

На правах рукописи

Мадимарова Фавзия Мадимаровна

**РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ  
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ  
«УГЛАМИ» В ПРОСТРАНСТВЕ  $L_2$**

1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Душанбе — 2026

Работа выполнена на кафедре функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

**Научные руководители:** **Шабозов Мирганд Шабозович** – доктор физико-математических наук, академик НАН Таджикистана, профессор кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета

**Официальные оппоненты:** **Волков Юрий Степанович** – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт вычислительной и математической геофизики» Сибирского отделения Российской академии наук;

**Каримов Олимджон Худойбердиевич** – кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель директора по науке и образованию Института математики им. А. Джураева НАН Таджикистана

**Ведущая организация:** ГОУ «Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова

Защита состоится *10 июня 2026 г. в 14:00* часов на заседании Диссертационного совета 73.2.012.03 на базе Таджикского национального университета, расположенного по адресу: 734027, г. Душанбе, ул. Буни-Хисорак, корпус 17, аудитория 216.

С диссертацией можно ознакомиться в Центральной научной библиотеке Таджикского национального университета или на сайте <http://www.tnu.tj>.

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» «\_\_\_\_\_» 2026 г.

**Ученый секретарь**  
**Диссертационного совета 73.2.012.03,**  
**доктор физико-математических наук**

**Р.Н. Одинаев**

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы исследования.** К настоящему времени в теории приближения глубоко и тщательно исследованы задачи, связанные с аппроксимацией функций одной переменной. По этой тематике, берущей своё начало от классических работ К.Ф.Вейерштрасса и П.Л.Чебышева, написаны десятки монографий. Особую роль сыграли работы А.Н.Колмогорова и С.М.Никольского, связанные с решением экстремальных задач о нахождении точной верхней грани погрешности приближения на заданном классе функций и указании для этого класса наилучшего аппарата приближения фиксированной размерности. Усилиями многих математиков, и в первую очередь учеников и последователей Колмогорова и Никольского, такие задачи решены в одномерном случае для наиболее употребляемых классов функций. Однако оказалось, что разработанные методы иногда существенно используют специфику одномерного случая и непригодны при исследовании экстремальных задач на классах функций многих переменных. Поэтому естественно, что в последнее время внимание многих специалистов, работающих в области теории аппроксимации, обращено на экстремальные задачи приближения в многомерном случае.

Среди актуальных задач теории приближения особое место занимают экстремальные задачи, связанные с приближением функции многих переменных. Исследование многомерных экстремальных задач теории приближения значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем из-за появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. В частности, область, на которой осуществляется приближение, может иметь сложную структуру, что создаёт дополнительные трудности при описании дифференциально-разностных свойств функций. При этом усложняется и аппарат приближения. Поэтому в задачах аппроксимации функций многих переменных точные результаты известны в редких случаях, что делает исследование указанных экстремальных задач актуальным.

В настоящей диссертационной работе приводятся решения экстремальных задач функций двух переменных и в качестве аппарата приближения используется аппарат тригонометрических и алгебраических «углов». Отметим, что понятие «угол» в теории приближения было введено М.К.Потаповым<sup>1,2</sup> и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками, в том

<sup>1</sup>Потапов М.К. Приближение «углом» и теоремы вложения // *Mathematica Balkanica*. – 1972, № 2. – P.183–198.

<sup>2</sup>Потапов М.К. О приближении «углом» // *Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Function*. Budapesht. – 1972. – P. 371–399.

числе М.Томичем<sup>3</sup>, С.Б.Вакарчуком<sup>4</sup>, С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком<sup>5</sup>, С.Б.Вакарчуком и М.Ш.Шабозовым<sup>6</sup>, С.Б.Вакарчуком и А.В.Швачко<sup>7,8</sup>, М.Ш.Шабозовым и М.О.Акобиршоевым<sup>9,10,11</sup> и многими другими. При решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата «углов» в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно «углы» приводят к минимальным значениям точной верхней грани оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников указанных классов функций<sup>5,9–11</sup>. Следует отметить, что первые точные оценки погрешности приближения на некоторых классах функций двух переменных тригонометрическими «углами» были найдены в работах С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова<sup>5</sup>, М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоева<sup>12</sup>.

**Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) темами.** Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2018-2025 гг. по теме “Теория приближения функций и её приложения”.

**Цель и задачи исследования.** Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точные равенства, связывающие величины наилучших приближений и усреднённых значений модулей непрерывности функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ ;

<sup>3</sup>Томич М. О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости // Inst. Math. Beograd, Mathematica Balkanica. – 1972. – Vol.23, №37, 2. – P. 193–206. – P. 183–198.

<sup>4</sup>Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. Матем. – 1991, №3. – С. 14–25.

<sup>5</sup>Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложения к теории аппроксимации // Укр. матем. журн. – 2011. – Т.63, №12. – С. 1579–1601.

<sup>6</sup>Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш. О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журн. – 1996. – Т.48, №3. – С. 301–308.

<sup>7</sup>Вакарчук С.Б., Швачко А.В. Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложения к аппроксимации “углом” // Известия вузов. Матем. – 2015, №11. – С.2–22.

<sup>8</sup>Вакарчук С.Б., Швачко А.В. О наилучшем приближении “углом” в среднем на плоскости  $\mathbb{R}^2$  с весом Чебышева-Эрмита // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2014. – Т.11, №3. – С.35–46.

<sup>9</sup>Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России. – 2005. – Т.404, №4. – С. 406–464.

<sup>10</sup>Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журн. – 2009. – Т.61, №6. – С. 855–864.

<sup>11</sup>Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O. Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables // Anal. Math. – 2009. – Vol.35, No1. – PP. 61–72.

<sup>12</sup>Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О. Среднеквадратическое приближение “углом” в метрике  $L_2$  и значения квазипоперечников некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2020. – Т.72, №6. – С. 852–864.

- найти точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функции  $f \in L_2^{(r,s)}$ , их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности  $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$ ;
- найти точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности  $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$ ;
- найти неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов  $\mathcal{D}^s f$  ( $s = \overline{1, r-1}$ ) в пространстве  $L_{2,\mu}^{(r)}$  и привести некоторые его приложения.

**Основные методы исследования.** В диссертации используются современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания, экстремальных задач теории аппроксимации в нормированных пространствах.

**Научная новизна исследований.** В диссертационной работе получены следующие результаты:

- найдены точные равенства, связывающие величины наилучших приближений и усреднённые значения модулей непрерывности функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ ;
- найдены точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ , их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности  $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$ ;
- найдены точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности  $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$ ;
- найдено неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов  $\mathcal{D}^s f$  ( $s = \overline{1, r-1}$ ) в пространстве  $L_{2,\mu}^{(r)}$  и приведены некоторые его приложения.

