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \tag{1.4.13}$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Из (1.4.12), (1.4.13) следует, что введенный выше оператор-функцию $\mathbb{R}_0(\lambda)$ можно представить в виде

$$\mathbb{R}_0(\lambda) = E + \mathbb{G}_0(\lambda),$$

где $\mathbb{G}_0(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ и существует число λ_0 такое, что

$$\|\mathbb{G}_0(\lambda)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \lambda \geq \lambda_0.$$

Следовательно, при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}_0(\lambda)$ непрерывно обратим, и

$$\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}_0(\lambda))^{-1}.$$

Пусть F - произвольный функционал из пространства $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$. Рассмотрим функцию

$$U(x) = (\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F)(x). \tag{1.4.14}$$

Используя равенства (1.4.9), (1.4.10), имеем

$$B_\lambda[U, v] = B^*_\lambda[U, v] + B_*[U, v] = B^*_\lambda[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v] + B_*[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v] =$$

$$= \langle \mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v\rangle + B_*[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v]. \tag{1.4.15}$$

С другой стороны из (1.4.12) следует, что

$$B_*[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda), \mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v] = \langle \mathbb{R}_0(\lambda)\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v\rangle - \langle \mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v\rangle =$$

$$= \langle F, v\rangle - \langle \mathbb{R}_0^{-1}(\lambda)F, v\rangle.$$

Подставляя это в (1.4.15) получим (1.4.2), то есть

$$B_\lambda[U,\, v] =< F, v > \quad \forall v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

Таким образом, мы показали, что функция $U(x) \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, определенная равенством (1.4.14), является решением задачи D_λ, $\lambda \geq \lambda_0$.

Оценка (1.4.7) следует из (1.4.14) в силу ограниченности операторов

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda) : \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)' \to V^r_{2;\alpha}(\Omega),$$

$$\mathbb{R}_0^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}_0(\lambda))^{-1} : \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)' \to \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'$$

при $\lambda \geq \lambda_0$.

Теперь переходим к доказательству утверждения 1.4.1.

Полуторалинейную форму (см.(1.4.9)) $B_*[u, v]$ представим в виде

$$B_*[u, v] = B_*^{(1)}[u, v] + B_*^{(2)}[u, v], \tag{1.4.16}$$

где

$$B_*^{(1)}[u, v] = \sum_{\substack{|k|\leq r-1,\\ |l|\leq r}} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx \tag{1.4.17}$$

$$B_*^{(2)}[u, v] = \sum_{\substack{|k|=r,\\ |l|\leq r-1}} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx.$$

Теперь для доказательства утверждения 1.4.1 (см. (1.4.13)) нам достаточно доказать следующие две оценки

$$\left|B_*^{(1)}[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v]\right| \leq \delta_1(\lambda)\left\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\right\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\|, \tag{1.4.18}$$

$$\left|B_*^{(2)}[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v]\right| \leq \delta_2(\lambda)\left\|F; \big(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\big)'\right\| \cdot \|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\| \tag{1.4.19}$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$. В этих оценках $\delta_1(\lambda), \delta_2(\lambda)$ - положительные функции такие, что $\delta_1(\lambda) \to 0, \delta_2(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Доказательство оценки (1.4.18). Согласно выкладкам приведенным в §1.3 оператор $\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)$ имеет следующий вид (см. (1.3.66))

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F, \quad F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)', \tag{1.4.20}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbb{R}(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to V^r_{2;\alpha}(\Omega), \\ \mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E + \mathbb{G}(\lambda))^{-1} \quad \text{при}\, \lambda \geq \lambda_0, \\ \mathcal{R}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j)\Phi_j\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j. \end{gathered} \tag{1.4.21}$$

Вводим обозначение

$$\mathcal{F} = \mathbb{R}^{-1}(\lambda)F. \tag{1.4.22}$$

Тогда из (1.4.20) и (1.4.21) следует, что

$$B^{(1)}_*[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F,\, v] = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j)B^{(1)}_*[\Phi_j\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j\mathcal{F}, v]. \tag{1.4.23}$$

Далее, действуя так же как в доказательстве утверждения 1.3.1 (см.§1.3), построим оператор $A_{\lambda;j}$ такой, что при $\lambda \geq \lambda_0 \geq 0$, где λ_0 - некоторое конечное число,

$$\mathcal{R}_j(\lambda)f = A^{-1}_{\lambda;j}f \tag{1.4.24}$$

для всех $f \in L_2(\Omega)$ и также имеет место представление

$$A^{-1}_{\lambda;j} = B^{-1/2}_{\lambda;j}X_j(\lambda)B^{-1/2}_{\lambda;j}, \tag{1.4.25}$$

где $X_j(\lambda)$ - ограниченный оператор, норма которого не превосходит некоторого положительного числа M_1 не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$, а $B_{\lambda;j}$ - самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, порожденный симметричной формой (см. лемму 1.3.1)

$$\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda;j}}[u, v] = \frac{1}{2}\left\{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_{\lambda;j}[u, v] + \exp(-i\theta_j)\overline{\mathcal{B}_{\lambda;j}[v, u]}\right\}.$$

Теперь используя (1.4.23) – (1.4.25) для произвольного элемента $F \in L_2(\Omega)$ имеем

$$B_*^{(1)}[\mathfrak{R}_0(\lambda)F,\, v] = \sum_{j=1}^{N} \exp(i\theta_j) B_*^{(1)}[\Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j \mathcal{F}, v]. \qquad (1.4.26)$$

Далее сформулируем без доказательства одну лемму, которая является частным случаем леммы 1.1.3 из первого параграфа.

Лемма 1.4.1. *Пусть p_{kl} - такие же числа как в теореме 1.4.1 и $q_{kl} = p_{kl}/\,(p_{kl}-1)$. Тогда для всех мультииндексов k, l таких, что $|k| \leq r-1$ и $|l| \leq r$ существует число $\mu > 0$ такое, что для любого $\tau > 0$ имеет место следующее неравенство*

$$\left\| p_k\, p_l\, u^{(k)} v^{(l)};\, L_{q_{kl};n/p_{kl}}(\Omega) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\| \left\{ \tau \| u; L_{2;\alpha}^r(\Omega)\| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| \rho^{\alpha-r} u;\, L_2(\Omega) \right\| \right\}, \quad (1.4.27)$$

для всех $u \in V_{2;\alpha}^r(\Omega), v \in V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Применяя неравенство Гельдера с показателями p_{kl}, q_{kl} в силу неравенства (1.4.27) имеем

$$|B_*^{(1)}[u, v]| \leq \sum_{\substack{|k| \leq r-1,\\ |l| \leq r}} \left\| a_{kl};\, L_{q_{kl};n/p_{kl}}(\Omega) \right\| \left\| p_k p_l u^{(k)} v^{(l)};\, L_{q_{kl};n/p_{kl}}(\Omega) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\| \{ \tau \| u; L_{2;\alpha}^r(\Omega) \| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| \rho^{\alpha-r} u;\, L_2(\Omega) \right\| \}. \qquad (1.4.28)$$

Действуя также как при доказательстве неравенства (1.3.39) (см. доказательство леммы 1.3.1) получаем

$$\tau \| u; L_{2;\alpha}^r(\Omega) \| + c_0 \tau^{-\mu} \left\| \rho^{\alpha-r} u;\, L_2(\Omega) \right\| \leq$$
$$\leq \tau \mathrm{Re} \left[\left\{ \exp(i\theta_j) \left(\sum_{|k|,|l|=r} \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \rho_1(\tau) \int_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x) |u(x)|^2 dx \right) \right\} \right]^{1/2}, \qquad (1.4.29)$$

где непрерывная положительная функция $\rho_1(\tau)$ такая, что $\rho_1(\tau) \to \infty$ при $\tau \to 0$. Обратную относительно $\rho_1(\tau)$ функцию обозначим через q_1 и положив $\lambda = p_1(\tau)$, то есть $\tau = q_1(\lambda)$ в равенстве (1.4.29) имеем

$$\tau \|u; L^r_{2;\alpha}(\Omega)\| + c_0\tau^{-\mu} \left\|\rho^{\alpha-r}u;\ L_2(\Omega)\right\| \ \leq$$

$$\leq q_1(\lambda)\mathrm{Re}\left[\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\}\right]^{1/2}.$$

Отсюда и из (1.4.28) следует, что

$$|B^{(1)}_*[u,v]| \leq q_1(\lambda)\left\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \ \times$$

$$\times\mathrm{Re}\left[\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\}\right]^{1/2}. \tag{1.4.30}$$

Здесь $j \in \{1,2,...,N\}$, $q_1(\lambda)$ - положительная функция такая, что $q_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Согласно равенству (1.3.35)

$$\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)u^{(k)}(x)\overline{u^{(l)}(x)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|u(x)|^2dx\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)B_{\lambda;j}[u,u]\right\} = \left\|B^{1/2}_{\lambda;j}u; L_2(\Omega)\right\|^2. \tag{1.4.31}$$

Поэтому из (1.4.30) следует, что

$$|B^{(1)}_*[u,v]| \leq q_1(\lambda)\left\|v; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|\left\|B^{1/2}_{\lambda;j}u; L_2(\Omega)\right\| \tag{1.4.32}$$

$$(q_1(\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty).$$

Теперь применяя это неравенство из (1.4.26) получим

$$|B_*^{(1)}[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v]| \le q_1(\lambda) \left\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\| \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{N} \left\| B_{\lambda;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j \mathcal{F}; L_2(\Omega) \right\| \right). \quad (1.4.33)$$

Согласно неравенствам (1.3.49), (1.3.51) из §1.3 при $\lambda \ge \lambda_0$ имеют место следующие соотношения

$$\left\| B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j F; L_2(\Omega) \right\| \ll \left\| B_{\lambda_0;j}^{-1/2} \Phi_j F; L_2(\Omega) \right\| \ll$$
$$\ll \left\| \varphi_i F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\| \ll \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\|. \quad (1.4.34)$$

В нашем случае (см. (1.4.21), (1.4.22)) $\mathcal{F} = \mathbb{R}^{-1}(\lambda)F$ и $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ - ограниченный оператор, действующий из $\left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)'$ в $\left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)'$. Поэтому из (1.4.34) следует, что

$$\left\| B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j \mathcal{F}; L_2(\Omega) \right\| \ll \left\| \mathbb{R}^{-1}(\lambda) F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\| \ll \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\|. \quad (1.4.35)$$

Ниже мы докажем неравенство

$$\left\| B_{\lambda j}^{1/2} \Phi_j v; L_2(\Omega) \right\| \le M_0 \left\| B_{\lambda j}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\|. \quad (1.4.36)$$

Отсюда при $v = B_{\lambda;j}^{-1/2} u$ следует неравенство

$$\left\| B_{\lambda;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda j}^{-1/2} u; L_2(\Omega) \right\| \le M_0 \left\| u; L_2(\Omega) \right\|. \quad (1.4.37)$$

Это означает ограниченность оператора $B_{\lambda;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2}$. Учитывая этот факт, ограниченность оператора $X_j(\lambda)$ и применяя (1.4.35) из (1.4.33) получим

$$|B_*^{(1)}[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda)F, v]| \le$$
$$\le q_1(\lambda) \left\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\| \sum_{j=1}^{N} \left\| B_{\lambda;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2} \right\| \left\| X_j(\lambda) \right\| \left\| B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j \mathcal{F}; L_2(\Omega) \right\| \le$$
$$\le \delta_1(\lambda) \left\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\| \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\| \quad (\delta_1(\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty).$$

Это и есть неравенство (1.4.18). Для полного завершения доказательства этого неравенства нам осталось доказать неравенство (1.4.36). С этой целью воспользуемся равенством (1.4.31)

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda;j}u;L_2(\Omega)\right\|^2=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\exp(i\theta_j)\left(\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)a_{klj}(x)(\varphi_j(x)u(x))^{(k)}\overline{(\varphi_j(x)u(x))}^{(l)}dx+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|\varphi_j(x)v(x)|^2dx\right)\right\}.$$

Так как коэффициенты $a_{klj}(x)$, $|k|=|l|=r$ ограничены, то применяя неравенство Коши-Буняковского из последнего неравенства находим

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda;j}u;L_2(\Omega)\right\|\leq M_0\sum_{|k|,|l|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)|(\varphi_j(x)v(x))^{(k)}||(\varphi_j(x)v(x))^{(l)}|dx+$$

$$+\cos\theta_j\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|v(x)|^2dx\leq$$

$$\leq M_1\left\|\varphi_jv;L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|^2+\cos\theta_j\lambda\int\limits_{\Omega}\rho^{2(\alpha-r)}(x)|v(x)|^2dx. \qquad (1.4.38)$$

Здесь мы также воспользовались неравенством $|\varphi_j(x)|\leq 1\quad\forall x\in\Omega$.

