**Министерство образования и науки
Республики Таджикистан**

Таджикский национальный университет

УДК 517.5

На правах рукописи

Мадимарова Фавзия Мадимаровна

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ «УГЛАМИ» В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

Д И С С Е Р Т А Ц И Я
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель:
академик Национальной академии
наук Таджикистана, доктор
физико-математических наук,
профессор Шабозов М.Ш.

Д У Ш А Н Б Е – 2026

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. К настоящему времени в теории приближения глубоко и тщательно исследованы задачи, связанные с аппроксимацией функций одной переменной. По этой тематике, берущей своё начало от классических работ К.Ф.Вейерштрасса и П.Л.Чебышева, написаны десятки монографий. Особую роль сыграли работы А.Н.Колмогорова и С.М.Никольского, связанные с решением экстремальных задач о нахождении точной верхней грани погрешности приближения на заданном классе функций и указании для этого класса наилучшего аппарата приближения фиксированной размерности. Усилиями многих математиков, и в первую очередь учеников и последователей Колмогорова и Никольского, такие задачи решены в одномерном случае для наиболее употребляемых классов функций. Однако оказалось, что разработанные методы иногда существенно используют специфику одномерного случая и не пригодны при исследовании экстремальных задач на классах функций многих переменных. Поэтому естественно, что в последнее время внимание многих специалистов, работающих в области теории аппроксимации, обращено на экстремальные задачи приближения в многомерном случае.

Среди актуальных задач теории приближения особое место занимают экстремальные задачи, связанные с приближением функции многих переменных. Исследование многомерных экстремальных задач теории приближения значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем из-за появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. В частности, область, на которой осуществляется приближение, может иметь сложную структуру, что создаёт дополнительные трудности при описании дифференциально-разностных свойств функций. При этом усложняется и аппарат приближения. Поэтому в задачах аппроксимации функций многих переменных точные результаты известны в редких случаях, что делает исследование указанных экстремальных задач актуальным.

В настоящей диссертационной работе приводятся решения экстремальных задач функций двух переменных и в качестве аппарата приближения плодотворно используется аппарат тригонометрических и алгебраических «углов». Отметим, что понятие «угол» в теории приближения было введено М.К.Потаповым [18, 19] и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками, в том числе С.Б.Вакарчуком [6], С.Б.Вакарчуком и М.Б.Вакарчуком [9], С.Б.Вакарчуком и М.Ш.Шабозовым [12], С.Б.Вакарчуком и А.В.Швачко [13, 14], М.Томичем [28], М.Ш.Шабозовым и М.О.Акобиршоевым [30, 31, 43]. При решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата «углов» в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно «углы» приводят к минимальным значениям точной верхней грани оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников указанных классов функций [12, 30, 31, 43]. Следует отметить, что первые точные оценки погрешности приближения на некоторых классах функций двух переменных тригонометрическими «углами» были найдены в работах С.Б.Вакарчука и М.Ш.Шабозова [12], М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоева [33].

Объект исследования и связь работы с научными программами (проектами) и темами. Диссертационная работа выполнена в рамках реализации перспективного плана научно-исследовательских работ кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета на 2018–2025 гг. по теме “Теория приближения функций и её приложения”.

Цели и задачи исследования. Основные цели диссертационной работы заключаются в следующем:

- найти точные равенства, связывающие величины наилучших приближений и усреднённых значений модулей непрерывности функций $f \in L_2^{(r,s)}$;
- найти точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функции $f \in L_2^{(r,s)}$, их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$;
- найти точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$;
- найти неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ и привести некоторые его приложения.

Основные методы исследования. В диссертации используются современные методы решения экстремальных задач вариационного содержания, экстремальных задач теории аппроксимации в нормированных пространствах.

Научная новизна исследований. В диссертационной работе получены следующие результаты:

- найдены точные равенства, связывающих величины наилучших приближений и усреднённых значений модулей непрерывности функций $f \in L_2^{(r,s)}$;
- найдены точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функций $f \in L_2^{(r,s)}$, их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$;
- найдены точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$;
- найдено неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ и приведены некоторые его приложения.

Положения, выносимые на защиту:

- основные теоремы о нахождении точных равенств, связывающих величины наилучших приближений и усреднённые значения модулей непрерывности функций $f \in L_2^{(r,s)}$;
- теорема о точных равенствах между величинами наилучших совместных приближений функций $f \in L_2^{(r,s)}$, их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$;
- теоремы о точных оценках наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля

непрерывности $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$;

- теорема о неравенствах типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ и некоторые её приложения.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты о приближении функций двух переменных тригонометрическими «углами» имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведенные в ней методы и результаты применяются при нахождении точных оценок погрешности приближения функций многих переменных на различных классах функций. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Математика" и "Прикладная математика".

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные результаты, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованных работах. Все приведенные в диссертационной работе результаты получены лично автором.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений Таджикского национального университета под руководством академика НАН Таджикистана М.Ш.Шабозова (Душанбе 2017-2025 гг.);
- республиканской научной конференции "Математический анализ и его приложения" (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.);
- международной научной конференции "Сингулярные интегральные

уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами" (Душанбе, 30-31 января 2020 г.);

- республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества" (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.);
- международной научной конференции "Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 24-25 июня 2022 г.);
- международной научно-практической конференции "Математика в современном мире" (Худжанд, 20 апреля 2024 г.);
- международной научно-практической конференции "Современные проблемы математики и ее приложения" (Душанбе, 30-31 мая 2025 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты автора по теме диссертации опубликованы в 8 печатных работах [44–51], из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации и ВАК при Президенте Республики Таджикистан, список которых приведен в конце диссертации. Из совместных с научным руководителем М.Ш.Шабозовым работ [44, 46] соавтору принадлежат постановка задач и выбор метода доказательств результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитированной литературы из 51 наименований, занимает 86 страниц машинописного текста, набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теоремы, леммы или формулы в данном параграфе.

ГЛАВА I. О наилучшем совместном приближении «углом» в среднем некоторых классов периодических функций двух переменных

В последнее время повышенный интерес и внимание математиков, занимающихся экстремальными задачами теории аппроксимации функций нескольких переменных как в действительном, так и в комплексном случаях, привлекают бесконечномерные подпространства, которые состоят из форм, включающих тензорные произведения функций меньшего числа переменных (см., например, литературу в [32, 33]). Их использование в качестве аппарата приближения функций многих переменных даёт некоторые преимущества по сравнению с обычными методами, например, по величине оценки приближения на классах функций и по возможности более полного использования результатов, полученных в одномерном случае и многих других вопросах (см., например, недавно опубликованные работы М.К.Потапова и В.В.Симонова [20], М.Ш.Шабозова и М.О.Акобиршоева [33]).

Целью данной главы является получение результатов, связанных с точными оценками погрешности среднеквадратического совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими «углами» и их соответствующими производными. Отметим, что понятие «угол» было введено М.К.Потаповым [18, 19] и в дальнейшем с успехом применялось многими математиками (см., например, [6, 9, 12–14, 28, 30–32, 39, 40, 43] и литературу, приведенную в них). Выше мы отметили, что при решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата «углов» в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами и другими традиционными методами, поскольку именно «углы» дают минимальные оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипопоперечников [9, 13, 14, 30–32, 43].

Данная глава продолжает указанную тематику и посвящена использованию одной из характеристик гладкости функций двух переменных в одномерном случае, рассмотренной ранее С.Б.Вакарчуком [7, 34, 41] и свойства которой более полно изучались в работе [35].

§ 1.1. Введение. Вспомогательные факты

Приводим определения и вспомогательные факты, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства функций одной переменной, а

$$U_m := span\{u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)\}, \; V_n := span\{v_0(y), v_1(y), \ldots, v_n(y)\}$$

— их конечномерные подпространства $U_m \subset X, \; V_n \subset Y$. Выражение вида

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{m} u_\nu(x)\psi_\nu(y) + \sum_{\mu=0}^{n} v_\mu(y)\varphi_\mu(x),$$

где $\{\varphi_\mu(x)\}_{\mu=0}^{n}$ и $\{\psi_\nu(y)\}_{\nu=0}^{m}$ — соответственно произвольные наборы функций из пространств X и Y, называют обобщённым полиномом, порождённым подпространствами U_m и V_n. Указанные обобщённые полиномы образуют подпространства, которые обозначим

$$G_{m,n} := G(U_m, V_n) = U_m \otimes Y \oplus V_n \otimes X,$$

где операции “$\otimes$” и “$\oplus$” обозначают соответственно декартово произведение и прямую сумму множеств. Пусть $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — линейное нормированное пространство, содержащее подпространство $G_{m,n}$. Обозначим

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z := \mathscr{E}(f; G_{m,n})_Z = \inf\{\|f - g_{m,n}\|_Z : g_{m,n} \in G_{m,n}\} \tag{1.1.1}$$

и если $\mathfrak{M}$ – некоторое множество функций f из $(Z, \|\cdot\|_Z)$, то положим

$$\mathscr{E}_{m,n}(\mathfrak{M})_Z := \mathscr{E}(\mathfrak{M}, G_{m,n})_Z = \sup\{\mathscr{E}_{m,n}(f)_Z : \; f \in \mathfrak{M}\}. \tag{1.1.2}$$

Величина (1.1.1) характеризует наилучшее приближение элемента $f \in \mathfrak{M}$ множеством $G_{m,n}$, а (1.1.2) — отклонение множества $\mathfrak{M}$ от $G_{m,n}$ в нормированном пространстве $(Z, \|\cdot\|_Z)$. Всюду далее полагаем $X = Y = L_2[0, 2\pi]$,

$Z = L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$. Пусть теперь

$$U^*_{2m+1} := span\left\{e^{ipx}\right\}_{p=-m}^{m} \subset L_2[0, 2\pi],$$

$$V^*_{2m+1} := span\left\{e^{iqy}\right\}_{q=-n}^{n} \subset L_2[0, 2\pi].$$

Очевидно, что функция

$$g_{m,n}(x, y) = \sum_{|p|\le m} \psi_p(y)e^{ipx} + \sum_{|q|\le n} \phi_q(x)e^{iqy},\ m, n \in \mathbb{N} \tag{1.1.3}$$

принадлежит подпространству $G(U^*_{2m+1}, V^*_{2n+1})$. Функции вида (1.1.3) называют тригонометрическими «углами» [18, 19] или тригонометрическими квазиполиномами [5].

Пусть $L_2 := L_2(Q)$, $Q := \{0 \le x, y \le 2\pi\}$ — пространство комплекснозначных 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x, y)$, суммируемых с квадратом модуля и конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2}(Q) = \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} |f(x, y)|^2 dxdy\right)^{1/2}.$$

Для функции $f \in L_2(Q)$ с формальным разложением в двойной комплексный ряд Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}(f)e^{i(px+qy)}, \tag{1.1.4}$$

где

$$c_{pq}(f) := \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{(Q)} f(x, y)e^{-i(px+qy)}dxdy$$

— двойные коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(Q)$, квазиполиномом Фурье порядка (m, n), $m, n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$\Phi_{m,n}(f; x, y) =$$

$$= \left(\sum_{|p|\le m} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{|q|\le n} - \sum_{|p|\le m} \sum_{|q|\le n} \right) c_{pq}(f) e^{i(px+qy)}. \qquad (1.1.5)$$

Легко проверить, что $\Phi_{m,n}(f)$ принадлежит $G(U_m^*, V_n^*)$. В [32] доказано, что

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 =$$

$$= \inf\{\|f - g_{m-1,n-1}\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\} =$$

$$= \|f - \Phi_{m-1,n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{|p|\ge m} \sum_{|q|\ge n} |c_{pq}(f)|^2 = \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}(f), \qquad (1.1.6)$$

где для краткости в последней двойной сумме положено

$$\rho^2_{p,q}(f) := |c_{p,q}(f)|^2 + |c_{-p,q}(f)|^2 + |c_{p,-q}(f)|^2 + |c_{-p,-q}(f)|^2. \qquad (1.1.7)$$

В частности, из (1.1.6) следует, что если $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, то

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \mathscr{E}^2_{m-1}(f_1)_2 \cdot \mathscr{E}^2_{n-1}(f_2)_2, \qquad (1.1.8)$$

где, как обычно,

$$\mathscr{E}^2_{\nu-1}(g)_2 := \inf\{\|g - T_{\nu-1}\|_2^2 : T_{\nu-1} \in G_{2\nu-1}\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения 2π-периодической функции $g(x)$ тригонометрическими полиномами $G_{2\nu-1} := span\{e^{ijx}\}_{j=-(\nu-1)}^{\nu-1}$ порядка $2\nu-1$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$.