**Теоретическая и практическая ценность.** Полученные в диссертационной работе результаты о приближении функций двух переменных тригонометрическими «углами» имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты применяются при нахождении точных оценок погрешности приближения функций многих переменных на

различных классах функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности “Математика” и “Прикладная математика”.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2017-2025 гг.);
- республиканской научной конференции “Математический анализ и его приложения” (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции “Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами” (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);
- республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества” (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- международной научной конференции “Современные проблемы математического анализа и теории функций” (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной научно-практической конференции “Математика в современном мире” (Худжанд, 20 апреля 2024 г.);
- международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и ее приложения” (Душанбе, 30-31 мая 2025 г.).

**Публикации по теме диссертации.** Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 печатных работах [1–8], из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации и ВАК при Президенте Республики Таджикистан, список которых приведен в конце диссертации. Из совместных с научным руководителем М.Ш.Шабозовым работ [1, 3] соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы из 51 наименований,

занимает 86 страниц машинописного текста, набрана на  $\text{\LaTeX}$ . Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теоремы, леммы или формулы в данном параграфе.

## Краткое содержание диссертации

В первой главе диссертации решается ряд экстремальных задач, связанных с наилучшим совместным приближением некоторых классов периодических дифференцируемых функций двух переменных тригонометрическими «углами» и их соответствующими частными производными в гильбертовом пространстве  $L_2(Q)$ ,  $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$  с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \|f\|_{L_2(Q)} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} |f(x, y)|^2 dx dy \right\}^{1/2}. \quad (1)$$

В первом параграфе приводятся необходимые в дальнейшем определения и вспомогательные факты, а также некоторые предварительные результаты. Пусть  $(X, \|\cdot\|_X)$  и  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := \text{span} \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\}, \quad V_n := \text{span} \{v_0(y), v_1(y), \dots, v_n(y)\}$$

— их конечномерные подпространства  $U_m \subset X$ ,  $V_n \subset Y$ . Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^m u_\nu(x) \psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^n v_\mu(y) \varphi_\mu(x),$$

где  $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^n$  и  $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^m$  — соответственно произвольные наборы функций из пространств  $X$  и  $Y$ , называют обобщённым полиномом, порождённым подпространствами  $U_m$  и  $V_n$ . Указанные обобщённые полиномы образуют подпространства, которые обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m, V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции “ $\otimes$ ” и “ $\oplus$ ” обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  — линейное нормированное пространство, содержащее подпространство  $G_{m,n}$ . Обозначим

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_Z := \mathcal{E}(f; G_{m,n})_Z = \inf \{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n}\} \quad (2)$$

и если  $\mathfrak{M}$  – некоторое множество функций  $f$  из  $(Z, \|\cdot\|_Z)$ , то положим

$$\mathcal{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathcal{E}(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z = \sup \{ \mathcal{E}_{m,n}(f)_Z : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (3)$$

Величина (2) характеризует наилучшее приближение элемента  $f \in \mathfrak{M}$  множеством  $G_{m,n}$ , а (3) – отклонение множества  $\mathfrak{M}$  от  $G_{m,n}$  в нормированном пространстве  $(Z, \|\cdot\|_Z)$ . Всюду далее полагаем  $X = Y = L_2[0, 2\pi]$ ,  $Z = L_2(Q)$ ,  $Q := \{0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ . Пусть теперь

$$U_{2m+1}^* := \text{span} \{ e^{ipx} \}_{p=-m}^m \subset L_2[0, 2\pi],$$

$$V_{2n+1}^* := \text{span} \{ e^{iqy} \}_{q=-n}^n \subset L_2[0, 2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|p| \leq m} \psi_p(y) e^{ipx} + \sum_{|q| \leq n} \phi_q(x) e^{iqy}, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

принадлежит подпространству  $G(U_{2m+1}^*, V_{2n+1}^*)$ . Функции вида (4) называют тригонометрическими «углами»<sup>1,2</sup> или тригонометрическими квазиполиномами<sup>13</sup>. Для функции  $f \in L_2(Q)$  с формальным разложением в двойной комплексный ряд Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}, \quad (5)$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{(Q)} f(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy$$

— двойные коэффициенты Фурье функции  $f \in L_2(Q)$ , квазиполиномом Фурье порядка  $(m, n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) = \left( \sum_{|p| \leq m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q| \leq n} - \sum_{|p| \leq m} \sum_{|q| \leq n} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \quad (6)$$

Легко проверить, что  $\Phi_{m,n}(f)$  принадлежит  $G(U_m^*, V_n^*)$ .

В работе<sup>14</sup> доказано, что

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}^2(f)_2 = \inf \{ \|f - g_{m-1, n-1}\|_2^2 : g_{m-1, n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \} =$$

<sup>13</sup> Брудный Ю.А. Приближение функций  $n$ -переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1979. – Т.34, №3. – С. 564–583.

<sup>14</sup> Шабозов М.Ш., Ажобиршоев М.О. О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в  $L_2$  // Чебышевский сб. – 2019. – Т.20, – №2. – С. 348–365.

$$= \|f - \Phi_{m-1, n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{|p| \geq m} \sum_{|q| \geq n} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f), \quad (7)$$

где ради краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho_{p,q}^2(f) := |c_{p,q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,-q}(f)|^2. \quad (8)$$

Через  $C^{(r,s)}(Q)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  обозначим множество функций  $f \in C(Q)$ , имеющих в квадрате  $Q$  непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x, y) := \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}, \quad \mu \leq r, \quad \nu \leq s,$$

а через  $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  — множество функций  $f \in C^{(r-1, s-1)}(Q)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$ ,  $s \geq 2$ , у которых частные производные  $f^{(r,\nu)}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\nu = \overline{0, s-1}$ ,  $f^{(\mu,s)}$ ,  $\mu = \overline{0, r-1}$ ,  $s \in \mathbb{N}$  существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, частные производные  $f^{(r,0)}$ ,  $f^{(0,s)}$  и смешанная производная  $f^{(r,s)}$  принадлежат пространству  $L_2$ .

Для произвольной функции  $f \in L_2$  определим модуль непрерывности  $k$ -го порядка по переменной  $x$  и  $l$ -го порядка по переменной  $y$  равенством

$$\omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 := \sup \{ \|\Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot, \cdot)\|_2 : |u| \leq t, \quad |v| \leq \tau \}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,l} f(x, y) = \sum_{\nu=0}^k \sum_{\mu=0}^l (-1)^{\mu+\nu} \binom{k}{\nu} \binom{l}{\mu} f(x + \nu u, y + \mu v).$$

Используя равенство (5) и тождество Парсеваля, величину (9) после выполнения некоторых несложных вычислений можно записать в следующем виде<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} & \omega_{k,l}^2(f; t, \tau)_2 := \\ & := 2^{k+l} \sup \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f) (1 - \cos pu)^k (1 - \cos qv)^l : |u| \leq t, \quad |v| \leq \tau \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Отметим, что ряд экстремальных задач с использованием смешанного модуля непрерывности (10) решен, например, в работах<sup>9,10</sup>.