Функции $\varphi_j(x)$ также обладают следующим свойством

$$|\varphi^{(k)}_j(x)|\leq c_0$$

для всех мультииндексов $k:|k|\leq r$ и всех $x\in\Omega$. Поэтому

$$\left\|\varphi_jv;L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|=\sum_{|k|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)\left|(\varphi_j(x)v(x))^{(k)}\right|^2dx\ll$$

$$\ll\sum_{|k'+k''|=r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)\left|\varphi^{(k')}_j(x)\right|^2\left|v^{(k'')}(x)\right|^2dx\ll$$

$$\ll\sum_{|k''|\leq r}\int\limits_{\Omega}\rho^{2\alpha}(x)\left|v^{(k'')}(x)\right|^2dx\ll$$

$$\ll \sum_{|k|\le r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r+|k|)}(x) \big| v^{(k)}(x) \big|^2 dx = M_1 \big\| v; V^r_{2;\alpha}(\Omega) \big\|^2. \qquad (1.4.39)$$

Здесь мы также воспользовались неравенством

$$0 < c_1 \le \rho^{-r+|k|}(x),\ \forall x \in \Omega,\ |k| \le r,$$

которое имеет место вследствие ограниченности области Ω.

Далее применяя неравенство (1.4.19) при $\lambda = \lambda_0$, имеем

$$c_0 \| v; V^r_{2;\alpha}(\Omega) \|^2 \le \mathrm{Re}\, \{ \exp(i\theta_j) \mathcal{B}_{\lambda;j}[v,v] \} =$$

$$= \mathrm{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \left(\sum_{|k|,|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) v^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_0 \cos(\theta_j) \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |v(x)|^2 dx \right) \right\}.$$

В силу этого неравенства и (1.4.39) из (1.4.38) следует, что

$$\left\| B^{1/2}_{\lambda;j} \Phi_j v; L_2(\Omega) \right\| \le M_1 \mathrm{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) v^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx \right\} +$$

$$+ (M_1 \lambda_0 + \lambda) \cos\theta_j \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |v(x)|^2 dx.$$

Следовательно при $\lambda \ge \lambda_0$ имеет место следующее неравенство

$$\left\| B^{1/2}_{\lambda;j} \Phi_j v; L_2(\Omega) \right\| \le (M_1 + 1) \times$$

$$\times \mathrm{Re} \left\{ \exp(i\theta_j) \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) a_{klj}(x) v^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2(\alpha-r)}(x) |v(x)|^2 dx \right\}.$$

Отсюда в силу равенства (1.4.31) следует неравенство (1.4.36).

Неравенство (1.4.18) доказано полностью.

Доказательство оценки (1.4.19). Теперь переходим к доказательству оценки (1.4.19), которая имеет следующий вид

$$\left| B^{(2)}_{*}[\boldsymbol{\mathcal{R}}_0(\lambda) F, v] \right| \le \delta_2(\lambda) \left\| F; \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega) \right)' \right\| \cdot \| v; V^r_{2;\alpha}(\Omega) \|$$

$$(\delta_2(\lambda) \to 0 \quad \text{при}\, \lambda \to \infty)$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Напомним, что (см. (1.4.17))

$$B^{(2)}_*[u,v] = \sum_{\substack{|k|=r,\\ |l|\le r-1}} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx.$$

Так как порядок производной $v^{(l)}(x)$ меньше r то аналогично (1.4.28) доказывается, что

$$|B^{(2)}_*[u,v]| \le \left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \{\tau\|v; L^r_{2;\alpha}(\Omega)\| + c_1\tau^{-\mu}\left\|\rho^{\alpha-r}v;\ L_2(\Omega)\right\|\}.$$

Далее, поступая так же как в доказательстве (1.4.32) из последнего неравенства получим

$$|B^{(2)}_*[u,v]| \le q_2(\lambda)\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|B^{1/2}_{\lambda;j}v; L_2(\Omega)\right\|,$$

где $q_2(\lambda)$ - положительная функция и $q_2(\lambda) \to 0 \quad$ при $\lambda \to +\infty$. Отсюда и из (1.4.21), (1.4.22) следует, что

$$|B^{(2)}_*[\mathcal{R}_0(\lambda)F,v]| \le$$
$$\le q_2(\lambda)\sum_{j=1}^N \left\|\Phi_j\mathcal{R}_j(\lambda)\Phi_j\mathcal{F}; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|B^{1/2}_{\lambda;j}v; L_2(\Omega)\right\|. \quad (1.4.40)$$

В процессе доказательства леммы 1.3.1 мы доказывали эквивалентность норм $\left\|u; V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|$ и $\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}u; L_2(\Omega)\right\|$. Учитывая это и применяя (1.4.24), (1.4.25) из (1.4.40) находим

$$|B^{(2)}_*[\mathcal{R}_0(\lambda)F,v]| \le$$
$$\le q_2(\lambda)\sum_{j=1}^N \left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}\Phi_j B^{-1/2}_{\lambda j}X_j(\lambda)B^{-1/2}_{\lambda;j}\Phi_j\mathcal{F}; L_2(\Omega)\right\| \left\|B^{1/2}_{\lambda;j}v; L_2(\Omega)\right\|.$$
$$(1.4.41)$$

Пусть $\lambda \ge \lambda_0$. Тогда в силу равенства (1.4.31) имеем

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda_0;j}u; L_2(\Omega)\right\| = \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)B_{\lambda_0;j}[u,u]\} \le \operatorname{Re}\{\exp(i\theta_j)B_{\lambda;j}[u,u]\} =$$

$$= \left\| B_{\lambda;j}^{1/2} u; L_2(\Omega) \right\|^2.$$

Отсюда следует, что оператор $B_{\lambda_0;j}^{1/2} B_{\lambda;j}^{-1/2}$ ограничен и

$$\left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} B_{\lambda;j}^{-1/2} \right\| \leq 1 \quad \text{для всех} \quad \lambda \geq \lambda_0.$$

Поэтому применяя неравенство (1.4.37) получаем

$$\left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2} \right\| \leq \left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2} \right\| \left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} B_{\lambda;j}^{-1/2} \right\| \leq M_1 \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (1.4.42)$$

Так как $X_j(\lambda)$ ограниченный оператор и его норма не превосходит некоторого положительного числа, не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$, то используя (1.4.42) и (1.4.35) имеем

$$\left\| B_{\lambda_0;j}^{1/2} \Phi_j B_{\lambda;j}^{-1/2} X_j(\lambda) B_{\lambda;j}^{-1/2} \Phi_j \mathcal{F}; L_2(\Omega) \right\| \ll \left\| F; \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)' \right\|.$$

В силу этого неравенства и эквивалентности норм $\left\| B_{\lambda;j}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\|$ и $\left\| v; V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right\|$ из (1.4.41) следует неравенство (1.4.19).

Доказательство единственности решения. Для доказательства единственности решения задачи D_λ рассмотрим сопряженную задачу.

Задача D_λ^*. Для заданного функционала $F \in \left(V_{2;\alpha}^r(\Omega) \right)'$ требуется найти решение $U_1(x)$ уравнения

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} = \langle F, v \rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (1.4.43)$$

принадлежащее пространству $V_{2;\alpha}^r(\Omega)$.

Так как

$$\overline{B_\lambda[v, U_1]} =$$

$$= \overline{\sum_{|k|,|l| \leq r} (p_k(x) p_l(x) a_{kl}(x) v^{(k)}(x), U_1^{(l)}(x))} + \lambda \overline{(\rho^{2(\alpha - r)}(x) v(x), U_1(x))} =$$

$$= \sum_{|k|,|l| \leq r} \overline{(v^{(k)}(x), p_k(x) p_l(x) \overline{a_{kl}(x)} U_1^{(l)}(x))} + \lambda \overline{(v(x), \rho^{2(\alpha - r)}(x) U_1(x))} =$$

$$= \sum_{|k|,|l| \leq r} (p_k(x) p_l(x) \overline{a_{kl}(x)} U_1^{(l)}(x), v^{(k)}(x)) + \lambda (\rho^{2(\alpha - r)}(x) U_1(x), v(x)) =$$

$$= \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)\overline{a_{kl}(x)}U_1^{(l)}(x)\overline{v^{(k)}(x)}dx + \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)U_1(x)\overline{v(x)}dx,$$

то (поменяем местами k и l)

$$B_\lambda[v, U_1] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)b_{kl}(x)U_1^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx+$$

$$+ \lambda \int\limits_\Omega \rho^{2(\alpha-r)}(x)U_1(x)\overline{v(x)}dx,$$

где $b_{kl}(x) = \overline{a_{kl}(x)}$.

В условиях теоремы 1.4.1 $a_{kl}(x) \in L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$ при $|k|+|l| \le 2r-1$ и $p_{kl} = p_{lk}$. Поэтому $b_{kl}(x) \in L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$ при $|k|+|l| \le 2r-1$ действуя, так же как и в первой части доказательства теоремы 1.4.1 (то есть доказательства существовании решения), можно построить операторы $(\lambda \ge \lambda_0)$

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_*(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to V^r_{2;\alpha}(\Omega),$$

$$\mathbb{R}_*(\lambda) : \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)' \to \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$$

такие, что оператор $\mathbb{R}_*(\lambda)$ непрерывно обратим и для любого функционала $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$ функция $U_1(x) = \boldsymbol{\mathcal{R}}_*(\lambda)\mathbb{R}_*^{-1}(\lambda)F$ будет решением задачи D^*_λ.

Теперь рассмотрим уравнение (1.4.2) с нулевой правой частью, то есть

$$B_\lambda[U,\, v] = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.4.44}$$

Так как множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в пространстве $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$, то равенство (1.4.44) имеет место для всех $v \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$.

Пусть функция $u \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1.4.44) и $U_1 \in V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ - уравнению (1.4.43). Из равенства (1.4.44) при $v = U_1 = \boldsymbol{\mathcal{R}}_*(\lambda)\mathbb{R}_*^{-1}(\lambda)F$ получим $B_\lambda[u,\, U_1] = 0$, то есть $\overline{B_\lambda[u,\, U_1] = 0}$. Отсюда и из (1.4.43) следует, что

$$\langle F, u\rangle = 0 \tag{1.4.45}$$

для всех $F \in \left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$. Так как $V^r_{2;\alpha}(\Omega)$ вложено в $\left(V^r_{2;\alpha}(\Omega)\right)'$, то полагая $F = u$ из (1.4.45) имеем $\langle u, u\rangle = 0$, то есть $u = 0$.

Таким образом мы доказали, что уравнение (1.4.2) с нулевой правой частью при $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 - некоторое неотрицательное число, имеет только нулевое решение. Это и означает единственность решения задачи D_λ.

Теорема 1.4.1 доказана полностью.

Глава 2

Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями

В этой главе диссертационной работы изучается разрешимость вариационной задачи Дирихле **с неоднородными граничными условиями** для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка, порожденных с помощью некоэрцитивных полуторалинейных форм. Она состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены определения основных весовых пространств дифференцируемых функций многих вещественных переменных и сформулированы их основные свойства. В этом же параграфе приведены некоторые вспомогательные леммы. Основные результаты этой главы сформулированы и доказаны во втором параграфе.

2.1 Функциональные пространства. Вспомогательные интегральные неравенства

Пусть Ω – ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с достаточно гладкой $(n-1)-$ мерной границей $\partial\Omega$. Пусть $r-$ натуральное, $\alpha, p-$ вещественные числа и $1 \le p < \infty$. Символом $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ до порядка r включительно с конечной нормой

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{p\alpha}(x)|u^{(k)}(x)|^p dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx \right\}^{1/p}. \qquad (2.1.1)$$

Функциональные пространства $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ являются банаховыми пространствами с нормой (2.1.1) и при $\alpha = 0$ совпадают с классическими пространствами $W^r_p(\Omega)$. Пространства $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$ при $p = 2$ являются гильбертовыми и скалярное произведение в них определяется равенством

$$(u,\, v)_{W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) u^{(k)}(x)\overline{v^{(k)}(x)} dx + \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)} dx.$$

Первый результат типа теорем вложения для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ был получен В.И. Кондрашовым [38]. Систематическое исследование пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ принадлежит Л.Д. Кудрявцеву [39]. Оно развивалось и дополнялось работами многих математиков, среди которых отметим работы С.М. Никольского [54], О.В. Бесова, Я. Кадлеца, А. Куфнера [5], О.В. Бесова [3], Х. Трибеля [61] и др. Более подробную библиографию работ по исследованиям весовых пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, опубликованных до 1988 г. можно найти в обзорной работе С.М. Никольского, П.И. Лизоркина, Н.В. Мирошина [56].