Через $C^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$ обозначим множество функций $f \in C(Q)$, имеющих в квадрате Q непрерывные частные производные

$$f^{(\mu,\nu)}(x,y) := \frac{\partial^{\mu+\nu} f}{\partial x^\mu \partial y^\nu}, \quad \mu \le r, \ \nu \le s,$$

а через $L_2^{(r,s)} := L_2^{(r,s)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$ — множество функций $f \in C^{(r-1,s-1)}(Q)$, $r,s \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$, $s \ge 2$, у которых частные производные $f^{(r,\nu)}$, $r \in \mathbb{N}$, $\nu =$

$\overline{0, s-1}$, $f^{(\mu,s)}$, $\mu = \overline{0, r-1}$, $s \in \mathbb{N}$ существуют, кусочно-непрерывны, допускают перемену порядка дифференцирования, частные производные $f^{(r,0)}$, $f^{(0,s)}$ и смешанная производная $f^{(r,s)}$ принадлежат пространству L_2.

Для произвольной функции $f \in L_2$ определим модуль непрерывности k-го порядка по переменной x и l-го порядка по переменной y равенством

$$\omega_{k,l}(f; t, \tau)_2 := \sup\left\{\|\Delta_{u,v}^{k,l} f(\cdot,\cdot)\|_2 : |u| \le t,\ |v| \le \tau\right\}, \qquad (1.1.9)$$

где

$$\Delta_{u,v}^{k,l} f(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k}\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^{\mu+\nu}\binom{k}{\nu}\binom{p}{\mu} f(x+\nu u,\ y+\mu v).$$

Использовав равенство (1.1.4) и тождество Парсеваля, величину (1.1.9) после выполнения некоторых несложных вычислений можно записать в следующем виде [12]

$$\omega_{k,l}^2(f; t, \tau)_2 :=$$

$$:= 2^{k+l}\sup\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\cos pu)^k(1-\cos qv)^l : |u| \le t,\ |v| \le \tau\right\}. \qquad (1.1.10)$$

Отметим, что ряд экстремальных задач с использованием смешанного модуля непрерывности (1.1.10) решен, например, в работах [30, 31].

При решении некоторых экстремальных задач теории аппроксимации периодической функции $f(x)$ в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ вместо обычного модуля непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f, t)_2 := \sup\left\{\|\Delta_h^m(f)\|_{L_2} : |h| \le t\right\},$$

где

$$\Delta_h^m f(x) := \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} f(x+jh)$$

— конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h, М.Ш.Шабозовым, С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [7, 34, 35, 42] использовалась следующая усредненная характеристика гладкости

$$\Omega_m(f,t)_2 := \left\{ \frac{1}{t^m} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \left\| \Delta_{\overline{h}}^m f \right\|_{L_2}^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{1/2},$$

где $t > 0$, $\overline{h} := (h_1, \ldots, h_m)$; $\Delta_{\overline{h}}^m := \Delta_{h_1}^1 \circ \Delta_{h_2}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$; $\Delta_{h_i}^1 f(x) := f(x+h_i) - f(x)$, $j = \overline{1,m}$. Напомним, что в ходе исследования некоторых вопросов конструктивной теории функций в метрическом пространстве L_p $(0 < p < 1)$ подобного рода усреднённая характеристика гладкости функций рассматривалась К.В.Руновским [22, 23], Э.А.Стороженко, В.Кротовым и П.Освальдом [25].

Аналогичным образом при решении некоторых задач теории аппроксимации функций двух переменных вместо модуля непрерывности (1.1.10) иногда удобнее использовать следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2(Q)$:

$$\Omega_{k,l}(f;t,\tau)_2 =$$

$$= \left\{ \frac{1}{t^k \tau^l} \int\limits_0^t \cdots \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^\tau \left\| \Delta_{\overline{u},\overline{v}}^{k,l} f(\cdot,\cdot) \right\|_2^2 du_1 \cdots du_k dv_1 \cdots dv_l \right\}^{1/2}, \ t,\tau > 0, \tag{1.1.11}$$

где $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_k), \overline{v} = (v_1, v_2 \ldots v_l)$, а $\Delta_{\overline{u},\overline{v}}^{k,l} := \Delta_{u_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{u_k}^1 \circ \Delta_{v_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{v_l}^1$, (см., например, [7, 41]). Обозначим $\operatorname{sinc} t := (\sin t)/t$ $(t \neq 0)$, доопределив данную функцию значением 1 в точке $t = 0$, полагая $\operatorname{sinc} 0 := 1$. Поскольку функции $\{e^{i(px+qy)}\}$, $p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ образуют в области $Q := \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ ортогональную систему, то, пользуясь рядом Фурье функции $f \in L_2(Q)$ в комплексной форме (1.1.4) и используя равенство Парсеваля, запишем

$$\left\|\Delta^{k,l}_{\overline{u},\overline{v}} f(\cdot,\cdot)\right\|_2^2 =$$

$$= 2^{k+l}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)\prod_{\nu=1}^{k}\prod_{\mu=1}^{l}(1-\cos\nu u_k)(1-\cos\mu v_l). \qquad (1.1.12)$$

После подстановки (1.1.12) в формулу (1.1.9) и выполнения некоторых несложных вычислений, формула (1.1.9) приобретает явный вид

$$\Omega_{k,l}^2(f;t,\tau)_2 :=$$

$$:= 2^{k+l}\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc} pt)^k(1-\operatorname{sinc} q\tau)^l,\ t,\tau>0. \qquad (1.1.13)$$

Условимся в дальнейшем формулу (1.1.13) при $k = l$ записывать в виде $\Omega_{k,k}(f;t,\tau)_2 := \Omega_k(f;t,\tau)_2$.

В самом деле, заметим, что если функция $f \in L_2^{(r,s)}$, то, дифференцируя двойной ряд (1.1.4) r раз по переменной x и s раз по переменной y в смысле сходимости в L_2, запишем

$$f^{(r,s)}(x,y) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}(ip)^r(iq)^s c_{p,q}(f)e^{i(px+qy)} =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}c_{p,q}(f^{(r,s)})e^{i(px+qy)},$$

где ради краткости, положено

$$c_{p,q}(f^{(r,s)}) = (ip)^r(iq)^s c_{p,q}(f).$$

Поскольку

$$\left|c_{p,q}(f^{(r,s)})\right|^2 = p^{2r}q^{2s}\left|c_{p,q}(f)\right|^2,$$

то в силу равенства (1.1.7) имеем

$$\rho_{p,q}^2(f^{(r,s)}) = p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f). \qquad (1.1.14)$$

Пользуясь равенством (1.1.14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$, получаем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho^2_{p,q}(f^{(r,s)}) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f). \qquad (1.1.15)$$

Имеет место следующая

Лемма 1.1.1. *Пусть $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $r, s \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ выполняется неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2 \le m^{-(r-k)}n^{-(s-l)} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2. \qquad (1.1.16)$$

Неравенство (1.1.16) *точно в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}$, для которой оно обращается в равенство.*

Доказательство. Для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ при любых $k \in [0, r]$ и $l \in [0, s]$ имеем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2k}q^{2l}\rho^2_{p,q}(f) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{-2(r-k)}q^{-2(s-l)}p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f) \le$$

$$\le m^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho^2_{p,q}(f) =$$

$$= m^{-2(r-k)}n^{-2(s-l)} \cdot \mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2.$$

Для функции $f_0(x, y) = \cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$f_0^{(k,l)}(x, y) = m^k n^l \cos\left(mx + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(ny + \frac{l\pi}{2}\right), \;\; 0 \le k \le r, \; 0 \le l \le s,$$

и в силу (1.1.15) записываем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(k,l)})_2 = m^k n^l, \quad \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_2 = m^r n^s.$$

Используя полученные равенства, находим

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(k,l)})_2 = m^k n^l = m^{-(r-k)} n^{-(s-l)} \cdot m^r n^s =$$

$$= m^{-(r-k)} n^{-(s-l)} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0^{(r,s)})_2.$$

Лемма 1.1.1 доказана.

Следствие 1.1.1. *В условиях леммы* 1.1.1 *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2} = \frac{1}{m^{r-k} n^{s-l}}.$$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функции $f \in L_2^{(r,s)}$ и ее частных производных $f^{(k,l)}$, $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$, тригонометрическими «углами» и их соответствующими производными:

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2 = \inf\left\{\|f^{(k,l)} - g^{(k,l)}_{m-1,n-1}\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\right\}.$$

Как и при получении формулы (1.1.6), легко доказать, что

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2 = \|f^{(k,l)} - \Phi_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})\|_2^2 =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}(f^{(k,l)}) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2k} q^{2l} \rho^2_{p,q}(f),$$

где функция $\Phi_{m-1,n-1}(g)$ определена равенством (1.1.5).

Через $W^{(r,s)}L_2$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r,s)}$, удовлетворяющих условию $\|f^{(r,s)}\|_2 \le 1$.

Теорема 1.1.1. *При всех* $0 \le k \le r$, $0 \le l \le s$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(W^{(r,s)}L_2)_2 =$$

$$= \sup\left\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(k,l)})_2 : f \in W^{(r,s)}L_2\right\} = \frac{1}{m^{r-k} n^{s-l}}. \qquad (1.1.17)$$

Доказательство. Поскольку для любой функции $f \in W^{(r,s)}L_2$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(r,s)})_2 \leq \|f^{(r,s)}\|_2 \leq 1,$$

то из (1.1.16) следует оценка сверху величины, расположенной в левой части (1.1.17):

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(W^{(r,s)}L_2)_2 \leq \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}. \tag{1.1.18}$$

С целью получения оценки снизу той же величины, введем в рассмотрение функцию

$$g_0(x,y) = \frac{1}{m^r n^s}\cos mx \cos ny \in L_2^{(r,s)}.$$

Поскольку для $0 \leq k \leq r$, $0 \leq l \leq s$ производные

$$g_0^{(k,l)}(x,y) = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}\cos\left(mx + \frac{k\pi}{2}\right)\cos\left(ny + \frac{l\pi}{2}\right),$$

$$g_0^{(r,s)}(x,y) = \cos\left(mx + \frac{r\pi}{2}\right)\cos\left(ny + \frac{s\pi}{2}\right),$$

а наилучшее приближения этих производных

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(g_0^{(k,l)})_2 = \left\|g_0^{(k,l)}\right\|_2 = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}},$$

и, кроме того,

$$\left\|g_0^{(r,s)}\right\|_2 = 1,$$

то, очевидно, g_0 принадлежит $W^{(r,s)}$, причем в силу (1.1.18) имеем

$$\mathcal{E}^{(k,l)}_{m-1,n-1}(W^{(r,s)}L_2)_2 \geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}(g_0^{(k,l)})_2 = \frac{1}{m^{r-k}n^{s-l}}. \tag{1.1.19}$$

Требуемое равенство (1.1.17) получаем из сопоставления неравенств (1.1.18) и (1.1.19), что и завершает доказательство теоремы 1.3.2.