При решении некоторых задач теории аппроксимации функций двух переменных вместо модуля непрерывности (10) иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции  $f \in L_2(Q)$ :

$$\Omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 =$$

$$= \left\{ \frac{1}{t^k \tau^l} \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^\tau \cdots \int_0^\tau \left\| \Delta_{\bar{u}, \bar{v}}^{k,l} f(\cdot, \cdot) \right\|_2^2 du_1 \cdots du_k dv_1 \cdots dv_l \right\}^{1/2}, \quad t, \tau > 0, \quad (11)$$

где  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ , а  $\Delta_{\bar{u}, \bar{v}}^{k,l} := \Delta_{u_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{u_k}^1 \circ \Delta_{v_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{v_l}^1$ . Обозначим  $\text{sinc } t := (\sin t)/t$  ( $t \neq 0$ ), доопределив данную функцию значением 1 в точке  $t = 0$ , полагая  $\text{sinc } 0 := 1$ . Используя равенство (5) и тождество Парсеваля, после выполнения некоторых несложных вычислений величину (11) можно записать в следующем явном виде

$$\begin{aligned} \Omega_{k,l}^2(f; t, \tau)_2 &= 2^{k+l} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |c_{p,q}(f)|^2 (1 - \text{sinc } pt)^k (1 - \text{sinc } q\tau)^l = \\ &= 2^{k+l} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \rho_{p,q}^2(f) (1 - \text{sinc } pt)^k (1 - \text{sinc } q\tau)^l, \quad t, \tau > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Имеет место следующая

**Лемма 1.1.1.** Пусть  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $r > k$ ,  $s > l$ . Тогда для произвольной функции  $f \in L_2^{(r,s)}$  выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(k,l)})_2 \leq m^{-(r-k)} n^{-(s-l)} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(r,s)})_2. \quad (13)$$

Неравенство (13) точно в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_2^{(r,s)}$ , для которой оно обращается в равенство.

**Следствие 1.1.1.** В условиях леммы 1.1.1 справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(k,l)})_2}{\mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(r,s)})_2} = \frac{1}{m^{r-k} n^{s-l}}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функции  $f \in L_2^{(r,s)}$  и ее частных производных  $f^{(k,l)}$ ,  $0 \leq k \leq r$ ,  $0 \leq l \leq s$ , тригонометрическими «углами» и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}^2(f^{(k,l)})_2 = \inf \left\{ \|f^{(k,l)} - g_{m-1, n-1}^{(k,l)}\|_2^2 : g_{m-1, n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \right\}.$$

Как и при получении формулы (7), в диссертации доказывается, что

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m-1, n-1}^2(f^{(k,l)})_2 &= \|f^{(k,l)} - \Phi_{m-1, n-1}(f^{(k,l)})\|_2^2 = \\ &= \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho_{p,q}^2(f^{(k,l)}) = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2k} q^{2l} \rho_{p,q}^2(f), \end{aligned}$$

где функция  $\Phi_{m-1, n-1}(g)$  определена равенством (6).

Через  $W^{(r,s)}L_2$  обозначим класс функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ , удовлетворяющих условию  $\|f^{(r,s)}\|_2 \leq 1$ .

**Теорема 1.1.1.** *При всех  $0 \leq k \leq r$ ,  $0 \leq l \leq s$  справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(k,l)}(W^{(r,s)}L_2)_2 = \sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2 : f \in W^{(r,s)}L_2 \right\} = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}.$$

Во втором параграфе первой главы в метрике  $L_2$  установлены точные неравенства, связывающие величины наилучших приближений  $2\pi$ -периодических дифференцируемых по каждой из переменных функций  $f \in L_{2,\mu}^{(r,s)}$  тригонометрическими «углами» с двойными интегралами, содержащими смешанные модули непрерывности высших порядков старших производных. Найдены точные значения верхней грани наилучших приближений некоторых классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности. При этом далее полагаем  $\Omega_{k,k}^{2/k}(\varphi; t, \tau)_2 = \Omega_k^{2/k}(\varphi; t, \tau)_2$ .

Справедлива следующая

**Теорема 1.2.1.** *Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда для любых  $h, \eta \in (0, +\infty)$  справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{m^r n^s \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \\ & = \left\{ \frac{m}{2(mh - \text{Si}(mh))} \cdot \frac{n}{2(n\eta - \text{Si}(n\eta))} \right\}^{k/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\text{Si}(t) = \int_0^t \text{sinc } u du$  — интегральный синус.

**Замечание 1.2.1.** Отметим, что утверждение теоремы 1.2.1 является своеобразным обобщением известного результата С.Б.Вакарчука<sup>15</sup>, доказанного для среднеквадратического приближения периодических функций одного переменного класса  $L_2^{(r)}[0, 2\pi]$  на случай среднеквадратического приближения функций двух переменных класса  $L_2^{(r,s)}(Q)$ ,  $Q := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ .

Из теоремы 1.2.1 вытекает такое утверждение

**Следствие 1.2.1.** *В условиях теоремы 1.2.1 при  $h = \pi/m$  и  $\eta = \pi/n$*

<sup>15</sup> Вакарчук С.Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в  $L_2$  // Матем. заметки. – 2006. – Т.80, вып.1. – С. 11–19.

имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{m^{r-k/2} n^{s-k/2} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{ \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \{2(\pi - \text{Si}(\pi))\}^{-k}.$$

**Следствие 1.2.2.** В условиях следствия 1.2.1 для любой функции  $f \in L_2^{(r,s)}$  верно следующее неравенство типа Джексона–Стечкина с явной константой

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2 \leq \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - \text{Si}(\pi))} \right\}^k \frac{1}{m^r n^s} \Omega_k \left( f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n} \right)_2. \quad (15)$$

В третьем параграфе найдены точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ , их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности  $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$ .

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функций  $f \in L_2^{(r,s)}$  и их частных и смешанных производных  $f^{(\mu,\nu)}$ ,  $0 \leq \mu \leq r$ ,  $0 \leq \nu \leq s$ , тригонометрическими «углами» и их соответствующими производными:

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 = \\ & = \inf \left\{ \|f^{(\mu,\nu)} - g_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U_{2m-1}^*, V_{2n-1}^*) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

В первом параграфе этой главы доказано, что для величины (16) имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f^{(\mu,\nu)})_2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} p^{2\mu} q^{2\nu} \rho_{p,q}^2(f).$$

В третьем параграфе первой главы устанавливается связь между величиной (16) и усреднённым значением  $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$  в метрике пространство  $L_2(Q)$ .