Также как в §1.1 вложение $B_1 \to B_2$ для нормированных пространств B_1, B_2, соответственно с нормами $\|\cdot;\, B_1\|$, $\|\cdot;\, B_2\|$, означает, что все элементы пространства B_1 можно рассматривать как элементы пространства B_2 и, кроме того, $\|u;\, B_1\| \leq M\|u;\, B_2\|$ для всех $u \in B_1$ с положительной константой M, не зависящей от u.

Ниже сформулируем несколько теорем о свойствах пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ без указания литературных источников. Соответствующие ссылки можно найти в обзорной работе [56].

Теорема 2.1.1. *Пусть* m *– целое число;* $0 \le m \le r, \quad \alpha_m \ge \alpha - m > -1/p$. *Тогда справедливо вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^{r-m}_{p;\,\alpha-m}(\Omega) \to W^{r-m}_{p;\,\alpha_m}(\Omega)$$

с соответствующими оценками норм.

При выполнении некоторых условий на гладкость границы $\partial\Omega$ области Ω изучаются следы функций $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$. Так же как в случае классических пространств Соболева следы функций $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ принадлежат некоторым пространства О.В.Бесова $B^\nu_p(\partial\Omega)$ (определение пространств О.В.Бесова см., например, в [4] или [61]).

Далее символом $C^{s+\varepsilon}$, где s – натуральное число и $\varepsilon \in (0,\,1)$, обозначим класс поверхностей, которые локально описываются с помощью функций, производные s-того порядка которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем ε.

Теорема 2.1.2. *Пусть*

$$-\frac{1}{p} < \alpha < r - \frac{1}{p}, \tag{2.1.2}$$

s_0 *– целое число, удовлетворяющее неравенствам*

$$r - \alpha - \frac{1}{p} \le s_0 < r - \alpha + 1 - \frac{1}{p}, \tag{2.1.3}$$

граница $\partial\Omega$ *принадлежит классу* $C^{s_0+1+\varepsilon}$, *где* $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда справедливо вложение*

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to B^{r-\alpha-1/p}_p(\partial\Omega). \tag{2.1.4}$$

Вложение (2.1.4) означает, что любая функция $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ имеет на границе $\partial\Omega$ следы

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s \in B^{r-\alpha-1/p-s}_p(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

и при этом выполняются неравенства

$$\|\varphi_s; B^{r-\alpha-1/p-s}_p(\partial\Omega)\| \le C\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\|,$$

$s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$. Здесь $\partial/\partial n$ – производная по внутренней нормали к поверхности $\partial\Omega$, константа $C > 0$ не зависит от функции u.

Справедлива также следующая обратная теорема о следах.

Теорема 2.1.3. *Пусть выполняется условие (2.1.2), целое число* s_0 *определено неравенствами (2.1.3),* $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда если заданы функции*

$$\varphi_s \in B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{2.1.5}$$

то существует функция $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, *для которой выполнены равенства*

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1$$

и справедливы оценки

$$\|u; W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)\| \le C \sum_{s=0}^{s_0-1} \|\varphi_s; B_p^{r-\alpha-1/p-s}(\partial\Omega)\|,$$

где число $C > 0$ *не зависит от набора функций (2.1.5).*

Обозначим через $C_0^\infty(\Omega)$ множество всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций с компактными носителями. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (2.1.1) обозначим через $\overset{0}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$.

Теорема 2.1.4. 1) *Пусть граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *принадлежит классу* C^1. *Тогда множество* $C_0^\infty(\Omega)$ *плотно в пространстве* $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ *в том и только в том случае, если* $\alpha \le -1/p$ *или* $\alpha \ge r - 1/p$.

2) *Пусть* $-1/p < \alpha < r - 1/p$ *и граница* $\partial\Omega$ *удовлетворяет условиям теоремы 2.1.3. Тогда выполняется равенство*

$$\overset{\circ}{W}{}^r_{p;\,\alpha}(\Omega) = \left\{ u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) : \left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0, s = 0, 1, 2, \cdots, s_0 - 1 \right\},$$

где $\partial/\partial n$ *– производная по внутренней нормали, а целое число* s_0 *определено неравенствами (2.1.3).*

Для исследования разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями нам понадобится следующая теорема вложения разных метрик для пространств $W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, доказанная в работе С.А. Исхокова [70].

Теорема 2.1.5. *Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^1 и пусть выполнены условия*

$$0 \le m \le r,\ 1 < p \le q < +\infty,\ \alpha_m > -\frac{1}{q},\ \alpha - m \le \alpha_m + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Тогда справедливо вложение

$$W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \to W^{r-m}_{q;\,\alpha_m}(\Omega).$$

С помощью этой теоремы доказывается весовое интегральное неравенство, в котором оценивается норма произведения производных функций $u \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $v \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$. Это неравенство опубликовано в работе С.А.Исхокова, О.А.Нематуллоева [36] и доказывается с помощью рассуждений, таких как в доказательстве леммы 1.1.3 из первой главы.

Лемма 2.1.1 *Пусть $p > 1$ и числа λ_{kl}, определенные для мультииндексов k, l, удовлетворяющих условиям $|k|,\ |l| \le r$, $|k| + |l| \le 2r - 1$, такие, что $\lambda_{kl} > 1$, $1/\lambda_{kl} \le 2/p$. Тогда для всех $u(x), v(x) \in W^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$\left\| u^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\alpha_{kl}}(\Omega) \right\| \le M \left\| u;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^r_{p;\,\alpha}(\Omega) \right\|,$$

где

$$\alpha_{kl} = -\frac{1}{\lambda_{kl}} + \varepsilon_1 + \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{p}\right)_+ + \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{p}\right)_+,$$

ε_1 – достаточно малое положительное число; константа $M > 0$ не зависит от u, v.

Здесь и далее $(\mu)_+ = \mu$, если $\mu \ge 0$, и $(\mu)_+ = 0$ в противном случае.

2.2 Об однозначной разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями

Целью настоящего параграфа является исследование разрешимости вариационной задачи Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов высшего порядка, порожденных некоэрцитивными полуторалинейными формами, в случае неоднородных граничных условий.

Так же как в предыдущих параграфах предполагается, что Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n, граница которой является $(n-1)$-мерным замкнутым многообразием.

Пусть r – некоторое фиксированное натуральное число. Рассмотрим следующую полуторалинейную интегро-дифференциальную форму

$$\mathbb{B}[u,\,v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx, \tag{2.2.1}$$

и предположим, что ее комплекснозначные коэффициенты $b_{kl}(x)$, $x \in \Omega$, $|k|, |l| \le r$, удовлетворяют следующим условиям:

(I) старшие коэффициенты $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = r$, формы (2.2.1) имеют вид

$$b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x),$$

где функции $a_{kl}(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

(II) коэффициенты $b_{kl}(x)$ при $|k|$, $|l| \le r$ и $|k|+|l| \le 2r-1$ принадлежат пространству $L_{\mu_{kl};\,\delta_{kl}}(\Omega)$, где $\mu_{kl} > 1$ и

$$\delta_{kl} = 1 - \frac{1}{\mu_{kl}} - \varepsilon_2 - \left(\alpha - r + |k| + \frac{1}{2}\right)_+ - \left(\alpha - r + |l| + \frac{1}{2}\right)_+,$$

где ε_2 – достаточно малое положительное число.

(III) существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0,\,\pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция

$\gamma(x) \neq 0$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k \xi^l \right| < \varphi,$$

$$\operatorname{Re}\left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k \xi^l \right\} \geq c\,|\xi|^{2r}.$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus 0$.

Далее исследуется разрешимость следующей вариационной задачи Дирихле, связанной с формой (2.2.1).

Задача $\mathbb{D}$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ уравнения

$$\mathbb{B}[U,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^\infty(\Omega))\,, \tag{2.2.2}$$

удовлетворяющее условию

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega). \tag{2.2.3}$$

Напомним, что $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ – пространство всех антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Замечание 2.2.1. Если $\Phi(x) \notin \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, то условие (2.2.3) означает, что решение $U(x)$ задачи $\mathbb{D}$ и заданная функция $\Phi(x)$ имеют одни и те же ненулевые следы на границе $\partial\Omega$ области Ω. Согласно теореме 2.1.4, если граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу C^1 и $\alpha \leq -1/p$ или $\alpha \geq r - 1/p$, то

$$W^r_{2;\,\alpha}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega).$$

Поэтому граничные условия в задаче $\mathbb{D}$ будут неоднородными только в случае

$$-\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2}. \tag{2.2.4}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при выполнении условий (I)–(III) коэффициенты полуторалинейной формы (2.2.1) удовлетворяют условиям теоремы 1.4.1. Так как (см. теорему 1.1.4 из §1.1)

$$\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) = V^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$$

при условии

$$\alpha + \frac{1}{2} \notin \{1,\,2,\,\ldots,\,r\}, \tag{2.2.5}$$

то применяя теорему 1.4.1 к полуторалинейной формы (2.2.1) получаем следующий результат:

Теорема 2.2.1 *Пусть выполнены условия (I)–(III). Тогда найдется число $\lambda_1 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_1$ вариационная задача: для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ найти решение $V(x)$ уравнения*

$$\mathbb{B}[V,\,v] + \lambda \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha-2r}(x)U(x)\overline{v(x)}dx = \langle F,\,v\rangle \quad \left(\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega)\right), \tag{2.2.6}$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$, имеет единственное решение и при этом имеет место следующее неравенство

$$\left\|V;\,W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\|F;\,\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|, \tag{2.2.7}$$

где положительная постоянная M не зависит от выбора функционала F.

Далее предположим, что для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ уравнение (2.2.6) при $\lambda = 0$ имеет единственное решение $V(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и для него выполняется неравенство (2.2.7). Тогда справедлива следующая

Теорема 2.2.2. *Пусть выполнены условия (I)–(III), (2.2.4), (2.2.5).*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ существует единственное решение $U(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ задачи $\mathbb{D}$ и при этом выполняется оценка

$$\left\|U;\,W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \leq M \left\{\left\|F;\,\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\,W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|\right\}, \tag{2.2.8}$$

где число $M>0$ не зависит от выбора F и Φ.

Доказательство. Далее сформулируем и докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 2.2.1. *В условиях теоремы 2.2.2 любая функция $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ по формуле*

$$\langle \mathbb{G},\, v\rangle = -\mathbb{B}[\Phi,\, v] \tag{2.2.9}$$

порождает функционал $\mathbb{G}$, который принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и найдется положительная постоянная M такая, что

$$\left\|\mathbb{G};\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| \le M\left\|\Phi(x);\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.2.10}$$

для всех $\Phi(x) \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Доказательство. Функционал $\mathbb{G}$, определенный равенством (2.2.9), представим в виде

$$\langle \mathbb{G},\, v\rangle = -\mathbb{B}_*[\Phi,\, v] + \mathbb{B}^*[\Phi,\, v], \tag{2.2.11}$$

где

$$\mathbb{B}_*[\Phi,\, v] = \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx$$

$$\mathbb{B}^*[\Phi,\, v] = \sum_{|k|+|l|\le 2r-1} \int\limits_{\Omega} b_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx.$$

Согласно условию (I) $b_{kl}(x) = \rho^{2\alpha}(x)a_{kl}(x)$ при $|k| = |l| = r$ и $a_{kl}(x)$ – ограниченные в Ω функции (ввиду их непрерывности в замкнутой области $\overline{\Omega}$). Поэтому применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|\mathbb{B}_*[\Phi,\, v]| \le \sum_{|k|=|l|=r} \int\limits_{\Omega} \left|\rho^{2\alpha}a_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x)\right| \left|v^{(l)}(x)\right| dx \ll$$

$$\ll \sum_{|k|=|l|=r} \left\|\rho^{\alpha}\Phi^{(k)};\, L_2(\Omega)\right\| \left\|\rho^{\alpha}v^{(l)};\, L_2(\Omega)\right\| \ll \left\|\Phi;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Так как $\left\|u;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \le \left\|u;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\|$, то отсюда следует, что

$$|\mathbb{B}_*[\Phi,\, v]| \ll \left\|\Phi;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \left\|v;\, W^r_{2;\alpha}(\Omega)\right\| \tag{2.2.12}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Теперь переходим к оценке слагаемых полуторалинейной формы $\mathbb{B}^{*}[\Phi,\, v]$. Заметим, что числа $\lambda_{kl} = \mu_{kl}/(\mu_{kl}{-}1)$, где числа μ_{kl} такие же как в условии (II), удовлетворяют условиям леммы 2.1.1. Поэтому применяя неравенство Гёльдера и лемму 2.1.1, получим

$$|\mathbb{B}^{*}[\Phi,\, v]| \leq$$

$$\leq \sum_{|k|+|l|\leq 2r-1} \int\limits_{\Omega} \left| b_{kl}(x)\Phi^{(k)}(x) \right| \left| v^{(l)}(x) \right| dx \leq$$

$$\leq \sum_{|k|+|l|\leq 2r-1} \| b_{kl};\, L_{\mu_{kl};-\alpha_{kl}}(\Omega)\| \cdot \left\| \Phi^{(k)} v^{(l)};\, L_{\lambda_{kl};\alpha_{kl}}(\Omega) \right\|$$

$$\leq M \left\| \Phi;\, W^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| .$$

Следовательно

$$|\mathbb{B}^{*}[\Phi,\, v]| \leq M \left\| \Phi;\, W^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| \tag{2.2.13}$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Здесь M – положительная постоянная не зависящая от выбора функции $v(x)$.