Учитывая равенство (1.1.14), из (1.1.13) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\Omega^2_{k,l}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 =$$

$$= 2^{k+l}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^{2}(f)(1-\operatorname{sinc} pt)^{k}(1-\operatorname{sinc} q\tau)^{l}. \tag{1.1.20}$$

Далее, при $k=l$ полагаем

$$\Omega_{k}^{2}(f^{(r,s)};t,\tau)_{2} := \Omega_{k,k}^{2}(f^{(r,s)};t,\tau)_{2} =$$

$$= 4^{k}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\Big[(1-\operatorname{sinc} pt)(1-\operatorname{sinc} q\tau)\Big]^{k}. \tag{1.1.21}$$

В следующем параграфе в качестве основных результатов докажем ряд теорем, связывающих величину наилучшего приближения функций класса $L_{2}^{(r,s)}$ тригонометрическими «углами» с двойными интегралами, содержащими усреднённые значения модуля гладкости (1.1.21).

§ 1.2. Точные равенства, связывающие величины наилучших приближений и усреднённые значения модулей непрерывности функций $f \in L_2^{(r,s)}$

Во втором параграфе первой главы в метрике L_2 установлены точные неравенства, связывающие величины наилучших приближений 2π-периодических дифференцируемых по каждой из переменных функций $f \in L_2^{(r,s)}$ тригонометрическими «углами» с двойными интегралами, содержащими смешанные модули непрерывности высших порядков старших производных. Найдены точные значения верхней грани наилучших приближений некоторых классов функций, задаваемых указанными модулями непрерывности.

Справедлива следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любых $h, \eta \in (0, +\infty)$ справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq const}} \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau\right\}^{k/2}} =$$

$$= \left\{\frac{m}{2\big(mh - \mathrm{Si}(mh)\big)} \cdot \frac{n}{2\big(n\eta - \mathrm{Si}(n\eta)\big)}\right\}^{k/2}, \qquad (1.2.1)$$

где $\mathrm{Si}(t) = \int\limits_0^t \mathrm{sinc}\, u du$ *— интегральный синус.*

Доказательство. Сначала докажем, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ имеет место неравенство

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty} \sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}(f)(\mathrm{sinc}\, pt + \mathrm{sinc}\, q\tau - \mathrm{sinc}\, pt \cdot \mathrm{sinc}\, q\tau) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k} n^{2s/k}} \cdot \mathscr{E}^{2-2/k}_{m-1,n-1}(f)_2 \cdot \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau). \qquad (1.2.2)$$

В самом деле, замечая, что при $k=l$, из (1.1.20) следует, что

$$\Omega_k^2(f^{(r,s)};t,\tau)_2 = 4^k\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k, \qquad (1.2.3)$$

и, используя неравенство Гёльдера для двойных рядов вида

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}b_{ij}| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|b_{ij}|^{\beta}\right)^{1/\beta}, \qquad (1.2.4)$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1, \quad 1\le\alpha\le\infty\right),$$

где $\{a_{i,j}\}$, $\{b_{i,j}\}$ — произвольные числа, полагая $\alpha=k/(k-1)$, $\beta=k$, $\alpha^{-1}+\beta^{-1}=1$, с учётом равенств (1.1.6) и (1.1.21) получаем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 - \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(\operatorname{sinc}pt+\operatorname{sinc}q\tau-\operatorname{sinc}pt\cdot\operatorname{sinc}q\tau) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)(1-\operatorname{sinc}q\tau) =$$

$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^{2-2/k}\rho_{p,q}^{2/k}(f)(1-\operatorname{sinc}pt)(1-\operatorname{sinc}q\tau) \le$$

$$\le \left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)\right\}^{1-1/k}\left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k\right\}^{1/k} =$$

$$= \left\{\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)\right\}^{1-1/k}\left\{\frac{4^k}{4^k}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{-2r}q^{-2s}p^{2r}q^{2s}(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k\right\}^{1/k} \le$$

$$\le \mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\left\{\frac{4^k}{4^k m^{2r}n^{2s}}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\operatorname{sinc}pt)^k(1-\operatorname{sinc}q\tau)^k\right\}^{1/k} \le$$

$$\le \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\cdot\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2.$$

Неравенство (1.2.2) доказано. Интегрируя обе части неравенства (1.2.2) по прямоугольнику $\{0\le t\le h,\ 0\le\tau\le\eta\}$, где $h,\eta\in\mathbb{R}_+$, получаем

$$h\eta\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 \le$$

$$\leq \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)\left(\eta\int\limits_0^h \operatorname{sinc} pt dt + h\int\limits_0^\eta \operatorname{sinc} q\tau d\tau-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^h \operatorname{sinc} pt dt\cdot\int\limits_0^\eta \operatorname{sinc} q\tau d\tau\right)+\frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\times$$

$$\times\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau. \qquad (1.2.5)$$

Поделив обе части неравенства (1.2.5) на $h\eta$ и учитывая определение интегрального синуса, запишем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}+\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}-\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}\cdot\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}\right)\rho_{p,q}^2(f)+$$

$$+\frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}}\cdot\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\cdot\frac{1}{h\eta}\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau. \qquad (1.2.6)$$

Так как функция $\operatorname{Si}(u)/u$ является невозрастающей на полуоси $\mathbb{R}_+$ (см., например, [11, с.34]), то имеет место соотношение

$$\max_{\substack{p\geq m\\ q\geq n}}\left(\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}+\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}-\frac{\operatorname{Si}(ph)}{ph}\cdot\frac{\operatorname{Si}(q\eta)}{q\eta}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}+\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}-\frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}\cdot\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}.$$

Пользуясь этим равенством, из (1.2.6) с учётом (1.1.6) имеем неравенство

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2 \leq \left(\frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}+\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}-\frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}\cdot\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}\right)\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\rho_{p,q}^2(f)+$$

$$+\frac{1}{4m^{2r/k}\,n^{2s/k}}\,\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{2-2/k}(f)_2\cdot\frac{1}{h\eta}\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau,$$

из которого следует, что

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2(f)_2\left(1-\frac{\operatorname{Si}(mh)}{mh}\right)\left(1-\frac{\operatorname{Si}(n\eta)}{n\eta}\right)\leq$$

$$\leq \frac{1}{4m^{2r/k}n^{2s/k}} \cdot \mathscr{E}^{2-2/k}_{m-1,n-1}(f)_2 \cdot \frac{1}{h\eta} \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau. \tag{1.2.7}$$

Из (1.2.7) сразу следует неравенство

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2 \leq$$
$$\leq \frac{1}{m^r n^s} \left\{ \frac{mn}{4\big(mh - \mathrm{Si}(mh)\big)\big(nh - \mathrm{Si}(nh)\big)} \right\}^{k/2} \times$$
$$\times \left\{ \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любой функции $f \in L_2^{(r,s)}$, то из него получаем оценку сверху экстремальной характеристики, стоящей в левой части (1.2.1):

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{ \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} \leq$$
$$\leq \left\{ \frac{mn}{4\big(mh - \mathrm{Si}(mh)\big)\big(n\eta - \mathrm{Si}(n\eta)\big)} \right\}^{k/2} \tag{1.2.8}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной экстремальной характеристики введём в рассмотрение комплекснозначную функцию $f_0(x, y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}$, для которой, как следует из соотношений (1.1.6) и (1.2.3), справедливы равенства

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2 = 1, \\ \Omega_k^2(f_0^{(r,s)}, t, \tau) = 4^k m^{2r} n^{2s} (1 - \operatorname{sinc} mt)^k (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^k. \end{gathered} \tag{1.2.9}$$

Пользуясь равенствами (1.2.9), имеем

$$\sup_{f \in L_2^{(r,s)}} \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{ \int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 dt d\tau \right\}^{k/2}} \geq$$

$$\geq \frac{m^r n^s \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2}{\left\{\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f_0^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau\right\}^{k/2}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{4\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)(1-\operatorname{sinc} n\tau) dt d\tau\right\}^{k/2}} =$$

$$= \left\{\frac{mn}{4\big(mh-\mathrm{Si}(mh)\big)\big(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta)\big)}\right\}^{k/2}. \tag{1.2.10}$$

Требуемое равенство (1.2.1) следует из сопоставления оценок сверху (1.2.8) и снизу (1.2.10), чем и завершаем доказательство теоремы 1.2.1.

Замечание 2.2.1. Отметим, что утверждение теоремы 1.2.1 является своеобразным обобщением известного результата С.Б.Вакарчука [8, теорема 1, с.12], доказанного для среднеквадратического приближения периодических функций одного переменного класса $L_2^{(r)}[0,2\pi]$ на случай среднеквадратического приближения функций двух переменных класса $L_2^{(r,s)}(Q)$, $Q := \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$ тригонометрическими «углами».

Из теоремы 1.2.1 вытекает такое утверждение

Следствие 1.2.1. *В условиях теоремы* 1.2.1 *при* $h = \pi/m$ *и* $\eta = \pi/n$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq const}} \frac{m^{r-k/2} n^{s-k/2} \mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left\{\int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau\right\}^{k/2}} = \{2(\pi - \mathrm{Si}(\pi))\}^{-k}. \tag{1.2.11}$$

Следствие 1.2.2. *В условиях следствия* 1.2.1 *для любой функции* $f \in L_2^{(r,s)}$ *верно следующее неравенство типа Джексона–Стечкина с явной* *константой*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2 \leq \left\{\frac{\pi}{2(\pi-\mathrm{Si}(\pi))}\right\}^k \frac{1}{m^r n^s}\,\Omega_k\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)_2. \qquad (1.2.12)$$

В самом деле, из равенства (1.2.11) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ следует неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{m^{r-k/2}n^{s-k/2}} \cdot \left\{2(\pi-\mathrm{Si}(\pi))\right\}^{-k} \left\{\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_m^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2 dt d\tau\right\}^{k/2}.$$

Из последнего неравенства в силу неубывания модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)};t,\tau)$ по обеим переменным $(t,\tau) \in [0,\pi/m]\times[0,\pi/n]$ получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{m^{r-k/2}n^{s-k/2}} \cdot \left\{2(\pi-\mathrm{Si}(\pi))\right\}^{-k} \left\{\Omega_k^{2/k}\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)_2 \frac{\pi}{m}\cdot\frac{\pi}{n}\right\}^{k/2} =$$

$$= \left\{\frac{\pi}{2(\pi-\mathrm{Si}(\pi))}\right\}^k \frac{1}{m^r n^s} \cdot \Omega_k\left(f^{(r,s)};\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right)_2$$

и неравенство (1.2.12) доказано.

§ 1.3. Точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функций $f \in L_2^{(r,s)}$, их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$

Рассмотрим теперь экстремальную задачу об одновременном приближении функций $f \in L_2^{(r,s)}$ и их частных и смешанных производных $f^{(\mu,\nu)}$, $0 \le \mu \le r$, $0 \le \nu \le s$, тригонометрическими «углами» и их соответствующими производными:

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 =$$
$$= \inf\Big\{\big\|f^{(\mu,\nu)} - g^{(\mu,\nu)}_{m-1,n-1}\big\|_2^2 : g_{m-1,n-1} \in G(U^*_{2m-1}, V^*_{2n-1})\Big\}. \tag{1.3.1}$$

Как и при доказательстве формулы (1.1.6) в первом параграфе этой главы, мы доказали, что для величины (1.3.1) имеет место равенство

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 = \big\|f^{(\mu,\nu)} - \Phi_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})\big\|_2^2 =$$
$$= \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} \rho^2_{p,q}\big(f^{(\mu,\nu)}\big) = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2\mu}q^{2\nu}\rho^2_{p,q}\big(f\big), \tag{1.3.2}$$

где функция $\Phi_{m-1,n-1}(g)$ определена равенством (1.1.5), если в нём заменить m на $m-1$ и n на $n-1$.