**Теорема 1.3.1.** Для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu$ ,  $s \geq \nu$ ,  $(t, \tau) \in (0, 3\pi/4m] \times (0, 3\pi/4n]$  и для любой функции  $f \in L_2^{(r,s)}$  имеет место точное неравенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 \leq \\ & \leq \frac{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2}{m^{(r-\mu)} n^{(s-\nu)} \left\{ 2(1 - \text{sinc } mt) \right\}^{k/2} \left\{ 2(1 - \text{sinc } n\tau) \right\}^{l/2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_2^{(r,s)}$ , для которой (17) обращается в равенство.

Из теоремы 1.3.1 вытекает

**Следствие 1.3.1.** В условиях теоремы 1.3.1 имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2} = \\ & = \{2(1 - \text{sinc } mt)\}^{-k/2} \{2(1 - \text{sinc } n\tau)\}^{-l/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

В частности, из (18) при  $t = \pi/(2m)$ ,  $\tau = \pi/(2n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  получаем точную константу Джексона–Стечкина в задаче одновременного приближения функции и её производных  $f^{(\mu,\nu)}$  ( $\mu = \overline{0, r}$ ,  $\nu = \overline{0, s}$ ):

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; \pi/(2m), \pi/(2n))_2} = \\ & = \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(\mu,\nu)})_2}{\Omega_{k,l}(f_0^{(r,s)}; \pi/(2m), \pi/(2n))_2} = \left\{ \frac{\pi}{2(\pi - 2)} \right\}^{(k+l)/2}. \end{aligned} \quad (19)$$

**Теорема 1.3.2.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu$ ,  $s \geq \nu$ . Тогда для любых  $h, \eta \in \mathbb{R}_+$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} = \\ & = \left\{ \frac{mn}{4(mh - \text{Si}(mh))(n\eta - \text{Si}(n\eta))} \right\}^{k/2}. \end{aligned}$$

Далее условимся под весовой функцией в прямоугольнике  $[0, h] \times [0, \eta]$  понимать неотрицательную суммируемую функцию  $\varphi(t, \tau)$ , не эквивалентную нулю на этом же прямоугольнике. Справедлива следующая

**Теорема 1.3.3.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu$ ,  $s \geq \nu$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $0 < h \leq 3\pi/(4m)$ ,  $0 < \eta \leq 3\pi/(4n)$ ,  $\varphi$  – весовая на прямоугольнике

$[0, h] \times [0, \eta]$  функция. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ & = \left( \int_0^h \int_0^\eta (1 - \text{sinc } mt)^{kq/2} (1 - \text{sinc } n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (20)$$

**Следствие 1.3.2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1.3.3. Тогда, если  $\varphi(t, \tau) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(\tau)$ , то

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \text{const}}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi_1(t) \varphi_2(\tau) dt d\tau \right)^{1/q}} = \\ & = \left( \int_0^h (1 - \text{sinc } mt)^{kq/2} \varphi_1(t) dt \right)^{-1/q} \left( \int_0^\eta (1 - \text{sinc } n\tau)^{lq/2} \varphi_2(\tau) d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (21)$$

В частности, из (21):

а) при  $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 1$ ;  $k = l$ ,  $q = 2/k$  получаем:

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{2^k m^{r-(\mu+k)} n^{s-(\nu+k)} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,k}^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right)^{k/2}} = \\ & = \{ (mh - \text{Si}(mh)) (n\eta - \text{Si}(n\eta)) \}^{-k/2}; \end{aligned}$$

б) при  $\varphi_1(t) = t$ ,  $\varphi_2(\tau) = \tau$ ,  $k = l$ ,  $q = 2/k$  имеем:

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{4^k m^{r-(\mu+k)} n^{s-(\nu+k)} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f^{(\mu, \nu)})_2}{\left( \int_0^h \int_0^\eta t\tau \Omega_{k,k}^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right)^{k/2}} = \\ & = \{ (mh/2)^2 - \sin^2(mh/2) \}^{-k/2} \{ (n\eta/2)^2 - \sin^2(n\eta/2) \}^{-k/2}. \end{aligned}$$

В четвертом параграфе первой главы приводится решение одной экстремальной задачи для некоторых классов функций из  $L_2^{(r,s)}$ . Отметим, что поскольку для произвольной функции  $f \in L_2^{(r,s)}$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ , её промежуточные производные  $f^{(\mu,\nu)}$ ,  $0 \leq \mu \leq r$ ,  $0 \leq \nu \leq s$  также принадлежат классу  $L_2^{(r,s)}$ , то представляет несомненный интерес изучение поведения величины наилучшего совместного приближения  $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2$  на классе  $L_2^{(r,s)}$  или на некотором подклассе  $\mathfrak{M}^{(r,s)} \subset L_2^{(r,s)}$ , то есть при любых  $0 \leq \mu \leq r$ ,  $0 \leq \nu \leq s$  требуется найти точное значение величины совместного приближения  $\mathfrak{M}^{(r,s)}$ :

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(\mathfrak{M}^{(r,s)})_2 := \sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r,s)} \right\}. \quad (22)$$

Через  $W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)$  ( $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ) обозначим класс функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ , при всех  $0 < h, \eta \leq 2\pi$  удовлетворяющих неравенство

$$\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \leq 1, \quad (23)$$

где  $\varphi$  — некоторая весовая функция, заданная на  $[0, h] \times [0, \eta]$ .

Справедливо следующее утверждение

**Теорема 1.4.1.** Пусть  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq \mu$ ,  $s \geq \nu$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $0 < h \leq 3\pi/(4m)$ ,  $0 < \eta \leq 3\pi/(4n)$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi))_2 = \\ & = \frac{1}{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu}} \left( \int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau \right)^{-1/q}. \end{aligned}$$

Из теоремы 1.4.1 вытекает

**Следствие 1.4.1.** В условиях теоремы 1.4.1 при  $k = l$ ,  $q = 2/k$ ,  $h = \pi/(2m)$ ,  $\eta = \pi/(2n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi = 1$  справедливо равенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)} \left( W_{k,k,k/2}^{(r,s)} \left( \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n} \right) \right)_2 = \{(\pi/2) - \operatorname{Si}(\pi/2)\}^{-k} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}.$$

Вторая глава работы посвящена среднеквадратическим наилучшим приближениям с весом Чебышева некоторых классов функций двух переменных алгебраическими «углами». В первом параграфе второй главы введены некоторые определения и обозначения. Пусть  $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$  — пространство суммируемых с квадратом функций  $f(x, y)$  двух переменных в квадрате  $Q =$

$\{(x, y) := -1 \leq x, y \leq 1\}$  с весом Чебышева  $\mu(x, y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$  и нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}(Q)} = \left( \iint_{(Q)} \mu(x, y) f^2(x, y) dx dy \right)^{1/2}.$$

В пространстве  $L_{2,\mu}$  рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} F_h(f) = F_h f(x, y) = & \frac{1}{4} \left[ f \left( x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h, y \cos h + \sqrt{1-y^2} \sin h \right) + \right. \\ & + f \left( x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h, y \cos h - \sqrt{1-y^2} \sin h \right) + \\ & + f \left( x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h, y \cos h + \sqrt{1-y^2} \sin h \right) + \\ & \left. + f \left( x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h, y \cos h - \sqrt{1-y^2} \sin h \right) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига*.