Далее объединяя оценки (2.2.12), (2.2.13) и равенства (2.2.9), (2.2.11) получим

$$|\langle \mathbb{G},\, v\rangle| \leq M \left\| \Phi;\, W^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\| \left\| v;\, W^{r}_{2;\alpha}(\Omega) \right\|$$

для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$. Это неравенство означает, что функционал $\mathbb{G}$, определенный равенством (2.2.9), принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega) \right)'$ и имеет место неравенство (2.2.10).

Лемма 2.2.1 доказана.

Теперь, действуя по стандартной схеме, с помощью леммы 2.2.1 можно свести задачу Дирихле $\mathbb{D}$ с неоднородными граничными условиями к некоторой задаче с однородными граничными условиями, для решения которой можно применить теорему 2.2.2 при $\lambda = \lambda_1 = 0$.

Пусть заданы элементы $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$, $\Phi(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и пусть $U(x)$ – какое нибудь решение задачи $\mathbb{D}$. Рассмотрим функцию $U^{*}(x) = U(x) - \Phi(x)$. Так как

$$\mathbb{B}[U,\, v] = \langle F,\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega))\,,$$

и

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega),$$

то $U^{*}(x)$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ и удовлетворяет уравнению

$$\mathbb{B}[U^{*},\, v] = \langle F,\, v\rangle + \langle \mathbb{G},\, v\rangle \quad (\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega))\,, \tag{2.2.14}$$

где функционал $\mathbb{G}_{\lambda}$ определяется равенством (2.2.9).

Таким образом, вспомогательная функция $U^{*}(x)$ является решением следующей задачи:

Задача $\mathbb{D}^{*}$**.** Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданной функции $\Phi(x) \in W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$ требуется найти решение $U^{*}(x)$ уравнения (2.2.14) принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)$.

Обратно, легко можно проверить, что, если $U^{*}(x)$ является решением задачи $\mathbb{D}^{*}$, то функция

$$U(x) = U^{*}(x) + \Phi(x) \tag{2.2.15}$$

будет решением задачи $\mathbb{D}$.

Согласно лемме 2.2.1 функционал $\mathbb{G}$ принадлежит пространству $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$. Поэтому по теореме 2.2.2 и сделанного выше предположения задача $\mathbb{D}^{*}$ имеет единственное решение и для нее выполняется следующая оценка

$$\left\|U^{*};\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|G;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\|.$$

Отсюда и из оценки (2.2.10) леммы 2.2.1 следует, что

$$\left\|U^{*};\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\, W^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|.$$

Поэтому для функции $U(x)$ – решения задачи $\mathbb{D}$ (см. (2.2.15) имеет место неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \left\|F;\, \left(\overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'\right\| + \left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\|,$$

т.е. выполняется оценка (2.2.8) теоремы 2.2.2.

Из единственности решения задачи $\mathbb{D}^*$ и равенства (2.2.15) следует единственность решения задачи $\mathbb{D}$.

Теорема 2.2.2 доказана.

Далее покажем, что при некоторых дополнительных ограничениях на параметр α можно задавать неоднородные граничные условия в задаче $\mathbb{D}$ в явном виде. Пусть число α такое, что

$$-\frac{1}{2} < \alpha < r - \frac{1}{2}.$$

Определим целое число s_0 неравенством

$$r - \alpha - \frac{1}{2} \leq s_0 < r - \alpha + \frac{1}{2}.$$

Тогда, согласно теореме 2.1.3 при условии $\partial\Omega \in C^{s_0+1+\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1)$, для заданных граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

найдется функция $\Phi \in W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$\left.\frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1,$$

где $\partial/\partial n$ – производная по направлению внутренней нормали, и имеет место следующее неравенство

$$\left\|\Phi;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \ll \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\|\varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega)\right\|.$$

В этом случае, условие (см. (2.2.3))

$$U(x) - \Phi(x) \in \overset{\circ}{W}\,{}^{r}_{2;\,\alpha}(\Omega),$$

которое имеется в задаче $\mathbb{D}$, принимает следующий вид (см. теорему 1.1.4 из §1.1)

$$\left.\frac{\partial^s U(x)}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1. \tag{2.2.16}$$

Поэтому в сделанных выше предположениях задачу $\mathbb{D}$ можно сформулировать следующим образом

Задача $\mathcal{D}$. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций

$$\varphi_s \in B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega), \quad s = 0, 1, \cdots, s_0 - 1, \tag{2.2.17}$$

требуется найти решение $U(x)$ уравнения (2.2.2) из пространства $W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющее граничным условиям (2.2.17).

Применяя теорему 2.2.2 получаем следующий результат о разрешимости задачи $\mathcal{D}$.

Теорема 2.2.3. *Пусть $0 < \alpha < r - 1/2$, граница $\partial\Omega$ области Ω принадлежит классу $C^{s_0+1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и выполнены все условия теоремы 2.2.2.*

Тогда для любого заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)'$ и заданного набора граничных функций (2.2.17) существует единственное решение $U(x)$ задачи $\mathcal{D}$ и при этом справедливо неравенство

$$\left\|U;\, W^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\right\| \le M \left\{ \left\| F;\, \left(\overset{\circ}{W}{}^{\,r}_{2;\,\alpha}(\Omega)\right)' \right\| + \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\| \varphi_s;\, B_2^{r-\alpha-1/2-s}(\partial\Omega) \right\| \right\},$$

где число $M > 0$ не зависит от выбора функционала F и граничных функций (2.2.17).

Глава 3

Оценка резольвенты и спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области

В этой главе диссертационной работы доказана одна оценка нормы резольвенты и изучены спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов. Также как в предыдущих главах работы предполагается, что операторы заданы в ограниченной области, их младшие коэффициенты принадлежат некоторым L_p-пространствам со степенным весом и соответствующие полуторалинейные формы могут не удовлетворять условию коэрцитивности.

Ранее, во многих работах, где изучалась оценка резольвенты несамосопряженных операторов, порожденных с помощью полуторалинейных форм, доказывалось неравенство вида $\|(A-\lambda E)^{-1}\| < M|\lambda|^{-1/2}$. Здесь мы доказываем одно представление резольвенты исследуемого оператора A, которое позволяет получить неравенство такого типа с показателем 1 вместо $1/2$. Также доказывается, что оператор A имеет дискретный спектр, и изучается асимптотика функции $N(t)$ – число собственных значений оператора A, не превосходящих по модулю t, с учетом их алгебраических кратностей.

3.1 Формулировка основных результатов

Пусть Ω – ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса. Пусть r – натуральное, α, p – вещественные числа, $1 \le p < \infty$ и $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$, $V^r_{p,\alpha}(\Omega)$, $L^r_{p;\,\alpha}(\Omega)$, $L_{p;\,\alpha-r}(\Omega)$ – такие же функциональные пространства, как в предыдущей части работы.

Заметим, что класс $C_0^\infty(\Omega)$ плотен в $V^r_{p,\alpha}(\Omega)$ и при $\alpha+1/p \notin \{1, \ldots, r\}$ с точностью до эквивалентности норм имеет место равенство

$$V^r_{p,\alpha}(\Omega) = \mathring{W}^r_{p,\alpha}(\Omega), \tag{3.1.1}$$

где $\mathring{W}^r_{p,\alpha}(\Omega)$ – пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^r_{p,\alpha}(\Omega)$.

Далее для удобства записи обозначим пространство $\mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega)$ через H_+, а норму (0.0.1) при $p = 2$ – через $\|\cdot;\, H_+\|$ и для мультииндекса $k = (k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_n)$ вводим обозначение

$$D^k_x = \left(\frac{\partial}{i\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{i\partial x_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{\partial}{i\partial x_n}\right)^{k_n}.$$

Символом H_- обозначим пополнения пространства $H = L_2(\Omega)$ по норме

$$\|u;\, H_-\| = \sup |(u,\, v)|,$$

где $(\cdot,\, \cdot)$ – скалярное произведение в H и верхняя грань берется по всем $v \in H_+$ таким, что $\|v;\, H_+\| = 1$.

Элементы из H_- отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над H_+. Действие функционала $F \in H_-$ на элемент $u \in H_+$ будем обозначать символом $< F,\, u >$.

На функциях $u,\, v \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,|l|\le r} \int\limits_\Omega p_k(x)p_l(x)a_{kl}(x)D_x^k u(x)\overline{D_x^l v(x)}dx, \tag{3.1.2}$$

где $p_k(x) = \rho^{\alpha - r + |k|}(x)$ и $a_{kl}(x)$ - комплекснозначные функции, на которых ниже накладываются некоторые условия. Предполагается, что:

I) функции $a_{kl}(x), |k| = |l| = r$, непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$;

II) существуют числа $c_0 > 0$, $\varphi \in (0,\, \pi)$ и непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma(x) \neq 0\ \forall x \in \overline{\Omega}$ такие, что

$$\left| \arg \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \right| < \varphi, \tag{3.1.3}$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x)\xi^k\xi^l \right\} \ge c\,|\xi|^{2r}. \tag{3.1.4}$$

для всех $x \in \Omega$, $\xi \in R^n \setminus \{0\}$.

III) функции $a_{kl}(x), |k| + |l| \le 2r - 1,\ |k|, |l| \le r$ принадлежат пространству $L_{p_{kl};-n/p_{kl}}(\Omega)$, где число p_{kl} определяется следующим образом:

$$1)\ p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{r-|k|} + \varepsilon, |l| = r,\ n > 2(r-|k|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|} + \varepsilon, |k| = r,\ n > 2(r-|l|); \end{cases}$$

2) если $|k| \le r-1, |l| \le r-1$, то

$$p_{kl} = \begin{cases} \dfrac{n}{2r-|k|-|l|} + \varepsilon,\ n > 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|l|+\varepsilon},\ n \le 2(r-|k|),\ n > 2(r-|l|), \\ \\ \dfrac{n}{r-|k|+\varepsilon},\ n > 2(r-|k|),\ n \le 2(r-|l|); \end{cases}$$

3) p_{kl} - любое конечное число больше 2 в оставшихся случаях.

Здесь ε - достаточно малое положительное число, функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\, \pi]$ и использованы следующие обозначения

$$\xi = (\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_n) \in R^n, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1}\, \xi_2^{k_2}\, \cdots\, \xi_n^{k_n}, |\xi| = \left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B'[u,\, v] = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \gamma(x) a_{kl}(x) D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx. \tag{3.1.5}$$

Согласно результатам работы [29] в сделанных выше предположениях существуют постоянные $c_0 > 0,\ c_1 \ge 0$ такие что

$$\operatorname{Re} B_0'[u,\, u] \ge c_0 \|u;\, L_{2;\,\alpha}^r(\Omega)\|^2 - c_1 \|u;\, L_{2;\,\alpha-r}(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{3.1.6}$$

где

$$B_0'[u,\, u] = B'[u,\, v] - \left(\gamma\, \rho^{2(\alpha-r)} a_{00} u,\, u\right).$$

Следовательно, если коэффициент $a_{00}(x)$ формы (3.1.2) удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \gamma(x) a_{00}(x) \ge c_2, \quad x \in \Omega, \tag{3.1.7}$$

где $c_2 > c_1$ и c_1 - постоянная из (3.1.6), то

$$\operatorname{Re} B'[u,\, u] \ge c_0' \|u;\, V_{2;\,\alpha}^r(\Omega)\|^2 \quad u \in C_0^\infty(\Omega);\ c_0' > 0. \tag{3.1.8}$$

Далее мы предположим, что условие (3.1.7) выполняется.

Форма (3.1.2) является непрерывной в H_+ (см. ниже оценку (3.2.4)). Поэтому оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством $< \mathcal{A}u,\, v >= B[u,\, v]\ v \in H_+$, действует из H_+ в H_-.