В следующем утверждении устанавливается связь между величиной (1.3.2) и усреднённым значением $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$ в метрике пространства $L_2(Q)$.

Теорема 1.3.1. *Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge \mu, s \ge \nu$, $(t, \tau) \in (0, 3\pi/4m] \times (0, 3\pi/4n]$ имеет место точное неравенство*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 \le$$
$$\le \frac{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)}; t, \tau\big)_2}{m^{(r-\mu)}n^{(s-\nu)}\Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} mt\big)\Big\}^{k/2}\Big\{2\big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)\Big\}^{l/2}}, \tag{1.3.3}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_2^{(r,s)}$, *для которой* (1.3.3) *обращается в равенство.*

Доказательство. В самом деле, учитывая, что [26]

$$\max\Big\{|\mathrm{sinc}\, u| : u \geq kv, 0 < kv \leq 3\pi/4\Big\} = \mathrm{sinc}\, kv,$$

$$\min\Big\{|1-\mathrm{sinc}\, u| : u \geq kv, \ \ 0 < kv \leq 3\pi/4\Big\} = (1-\mathrm{sinc}\, kv),$$

в силу (1.3.2) запишем

$$\Omega_{k,l}^2\big(f^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 \geq$$

$$\geq 2^{k+l}\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2r}q^{2s}\rho_{p,q}^2(f)(1-\mathrm{sinc}\, pt)^k(1-\mathrm{sinc}\, q\tau)^l \geq$$

$$\geq 2^{k+1}m^{2(r-\mu)}n^{2(s-\nu)}(1-\mathrm{sinc}\, mt)^k(1-\mathrm{sinc}\, n\tau)^l\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty} p^{2\mu}q^{2\nu}\rho_{p,q}^2(f) =$$

$$= m^{2(r-\mu)}n^{2(s-\nu)}\Big\{2(1-\mathrm{sinc}\, mt)\Big\}^k\Big\{2(1-\mathrm{sinc}\, n\tau)\Big\}^l \mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2, \quad (1.3.4)$$

откуда и вытекает неравенство (1.3.3). Для функции $f_0(x,y) = e^{i(mx+ny)} \in L_2^{(r,s)}$ в силу (1.1.20) и (1.3.2) имеем:

$$\begin{gathered}\Omega_{k,l}^2\big(f_0^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 = m^{2r}n^{2s}\Big\{2(1-\mathrm{sinc}\, mt)\Big\}^k\Big\{2(1-\mathrm{sinc}\, n\tau)\Big\}^l; \\ \mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2 = m^{2\mu}n^{2\nu}.\end{gathered} \quad (1.3.5)$$

Пользуясь этими равенствами, получаем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^2\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2 = m^{2\mu}n^{2\nu} =$$

$$= m^{-2(r-\mu)}n^{-2(s-\nu)}\Big\{2(1-\mathrm{sinc}\, mt)\Big\}^{-k}\Big\{2(1-\mathrm{sinc}\, n\tau)\Big\}^{-l}\Omega_{k,l}^2\big(f_0^{(r,s)}; t, \tau\big)_2, \quad (1.3.6)$$

откуда и следует точность неравенства (1.3.3), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.1. Из теоремы 1.3.1 вытекает

Следствие 1.3.1. *В условиях теоремы* 1.3.1 *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq const}} \frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2}=$$

$$=\big\{2(1-\operatorname{sinc} mt)\big\}^{-k/2}\big\{2(1-\operatorname{sinc} n\tau)\big\}^{-l/2}. \tag{1.3.7}$$

В частности, из (1.3.7) *при* $t=\pi/(2m)$, $\tau=\pi/(2n)$, $m,n\in\mathbb{N}$ *получаем точную константу Джексона–Стечкина в задаче одновременного приближения функции и её производных* $f^{(\mu,\nu)}$ $(\mu=\overline{0,r},\ \nu=\overline{0,s})$*:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};\pi/(2m),\pi/(2n)\big)_2}=$$

$$=\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f_0^{(r,s)};\pi/(2m),\pi/(2n)\big)_2}=\left\{\frac{\pi}{2(\pi-2)}\right\}^{(k+l)/2}. \tag{1.3.8}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.3.4) для произвольной функции $f\in L_2^{(r,s)}$ получаем

$$\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2}\le$$

$$\le\big\{2(1-\operatorname{sinc} mt)\big\}^{-k/2}\big\{2(1-\operatorname{sinc} n\tau)\big\}^{-l/2}. \tag{1.3.9}$$

С другой стороны, пользуясь равенством (1.3.6), запишем оценку снизу величины, стоящей в левой части (1.3.7):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}} \frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2}\ge$$

$$\ge\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\Omega_{k,l}\big(f_0^{(r,s)};t,\tau\big)_2}=$$

$$=\big\{2(1-\operatorname{sinc} mt)\big\}^{-k/2}\big\{2(1-\operatorname{sinc} n\tau)\big\}^{-l/2}. \tag{1.3.10}$$

Требуемое равенство (1.3.7) вытекает из сопоставления оценки сверху (1.3.9) с оценкой снизу (1.3.10). Равенство (1.3.8) из (1.3.7) получается непосредственным вычислением. Следствие 1.3.1 доказано.

Теорема 1.3.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s,\mu,\nu\in\mathbb{Z}_+$, $r\geq\mu, s\geq\nu$. *Тогда для любых* $h,\eta\in\mathbb{R}_+$ *справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq const}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}=$$

$$=\left\{\frac{mn}{4\big(mh-\mathrm{Si}(mh)\big)\big(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta)\big)}\right\}^{k/2}. \tag{1.3.11}$$

Доказательство. Равенство (1.3.11) выведем из следующих соображений. Положим $f^{(\mu,\nu)}(t,\tau)\ :=\ g(t,\tau)$. Тогда $f^{(r,s)}\in L_{2,\mu}$ означает, что $g^{(r-\mu,s-\nu)}\in L_{2,\mu}$, то есть, из того, что $f\in L_2^{(r,s)}$ следует, что $g\in L_{2,\mu}^{(r-\mu,s-\nu)}$. Поэтому с учётом (1.2.1) получаем

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq const}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}=$$

$$=\sup_{\substack{g\in L_2^{(r-\nu,s-\nu)}\\ g\neq const}}\frac{m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}(g)_2}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_k^{2/k}(g^{(r-\mu,s-\nu)};t,\tau)_2dtd\tau\right\}^{k/2}}=$$

$$=\left\{\frac{mn}{4\big(mh-\mathrm{Si}(mh)\big)\big(n\eta-\mathrm{Si}(n\eta)\big)}\right\}^{k/2}$$

и равенство (1.3.11) доказано.

Далее условимся под весовой функцией в прямоугольнике $[0,h]\times[0,\eta]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию $\varphi(t,\tau)$, не эквивалентную нулю на этом же прямоугольнике. Справедлива следующая

Теорема 1.3.3. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \mu$, $s \geq \nu$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi/(4m)$, $0 < \eta \leq 3\pi/(4n)$, φ *— весовая на прямоугольнике* $[0, h] \times [0, \eta]$ *функция. Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq const}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \big(1 - \operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2} \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (1.3.12)$$

Доказательство. Неравенство (1.3.3) перепишем в виде

$$\Omega_{k,l}\big(f^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 \geq$$

$$\geq m^{r-\mu} n^{s-\nu} \Big\{2(1 - \operatorname{sinc} mt)\Big\}^{k/2} \Big\{2(1 - \operatorname{sinc} n\tau)\Big\}^{l/2} \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2. \quad (1.3.13)$$

Возведём обе стороны неравенства (1.3.13) в степень q, умножим на вес $\varphi(t, \tau)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $[0, h] \times [0, \eta]$. Полученное таким образом неравенство снова возведём в степень $1/q$. В итоге получим

$$\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq 2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \big(1 - \operatorname{sinc} mt\big)^{kq/2} \big(1 - \operatorname{sinc} n\tau\big)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q}.$$

Последнее неравенство верно для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ и из него сразу получаем оценку сверху для экстремальной характеристики, стоящей в левой части равенства (1.3.12):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}\le$$

$$\le\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc}mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \qquad (1.3.14)$$

Оценку снизу указанной экстремальной характеристики получаем для рассмотренной нами в предыдующей теореме функции $f_0\in L_2^{(r,s)}$, для которой имеют место равенства (1.3.5):

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}\ge$$

$$\ge\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_0^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f_0^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}m^\mu n^\nu}{2^{(k+l)/2}m^rn^s\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc}mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc}mt\big)^{kq/2}\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{-1/q}. \qquad (1.3.15)$$

Равенство (1.3.12) получаем из сопоставления оценки сверху (1.3.14) с оценкой снизу (1.3.15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.3.3.

Следствие 1.3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.3.3. *Тогда, если* $\varphi(t,\tau)=\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(\tau)$, *то*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(r,s)}\\ f\neq const}}\frac{2^{(k+l)/2}m^{r-\mu}n^{s-\nu}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi_1(t)\varphi_2(\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}=$$

$$=\left(\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc}mt\big)^{kq/2}\varphi_1(t)dt\right)^{-1/q}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^\eta\big(1-\operatorname{sinc}n\tau\big)^{lq/2}\varphi_2(\tau)d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (1.3.16)$$

В частности, из (1.3.16)*:*

а) при $\varphi_1=\varphi_2\equiv1$*;* $k=l$, $q=2/k$ *получаем:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{2^k m^{r-(\mu+k)}n^{s-(\nu+k)}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta\Omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2dtd\tau\right)^{k/2}}=$$

$$=\Big\{\big(mh-\operatorname{Si}(mh)\big)\big(n\eta-\operatorname{Si}(n\eta)\big)\Big\}^{-k/2}; \qquad (1.3.17)$$

б) при $\varphi_1(t)=t$, $\varphi_2(\tau)=\tau$, $k=l$, $q=2/k$, $r>\mu+k$, $s>\nu+k$ *имеем:*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{4^k m^{r-(\mu+k)}n^{s-(\nu+k)}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta t\tau\Omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2dtd\tau\right)^{k/2}}=$$

$$=\Big\{\big(mh/2\big)^2-\sin^2\big(mh/2\big)\Big\}^{-k/2}\Big\{\big(n\eta/2\big)^2-\sin^2\big(n\eta/2\big)\Big\}^{-k/2}. \qquad (1.3.18)$$

В частности, полагая в (1.3.18) $h=\pi/m$, $\eta=\pi/n$, *получаем*

$$\sup_{f\in L_2^{(r,s)}}\frac{4^k m^{r-(\mu+k)}n^{s-(\nu+k)}\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2}{\left(\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}t\tau\Omega_k^{2/k}\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2dtd\tau\right)^{k/2}}=\Big\{(\pi/2)^2-1\Big\}^{-k}.$$

§ 1.4. Решение одной экстремальной задачи для некоторых классов функций из $L_2^{(r,s)}$