Пусть

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x), \quad n = 1, 2, \dots$$

— ортонормированная система многочленов Чебышева<sup>16</sup> в пространстве  $L_{2,\mu}$  и

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y) \quad (25)$$

— двойной ряд Фурье–Чебышева функции  $f \in L_{2,\mu}$ , где

$$c_{kl}(f) = \iint_{(Q)} \mu(x, y) f(x, y) T_k(x) T_l(y)$$

— коэффициенты Фурье–Чебышева функции  $f$ .

Символом  $L_{2,\mu(x)}[-1, 1]$ , где  $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ , обозначим пространство измеримых функций одного переменного  $f$  таких, что  $f(x) \cdot \mu^{1/2}(x)$  суммируема на отрезке  $[-1, 1]$  с квадратом модуля. Аналогичный смысл имеет пространство  $L_{2,\mu(y)}[-1, 1]$ . Пусть  $U_{m+1} \in L_{2,\mu(x)}[-1, 1]$  и  $V_{n+1} \subset L_{2,\mu(y)}[-1, 1]$  —

<sup>16</sup> *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены // М.: Наука. – 1979. – 416 С.

конечномерные подпространства с базисами  $\{T_k(x)\}_{k=0}^m$  и  $\{T_l(y)\}_{l=0}^n$  соответственно. Полагая  $\mu(x, y) := \mu(x) \cdot \mu(y)$  в пространстве  $L_{2,\mu} := L_{2,\mu(x,y)}(Q)$ , рассмотрим множество функций

$$G(U_{m+1}, V_{n+1}) := L_{2,\mu(x)}[-1, 1] \otimes U_{m+1} \oplus L_{2,\mu(y)}[-1, 1] \otimes V_{n+1}. \quad (26)$$

Элементы множества (26) представимы в виде

$$g_{m,n}(x, y) := \sum_{k=0}^m \varphi_k(y) T_k(x) + \sum_{l=0}^n \psi_l(x) T_l(y), \quad (27)$$

где  $\{\varphi_k(y)\}_{k=0}^m \subset U_{m+1}$  и  $\{\psi_l(x)\}_{l=0}^n \subset V_{n+1}$  — произвольные наборы функций из соответствующих подпространств. Следуя работе М.К.Потапова<sup>1</sup>, функцию (27) назовём алгебраическим «углом» и используем её с целью аппроксимации функции  $f(x, y) \in L_{2,\mu}(Q)$  линейными комбинациями функций  $f_i(x) \in L_{2,\mu(x)}[-1, 1]$  ( $i = \overline{1, m}$ ) и  $f_j(y) \in L_{2,\mu(y)}[-1, 1]$  ( $j = \overline{1, n}$ ). Далее мы при получении основных результатов воспользуемся схемой рассуждений, приведённой в работах С.Б.Вакарчука и М.Б.Вакарчука<sup>4</sup>, С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова<sup>5</sup>, М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоева<sup>9,10</sup>.

Для произвольной функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$  символом  $\mathcal{E}_{m-1, n-1}(f)_{2,\mu}$  обозначим её наилучшее приближение элементами (27) из множества (26) в пространстве  $L_{2,\mu}(Q)$ , то есть требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{2,\mu} := \inf \{ \|f - g_{m,n}\|_2 : g_{m,n} \in G(U_{m+1}, V_{n+1}) \}. \quad (28)$$

Через

$$S_{m,n}(f; x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y)$$

обозначим частную сумму порядка  $m$  по  $x$  и порядка  $n$  по  $y$  ряда (25), а через

$$S_{m,\infty}(f; x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y),$$

$$S_{\infty,n}(f; x, y) = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=0}^n c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y)$$

— отрезки ряда (25) функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$  порядка  $m$  по  $x$  и  $n$  по  $y$  соответственно в смысле сходимости в метрике  $L_{2,\mu}(Q)$ . Функцию

$$\sigma_{m,n}(f; x, y) := S_{m,\infty}(f; x, y) + S_{\infty,n}(f; x, y) - S_{m,n}(f; x, y) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y) + \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=0}^n c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y) - \\
&\quad - \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y)
\end{aligned} \tag{29}$$

будем называть *обобщённым полиномом* Фурье–Чебышева функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$  порядка  $m$  по  $x$  и порядка  $n$  по  $y$ .

В этих обозначениях справедлива следующая

**Теорема 2.1.1.** *Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$  и  $f \in L_{2,\mu}(Q)$  – произвольная функция. Тогда среди всех элементов  $g_{m-1,n-1}$  вида (27), принадлежащих множеству  $G(U_{m+1}, V_{n+1})$ , наилучшее приближение функции  $f$  доставляет её обобщённый полином (29) порядка  $m-1$  по  $x$  и  $n-1$  по  $y$ . При этом*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - \sigma_{m-1,n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(f) \right\}^{1/2}.$$

По одномерным операторам Чебышева второго порядка

$$\mathcal{D}_x := (1-x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{D}_y := (1-y^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - y \frac{\partial}{\partial y},$$

введём двумерный оператор второго порядка Чебышева следующего вида

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y := (1-x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

и через  $L_{2,\mu}^{(r)} := L_{2,\mu(x,y)}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$  ( $r \in \mathbb{N}$ ,  $L_{2,\mu}^{(0)} := L_{2,\mu(x,y)}$ ) обозначим класс функций  $f(x, y) \in L_{2,\mu}(Q)$ , у которых частные производные  $\frac{\partial^m f}{\partial x^k \partial y^l}$ ,  $k+l=m$ ,  $m=1, 2, \dots, 2r$  принадлежат также пространству  $L_{2,\mu}(Q)$ . При этом, как обычно, полагаем

$$\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f) \in L_{2,\mu}(Q), \quad \mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f; \quad \mathcal{D}^0 f = f, \quad L_{2,\mu}^{(0)}(Q, \mathcal{D}) = L_{2,\mu}(Q).$$

В этих обозначениях имеет место следующая

**Теорема 2.1.2.** *При любых  $m, n, r \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} = \frac{1}{(m^2 + n^2)^r}.$$

Во втором параграфе второй главы найдены некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями функций двух переменных алгебраическими «углами» и усреднёнными значениями смешанных модулей

непрерывности двух переменных  $r$ -ых производных  $\mathcal{D}^r f$  ( $r \in \mathbb{N}$ ), где  $\mathcal{D}$  — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева в метрике пространства  $L_{2,\mu}(Q)$ ,  $Q = \{(x, y) := -1 \leq x, y \leq 1\}$  с весом Чебышева  $\mu(x, y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ .

По-прежнему обозначим в пространстве  $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$  оператор  $F_h(f) := F_h f(x, y)$ , определённый равенством (24). Символом  $F_t^x(f)$  (соответственно  $F_t^y(f)$ ) обозначим действие оператора обобщенного сдвига (24) на функцию  $f \in L_{2,\mu}$  как на функцию от переменной  $x$  (соответственно  $y$ ) при фиксированном значении переменной  $y$  (соответственно  $x$ ). При этом полагаем

$$F_t^{\nu,x}(f) := F_t^{1,x}(F_t^{\nu-1,x}(f)),$$

где  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $F_t^{0,x}(f) = f$ ,  $F_t^{1,x}(f) = F_t^x(f)$ .

Аналогичным образом полагаем

$$F_\tau^{\mu,y}(f) := F_\tau^{1,y}(F_\tau^{\mu-1,y}(f)),$$

где  $\mu \in \mathbb{N}$ ,  $F_\tau^{0,y}(f) := f$ ,  $F_\tau^{1,y}(f) := F_\tau^y(f)$ . Определим обобщенные конечные разности первого и высших порядков по переменной  $x$ , используя оператор (24). Полагаем

$$\Delta_t^x(f) := F_t^x(f) - (f) = (F_t^x - \mathbb{I})f,$$

где  $\mathbb{I}$  — единичный оператор в пространстве  $L_{2,\mu}(Q)$ , и для  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , запишем общую формулу

$$\Delta_t^{k,x}(f) := \Delta_t^{1,x}(\Delta_t^{k-1,x}(f)) = (F_t^x - \mathbb{I})^k f = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-1} \binom{k}{i} F_t^{i,x}(f). \quad (30)$$

Аналогично для  $l \geq 2$ ,  $l \in \mathbb{N}$  будем иметь

$$\Delta_\tau^{l,y}(f) := \Delta_\tau^{1,y}(\Delta_\tau^{l-1,y}(f)) = (F_\tau^y - \mathbb{I})^l f = \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} \binom{l}{j} F_\tau^{j,x}(f). \quad (31)$$

По формулам (30) и (31) для введенных смешанных конечных разностей по  $x$  и по  $y$  высших порядков получаем

$$\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f)) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} F_t^{i,x}(F_\tau^{j,y}(f)).$$

Величину

$$\Omega_{k,l}(f; \delta, \eta)_{2,\mu} = \sup \left\{ \|\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f))\|_{2,\mu} : |t| \leq \delta, |\tau| \leq \eta \right\}, \quad (32)$$

где  $0 \leq \delta, \eta \leq 2$ , будем называть *обобщённым смешанным модулем непрерывности* порядка  $k$  по  $x$  и порядка  $l$  по  $y$  функции  $f \in L_{2,\mu}(Q)$ .

Легко вычислить, что

$$\Omega_{k,l}(f; \delta, \eta)_{2,\mu} := \sup_{\substack{|t| \leq \delta \\ |\tau| \leq \eta}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \cos it)^{2k} (1 - \cos j\tau)^{2l} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (33)$$

Далее при  $k = l$  полагаем  $\Omega_{k,k}(f; \delta, \eta)_{2,\mu} := \Omega_k(f; \delta, \eta)_{2,\mu}$ . Из (33), учитывая, что  $c_{ij}^2(\mathcal{D}^r f) = (i^2 + j^2)^{2r} c_{ij}^2(f)$ , получаем

$$\Omega_{k,l}(\mathcal{D}^r f; \delta, \eta) := \sup_{|t| \leq \delta} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (i^2 + j^2)^{2r} (1 - \cos it)^{2k} (1 - \cos j\tau)^{2l} c_{ij}^2(f) \right\}^{1/2}.$$

Имеет место следующая

**Теорема 2.2.1.** *Для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющих неравенства  $0 \leq mu \leq \pi/2$ ,  $0 < nv \leq \pi/2$ , при любом  $k, r \in \mathbb{N}$  справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^r \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} dt d\tau \right\}^k} = \left\{ \frac{mn}{(mu - \sin mu)(nv - \sin nv)} \right\}^k. \quad (34)$$

Существует функция  $f_0(x, y) \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , для которой верхняя грань достигается в соотношении (34).

Отметим, что теорема 2.2.1 является обобщением одного результата С.Б.Вакарчука<sup>17</sup>, полученного для приближения периодической функции одной переменной  $f \in L^{(r)}[0, 2\pi]$  на случай наилучшего приближения функций двух переменных  $f(x, y)$  алгебраическим «углом» класса  $L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ .

Из теоремы 2.2.1 вытекает

**Следствие 2.2.1.** *В условиях теоремы 2.2.1 при  $u = \pi/(2m)$ ,  $v = \pi/(2n)$ ,  $m, n, k, r \in \mathbb{N}$  имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^r \mathcal{E}_{m-1, n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ mn \int_0^{\pi/(2m)} \int_0^{\pi/(2n)} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} dt d\tau \right\}^k} = \left( \frac{2}{\pi - 2} \right)^{2k}.$$

<sup>17</sup> Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. Матем. – 1991, №3. – С.14–25.

**Теорема 2.2.2.** Для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < mt \leq \pi$ ,  $0 < n\tau \leq \pi$ , при любых  $k, r \in \mathbb{N}$  справедливо соотношение

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^r (mn)^{-k} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau \right\}^k} = \frac{1}{4^k}. \quad (35)$$

Отметим, что теорема 2.2.2 является обобщением известного результата В.В.Шалаева<sup>18</sup> о точном неравенстве, связывающем величину наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых функций одной переменной  $f \in L_2^{(r)}[0, 2\pi]$  с интегралом, содержащим усреднённое значение модуля непрерывности высшего порядка  $\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2$ , на случай наилучшего приближения функций двух переменных  $f(x, y) \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$  алгебраическими «углами» с интегралами, содержащими усреднённое значение модуля непрерывности  $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_2$ .