Сформулируем основные результаты настоящей главы.

Теорема 3.1.1. *Пусть выполнены все сформулированные выше условия. Пусть $\alpha < r$ и $\alpha + 1/2 \notin \{1,\, \ldots,\, r\}$. Тогда существует единственный замкнутый оператор A в пространстве $L_2(\Omega)$, обладающий следующими свойствами:*

(i) $D(A) \subset L_2(\Omega)$*,* $(Au,\, v) = B[u,\, v]$ *для всех* $v \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega)$ *и всех* $u \in D(A)$*,*

(ii) найдется число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *такое, что оператор* $A - \lambda_0 E$ *непрерывно обратим.*

Оператор A *совпадает с сужением оператора* $\mathcal{A}$ *в* $L_2(\Omega)$*, т.е.*

$$D(A) = \left\{u \in \mathring{W}^r_{2,\,\alpha}(\Omega) :\, \mathcal{A}u \in L_2(\Omega)\right\}, \quad Au = \mathcal{A}u \;\forall u \in D(A). \tag{3.1.9}$$

Далее мы будем считать, что все условия теоремы 3.1.1 выполнены.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{P}[u,\, v] = \sum_{|k|=r} \int\limits_{\Omega} \rho^{2\alpha}(x) D^k_x u(x) \overline{D^k_x v(x)} dx + \int\limits_{\Omega} u(x)\overline{v(x)} dx \tag{3.1.10}$$

, $D[\mathcal{P}] = \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega)$. Существует единственный самосопряженный оператор P в $L_2(\Omega)$, связанный с формой (3.1.10) равенством

$$\mathcal{P}[u,\, v] = \Big((P+E)^{1/2}u,\, (P+E)^{1/2}v\Big) \;\forall u, v \in \mathring{W}^r_{2;\alpha}(\Omega).$$

Оператор $(P + tE)^{1/2}$, $t \geq 1$, допускает продолжение до непрерывного оператора $\mathcal{P}(t) :\, H \to H_-$. Сужение в H оператора $\mathcal{P}^{-1}(t) :\, H_- \to H$ совпадает с оператором $(P + tE)^{-1/2}$.

Теорема 3.1.2. *Для любого замкнутого сектора* $S \subset \{z \in \mathbb{C} :\, |argz| > \varphi\} \cup \{0\}$ *с вершиной в нуле существует положительное число* c_S *такое, что при* $\lambda \in S,\, |\lambda| > c_s$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2}\, Y(\lambda)\mathcal{P}^{-1}(|\lambda|), \tag{3.1.11}$$

$$(A - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda|E)^{-1/2}\, Y(\lambda)\, (P + |\lambda|E)^{-1/2}\,, \tag{3.1.12}$$

где непрерывный оператор $Y(\lambda) :\, H \to H$ *такой, что*

$$\sup_{\lambda\in S,\, |\lambda|>c_s} \|Y(\lambda);\, \mathcal{L}(H)\| < +\infty. \tag{3.1.13}$$

Здесь и далее $\mathcal{L}(\mathbb{H})$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в нормированном пространстве $\mathbb{H}$. Пространство ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства $\mathbb{H}_1$ в нормированное пространство $\mathbb{H}_2$ обозначим через $\mathcal{L}(\mathbb{H}_1;\, \mathbb{H}_2)$.

Следствие 3.1.1. *В условиях теоремы 3.1.2 резольвента оператора* A *удовлетворяет оценке* $\left\|(A-\lambda E)^{-1};\, \mathcal{L}(H)\right\| \leq M|\lambda|^{-1}$.

Доказательство непосредственно следует из представления (3.1.12) и определения оператора P.

Теорема 3.1.3. *Оператор* A *имеет дискретный спектр и для функции* $N(t)$ *распределения собственных значений оператора* A *справедлива оценка* $N(t) \leq M\, t^{\omega}$ $(t \geq 1)$, *где* $\omega = \max\{\frac{n}{2r},\, \frac{n-1}{2r-2\alpha}\}$.

Далее изучим некоторые свойства сопряженных операторов для рассмотренного выше класса вырождающихся эллиптических операторов. Вводим формально сопряженный оператор $\mathcal{A}^+$ равенством

$$
\begin{aligned}
&< \mathcal{A}^+ u,\, v >= \overline{B[v,\, u]} = \\
&\qquad = \sum_{|k|,|l| \leq r} \int_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \overline{a_{lk}(x)} D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx \;\; u,\, v \in \mathring{W}^r_{2,\alpha}(\Omega).
\end{aligned}
$$

Теорема 3.1.4. *Пусть выполнены условия I) – II),* $\alpha < r$, $\alpha + 1/2 \notin \{1,\, \ldots,\, r\}$ *и пусть:*

III) при* $|k|,|l| \leq r: \, |k|+|l| \leq 2r-1$ *функции* $a_{kl}(x)$ *принадлежат пространству* $L_{q_{kl};-n/q'_{kl}}(\Omega)$, *где* $q_{kl} = \max\,\{p_{kl};\, p_{lk}\}$, $q'_{kl} = \min\,\{p_{kl};\, p_{lk}\}$ *и число* p_{kl} *такое же как в условии III).*

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $A^* = A'$, *где* A^* *– оператор, сопряженный к оператору* A A' *– сужение оператора* $\mathcal{A}^+$ *в пространстве* $L_2(\Omega)$, *то есть*

$$
D(A') = \left\{u \in H_+ :\, \mathcal{A}^+ \in L_2(\Omega)\right\},\, A'u = \mathcal{A}^+ u \;(u \in D(A')).
$$

2) Для любого замкнутого сектора $S \subset \{z \in \mathbb{C} \,:\, |arg\, z| > \varphi\} \cup \{0\}$ *с вершиной в нуле существует положительное число* c_S *такое, что при*

$\lambda \in S$, $|\lambda| > c_s$ *справедливы представления*

$$(\mathcal{A}^{+} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2}\, Y_1(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|),$$

$$(A^{*} - \lambda E)^{-1} = (P + |\lambda| E)^{-1/2}\, Y_1(\lambda)\, (P + |\lambda| E)^{-1/2}\,,$$

где нормы операторов $Y_1(\lambda) \,:\, L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ *равномерно ограничены сверху по* $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_s$.

3) Сектор S *содержит конечное число точек спектра оператора* A^{*}.

4) Функция $u \in \mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$ *принадлежит области определения* $D(A^{*})$ *оператора* A^{*} *тогда и только тогда, когда существует функция* $f \in L_2(\Omega)$ *такая, что* $\overline{B[v,\, u]} = (f, v)$ *для всех* $v \in \mathring{W}^{r}_{2,\alpha}(\Omega)$.

3.2 Некоторые предварительные рассмотрения. Доказательство теоремы 3.1.2

Отметим, что для удобства нашего изложения, мы сначала в этом параграфе докажем теорему 3.1.2 а затем в следующем параграфе приведём доказательство теоремы 3.1.1.

Далее заметим, что, не нарушая общности, мы можем предполагать $\varphi > \pi/2$ в условии (3.1.3) и $\gamma \in C^{r}(\overline{\Omega})$ в условии (3.1.4). Теперь в силу условия (3.1.3) неравенство (3.1.4) может выполняться также и в том случае, если

$$\gamma(x) = \exp\left(i\theta(x)\right),\ \theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2,\, |\arg \gamma(x)|\}(\operatorname{sign}\arg\gamma(x)).$$

В этом случае имеет место неравенство

$$c|\lambda| \le \operatorname{Re}\{-\lambda\gamma(x)\} \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \lambda \in S,\ c = c_S > 0. \tag{3.2.1}$$

Здесь и далее S – любой замкнутый сектор из $\{z \in \mathbb{C} :\ |\arg z| > \varphi\} \cup \{0\}$.

Остановимся на некоторых свойствах оператора P, связанного с формой (3.1.10). Согласно результатам работы [14] при $t \ge 1$, $|k| < |l| \le r$

выполняется неравенство

$$\left\|\rho^{\alpha+|k|-r}D^l u;\, H\right\| \le q(t)\left\|(P+tE)^{1/2}u;\, H\right\|, \qquad (3.2.2)$$

где $q(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Имеет место также неравенство

$$\left\|(P+tE)^{1/2}\gamma(P+tE)^{-1/2};\, \mathcal{L}(H)\right\| \le M\ (t\ge 1). \qquad (3.2.3)$$

Согласно результатам работ [14, 7] оператор $P=P^*\ge 0$ имеет дискретный спектр и для функции $N'(t)$ – число собственных значений оператора P не превосходящих t, с учетом их алгебраических кратностей,выполняется неравенство $N'(t)\le Mt^{\omega}$, $1<t<+\infty$, где число ω такое же как в теореме 3.1.3.

Ниже докажем, что

$$|B'[u,\, v]| \le M_1\|u;H_+\|\|v;\, H_+\|\ (u,\, v\in H_+), \qquad (3.2.4)$$

где M_1 – положительная постоянная.

Полуторалинейную форму (3.1.5) представим в виде

$$B'[u,\, v]=B^*[u,\, v]+B_*[u,\, v], \qquad (3.2.5)$$

где

$$B_*[u,\, v]=\sum_{\substack{|k|,|l|\le r,\\ |k|+|l|\le 2r-1}}\int_\Omega p_k(x)p_l(x)\gamma(x)a_{kl}(x)D_x^k u(x)\overline{D_x^l v(x)}dx,$$

$$B^*[u,\, v]=\sum_{|k|=|l|=r}\int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)\gamma(x)a_{kl}(x)D_x^k u(x)\overline{D_x^l v(x)}dx.$$

В силу ограниченности коэффициентов $a_{kl}(x)$ при $|k|=|l|=r$ с помощью неравенства Коши-Буняковского доказывается, что

$$|B^*[u,\, v]| \le M_2\|u;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\|\|v;\, L^r_{2;\alpha}(\Omega)\|. \qquad (3.2.6)$$

Форму $B_*[u,\, v]$ представим в виде

$$B_*[u,\, v]=B_*^{(1)}[u,\, v]+B_*^{(2)}[u,\, v], \qquad (3.2.7)$$

где
$$B_*^{(j)}[u,\,v]=\sum\nolimits^{(j)}\int\limits_{\Omega}p_k(x)p_l(x)\gamma(x)a_{kl}(x)D_x^k u(x)\overline{D_x^l v(x)}dx,$$
$\sum^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,l:|k|<r,\;|l|\le r$, а $\sum^{(2)}$ – по мультииндексам $k,l:|k|=r,\;|l|<r$.

Поступая также как в параграфе 1.3 доказываются неравенства
$$\left|B_*^{(1)}[u,\,v]\right|\le M_3\|v;\;V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|\left\{\tau\|u;\;L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|+\tau^{-\mu}\|u;\;L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|\right\},\tag{3.2.8}$$
$$\left|B_*^{(2)}[u,\,v]\right|\le M_4\|u;\;L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|\left\{\tau\|v;\;L_{2;\alpha}^r(\Omega)\|+\tau^{-\mu}\|v;\;L_{2;\alpha-r}(\Omega)\|\right\}\tag{3.2.9}$$
для любого числа $\tau>0$. Здесь μ – некоторое положительное число.

Теперь легко можно заметить, что в силу равенств (3.2.5), (3.2.7) из (3.2.6), (3.2.8), (3.2.9) следует, что
$$|B'[u,\,v]|\le M_4\|u;\;V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|\|v;\;V_{2;\alpha}^r(\Omega)\|$$
для всех $u,\,v\in V_{2,\,\alpha}^r(\Omega)$. Отсюда в силу равенства (3.1.1) следует неравенство (3.2.4).