Отметим, что поскольку для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$, $r, s \in \mathbb{N}$, её промежуточные производные $f^{(\mu,\nu)}$, $0 \leq \mu \leq r$, $0 \leq \nu \leq s$ также принадлежат классу $L_2^{(r,s)}$ (см., напр., [32]), то представляет несомненный интерес изучение поведения величины наилучшего совместного приближения $\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2$ на классе $L_2^{(r,s)}$ или на некотором подклассе $\mathfrak{M}^{(r,s)} \subset L_2^{(r,s)}$, то есть при любых $0 \leq \mu \leq r$, $0 \leq \nu \leq s$ требуется найти точное значение величины совместного приближения $\mathfrak{M}^{(r,s)}$:

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\big(\mathfrak{M}^{(r,s)}\big)_2 := \sup\Big\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r,s)}\Big\}. \tag{1.4.1}$$

Всюду далее через $W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)$ $(k, l \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \leq q \leq \infty)$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r,s)}$, для которых при всех $0 < h, \eta \leq 2\pi$ выполнено неравенство

$$\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 \varphi(t, \tau) dt d\tau \leq 1, \tag{1.4.2}$$

где φ — некоторая весовая функция, заданная на $[0, h] \times [0, \eta]$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.4.1. *Пусть $k, l \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \mu$, $s \geq \nu$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < h \leq 3\pi/(4m)$, $0 < \eta \leq 3\pi/(4n)$. Тогда*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\big(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)\big)_2 =$$

$$= \frac{1}{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu}} \left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \operatorname{sinc} mt)^{kq/2} (1 - \operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) dt d\tau\right)^{-1/q}. \tag{1.4.3}$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (1.3.14) для произвольной функции $f \in L_2^{(r,s)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq \mu$, $s \geq \nu$, вытекает, что

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 \le 2^{-(k+l)/2}\cdot m^{-(r-\mu)}n^{-(s-\nu)}\times$$

$$\times\frac{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta \Omega_{k,l}^q\big(f^{(r,s)};t,\tau\big)_2\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}\cdot(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}. \qquad (1.4.4)$$

Из (1.4.4) для произвольной функции $f\in W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi)$ получаем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f^{(\mu,\nu)}\big)_2 \le$$

$$\le \frac{2^{-(k+l)/2}\cdot m^{-(r-\mu)}n^{-(s-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}},$$

откуда и следует оценка сверху

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\big(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi)\big)_2 \le$$

$$\le \frac{2^{-(k+l)/2}\cdot m^{-(r-\mu)}n^{-(s-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}. \qquad (1.4.5)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу указанной величины, введём в рассмотрение функцию

$$f_1(x,y)=\frac{2^{-(k+l)/2}m^{-r}n^{-s}e^{i(mx+ny)}}{\left(\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2}\cdot(1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2}\varphi(t,\tau)dtd\tau\right)^{1/q}}. \qquad (1.4.6)$$

Для этой функции в силу равенств (1.1.20) и (1.3.2) имеем:

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_1^{(\mu,\nu)}\big)_2 =$$

$$= \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q}}; \qquad (1.4.7)$$

$$\Omega_{k,l}(f_1^{(r,s)}; t, \tau)_2 =$$

$$= \frac{(1-\operatorname{sinc} mt)^{k/2} \cdot (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{l/2}}{\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q}}.$$

Учитывая последнее равенство, получаем

$$\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta \Omega_{k,l}^q\big(f_1^{(r,s)}; t, \tau\big)_2 \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q} = 1. \qquad (1.4.8)$$

Равенство (1.4.8) означает, что функция $f_1 \in W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)$, а потому, в силу равенства (1.4.7), запишем оценку снизу

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\big(W_{k,l,q}^{(r,s)}(h,\eta;\varphi)\big)_2 \geq \mathscr{E}_{m-1,n-1}\big(f_1^{(\mu,\nu)}\big) =$$

$$= \frac{2^{-(k+l)/2} m^{-(r-\mu)} n^{-(s-\nu)}}{\left(\int\limits_0^h \int\limits_0^\eta (1-\operatorname{sinc} mt)^{kq/2} \cdot (1-\operatorname{sinc} n\tau)^{lq/2} \varphi(t,\tau) dt d\tau\right)^{1/q}}. \qquad (1.4.9)$$

Требуемое равенство (1.4.3) получаем из сравнения неравенств (1.4.5) и (1.4.9), чем и завершаем доказательство теоремы 1.4.1.

Следствие 1.4.1. *В условиях теоремы* 1.4.1 *при* $k = l$, $q = 2/k$, $h = \pi/(2m)$, $\eta = \pi/(2n)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $\varphi \equiv 1$, $r - \mu > 2k$, $s - \nu > 2k$ *справедливо равенство*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}^{(\mu,\nu)}\left(W_{k,k,k/2}^{(r,s)}\left(\frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)\right)_2 = \left\{\frac{mn}{(\pi/2) - \operatorname{Si}(\pi/2)}\right\}^{2k} \cdot \frac{1}{m^{r-\mu} n^{s-\nu}}.$$

Доказательство. В самом деле, полагая в двойном интеграле в правой части (1.4.3) $k = l$, $q = 2/k$, $h = \pi/(2m)$, $\eta = \pi/(2n)$, $k, l, m, n \in \mathbb{N}$, $\varphi \equiv 1$, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} mt)(1 - \operatorname{sinc} n\tau) dt d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/(2m)} (1 - \operatorname{sinc} mt) dt \int\limits_0^{\pi/(2n)} (1 - \operatorname{sinc} n\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{mn} \left\{ \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sinc} t) dt \right\}^2 = \frac{1}{mn} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)^2.$$

Подставив полученное значение двойного интеграла в правую часть (1.4.3), получаем утверждение следствие 1.4.1.

ГЛАВА II. Среднеквадратическое наилучшее приближение с весом Чебышева некоторых классов функций двух переменных алгебраическими «углами»

В данной главе решен ряд экстремальных задач среднеквадратических приближений некоторых классов функций алгебраическими «углами» в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$, где $Q := \{(x, y) : -1 \leq x, y \leq 1\}$, $\mu := \mu(x, y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ — двумерная весовая функция Чебышева. Следует отметить, что в пространстве $L_{2,\mu}$ задачи приближения функций двух переменных "круговыми" частичными суммами изучены в работе В.А.Абилова и М.К.Керимова [2], где получены некоторые асимптотически точные оценки и дано их приложение в теории кубатурных формул чебышевского типа.

Известно, что в вопросах сходимости тригонометрических рядов Фурье периодических функций важную роль играет оператор сдвига $T_h f(x) = f(x+h)$ и определяемые с его помощью модули непрерывности различных порядков. В аналогичных вопросах, связанных со сходимостью рядов Фурье по различным ортогональным полиномам и по специальным функциям (Бесселя, Ханкеля и др.), такую же роль играют операторы обобщённого сдвига и порождённые ими обобщённые модули непрерывности (см., например, [2, 16, 17, 36, 37]).

В данной главе аппарат обобщённого сдвига позволил получить ряд точных результатов при решении экстремальных задач приближения функций двух переменных алгебраическими «углами».

§ 2.1. О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами»

В этом параграфе найдены точные верхние грани наилучшего среднеквадратического приближения некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами» в метрике гильбертова пространства $L_{2,\mu}(Q) := L_{2,\mu(x,y)}(Q)$, $Q := \{(x,y) : -1 \leq x, y \leq 1\}$ с весом Чебышева $\mu := \mu(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

Предварительно введём некоторые определения и обозначения:

1.1.1. Пусть $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$ — пространство суммируемых с квадратом функций $f(x,y)$ двух переменных в квадрате $Q = \{(x,y) := -1 \leq x, y \leq 1\}$ с весом Чебышева

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

и нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}(Q)} = \left(\iint\limits_{(Q)} \mu(x,y) f^2(x,y)\,dxdy\right)^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\mu}$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} F_h(f) = F_h f(x,y) = \frac{1}{4}\Big[& f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\right) + \\ & + f\left(x\cos h + \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\right) + \\ & + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h + \sqrt{1-y^2}\sin h\right) + \\ & + f\left(x\cos h - \sqrt{1-x^2}\sin h, y\cos h - \sqrt{1-y^2}\sin h\right)\Big], \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

который будем называть *оператором обобщённого сдвига.*

Пусть

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x),\ n = 1, 2, \ldots$$

— ортонормированная система многочленов Чебышева [24, с.75-115] в пространстве $L_{2,\mu}$ и

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y) \tag{2.1.2}$$

— двойной ряд Фурье–Чебышева функции $f \in L_{2,\mu}$, где

$$c_{kl}(f) = \iint\limits_{(Q)} \mu(x,y)f(x,y)T_k(x)T_l(y) \tag{2.1.3}$$

— коэффициенты Фурье–Чебышева функции f.

Символом $L_{2,\mu(x)}[-1,1]$, где $\mu(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, обозначим пространство измеримых функций одного переменного f таких, что $f(x)\cdot\mu^{1/2}(x)$ суммируемы на отрезке $[-1,1]$ с квадратом модуля. Аналогичный смысл имеет пространство $L_{2,\mu(y)}[-1,1]$.

Пусть $U_{m+1} \in L_{2,\mu(x)}[-1,1]$ и $V_{n+1} \subset L_{2,\mu(y)}[-1,1]$ — конечномерные подпространства с базисами $\{T_k(x)\}_{k=0}^{m}$ и $\{T_l(y)\}_{l=0}^{n}$ соответственно. Полагая $\mu(x,y) := \mu(x)\cdot\mu(y)$ в пространстве $L_{2,\mu(x,y)}(Q)$, рассмотрим множество функций

$$G(U_{m+1},V_{n+1}) := L_{2,\mu(x)}[-1,1]\otimes U_{m+1} \oplus L_{2,\mu(y)}[-1,1]\otimes V_{n+1}, \tag{2.1.4}$$

где символами “$\otimes$” и “$\oplus$” обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (2.1.4) представимы в виде

$$g_{m,n}(x,y) := \sum_{k=0}^{m}\varphi_k(y)T_k(x) + \sum_{l=0}^{n}\psi_l(x)T_l(y), \tag{2.1.5}$$

где $\{\varphi_k(y)\}_{k=0}^{m} \subset U_{m+1}$ и $\{\psi_l(x)\}_{l=0}^{n} \subset V_{n+1}$ — произвольные наборы функций из соответствующих подпространств. Следуя работе М.К.Потапова [19], функцию (2.1.5) назовём алгебраическим «углом» и используем её с целью аппроксимации функции $f(x,y) \in L_{2,\mu}(Q)$ линейными комбинациями функций $f_i(x) \in L_{2,\mu(x)}[-1,1]$ $(i = \overline{1,m})$ и $f_j(y) \in L_{2,\mu(y)}[-1,1]$ $(j = \overline{1,n})$. Далее мы при получении основных результатов воспользуемся схемой рассуждений, приведённой в работах [10, 12, 21, 30, 31].

1.1.2. Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ символом $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}$ обозначим её наилучшее приближение элементами (2.1.5) из множества (2.1.4) в пространстве $L_{2,\mu}(Q)$, то есть требуется найти величину

$$\mathcal{E}_{m,n}(f)_{2,\mu} := \inf\left\{\|f - g_{m,n}\|_2 : g_{m,n} \in G(U_{m+1}, V_{n+1})\right\}. \tag{2.1.6}$$

Через

$$S_{m,n}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y)$$

обозначим частную сумму порядка m по x и порядка n по y, ряда (2.1.2) а через

$$S_{m,\infty}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y),$$

$$S_{\infty,n}(f;x,y) = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y)$$

— отрезки ряда (2.1.2) функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ порядка m по x и n по y соответственно в смысле сходимости в метрике $L_{2,\mu}(Q)$.