Из теоремы 2.2.2 вытекает

**Следствие 2.2.2.** При всех  $k, m, n \in \mathbb{N}$  и  $r \in \mathbb{Z}_+$  и любой функции  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$  справедливо неравенство типа Джексона–Стечкина

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq (m^2 + n^2)^{-r} \Omega_k \left( f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n} \right)_{2,\mu}. \quad (36)$$

Но, если функция  $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu}$  для любых  $k, m, n, r \in \mathbb{N}$  и  $t, \tau \in [\pi/m, \pi/n]$  удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & 2\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; \pi/(2m), \pi/(2n))_{2,\mu} \geq \\ & \geq \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} + \Omega_k^{1/k} \left( \mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{m} - t, \frac{\pi}{n} - \tau \right)_{2,\mu}, \end{aligned} \quad (37)$$

то неравенство (36) можно уточнить.

В этом случае справедлива следующая

**Теорема 2.2.3.** На множестве функций  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , у которых функция  $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu}$  удовлетворяет условию (37), выполняется точное неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq (m^2 + n^2)^{-r} \Omega_k \left( \mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n} \right)_{2,\mu}$$

в том смысле, что существует функция  $f_1 \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , для которой оно обращается в равенство.

<sup>18</sup> Шалаев В.В. О поперечниках в  $L_2$  классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // УМЖ. – 1991. – Т.43, №1. – С. 125-129.

Из теоремы 2.2.3 вытекает

**Следствие 2.2.3.** В условиях теоремы 2.2.3 при всех  $k, m, n, r \in \mathbb{N}$ , справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^r \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_k(\mathcal{D}^r f; \pi/(2m), \pi/(2n))_{2,\mu}} = 1.$$

**Теорема 2.2.4.** Для любых  $m, n, r \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющих неравенства  $0 \leq mh \leq \pi$ ,  $0 \leq n\eta \leq \pi$ , при любых  $k, r \in \mathbb{N}$ , справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^r \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta (h-u)(\eta-v) \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; u, v)_{2,\mu} dudv \right\}^k} = \\ & = \left( \frac{h\eta}{2} \right)^{2k} \left( 1 - \left( \frac{2}{mh} \sin \frac{mh}{2} \right)^2 \right)^{-k} \left( 1 - \left( \frac{2}{n\eta} \sin \frac{n\eta}{2} \right)^2 \right)^{-k}. \end{aligned} \quad (38)$$

Существует функция  $f_0(x, y) \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , реализующая знак равенства в (38).

**Следствие 2.2.4.** В условиях теоремы 2.2.4 при  $h = \pi/m$ ,  $\eta = \pi/n$  имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(mn)^{2k} (m^2 + n^2)^r \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} (\pi/m - u)(\pi/n - v) \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; u, v)_{2,\mu} dudv \right\}^k} = \left( \frac{\pi^4}{2(\pi^2 - 4)} \right)^{2k}.$$

В третьем параграфе приводится решение ряда экстремальных задач среднеквадратического приближения функций двух переменных с весовой функцией Чебышева, связанных с точным неравенством типа Колмогорова для дифференциального оператора Чебышева второго порядка в пространстве  $L_{2,\mu}$ .

При решении экстремальных задач теории приближений важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенство типа Колмогорова в различных банаховых пространствах. Если  $S = \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$  или  $S = \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ , то неравенство Колмогорова для функции одной переменной имеет вид<sup>19,20</sup>

$$\|f^{(s)}\|_{l_p(S)} \leq M \|f\|_{l_q(S)}^\alpha \cdot \|f^{(r)}\|_{l_\gamma(S)}^\beta, \quad (39)$$

<sup>19</sup> Арестов В.В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. – 1966. – Т.51, №6. – С. 89–124.

<sup>20</sup> Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А. Неравенства для производных и их приложения // Киев: Наукова думка. – 2003. – 590 С.

где

$$\alpha = \frac{r - s - 1/\gamma + 1/p}{r - 1/\gamma + 1/q}, \beta = 1 - \alpha.$$

Различные неравенства типа (39), как для функции одной переменной, так и для функций многих переменных, приведены в монографии<sup>20</sup>. Связь неравенства типа Колмогорова (39) с известной задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора обыкновенного дифференцирования  $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$  порядка  $k$  анализируется в статье В.В.Арестова<sup>19</sup>. В приведенной ниже теореме 2.3.1 доказывается точное неравенство типа Колмогорова для функций двух переменных  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$  в пространстве  $L_{2,\mu}$ . Поскольку для функции  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$  все ее промежуточные производные  $\mathcal{D}^s f$  ( $s = 1, 2, \dots, r-1$ ) также принадлежат пространству  $L_{2,\mu}$ , то представляет интерес изучение поведения наилучших приближений  $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$ ,  $s = 1, 2, \dots, r-1$  на классе  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ .

Справедлива следующая

**Теорема 2.3.1.** Пусть  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq s$ . Тогда для произвольной функции  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ ,  $f \neq \text{const}$  справедливо точное на  $L_{2,\mu}$  неравенство

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu} \leq \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{s/r} \cdot \|f\|_{2,\mu}^{1-s/r} \quad (40)$$

в том смысле, что существует функция  $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ , для которой (40) обращается в равенство.

Из теоремы 2.3.1 в качестве следствия получаем

**Теорема 2.3.2.** При выполнении условий теоремы 2.3.1 имеет место точное неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r(f)_{2,\mu})\right)^{s/r} \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1-s/r},$$

обращающееся в равенство для функции  $f_0(x, y) = T_m(x)T_n(y) \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ .

В качестве следствия из теоремы 2.3.2 получаем

**Теорема 2.3.3.** В условиях теоремы 2.3.2 справедливо равенство

$$\sup_{f \in W_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{1-s/r}} = 1.$$

Через  $W_{2,\mu}^{(r)} := W_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$  обозначим класс функций  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ , для которых  $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \leq 1$ . Наилучшее приближение класса  $W_{2,\mu}^{(r)}$  алгебраическими «углами» в метрике  $L_{2,\mu}$  обозначим

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(W_{2,\mu}^{(r)})_{2,\mu} := \sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)} \right\}. \quad (41)$$

**Теорема 2.3.4.** Пусть  $m, n, r \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\mathcal{E}_{m-1, n-1}(W_{2, \mu}^{(r)})_{2, \gamma} = (m^2 + n^2)^{-r}.$$

Полученный результат в теореме 2.3.4 позволяет решать следующую экстремальную задачу: для значений  $1 \leq s \leq r$  требуется найти величину

$$\sup \{ \mathcal{E}_{m-1, n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2, \mu} : f \in W_{2, \mu}^{(r)} \}. \quad (42)$$

Величина (42) при  $s = 0$  совпадает с величиной (41), и ее можно интерпретировать как распространение результата (41) на случай вычисления точных верхних граней наилучших приближений промежуточных производных  $\mathcal{D}^s f$  ( $1 \leq s \leq r$ ,  $s, r \in \mathbb{N}$ ) на класс  $W_{2, \mu}^{(r)}$  в метрике пространства  $L_{2, \mu}$ .