Пусть P_0 – положительный самосопряженный оператор, ассоциированный со симметричной формой
$$P_0'[u,\,v]=\frac{1}{2}\left(B'[u,\,v]+\overline{B'[v,\,u]}\right),\;\;D[P_0']=H_+.$$
Тогда
$$\left\|(P_0+tE)^{1/2}u;\;H\right\|=\left(\operatorname{Re}B'[u,\,u]+t(u,\,u)\right)^{1/2},\;\;u\in H_+,\;\;t\ge 1.\tag{3.2.10}$$
В силу неравенств (3.1.8), (3.2.4) норма (3.2.10) эквивалентна равномерно по $t\ge 1$ с нормой
$$\left\|(P+tE)^{1/2}u;\;H\right\|=\left\{\|u;L_{2;\,\alpha}^r(\Omega)\|^2+t\|u;\;H\|^2\right\}^{1/2}.\tag{3.2.11}$$

Вводим вспомогательную полуторалинейную форму
$$B_\lambda'[u,\,v]=B'[u,\,v]-\lambda(\gamma u,\,v)\quad(u,\,v\in H_+).\tag{3.2.12}$$

В силу (3.1.8), (3.2.1), (3.2.4) при $0 \neq \lambda \in S$ для формы (3.2.12) выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} B'_\lambda[u,\, u] \geq c'_0 \left\{\|u;\, L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 + |\lambda|(u,\, u)\right\} \quad u \in H_+;\, c'_0 > 0, \tag{3.2.13}$$

$$|B'_\lambda[u,\, v]| \leq M_1 \left\{\|u; H_+\|\|v;\, H_+\| + |\lambda|\|u;\, H\|\|v;\, H\|\right\} \ (u,\, v \in H_+), \tag{3.2.14}$$

для всех $u,\, v \in H_+$. Следовательно форма (3.2.12) секториальна с вершиной в нуле, т.е.

$$|\arg B'_\lambda[u,\, u]| \leq \psi < \frac{\pi}{2} \quad \forall u \in H_+.$$

При этом число ψ не зависит от $0 \neq \lambda \in S$. Согласно [37, гл.VI, теорема 2.1] существует такой m-секториальный оператор $B(\lambda)$, что:

$$D(B(\lambda)) \subset D[B'_\lambda] \quad \text{и} \quad B'_\lambda[u,\, v] = (B(\lambda)u,\, v)$$
$$(u \in D(B(\lambda)),\, v \in D[B'_\lambda])\,; \tag{3.2.15}$$

если $u \in D[B'_\lambda]$, $w \in H$ и равенство $B'_\lambda[u,\, v] = (w,\, v)$ справедливо для всех v, принадлежащих ядру формы B'_λ, то $u \in D(B(\lambda))$ и $B(\lambda)u = w$.

В силу [37, гл.VI, теорема 3.2] имеет место следующее представление

$$B^{-1}(\lambda) = (P_0 + |\lambda|E)^{-1/2}\, X_0(\lambda)\, (P_0 + |\lambda|E)^{-1/2}\,,$$

где $\|X_0(\lambda);\, \mathcal{L}(H)\| \leq M,\, \lambda \in S,\, |\lambda| \geq 1$.

Выше мы показывали, что нормы (3.2.10), (3.2.11) эквивалентны равномерно по t. Поэтому

$$B^{-1}(\lambda) = (P + |\lambda|E)^{-1/2}\, X(\lambda)\, (P + |\lambda|E)^{-1/2}\,, \tag{3.2.16}$$

где $\|X(\lambda);\, \mathcal{L}(H)\| \leq M,\, \lambda \in S,\, |\lambda| \geq 1$.

Неравенства (3.2.13), (3.2.14) позволяют нам применить теорему Лакса-Мильграма (см., например, [56, теорема 2.0.1], [14, утверждение 1]). В силу этой теоремы форма (3.2.12) порождает линейный непрерывный оператор $\mathcal{B}(\lambda):\, H_+ \to H_-$ такой, что

$$< \mathcal{B}(\lambda)u,\, v > = B'_\lambda[u,\, v] \quad (u,\, v \in H_+). \tag{3.2.17}$$

Отсюда и из (3.2.15) следует, что оператор $B(\lambda)$ совпадает с сужением в H оператора $\mathcal{B}(\lambda)$. Поэтому по непрерывности из (3.2.16) получаем представление

$$\mathcal{B}^{-1}(\lambda) = (P + |\lambda| E)^{-1/2} X(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| \geq 1). \tag{3.2.18}$$

Оператор $\mathcal{B}(\lambda)$ действует из H_+ в H_-. Поэтому подставляя в равенстве (3.2.17) $u = \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f$ получим

$$B'_\lambda[u,\, v] = B'_\lambda[\mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, v] = < \mathcal{B}(\lambda)\mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, v > = < f,\, v >$$
$$\forall f \in H_-,\, v \in H_+,\, 0 \neq \lambda \in S.$$

Поэтому применяя (3.1.5), (3.2.12) для $f \in H_-,\, v \in H_+,\, 0 \neq \lambda \in S$ имеем

$$< f,\, v > = \sum_{|k|,|l| \leq r} \left(\gamma p_k a_{kl} D^k \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, p_l D^l v \right) - \lambda \left(\gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, v \right). \tag{3.2.19}$$

Выше мы ввели оператор $\mathcal{A}:\ H_+ \to H_-$, который действует по формуле $< \mathcal{A}u,\, v > = B[u,\, v]$ $v \in H_+$. Поэтому

$$\langle (\mathcal{A} - \lambda E) u,\, v \rangle = B[u,\, v] - \lambda (u,\, v).$$

Отсюда при $u = \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f$ следует

$$\left\langle (\mathcal{A} - \lambda E) \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, v \right\rangle = \sum_{|k|,|l| \leq r} \left(p_k a_{kl} D^k \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, p_l D^l v \right) - \lambda \left(\gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, v \right).$$

Отсюда, вычитая соответствующие части равенства (3.2.19), находим

$$\left\langle (\mathcal{A} - \lambda E) \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, v \right\rangle - < f,\, v > =$$
$$= \sum_{|k|,|l| \leq r} \left(p_k a_{kl} {\sum}' C_{k,\,k'} (D^{k'} \gamma) D^{k-k'} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f,\, p_l D^l v \right) \tag{3.2.20}$$

для всех $f \in H_-,\, v \in H_+,\, \lambda \in S,\, |\lambda| \geq 1$. Здесь $C_{k,\,k'}$ - некоторые константы и символом ${\sum}'$ обозначено суммирование по всем мультииндексам $k,\, l,\, k'$ таким, что $|k|, |l| \leq r,\, |k'| \neq 0$.

Используя представление (3.2.18) и неравенство (3.2.2) имеем

$$\left\| p_k D^{k-k'} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f;\, H \right\| \le q(\lambda) \left\| (P + |\lambda| E)^{1/2} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f;\, H \right\| \le$$
$$\le c_1 q(\lambda) \left\| \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) f;\, H \right\|, \quad f \in H_-, \quad (3.2.21)$$

для всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \ge 1$, $|k| \le r$, $|k'| \ne 0$; положительная функция $q(t)$, $t \ge 1$ такая, что $q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Для дальнейшего хода доказательства нам удобно ввести пространство H_ν, $\nu \ge 1$, с нормой

$$\|u;\, H_\nu\| = \left\{ \|u; L^r_{2;\,\alpha}(\Omega)\|^2 + \nu \|u;\, H\|^2 \right\}^{1/2}. \qquad (3.2.22)$$

Не вводя новое обозначение, далее будем считать, что H_ν – замыкание класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме (3.2.22). Обозначим через $H_{-\nu}$, $\nu \ge 1$ пополнение пространства H по норме

$$\|f;\, H_{-\nu}\| = \sup |(f,\, w)|,$$

где верхняя грань берется по всем $w \in H_+$ таким, что $\|w;\, H_\nu\| = 1$. Заметим, что при $\nu_1, \nu_2 \ge 1$ множества $H_{\pm\nu_1}$ $H_{\pm\nu_2}$ совпадают, а как нормированные пространства отличаются друг от друга только эквивалентными нормами, и при $\nu = 1$ имеем $H_\nu = H_+$, $H_{-\nu} = H_-$.

Так как $\mathcal{P}(|\lambda|)$ – продолжение оператора $(P + |\lambda| E)^{1/2}$ по непрерывности, то из равенств (3.2.11), (3.2.22) следует, что

$$\left\| \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|) f;\, H \right\| \le c_2 \|f;\, H_{-|\lambda|}\|, \;\; f \in H_-,\, |\lambda| \ge 1.$$

Учитывая это из (3.2.21) имеем

$$\left\| p_k D^{k-k'} \mathcal{B}^{-1}(\lambda) f;\, H \right\| \le c_3\, q(\lambda) \|f;\, H_{-|\lambda|}\|, \;\; f \in H_-,$$

для всех $\lambda \in S$, $|\lambda| \ge 1$, $|k| \le r$, $|k'| \ne 0$. Используя это неравенство легко доказывается, что правая часть равенства (3.2.20) по модулю не превосходит $c_4 q(|\lambda|) \|f;\, H_{-\nu}\| \cdot \|v;\, H_\nu\|$ для всех $1 \le \nu \le 4|\lambda|$, $\lambda \in S$ и всех

$f \in H_-$, $v \in H_+$. Поэтому оператор $G'(\nu, \lambda)$ $(1 \le \nu \le 4|\lambda|)$, определенный равенством

$$G'(\nu, \lambda) = E - (\mathcal{A} - \lambda E)\gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda),$$

действует из $H_{-\nu}$ в $H_{-\nu}$ и для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ его норма меньше единицы.

Проводя аналогичные рассуждения для оператора $\mathcal{A}^+ - \overline{\lambda} E$, где оператор $\mathcal{A}^+$ определяется равенствами

$$\langle \mathcal{A}^+ u,\, v\rangle = \overline{B[v,\, u]} = \sum_{|k|,|l| \le r} \int\limits_{\Omega} p_k(x) p_l(x) \overline{a_{lk}(x)} D_x^k u(x) \overline{D_x^l v(x)} dx, \quad u,\, v \in H_+,$$

получаем $\ker(\mathcal{A} - \lambda E) = 0, \lambda \in S,\ |\lambda| > c'_S$. Таким образом, для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ оператор $(\mathcal{A} - \lambda E)$ непрерывно обратим, и при $1 \le \nu \le 4|\lambda|$ справедливо представление

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} = \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda)(E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)), \tag{3.2.23}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{G}(\nu, \lambda) : H_{-\nu} \to H_{-\nu}$ задается следующим образом

$$E + \mathcal{G}(\nu, \lambda) = (E + \mathcal{G}'(\nu, \lambda))^{-1} = E + \mathcal{G}'(\nu, \lambda) + (\mathcal{G}'(\nu, \lambda))^2 + \dots .$$

Далее, используя (3.2.3), (3.2.18), (3.2.23), имеем

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} &= \gamma \mathcal{B}^{-1}(\lambda)(E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) = \\ &= (P + |\lambda| E)^{-1/2} X(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|)(E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) = \\ &= (P + |\lambda| E)^{-1/2} X_1(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|)(E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) \mathcal{P}(|\lambda|) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|),\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

где оператор $X_1(\lambda);\ H \to H$ такой, что

$$\|X_1(\lambda);\, \mathcal{L}(H)\| \le M \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| > c'_S).$$

Вводя обозначение

$$Y(\lambda) = X_1(\lambda) \mathcal{P}^{-1}(|\lambda|)(E + \mathcal{G}(\nu, \lambda)) \mathcal{P}(|\lambda|) \tag{3.2.25}$$

из (3.2.24) получим представление (3.1.11) теоремы 3.1.2.

Далее докажем неравенство (3.1.13) теоремы 3.1.2. При $\lambda \in S$, $|\lambda| > c'_S$, $\nu = |\lambda|$ имеем

$$\left\|\mathcal{P}^{-1}(|\lambda|)\mathcal{G}(\nu,\lambda)\mathcal{P}(|\lambda|)u;\, H\right\| \leq M_1 \left\|\mathcal{G}(\nu,\lambda)\mathcal{P}(|\lambda|)u;\, H_{-|\lambda|}\right\| \leq \\ \leq M_2 \left\|\mathcal{P}(|\lambda|)u;\, H_{-|\lambda|}\right\| \leq M_3\|u;\, H\|,\ u \in H.$$

Отсюда и из (3.2.25) следует (3.1.13).

Напомним, что представление (3.1.11) теоремы 3.1.2 доказано выше. Для завершения доказательства этой теоремы заметим, что в силу равенства (3.3.1) из (3.1.11) следует представление (3.1.12).

3.3 Доказательство теоремы 3.1.1

Пусть A – сужение оператора $\mathcal{A}$ в H (см. (3.1.9)). Тогда из определения оператора $\mathcal{A}$ следует, что $(Au,\, v) = B[u,\, v]$ для всех $v \in H_+$ и всех $u \in D(A) \subset H$, т.е. имеет место утверждение п. i) теоремы 3.1.1.

Равенство (3.2.23) означает, что при $\lambda \in S$, $|\lambda| > c_S$ оператор $A - \lambda E$ имеет нулевое ядро и в силу (3.1.9), (3.1.11) имеет место равенство

$$(A - \lambda E)^{-1}u = (\mathcal{A} - \lambda E)^{-1}u \quad (\lambda \in S,\, |\lambda| > c_S) \tag{3.3.1}$$

для всех $u \in H$.