Функцию

$$\begin{aligned}\sigma_{m,n}(f;x,y) &:= S_{m,\infty}(f;x,y) + S_{\infty,n}(f;x,y) - S_{m,n}(f;x,y) = \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y) + \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} c_{kl}(f)T_k(x)T_l(y)\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

будем называть *обобщённым полиномом* Фурье–Чебышева функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$ порядка m по x и порядка n по y.

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 2.1.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $f \in L_{2,\mu}(Q)$ *— произвольная функция. Тогда среди всех элементов* $g_{m-1,n-1}$ *вида* (2.1.5), *принадлежащих множеству* $G(U_{m+1}, V_{n+1})$, *наилучшее приближение функции* f *доставляет её обобщённый полином* (2.1.7) *порядка* $m-1$ *по* x *и* $n-1$ *по* y. *При этом*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - \sigma_{m-1,n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{2.1.8}$$

Доказательство. Сначала убедимся, что на самом деле

$$\left\| f(x,y) - \sigma_{m-1,n-1}(f;x,y) \right\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(f). \tag{2.1.9}$$

Для этого заметим, что если в смысле сходимости в метрике $L_{2,\mu}(Q)$ имеет место равенство (2.1.2):

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y),$$

то (2.1.2) представима в виде

$$f(x,y) = \sigma_{m-1,n-1}(f;x,y) + \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y),$$

или, что то же,

$$f(x,y) - \sigma_{m-1,n-1}(f;x,y) = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}(f) T_k(x) T_l(y). \tag{2.1.10}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (2.1.10), получаем равенство (2.1.9). Докажем, что действительно имеет место (2.1.10). Возьмём теперь произвольный элемент $g_{m-1,n-1} \in G(U_{m-1}, V_{n-1})$ вида (2.1.5). Заметим, что поскольку $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{m-1} \subset L_{2,\mu(x)}[-1,1]$ и $\{\psi_l(y)\}_{l=0}^{n-1} \subset L_{2,\mu(y)}[-1,1]$, то в смысле сходимости в метриках этих пространств имеют место следующие равенства

$$\varphi_k(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(\varphi_k) T_l(x), \ k = \overline{0, m-1}; \tag{2.1.11}$$

$$\psi_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\psi_l) T_k(y), \; l = \overline{0, n-1}; \tag{2.1.12}$$

Из равенств (2.1.5), (2.1.11) и (2.1.12), в смысле сходимости в метрике $L_{2,\mu(x,y)}(Q)$ получаем соотношение

$$g_{m-1,n-1}(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\infty} c_l(\varphi_k) T_k(x) T_l(y) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} c_k(\psi_l) T_k(x) T_l(y). \tag{2.1.13}$$

Так как $L_{2,\mu(x,y)}(Q)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, q) := \iint\limits_{(Q)} \mu(x,y) f(x,y) q(x,y) dxdy,$$

где $f, q \in L_{2,\mu(x,y)}(Q)$ и $\|f\|_{2,\mu} := (f,f)^{1/2}$ является полным пространством, то запишем

$$\|f - g_{m-1,n-1}\|_{2,\mu}^2 := (f - g_{m-1,n-1}, f - g_{m-1,n-1}) =$$

$$= \|f\|_{2\mu}^2 - 2(f, g_{m-1,n-1}) + \|g_{m-1,n-1}\|_{2\mu}^2. \tag{2.1.14}$$

Пользуясь соотношениями (2.1.2) и (2.1.13), будем иметь

$$\|f - g_{m-1,n-1}\|_{2,\mu}^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl}^2(f) - 2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\infty} c_l(\varphi_k) c_{kl}(f) -$$

$$-2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} c_k(\psi_l) c_{kl}(f) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{\infty} c_l^2(\varphi_k) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} c_k^2(\psi_l) + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} c_k(\psi_l) c_l(\varphi_k) =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(f) + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=n}^{\infty} \left(c_{kl}(f) - c_l(\varphi_k)\right)^2 +$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\big(c_{kl}(f)-c_k(\psi_l)\big)^2+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}\big(c_{kl}(f)-c_k(\psi_l)-c_l(\varphi_k)\big)^2. \tag{2.1.15}$$

Из равенства (2.1.15) следует, что в соотношении

$$\inf\left\{\|f-g_{m-1,n-1}\|_{2,\mu} : g_{m-1,n-1}\in G(U_m,V_n)\right\}$$

нижняя грань достигается только лишь в случае, когда

$$c_{kl}(f)=c_l(\varphi_k),\quad \text{где}\ \ k=\overline{0,m-1};\ l=n,n+1,\ldots;$$

$$c_{kl}(f)=c_k(\psi_l),\quad \text{где}\ \ l=\overline{0,n-1};\ k=m,m+1,\ldots; \tag{2.1.16}$$

$$c_{kl}(f)=c_k(\psi_l)+c_l(\varphi_k),\quad \text{где}\ \ k=\overline{0,m-1};\ l=\overline{0,n-1}.$$

При этом из (2.1.15) сразу следует равенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}=\left\{\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}c_{kl}^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Выразив коэффициенты $c_k(\psi_l)$ и $c_l(\varphi_k)$ их выражениями из (2.1.16) через коэффициенты $c_{kl}(f)$ и подставляя в правую часть формулу (2.1.13), мы получаем явный вид обобщённого полинома Фурье–Чебышева (2.1.7), чем и завершаем доказательство теоремы 2.1.1.

По одномерным операторам Чебышева второго порядка

$$\mathcal{D}_x := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-x\frac{\partial}{\partial x},\quad \mathcal{D}_y := (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-y\frac{\partial}{\partial y},$$

введём двумерный оператор второго порядка Чебышева следующего вида

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_x+\mathcal{D}_y := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}$$

и через $L_{2,\mu}^{(r)} := L_{2,\mu(x,y)}^{(r)}(Q,\mathcal{D})$ ($r\in\mathbb{N}, L_{2,\mu}^{(0)} := L_{2,\mu(x,y)}$) обозначим класс функций $f(x,y)\in L_{2,\mu}(Q)$, у которых частные производные $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^k\partial y^l}$, $k+l=m, m=$

$1, 2, \ldots, 2r$ принадлежат также пространству $L_{2,\mu}(Q)$. При этом, как обычно, полагаем

$$\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1} f) \in L_{2,\mu}(Q), \quad \mathcal{D}^1 f := \mathcal{D} f; \quad \mathcal{D}^0 f = f, \quad L_{2,\mu}^{(0)}(Q, \mathcal{D}) = L_{2,\mu}(Q).$$

В этих обозначениях имеет место следующая

Теорема 2.1.2. *При любых $m, n, r \in \mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} = \frac{1}{(m^2+n^2)^r}. \tag{2.1.17}$$

Доказательство. Заметим, что если в (2.1.8) функцию f заменить на $D^r f$, то получаем равенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} =$$

$$= \|\mathcal{D}^r f - \sigma_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)\|_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) \right\}^{1/2}, \tag{2.1.18}$$

которым воспользуемся далее. В [2] доказано, что для коэффициентов $c_{kl}(f)$ Фурье–Чебышева произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ имеет место равенство

$$c_{kl}(f) = (-1)^r (k^2 + l^2)^{-r} c_{kl}(\mathcal{D}^r f), \quad k, l, r \in \mathbb{N}. \tag{2.1.19}$$

Учитывая (2.1.18), (2.1.19), из (2.1.8) получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu} = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{k,m}^2(f) = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} (k^2+l^2)^{-2r} c_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) \leq$$

$$\leq (m^2+n^2)^{-2r} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(\mathcal{D}^r f) = (m^2+n^2)^{-2r} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu},$$

откуда для величины, стоящей в левой части (2.1.17), получаем оценку сверху

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} \leq \frac{1}{(m^2+n^2)^r}. \tag{2.1.20}$$

С целью получения аналогичной оценки снизу той же величины рассмотрим функцию $f_0(x,y) = T_m(x)T_n(y)$, которая очевидно принадлежит классу $L_{2,\mu}^{(r)}$. Из (2.1.8) следует, что $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1$, и, так как

$$c_{m,n}(f_0) \equiv 1, \quad \mathcal{D}^r(f_0) = (-1)^r(m^2+n^2)^r T_m(x)T_n(y),$$

то в силу (2.1.18) $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu} := (m^2+n^2)^r$, а потому для величины в левой части (2.1.17), имеем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} \geq \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f_0)_{2,\mu}} = \frac{1}{(m^2+n^2)^r}. \tag{2.1.21}$$

Сопоставляя оценку сверху (2.1.20) с оценкой снизу (2.1.21), получаем требуемое равенство (2.1.17). Теорема 2.1.2 доказана.

§ 2.2. Среднеквадратическое наилучшее приближение с весом Чебышева некоторых классов функций двух переменных, связанных с обобщённым модулем непрерывности

В этом параграфе найдены некоторые точные неравенства между наилучшими приближениями функций двух переменных алгебраическими «углами» и усредненными значениями смешанных модулей непрерывности двух переменных r-ых производных $\mathcal{D}^r f$ $(r \in \mathbb{N})$, где $\mathcal{D}$ — дифференциальный оператор второго порядка Чебышева в метрике пространства $L_{2,\mu}(Q)$, $Q = \{(x,y) := -1 \le x, y \le 1\}$ с весом Чебышева $\mu(x,y) = 1/\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$.

По-прежнему обозначим в пространстве $L_{2,\mu} := L_{2,\mu}(Q)$ оператор $F_h(f) := F_h f(x,y)$, определённый равенством (2.1.1). Символом $F_t^x(f)$ (соответственно $F_t^y(f)$) обозначим действие оператора обобщенного сдвига (2.1.1) на функцию $f \in L_{2,\mu}$ как на функцию от переменной x (соответственно y) при фиксированном значении переменной y (соответственно x). При этом полагаем

$$F_t^{\nu,x}(f) := F_t^{1,x}(F_t^{\nu-1,x}(f)),$$

где $\nu \in N$, $F_t^{0,x}(f) = f$, $F_t^{1,x}(f) = F_t^x(f)$.

Аналогичным образом полагаем

$$F_\tau^{\mu,y}(f) := F_\tau^{1,y}(F_\tau^{\mu-1,y}(f)),$$

где $\mu \in \mathbb{N}$, $F_\tau^{0,y}(f) := f$, $F_\tau^{1,y}(f) := F_\tau^y(f)$. Определим обобщенные конечные разности первого и высших порядков по переменной x, используя оператор (2.1.1). Полагаем

$$\Delta_t^x(f) := F_t^x(f) - (f) = (F_t^x - \mathbb{I})f,$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\mu}(Q)$, и для $k \ge 2$, $k \in \mathbb{N}$, запишем общую формулу

$$\Delta_t^{k,x}(f) := \Delta_t^{1,x}(\Delta_t^{k-1,x}(f)) = (F_t^x - \mathbb{I})^k f = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-1}\binom{k}{i}F_t^{i,x}(f). \quad (2.2.1)$$

Аналогично для $l \geq 2$, $l \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\Delta_\tau^{l,y}(f) := \Delta_\tau^{1,y}(\Delta_\tau^{l-1,y}(f)) = (F_\tau^y - \mathbb{I})^l f = \sum_{j=0}^{l}(-1)^{l-j}\binom{l}{j}F_\tau^{j,x}(f). \quad (2.2.2)$$

Из соотношений (2.2.1) и (2.2.2), следуя схеме рассуждений [2, 4], запишем

$$\Delta_t^x(\Delta_\tau^y(f)) = \Delta_t^x(F_\tau^y(f) - f) = \Delta_t^x(F_\tau^y - (f)) - \Delta_t^x(f) =$$

$$= F_t^x(F_\tau^y) - F_\tau^y(f) - F_t^x(f) + f = (F_t^x - \mathbb{I})(F_\tau^y - \mathbb{I})f,$$

и для введенных смешанных конечных разностей по x и по y высших порядков получаем

$$\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f)) = \Delta_t^{1,x}\big(\Delta_t^{k-1,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f))\big) =$$

$$= \Delta_\tau^{k,x}\big(\Delta_\tau^{1,y}(\Delta_\tau^{l-1,y}(f))\big) = (F_t^x - \mathbb{I})^k(F_\tau^y - \mathbb{I})^l f =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}(-1)^{k+l-(i+j)}\binom{k}{i}\binom{l}{j}F_t^{i,x}(F_\tau^{j,y}(f)).$$

Из этого равенства сразу следует, что

$$\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y})(f) = \Delta_\tau^{l,y}(\Delta_t^{k,x}(f)).$$

Величину

$$\Omega_{k,l}(f;\delta,\eta)_{2,\mu} = \sup\Big\{\big\|\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f))\big\|_{2,\mu} : |t| \leq \delta, |\tau| \leq \eta\Big\}, \quad (2.2.3)$$

где $0 \leq \delta, \eta \leq 2$, будем называть *обобщённым смешанным модулем непрерывности* порядка k по x и порядка l по y функции $f \in L_{2,\mu}(Q)$.