Для величины (42) верно следующее утверждение.

**Теорема 2.3.5.** Пусть числа  $m, n, r, s \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq s$ . Тогда имеют место равенства

$$\sup \{ \mathcal{E}_{m-1, n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2, \mu} : f \in W_{2, \mu}^{(r)} \} = (m^2 + n^2)^{-(r-s)}.$$

В четвертом параграфе второй главы обобщаются некоторые результаты, полученные в предыдущих параграфах на случай совместного приближения функции  $f$  и всех её промежуточных производных  $\mathcal{D}^s f$  ( $s = 1, 2, \dots, r$ ) алгебраическими «углами» в пространстве  $L_{2, \mu}$ .

Имеет место следующая

**Теорема 2.4.1.** Для любых чисел  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < mu \leq \pi/2$ ,  $0 < nv \leq \pi/2$ , при любом  $k \in \mathbb{N}$ , имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2, \mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^{r-s} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2, \mu}}{\left\{ \int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2, \mu} dt d\tau \right\}^k} = \left\{ \frac{mn}{(mu - \sin mu)(nv - \sin nv)} \right\}^k. \quad (43)$$

Из теоремы 2.4.1 вытекает

**Следствие 2.4.1.** В условиях теоремы 2.4.1 при  $u = \pi/(2m)$ ,  $v = \pi/(2n)$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$  выполняется равенство

$$\sup_{f \in L_{2, \mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^{r-s} \mathcal{E}_{m-1, n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2, \mu}}{\left\{ mn \int_0^{\pi/(2m)} \int_0^{\pi/(2n)} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2, \mu} dt d\tau \right\}^k} = \left( \frac{2}{\pi - 2} \right)^k.$$

Справедлива также следующая

**Теорема 2.4.2.** Для любых  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющих неравенствам  $0 < mt \leq \pi$ ,  $0 < n\tau \leq \pi$ , при любом  $k \in \mathbb{N}$ , справедливо соотношение

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^{r-s} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{ mn \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau \right\}^k} = \frac{1}{4^k}. \quad (44)$$

Также имеет место

**Теорема 2.4.3.** Пусть  $m, n, r \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ ,  $0 < mh \leq \pi$ ,  $0 < n\eta \leq \pi$ . Тогда при любых  $k, r \in \mathbb{N}$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2 + n^2)^{r-s} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{ \int_0^h \int_0^\eta (h-u)(\eta-v) \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; u, v)_{2,\mu} du dv \right\}^k} = \\ & = \left( \frac{h\eta}{2} \right)^{2k} \left( 1 - \left( \frac{2}{mh} \sin \frac{mh}{2} \right)^2 \right)^{-k} \left( 1 - \left( \frac{2}{n\eta} \sin \frac{n\eta}{2} \right)^2 \right)^{-k}. \end{aligned}$$

Поскольку для произвольной функции  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , наравне с функциями  $f$  и  $\mathcal{D}^r f$ , последовательные производные  $\mathcal{D}^s f$  ( $s = 1, 2, \dots, r-1$ ) также принадлежат пространству  $L_{2,\mu}$ , то определённый интерес представляет отыскание точных значений наилучших совместных приближений функций и их производных  $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$  на некотором подклассе  $\mathfrak{M}^r \subset L_{2,\mu}^{(r)}$  или на самом классе  $L_{2,\mu}^{(r)}$ . Точнее, требуется найти значение величины

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)})_{2,\mu} := \sup \{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \quad (45)$$

Вводим классы функций, для которых решаем экстремальную задачу (45). Через  $W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_k; u, v)$  обозначим класс функций  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , при любых  $(u, v) \in (0, \pi/(2m)] \times (0, \pi/(2n)]$ ,  $m, n, k \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющих условию

$$mn \int_0^u \int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau) dt d\tau \leq 1.$$

Аналогичным образом, обозначим через  $\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}$  класс функций  $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ , при любых  $m, n, k \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , удовлетворяющих условию

$$mn \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau \leq 1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая

**Теорема 2.4.4.** Пусть  $m, n, k \in \mathbb{N}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}_+$ ,  $r \geq s$ . Тогда справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_k; u, v)) = \frac{1}{(m^2 + n^2)^{r-s}} \left\{ \frac{1}{(mu - \sin mu)(nv - \sin nv)} \right\}^k,$$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}) = 4^{-k}(m^2 + n^2)^{-(r-s)}.$$

## Заключение

### Основные научные результаты диссертационной работы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные равенства, связывающие величины наилучших приближений и усреднённых значений модулей непрерывности функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ ;
- найдены точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функций  $f \in L_2^{(r,s)}$ , их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности  $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$ ;
- найдены точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности  $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$ ;
- найдено неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов  $\mathcal{D}^s f$  ( $s = \overline{1, r-1}$ ) в пространстве  $L_{2,\mu}^{(r)}$  и приведены некоторые его приложения.

### Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации функций многих переменных.

## РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**В журналах, зарегистрированных в Перечне ВАК Российской Федерации:**

- [1] Шабозов М.Ш., Мадимарова Ф.М. Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций двух переменных алгебраическими “углами” // Математические труды. – 2026. – Т.29, №1. – С.163–183.
- [2] Мадимарова Ф.М. О неравенствах типа Джексона–Стечкина для совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими “углами” // Доклады НАН Таджикистана. – 2025. – Т.68, №4. – С.319–326.
- [3] Шабозов М.Ш., Мадимарова Ф.М. Среднеквадратическое наилучшее приближение с весом Чебышева некоторых классов функций двух переменных // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2018, №3 (172). – С.7–18.
- [4] Мадимарова Ф.М. О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2017, №3 (168). – С.16–25.

**В других изданиях:**

- [5] Мадимарова Ф.М. Неравенства типа Джексона–Стечкина для совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими «углами» // Материалы международной конференции „*Современные проблемы математики и ее приложения*”, 75-летию со дня рождения академика НАНТ, д.ф.-м.н., профессора К.Бойматова и 75-летию д.ф.-м.н., заведующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А.Джураева НАНТ, профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 120–125.
- [6] Мадимарова Ф.М. Приближение в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Материалы республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества», посвященная “Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования” (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С.47–49.
- [7] Мадимарова Ф.М. О приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные

уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.178–181.

- [8] Мадимарова Ф.М. О приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видного таджикского математика, профессора Б.Имомназарова. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.). с.142–145.