Далее докажем единственность оператора A с приведенными выше свойствами. Пусть A' – некоторый замкнутый оператор в H такой, что

$$D(A') \subset H_+,\ (A'u,\, v) = B[u,\, v]$$

для всех $v \in H_+$, $u \in D(A')$. Так как A – сужение оператора $\mathcal{A}$, то ясно $D(A') \subset \{u \in H_+ : \mathcal{A}u \in H\} = D(A)$ и оператор A является расширением оператора A'. Из определения оператора A и при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ существует непрерывный оператор $(A' - \lambda_0 E)^{-1}$. Поэтому

$$(A - \lambda_0 E)(A' - \lambda_0 E)^{-1}u = u \quad \forall u \in H. \tag{3.3.2}$$

Так как $D(A') \subset H_+$ и вложение H_+ в H компактно, то оператор A' имеет дискретный спектр. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что число λ_0 в равенстве (3.3.2) такое, что $\lambda_0 \in S$, $|\lambda_0| > c_S$. Следовательно, $(A' - \lambda_0 E)^{-1} = (A - \lambda E)^{-1}$ и $A' = A$. Единственность оператора A доказана, что завершает доказательству теоремы 3.1.1.

3.4 Доказательство теоремы 3.1.3

Так как

$$N'(t) \leq Mt^{\omega},\ 1 < t < +\infty,\ \omega = \max\left\{\frac{n}{2r}, \frac{n-1}{2r-2\alpha}\right\},$$

то порядок резольвенты оператора P не превосходит числа ω. Отсюда и из представления (3.1.12) следует, что порядок резольвенты оператора A также не превосходит ω.

Пусть целое число m такое, что $m > \omega$. Возведем обе части равенства (3.1.12) в степень m

$$(A - \lambda E)^{-m} = \left((P + |\lambda| E)^{-1/2}\right)^m Y^m(\lambda) \left((P + |\lambda| E)^{-1/2}\right)^m.$$

Отсюда, учитывая ограниченность оператора $Y(\lambda)$, для достаточно больших $t \geq t_0$ имеем

$$\left\|(A + tE)^{-m}\right\|_1 \leq M \left\|(P + tE)^{-1/2}\right\|_{2m}^{2m} \leq M \int\limits_0^{+\infty} \frac{dN'(\tau)}{(t+\tau)^m}. \qquad (3.4.1)$$

Здесь $\|\cdot\|_1$ – ядерная норма оператора и $\|\cdot\|_{2m}$ – σ_{2m}-норма оператора (см. [22]). Из теоремы 3.1.2 следует, что собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ оператора A лежат в секторе $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \varphi\}$. Поэтому существует положительные числа c_0, τ_0 такие, что

$$c_0(\tau + |\lambda_j|) \leq |\tau + \lambda_j|,\ j = 1, 2, \ldots, \tau > \tau_0.$$

Сумма модулей собственных значений ядерного оператора не превосходит его ядерной нормы. В силу этого из (3.4.1) получим

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |(t + |\lambda_j|)|^{-m} \le M \int_0^{+\infty} \frac{dN'(\tau)}{(t+\tau)^m} \le M_1 \int_0^{+\infty} \frac{d(\tau^\omega)}{(t+\tau)^m}.$$

Далее имеем

$$N(t) = \int_0^t dN(\tau) \le 2^m t^m \int_0^t \frac{dN(\tau)}{(\tau + t)^m} \le$$

$$\le M_2 t^m \sum_{j=1}^{+\infty} |(t+|\lambda_j|)|^{-m} \le M_3 t^m \int_0^{+\infty} \frac{d(\tau^\omega)}{(t+\tau)^m} \le M_4 t^\omega \quad (t \ge 2).$$

Теорема 3.1.3 доказана.

3.5 Доказательство теоремы 3.1.4

Сначала докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 3.5.1. *В случае ограниченной области Ω при $p,\, q \ge 1$ и всех вещественных $\beta_1,\, \beta_2$ справедливы следующие равенства:*

$$L_{max\{p;\,q\}}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega) \cap L_q(\Omega), \tag{3.5.1}$$

$$L_{p;\,\min\{\beta_1;\,\beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p;\,\beta_1}(\Omega) \cap L_{p;\,\beta_2}(\Omega), \tag{3.5.2}$$

$$L_{\max\{p,\,q\};\,\min\{\beta_1;\,\beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p;\,\beta_1}(\Omega) \cap L_{q;\,\beta_2}(\Omega). \tag{3.5.3}$$

Доказательство. Так как в нашем случае Ω – ограниченная область, то используя неравенство Гельдера для интегралов

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \le \left\{ \int_\Omega |u(x)|^{p_0}\, dx \right\}^{1/p_0} \left\{ \int_\Omega |v(x)|^{q_0}\, dx \right\}^{1/q_0} \qquad \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1.$$

при $u(x) \equiv 1$, $v(x) = |f(x)|^{p_1}$, $1 \le p_1 < +\infty$ имеем

$$\int_\Omega |f(x)|^{p_1}\, dx \le |\Omega|^{1/p_0} \left\{ \int_\Omega |f(x)|^{p_1 q_0}\, dx \right\}^{1/q_0}.$$

Возведем это неравенство в степень $1/p_1$ и вводя обозначение $p_2 = p_1 q_0$ приходим к неравенству

$$\left\{\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p_1}\, dx\right\}^{1/p_1} \leq |\Omega|^{1/p_0 p_1} \left\{\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p_2}\, dx\right\}^{1/p_2}.$$

Так как $q_0 \geq 1$, то $p_1 \leq p_2$. Таким образом, мы доказали, что

$$\|f;\, L_{p_1}(\Omega)\| \leq \mathrm{const} \cdot \|f;\, L_{p_2}(\Omega)\| \tag{3.5.4}$$

при $p_1 \leq p_2$, то есть $L_{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L_{p_1}(\Omega)$. Поэтому в условиях нашей леммы имеют место вложения $L_{max\{p;\, q\}}(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$, $L_{max\{p;\, q\}}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ и следовательно справедливо вложение (3.5.1).

Пусть δ_1 – некоторое вещественное число. Из неравенство (3.5.4) при $f(x) = \rho^{\delta_1}(x) u(x)$ имеем

$$\left\|\rho^{\delta_1} u;\, L_{p_1}(\Omega)\right\| \leq \mathrm{const} \cdot \left\|\rho^{\delta_1} u;\, L_{p_2}(\Omega)\right\|. \tag{3.5.5}$$

Так как $\rho^{\delta_1}(x) \leq \rho^{\delta_2}(x) \forall x \in \Omega$ при $\delta_1 \geq \delta_2$, то из (3.5.4) следует

$$\left\|\rho^{\delta_1} u;\, L_{p_1}(\Omega)\right\| \leq \mathrm{const} \cdot \left\|\rho^{\delta_2} u;\, L_{p_2}(\Omega)\right\|.$$

Следовательно $L_{p_2;\, \delta_2}(\Omega) \hookrightarrow L_{p_2;\, \delta_1}(\Omega)$ при $\delta_1 \geq \delta_2$. Отсюда в условиях нашей теоремы следуют вложения $L_{p;\, \min\{\beta_1;\, \beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p;\, \beta_1}(\Omega)$, $L_{p;\, \min\{\beta_1;\, \beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p;\, \beta_2}(\Omega)$ и следовательно справедливо равенство (3.5.2).

Теперь используя (3.5.1) и (3.5.2) докажем (3.5.3). Имеем

$$L_{\max\{p,\, q\};\, \min\{\beta_1;\, \beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p;\, \min\{\beta_1;\, \beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p;\, \beta_1}(\Omega),$$

$$L_{\max\{p,\, q\};\, \min\{\beta_1;\, \beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{q;\, \min\{\beta_1;\, \beta_2\}}(\Omega) \hookrightarrow L_{q;\, \beta_2}(\Omega).$$

Из этих вложений следует вложение (3.5.3).

Лемма 3.5.1 доказана.

Теперь переходим к доказательству теоремы 3.1.4. С помощью леммы 3.5.1 легко проверяется, что в условиях теоремы 3.1.4 для полуторалинейных форм $B[u,\, v]$ и $\overline{B[v,\, u]}$ выполняются условия теорем 3.1.1 и 3.1.2.

Поэтому утверждения этих теорем также верны для операторов $\mathcal{A}$, A и $\mathcal{A}^+$, A^*. На основе этих утверждения легко проверяется справедливость теоремы 3.1.4.

Заключение

Таким образом, в диссертационной работе найдены достаточные условия существования и единственности решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов высшего порядка в ограниченной области n-мерного евклидова пространства со степенным вырождением на границе области, в случае, когда полуторалинейные интегро-дифференциальные формы, порожденные исследуемыми операторами, могут не удовлетворять условию коэрцитивности. Младшие коэффициенты исследуемых эллиптических операторов принадлежат некоторым весовым L_p-пространствам, и следовательно могут иметь интегрируемые особенности во внутренних точках области. Выделен случай, когда неоднородные граничные условия вариационной задачи Дирихле задаются в явном виде и их количество зависит от степени вырождения старших коэффициентов исследуемого оператора и в этом случае доказано неравенство, в котором норма решения вариационной задачи Дирихле сверху оценивается через нормы граничных функций и правой части уравнения.

Разработанная в диссертационной работе техника может быть использована при исследовании спектральных свойств вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными полуторалинейными интегро-дифференциальными формами, а также при исследовании разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с такими операторами.

Литература

[1] Байдельдинов Б.Л. Об одном аналоге первой краевой задачи для эллиптического уравнения порядка $2m$ со степенным вырождением на границе/ Б.Л. Байдельдинов // Доклады АН СССР. – 1983.– Т. 270. - №5. – С.1038 – 1042.

[2] Байдельдинов Б.Л. Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм / Б.Л. Байдельдинов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1984. – Т.170. – С. 3 – 11.

[3] Бесов О. В. О плотности финитных функций в весовом пространстве С. Л. Соболева / О. В. Бесов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1983. – Т. 161. – С. 29-47.

[4] Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

[5] Бесов О.В. О некоторых свойствах весовых классов / О.В. Бесов, Я. Кадлец, А. Куфнер // ДАН СССР.-1966.– Т. 171.- №3.– С. 514-516.

[6] Бесов О. В. Исследование по теории пространств дифференцируемых функций многих переменных / О.В. Бесов, Л.Д. Кудрявцев, П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1988. – Т.182. – С.68 – 127.

[7] Бойматов К.Х. Двусторонные оценки собственных значений задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 16–28.

[8] Бойматов К.Х. О плотности финитных функций в весовых пространствах / К.Х. Бойматов // Доклады АН СССР. – 1989. – Т.307,– №6. – С.1296 – 1299.

[9] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка / К.Х. Бойматов // Доклады АН СССР. – 1992. – Т.327. – №1. – С. 9-15.

[10] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой / К.Х. Бойматов // Доклады АН России, – 1993. – Т. 330. – №3. – С.285 – 290.

[11] Бойматов К.Х. Матричные дифференциальные операторы, порожденные некоэрцитивными формами / К.Х. Бойматов// Доклады АН России. – 1994. – Т. 339. – №1. – С.5 – 10.

[12] Бойматов К.Х. Обобщенная задача Дирихле для систем вырожденно-эллиптических уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами / К.Х. Бойматов// Международная конференция "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ". Сборник тезисов. Москва. – 1995. – С.54 – 55.

[13] Бойматов К.Х. Граничные задачи для некоэрцитивных форм / К.Х. Бойматов// Доклады АН РТ. – 1998. – Т. XLI. – №10. – С.10-16.

[14] Бойматов К.Х. О базисности по Абелью корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами / К.Х. Бойматов// Сибирский математический журнал. – 2006. – Т. 47. – №1. – С. 46-57.

[15] Бойматов К.Х. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой / К.Х. Бойматов, С.А. Исхоков //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. – 1997. – Т.214. – С.107-134.

[16] Бойматов К.Х. О собственных значениях и собственных функциях матричных дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / К.Х. Бойматов, С.А. Исхоков// Вестник Хорогского Университета. Естественные науки. – 2000. – №2. – С.13 – 24.

[17] Бриш Н.И. Задача Дирихле для эллиптических уравнений с неограниченными младшими коэффициентами / Н.И.Бриш, И.Н.Яшкина // Дифф. уравнения. – 1970.– Т.6.– №9.– С. 1631-1642.

[18] Вашарин А.А. Граничные свойства функций касса $W^1_{2,\alpha}$ и их приложение к решению одной краевой задачи математической физики / А.А. Вашарин// Известия АН СССР. Серия математики.– 1959.– Т.23.– №2.– С. 421-454.

[19] Вашарин А.А. Некоторые краевые задачи для эллиптических уравнений с сильным вырождением на границе / А.А. Вашарин, П.И. Лизоркин // Докл. АН СССР. – 1961.– Т. 137. – №5. – С. 1015-1018.