Пусть далее $T_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $T_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x), n = 1, 2, \ldots$ есть ортонормированная система многочленов Чебышева (см. [24, с.91]) в пространстве $L_{2,\mu} := L_2((-1,1), (\sqrt{1-x^2})^{-1})$ и

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c_{ij}(f)T_i(x)T_j(y)$$

— двойной ряд Фурье–Чебышева, где по-прежнему

$$c_{ij}(f)=\iint\limits_{(Q)}\mu(x,y)f(x,y)T_i(x)T_j(y)dxdy.$$

Следуя схеме рассуждений, приведенной в [2, 14, 15], легко доказать, что для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}$ в смысле сходимости в метрике $L_{2,\mu}(Q)$ имеет место равенство

$$\Delta_t^{k,x}(\Delta_\tau^{l,y}(f);x,y)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}c_{ij}(f)(\cos it-1)^k(\cos j\tau-1)^lT_i(x)T_j(y). \tag{2.2.4}$$

Из (2.2.3), учитывая соотношение (2.2.4) в силу условия ортогональности системы функций $\left\{T_k(x)\cdot T_l(y)\right\}_{k,l=0}^{\infty}$, после несложных вычислений получаем

$$\Omega_{k,l}(f;\delta,\eta)_{2,\mu}:=\sup_{\substack{|t|\le\delta\\|\tau|\le\eta}}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(1-\cos it)^{2k}(1-\cos j\tau)^{2l}c_{ij}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{2.2.5}$$

Далее при $k=l$ полагаем $\Omega_{k,k}(f;\delta,\eta)_{2,\mu}:=\Omega_k(f;\delta,\eta)_{2,\mu}$.

Пусть по-прежнему

$$\mathcal{D}:=(1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}-x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}$$

— дифференциальный оператор второго порядка Чебышева.

В [2] доказано, что для коэффициентов Фурье–Чебышева произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}:=L_{2,\mu}^{(r)}(Q,\mathcal{D})$ имеет место равенство

$$c_{ij}(f)=(-1)^r(i^2+j^2)^{-r}c_{ij}(\mathcal{D}^rf),\quad i,j,r\in\mathbb{N}. \tag{2.2.6}$$

Учитывая формулу (2.2.6), из равенства (2.2.4) получаем

$$\Delta_t^{k,x}\bigl(\mathcal{D}_\tau^{l,y}(\mathcal{D}^rf);x,y\bigr)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_{ij}(\mathcal{D}^rf)(\cos t-1)^k(\cos j\tau-1)^lT_i(x)T_j(y)=$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^r(i^2+j^2)^r(\cos it-1)^k(\cos j\tau-1)^l c_{ij}(f)T_i(x)T_j(y). \qquad (2.2.7)$$

Из соотношения (2.2.3), в силу формулы (2.2.7), получаем

$$\Omega_{k,l}(\mathcal{D}^r f;\delta,\eta) :=$$

$$:= \sup_{|t|\le\delta}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(i^2+j^2)^{2r}(1-\cos it)^{2k}(1-\cos j\tau)^{2l}c_{ij}^2(f)\right\}^{1/2}. \qquad (2.2.8)$$

Сформулируем и докажем следующее утверждение

Теорема 2.2.1. *Для любых* $m,n\in\mathbb{N}$*, удовлетворяющих неравенства* $0\le mu\le\pi/2$, $0<nv\le\pi/2$, *при любом* $k,r\in\mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}=$$

$$=\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \qquad (2.2.9)$$

Существует функция $f_0(x,y)\in L_{2,\mu}^{(r)}$*, для которой верхняя грань достигается в соотношении* (2.2.9).

Доказательство. Сначала докажем, что для любой функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$ имеет место неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu}-\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(\cos it+\cos j\tau-\cos it\cdot\cos j\tau)c_{ij}^2(f)\le$$

$$\le(m^2+n^2)^{-2r}(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}. \qquad (2.2.10)$$

В самом деле, если полагать в (2.2.8) $k=l$, то имеем

$$\Omega_k^2(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}=$$

$$=\sup_{|h|\le t}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(i^2+j^2)^{2r}(1-\cos ih)^{2k}(1-\cos j\eta)^{2k}c_{ij}^2(f).$$

Используя неравенство Гёльдера для двойных сумм (1.2.4), получаем

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}-\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(\cos it+\cos j\tau-\cos it\cdot\cos j\tau)c^2_{ij}(f)=$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(1-\cos it-\cos j\tau+\cos it\cdot\cos j\tau)c^2_{ij}(f)=$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(1-\cos it)\cdot(1-\cos j\tau)c^2_{ij}(f)=$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(c^2_{ij}(f))^{1-1/(2k)}\cdot(c^2_{ij}(f))^{1/(2k)}(1-\cos it)(1-\cos j\tau)\leq$$

$$\leq\left(\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}c^2_{ij}(f)\right)^{1-1/(2k)}\left(\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(1-\cos it)^{2k}(1-\cos j\tau)^{2k}c^2_{ij}(f)\right)^{1/(2k)}=$$

$$=\left(\mathcal{E}_{m-1,n-1(f)_{2,\mu}}\right)^{2-1/k}\left(\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(i^2+j^2)^{-2r}(i^2+j^2)^{2r}\times\right.$$

$$\left.\times(1-\cos it)^{2k}(1-\cos j\tau)^{2k}c^2_{ij}(f)\right)^{1/(2k)}\leq$$

$$\leq(m^2+n^2)^{-r/k}\left(\mathcal{E}_{m-1,n-1(f)_{2,\mu}}\right)^{2-1/k}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu},$$

откуда и следует неравенство (2.2.10). Интегрируя обе части неравенства (2.2.10) по прямоугольнику $(0\leq t\leq u, 0\leq\tau\leq v)$ и поделив полученное соотношение на $u\cdot v$, будем иметь

$$\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}-\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\left(\frac{\sin iu}{iu}+\frac{\sin jv}{jv}-\frac{\sin iu}{iu}\cdot\frac{\sin jv}{jv}\right)c^2_{ij}(f)\leq$$

$$\leq(m^2+n^2)^{-r/k}(\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^rf;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau. \qquad (2.2.11)$$

Теперь заметим, что при $0<mu\leq\pi/2$, $0<nv\leq\pi/2$ имеет место равенство [29]

$$\max\left\{\left|\frac{\sin t}{t}+\frac{\sin\tau}{\tau}-\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\sin\tau}{\tau}\right|:t\geq mu,\tau\geq nv\right\}=$$

$$
=\frac{\sin mu}{mu}+\frac{\sin nv}{nv}-\frac{\sin mu}{mu}\cdot\frac{\sin nv}{nv}. \tag{2.2.12}
$$

Воспользовавшись соотношением (2.2.12), из (2.2.11) получаем

$$
\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}-\left(\frac{\sin mu}{mu}+\frac{\sin nv}{nv}-\frac{\sin mu}{mu}\cdot\frac{\sin nv}{nv}\right)\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}c^2_{ij}(f)\le
$$

$$
\le\left(m^2+n^2\right)^{-r/k}\left(\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{2-1/k}\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau
$$

или, что то же,

$$
\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\cdot\left(1-\frac{\sin mu}{mu}\right)\left(1-\frac{\sin nv}{nv}\right)\le
$$

$$
\le(m^2+n^2)^{-r/k}(\mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau,
$$

откуда запишем

$$
(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\le
$$

$$
\le\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k\cdot\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k. \tag{2.2.13}
$$

Из неравенства (2.2.13) для произвольной функции $f\in L^{(r)}_{2,\mu}$ получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.2.9):

$$
\sup_{f\in L^{(r)}_{2,\mu}}\frac{(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}\le
$$

$$
\le\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \tag{2.2.14}
$$

Для получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию

$$
f_0(x,y)=T_m(x)T_n(y)\in L^{(r)}_{2,\mu},
$$

и в силу формул (2.1.8) и (2.2.8) получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu} = 1, \tag{2.2.15}$$

$$\Omega_k(\mathcal{D}^r f_0; t, \tau)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^r (1-\cos mt)^k (1-\cos n\tau)^k. \tag{2.2.16}$$

Интегрируя равенство (2.2.16) в прямоугольнике $[o,u]\times[o,v]$, имеем

$$\int\limits_0^u \int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0, t, \tau)_{2,\mu} dt d\tau =$$

$$= (m^2+n^2)^{r/k} \frac{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}{mn}. \tag{2.2.17}$$

Воспользовавшись полученными равенствами, запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r\cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u \int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} \geq$$

$$\geq \frac{(m^2+n^2)^r\cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u \int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0; t, \tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} =$$

$$= \frac{(m^2+n^2)^r}{(m^2+n^2)^r\left\{\int\limits_0^u \int\limits_0^v (1-\cos mt)(1-\cos n\tau) dt d\tau\right\}^k} =$$

$$= \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \tag{2.2.18}$$

Требуемое равенство (2.2.9) вытекает из сопоставления оценки сверху (2.2.14) с оценкой снизу (2.2.18), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.1.

Отметим, что теорема 2.2.1 является обобщением одного результата С.Б.Вакарчука [8, теорема 1], полученной для приближения периодической функции одной переменной $f \in L^{(r)}[0,2\pi]$ на случай наилучшего приближения функций двух переменных $f(x,y)$ алгебраическим «углом» класса $L_{2,\mu}^{(r)}(Q,\mathcal{D})$.