[20] Владимиров В.С. Уравнения математической физики/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.

[21] Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи / В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко// Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математический анализ. – 1985. – Т. 23. – С. 125-218.

[22] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве/ И.Ц Гохберг, М.Г. Крейн. – М.:Наука, 1965. – 448 с.

[23] Егоров Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными/ Ю.В. Егоров. – М.: МГУ, 1985.

[24] Иосида К. Функциональный анализ / К.Иосида. – М.: Мир, 1967.

[25] Исхоков С.А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А. Исхоков // Доклады Академии наук (Россия). –1995. – Т. 342. – №1. – С. 20-22.

[26] Исхоков С.А. О гладкости решения вырождающихся дифференциальных уравнений / С.А. Исхоков // Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т. 31. – №4. – С. 641-653.

[27] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными билинейными формами / С.А. Исхоков // Вторая международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д.Кудрявцева. Тезисы докладов. –2003. – С. 172 - 174.

[28] Исхоков С.А. Вариационная задача Дирихле для эллиптических операторов с нестепенным вырождением, порожденных некоэрцитивными формами / С.А. Исхоков // Доклады Академии наук (Россия),– 2003. – Т. 392. – №5. – С. 606-609

[29] Исхоков С.А. Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением / С.А. Исхоков // Математические заметки. – 2010. – Т. 87. – №2. – С. 201 – 216.

[30] Исхоков С.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными

билинейными формами / С.А. Исхоков, А.Г. Каримов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2004. – Т. 47. – №4. – С. 68 – 74.

[31] Исхоков С.А. О гладкости решения вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов, ассоциированных с некоэрцитивными билинейными формами / С.А. Исхоков, А.Г. Каримов // Математические заметки ЯГУ. – 2005. – Т. 12. – №1. – С. 74 – 86.

[32] Исхоков С.А. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов/ С.А. Исхоков, А.Я. Кужмуратов // Доклады Академии наук (Россия). – 2005. – Т. 403. – №2. – С. 165-168.

[33] Исхоков С.А. Об одной вариационной задаче для эллиптического оператора, вырождающегося на границе ограниченной области / С.А. Исхоков, А.Я. Кужмуратов // В сб.: Тезисы докладов IV Международной конференции по мат. моделированию. Якутск, 27-31.07.2004, С. 19-20.

[34] Исхоков С.А. Априорная оценка решений однородной задачи Дирихле для общих эллиптических уравнений с вырождением / С.А. Исхоков, А.Я. Кужмуратов // Материалы международной конференции "Актуальные вопросы математического анализа, дифференциальных уравнений и информатики", посвященной 70-летию академика АН РТ Усманова З.Д., Душанбе 24-25 августа 2007 г., С. 43-44.

[35] Исхоков С.А. О гладкости обобщенного решения вариационной задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения в дивергентной форме/ С.А. Исхоков, А.Ё. Куджмуродов // Доклады АН Республики Таджикистан. – 2008. – Т. 51, – №12. – С.802-809.

[36] Исхоков С.А. О разрешимости вариационной задачи Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области / С.А. Исхоков, О.А.

Нематуллоев // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. – 2013. – Т. 56. – №5. – С. 352 – 358.

[37] Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[38] Кондрашов В. И. Об одной оценке для семейств функций, удовлетворяющих некоторым интегральным неравенствам / В.И. Кондрашов // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18. – №4-5. – С. 253-254.

[39] Кудрявцев Л.Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений / Л.Д. Кудрявцев // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1959. – Т. 55. – С. 1-182.

[40] Кудрявцев Л.Д. Теоремы вложения для классов функций, определенных на неограниченных областях / Л.Д. Кудрявцев // Доклады АН СССР. –1963. – Т. 153. – №2. – С. 530-532.

[41] Кудрявцев Л.Д. О вариационном методе отыскания обобщенных решений дифференциальных уравнений в функциональных пространствах со степенным весом / Л.Д. Кудрявцев // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19. – №10. – С. 1723-1740.

[42] Кудрявцев Л.Д. О существование и единственности решений вариационных задач / Л.Д. Кудрявцев // Доклады АН СССР. – 1988. – Т. 298. – №5. – С. 1055-1060.

[43] Кудрявцев Л.Д. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения / Л.Д. Кудрявцев, С.М. Никольский // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. Фундаментальные направления.– 1988. – Т. 26. – С. 5-157.

[44] Левендорский С.З. Вырождающиеся эллиптические уравнения и их краевые задачи / С.З. Левендорский, Б.П. Панеях // Итоги науки

и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1990.– Т. 63. – С. 131-200.

[45] Лизоркин П.И. К тории вырождающихся эллиптических уравнений / П.И. Лизоркин // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1985. – Т.172. – С. 235 – 271.

[46] Лизоркин П.И. О гладкости решения первой краевой задачи для одного модельного вырождающегося эллиптического оператора второго порядка / П.И. Лизоркин, Н.В. Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т.22. – №11. – С.1945 – 1951.

[47] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод / П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1981. – Т.157. – С.90 – 118.

[48] Лизоркин П.И., Никольский С.М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью / П.И. Лизоркин, С.М. Никольский // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1983. – Т.161. – С.157 – 183.

[49] Мирошин Н.В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора / Н.В. Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т.24. – №3. – С.455 – 464.

[50] Мирошин Н.В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. некоторые спектральные свойства / Н.В. Мирошин // Дифференциальные уравнения. – 1976. – Т.12. – №6. – С.1099 – 1111.

[51] Мирошин Н.В. Внешняя задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора / Н.В. Мирошин // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1979. – Т.150. – С. 198 – 211.

[52] Мирошин Н.В. Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора / Н.В. Мирошин // Изв. Вузов. Математика. – 1988. – №8. – С.47 – 55.

[53] Мирошин Н.В. Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением / Н.В. Мирошин // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. – 1992. – Т.194. – С. 179 – 195.

[54] Никольский С.М. О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных / С.М. Никольский // Успехи мат. наук. – 1961. – Т.16. – №5. – С.63-114.

[55] Никольский С.М. Приближений функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский, 2-е изд. – М.: Наука, 1977. –455 с.

[56] Никольский С.М. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений/ С.М. Никольский, П.И. Лизоркин, Н.В. Мирошин // Известия Вузов. Математика. – 1988. – №8. – С. 4 – 30.

[57] Олейник О.А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О.А. Олейник, Е.В. Радкевич // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Математические анализ. – 1971. – Т. – С. 7-252.

[58] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 4, часть 1 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – 336с.

[59] Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. – 292с.

[60] Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе/ С.А. Терсенов. – Новосибирск, 1973. – 144с.

[61] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М.: Мир, 1980. – 664с.

[62] Трибель Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель – М.: Мир, 1986. – 448 с.

[63] Успенский С.В. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям/ С.В. Успенский, Г.В. Демиденко, В.Г. Перепелкин. – Новосибирск, Наука. – 1984. – 224с.

[64] Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for a linear elliptic equation with unbounded coefficients / J.H. Chabrowski // Boll. Unione mat. ital. – 1986. – Vol. 85. – No. 1. – P. 71-79.

[65] Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for a degenerate elliptic equation / J.H. Chabrowski // Comm. math. Univ. carol. – 1987. – Vol. 28. – No. 1. – P. 141-155.

[66] Chabrowski, J.H. On the Dirichlet problem for degenerate elliptic equations / J.H. Chabrowski // Publ. Res. Inst. Math. Sci. – 1987. – Vol. 23. – No. 1. –P. 1-16.

[67] Cavalheiro A.C. Weighted Sobolev Spaces and Degenerate Elliptic Equations / A.C. Cavalheiro // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.). – 2008. – V. 26. – No. 1-2. – P. 117-132.

[68] Chen H. Lower bounds of Dirichlet eigenvalues for some degenerate elliptic operators / H. Chen, P. Luo // Calculus of Variations and Partial Differential Equations. – 2015. – vol. 53. – no. 3-4. – 23 p.

[69] Chen H. Dirichlet problem for semilinear edge-degenerate elliptic equations with singular potential term / H. Chen, X. Liu // Journal of Differential Equations.– 2012. – vol. 252. – P. 4289-4314.

[70] Iskhokov S.A. Existence and uniqueness of solutions for variational Dirichlet problems of a nonlinear degenerate differential equation./ S.A.

Iskhokov // Математические заметки ЯГУ. – 2008. – Т.15. – Вып. 1. – С. 21 – 38.

[71] Kim D. Elliptic equations with nonzero boundary conditions in weighted Sobolev spaces/ D. Kim // Jour. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 337. –P. 1465 - 1479.

[72] Levendorskii S. Degenerate Elliptic Equations. Mathematics and its applications / S. Levendorskii (Kluwer Academic Publisher). – 1994. – V. 258. – 442 p.

[73] Lototsky S.V. Sobolev spaces with weights in domains and boundary value problems for degenerate elliptic equations / S. V. Lototsky // Methods Appl. Anal. – 2000. – Vol. 7. – No. 1. – P. 195-204.

[74] Popivanov P.R. The degenerate oblique derivative problem for elliptic and parabolic equations / P.R. Popivanov, D.K. Palagachev Mathematical Research, Vol. 93, Akademie Verlag (Wiley-VCH), Berlin (1997). – 153 p.

[75] Stredulinsky, E.W. Weighted inequalities and degenerate elliptic partial differential equations / E.W. Stredulinsky // Lect. Notes Math. vol. 1074. – 1984. – 142 p.

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК

[76] Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами / С.А. Исхоков, М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Доклады Российской Академии Наук. – 2015. – Т. 462. – №1. – С. 7 - 10.
перевод в:
Konstantinova T.P. Variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators generated by noncoercive forms / S.A. Iskhokov, M.G. Gadoev, T.P. Konstantinova // Doklady Mathematics. – 2015. – Vol. 91. – No. 3. – P. 255-258 **(Web of Science, Scopus)**.

[77] Константинова Т.П. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2014. – Т. 21. – №2. – С. 8 – 21.

[78] Константинова Т.П. Однородная вариационная задача Дирихле связанная с некоэрцитивной формой, младшие коэффициенты которой принадлежат лебеговым пространствам / Т.П. Константинова // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Серия физ.мат.хим. геол. и тех. науки. – 2015. – №3(160). – С. 15 - 23.

[79] Константинова Т.П. Оценка резольвенты и спектральные свойства одного класса вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области // Математические заметки СВФУ. – 2019. – Т. 26. – №4. – С. 37 – 50. **(Scopus)**.

[80] Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле с неоднородными граничными условиями для вырождающихся эллиптических операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Математические заметки СВФУ. – 2022. – Т. 29. – №2. – С. 3 – 18 **(Scopus)**.

[81] Константинова Т.П. О сопряженных операторах для одного класса вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами / Т.П. Константинова // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. – 2024. – Т. 67. – №7-8. – С. 358 - 363.

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным

[82] Константинова Т.П. О разрешимости вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной формой / С.А. Исхоков, Т.П.

Константинова // Четвертая международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвященная 90-летию члена-корреспондента РАН, академика Европейской Академии наук, профессора Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25 – 29 марта 2013 г.). Тезисы докладов. С. 199 - 200.

[83] Константинова Т.П. Вариационная задача Дирихле для одного класса вырождающихся дифференциальных операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Международная конференция "Наука и инновационные разработки - северу" (г. Мирный, 12-14 марта 2014 г.) С. 261-262.

[84] Константинова Т.П. Об оценки резольвенты одного класса эллиптических операторов с вырождением / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Материалы международной научной конференции "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел", посвященная 75-летию профессора Т.С. Сабирова (г. Душанбе, 29- 30 октября 2015 г.) С. 84 – 87.

[85] Константинова Т.П. О суммируемости в смысле Абеля-Лидского системы корневых вектор-функций одного класса эллиптических операторов с вырождением / И.А. Якушев, Т.П. Константинова // Материалы международной научной конференции "Современные проблемы математики и е́е приложений", посвящ́енной 70-летию со дня рождения академика Академии наук Республики Таджикистан, доктора физико-математических наук, профессора Илолова Мамадшо (г. Душанбе, 14-15 марта 2018 г.) С. 153 – 155.

[86] Константинова Т.П. О задаче Дирихле с неоднородными граничными условиями для одного класса эллиптических операторов / М.Г. Гадоев, Т.П. Константинова // Материалы международной научной

конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций", посвящённая 70-летию академика НАН Таджикистана, доктора физико-математических наук, профессора Шабозова Мерганда Шабозовича (г. Душанбе, 24-25 июня 2022 г.) – С. 214-218.