Из теоремы 2.2.1 вытекает

Следствие 2.2.1. *В условиях теоремы* 2.2.1 *при* $u = \pi/(2m)$, $v = \pi/(2n)$, $m,n,k,r \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2,\mu}{\left\{ mn \int\limits_0^{\pi/(2m)} \int\limits_0^{\pi/(2n)} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau \right\}^k} = \left(\frac{2}{\pi-2}\right)^{2k}.$$

Теорема 2.2.2. *Для любых* $m,n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих неравенствам* $0 < mt \le \pi$, $0 < n\tau \le \pi$, *при любых* $k,r \in \mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r (mn)^{-k} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{ \int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau \right\}^k} = \frac{1}{4^k}. \tag{2.2.19}$$

Доказательство. Умножив обе части неравенства (2.2.10) на функцию $\sin mt \sin n\tau$ и интегрируя полученное соотношение по прямоугольнику $\{0 \le t \le \pi/m,\ 0 < \tau \le \pi/n\}$, получаем

$$\frac{4}{mn}\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu} - \sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{2}{n} \int\limits_0^{\pi/m} \cos it \sin mt dt + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{m} \int\limits_0^{\pi/n} \cos j\tau \sin n\tau d\tau - \int\limits_0^{\pi/m} \cos it \sin mt dt \int\limits_0^{\pi/n} \cos j\tau \sin n\tau d\tau \right) \le$$

$$\le \frac{1}{(m^2+n^2)^{r/k}} \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{2-1/k} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau. \tag{2.2.20}$$

Заметим, что при любых μ, ν, $\mu \geq \nu$

$$\int\limits_0^{\pi/\nu} \cos \mu u \sin \nu u du = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = \nu, \\ -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{2\nu}{\mu^2 - \nu^2} \cos^2\left(\dfrac{\nu\pi}{2\mu}\right), & \text{если } \mu > \nu, \end{cases}$$

поэтому второе слагаемое в левой части неравенства (2.2.22) является положительным, и если мы его опускаем, то только усиливаем указанное неравенство. Таким образом, для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$

$$\frac{4}{mn} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(m^2+n^2)^{r/k}} \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\right)^{2-1/k} \int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau,$$

откуда сразу следует, что

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \left(\frac{mn}{4(m^2+n^2)^{r/k}}\right)^k \left(\int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau\right)^k. \tag{2.2.21}$$

Из полученного неравенства следует оценка сверху величины, стоящей в левой части (2.2.19):

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r (mn)^{-k} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau\right\}^k} \leq \frac{1}{4^k}. \tag{2.2.22}$$

Для получения аналогичной оценки снизу указанной величины введём ранее рассмотренную нами функцию

$$f_0(x,y) = T_m(x) T_n(y) \in L_{2,\mu}^{(r)},$$

для которой имеют места равенства (2.2.15) и (2.2.16). Заметим, что пользуясь равенством (2.2.16) имеем

$$\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau=$$

$$=(m^2+n^2)^{r/k}\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}(1-\cos mt)(1-\cos n\tau)\sin mt\sin n\tau dtd\tau=$$

$$=(m^2+n^2)^{r/k}(4/mn).$$

Воспользовавшись последним равенством и (2.2.15), получаем нужную оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r(mn)^{-k}\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}\geq$$

$$\geq\frac{(m^2+n^2)^r(mn)^{-k}\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}=$$

$$=\frac{(m^2+n^2)^r\,(mn)^{-k}\cdot 1}{(m^2+n^2)^r(4/mn)^k}=\frac{1}{4^k}. \tag{2.2.23}$$

Требуемое равенство (2.2.19) получаем из сопоставления неравенств (2.2.22) и (2.2.23). Теорема 2.2.2 доказана.

Отметим, что доказанная теорема 2.2.2 является обобщением известного результата В.В.Шалаева [38] о точном неравенстве, связывающем величину наилучшего полиномиального приближения периодических дифференцируемых функций одной переменной $f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]$ с интегралом, содержащим усреднённое значение модуля непрерывности высшего порядка

$\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2$, на случай наилучшего приближения функций двух переменных $f(x,y) \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ алгебраическими «углами» с интегралами, содержащими усреднённое значение модулей непрерывности $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_2$.

Из теоремы 2.2.2 вытекает

Следствие 2.2.2. *При всех $k, m, n, r \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ справедливо неравенство типа Джексона–Стечкина*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq (m^2+n^2)^{-r}\Omega_k\left(f^{(r,s)}; \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right)_{2,\mu}. \qquad (2.2.24)$$

Но, если функция $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu}$ для любых $k, m, n, r \in \mathbb{N}$ и $t, \tau \in [\pi/m, \pi/n]$ удовлетворяет условию

$$2\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; \pi/(2m), \pi/(2n))_{2,\mu} \geq$$
$$\geq \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} + \Omega_k^{1/k}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{m} - t, \frac{\pi}{n} - \tau\right)_{2,\mu}, \qquad (2.2.25)$$

то неравенство (2.2.24) можно уточнить.

В этом случае справедлива следующая

Теорема 2.2.3. *На множестве функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, у которых функция $\Omega_k^{1/k}(D^r f; t, \tau)_{2,\mu}$ удовлетворяет условию (2.2.25), выполняется точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq (m^2+n^2)^{-r}\Omega_k\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu} \qquad (2.2.26)$$

в том смысле, что существует функция $f_1 \in L_{2,\mu}^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Действительно, если выполняется неравенство (2.2.25), то имеем

$$\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; u, v)_{2,\mu} \sin mu \sin nv du dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\left[\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; u, v)_{2,\mu} + \Omega_k^{1/k}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{m} - t, \frac{\pi}{n} - \tau\right)_{2,\mu}\right] \times$$

$$\times \sin mu \sin nv du dv \le \frac{4}{mn}\,\Omega_k^{1/k}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}. \tag{2.2.27}$$

Учитывая неравенство (2.2.27), из (2.2.21) получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \le$$

$$\le \frac{(mn)^k}{(m^2+n^2)^r}\left\{\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; u, v)_{2,\mu}\sin mt \sin n\tau dt d\tau\right\}^k \le$$

$$\le \frac{(mn)^k}{(m^2+n^2)^r}\left\{\frac{1}{mn}\,\Omega_k^{1/k}\left(\mathcal{D}^r f; \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right)_{2,\mu}\right\}^{1/k} =$$

$$= (m^2+n^2)^{-r}\Omega_k\big(\mathcal{D}^r f; \pi/(2m), \pi/(2n)\big)_{2\mu}$$

и неравенство (2.2.26) доказано.

Докажем, что для функции $f_1(x,y) = (m^2+n^2)^{-r}$, для которой

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-r},$$

$$\Omega_k(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} = (1-\cos mt)^k(1-\cos n\tau)^k, \tag{2.2.28}$$

$$\Omega_k\big(\mathcal{D}^r f_1; \pi/(2m), \pi/(2n)\big)_{2\mu} = 1,$$

неравенство (2.2.26) обращается в равенство. В самом деле, учитывая равенства (2.2.28), получаем

$$(m^2+n^2)^{-r}\,\Omega_k\big(\mathcal{D}^r f_1; \pi/(2m), \pi/(2n)\big)_{2\mu} = (m^2+n^2)^{-r} = \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{2,\mu},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.2.3.

Из теоремы 2.2.3 вытекает

Следствие 2.2.3. *В условиях теоремы* 2.2.3 *при всех* $k, m, n, r \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\Omega_k\big(\mathcal{D}^r f; \pi/(2m), \pi/(2n)\big)_{2,\mu}} = 1.$$

Теорема 2.2.4. *Для любых $m,n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенства $0\le mh\le\pi$, $0\le n\eta\le\pi$, при любых $k,r\in\mathbb{N}$, справедливы равенства*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\,\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)_{2,\mu}dudv\right\}^k}=$$

$$=\left(\frac{h\eta}{2}\right)^{2k}\left(1-\left(\frac{2}{mh}\sin\frac{mh}{2}\right)^2\right)^{-k}\left(1-\left(\frac{2}{n\eta}\sin\frac{n\eta}{2}\right)^2\right)^{-k}. \qquad (2.2.29)$$

Существует функция $f_0(x,y)\in L_{2,\mu}^{(r)}$, реализующая знак равенства в (2.2.29).

Доказательство. Умножим обе части неравенства (2.2.11) на $u.v$ и интегрируем по u от 0 до h и по v от 0 до η и поделим обе части полученного неравенства на $(h^2\cdot\eta^2)/4$, в результате приходим к следующему неравенству

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu}-\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}c_{ij}^2(f)\times$$

$$\times\left(\frac{2(1-\cos ih)}{(ih)^2}+\frac{2(1-\cos i\eta)}{(j\eta)^2}-\frac{4(1-\cos ih)(1-cosj\eta)}{(i\eta)^2\cdot(j\eta)^2}\right)\le$$

$$\le(m^2+n^2)^{-r/k}\cdot(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2\mu})^{2-1/k}\cdot\frac{4}{h^2\eta^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\,\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)dudv.$$

Отсюда, как и в теореме 2.2.1, получаем

$$\left(1-\left(\frac{2}{mh}\sin\frac{mh}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{n\eta}\sin\frac{\eta}{2}\right)^2\right)\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu}\le$$

$$\le(m^2+n^2)^{-r/k}\cdot(\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(f)_{2,\mu})^{2-1/k}\times$$

$$\times\frac{4}{h^2\eta^2}\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)_{2,\mu}dudv,$$

или, что то же,

$$\frac{(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)_{2,\mu}dudv\right\}^k}\leq$$

$$\leq\left(\frac{h\eta}{2}\right)^{2k}\left(1-\left(\frac{2}{mh}\sin\frac{mh}{2}\right)^2\right)^{-k}\left(1-\left(\frac{2}{n\eta}\sin\frac{n\eta}{2}\right)^2\right)^{-k}. \qquad (2.2.30)$$

Чтобы получить аналогичную оценку снизу, вновь рассмотрим функцию $f_0(x,y)=T_m(x)T_n(y)$, которую ввели в конце теоремы 2.2.1.

Для этой функции, учитывая равенство (2.2.16), непосредственным вычислением получаем

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0;u,v)dudv=$$

$$=\left(\frac{h\eta}{2}\right)^2\left(1-\left(\frac{2}{mh}\sin\frac{mh}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{2}{n\eta}\sin\frac{\eta}{2}\right)^2\right)\cdot(m^2+n^2)^{r/k},$$

используя которое запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2,\mu}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)_{2,\mu}dudv\right\}^k}\geq$$

$$\geq\frac{(m^2+n^2)^r\cdot\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2,\mu}{\left\{\int\limits_0^h\int\limits_0^\eta(h-u)(\eta-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0;u,v)_{2,\mu}dudv\right\}^k}=$$

$$=\left(\frac{h\eta}{2}\right)^{2k}\left(1-\left(\frac{2}{mh}\sin\frac{mh}{2}\right)^2\right)^{-k}\left(1-\left(\frac{2}{n\eta}\sin\frac{n\eta}{2}\right)^2\right)^{-k} \qquad (2.2.31)$$

Сопоставляя равенство (2.2.30) и неравенство (2.2.31), получаем требуемое равенство (2.2.29). Теорема 2.2.4 доказана.

Следствие 2.2.4. *В условиях теоремы* 2.2.4 *при* $h = \pi/m$, $\eta = \pi/n$ *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(mn)^{2k}(m^2+n^2)^r \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}(\pi/m-u)(\pi/n-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)_{2,\mu}dudv\right\}^k} =$$

$$= \left(\frac{\pi^4}{2(\pi^2-4)}\right)^{2k}.$$

§ 2.3. Неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ и некоторые его приложения

В этом параграфе приводим решение ряда экстремальных задач среднеквадратического приближения функций двух переменных с весовой функцией Чебышева, связанные с точным неравенством типа Колмогорова для дифференциального оператора Чебышева второго порядка

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}_x + \mathcal{D}_y := (1-x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2} - x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

в пространстве $L_{2,\mu}$.

При решении ряда экстремальных задач теории приближений важную роль играют неравенства между нормами последовательных производных функций или неравенство типа Колмогорова в различных банаховых пространствах. Если $S = \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, или $S = \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, то неравенство Колмогорова для функции одной переменной имеет вид [3, 4]:

$$\big\|f^{(s)}\big\|_{l_p(S)} \le M\big\|f\big\|_{l_q(S)}^{\alpha} \cdot \big\|f^{(r)}\big\|_{l_\gamma(S)}^{\beta}, \tag{2.3.1}$$

где

$$\alpha = \frac{r - s - 1/\gamma + 1/p}{r - 1/\gamma + 1/q}, \beta = 1 - \alpha.$$

Различные неравенства типа (2.3.1), как для функции одной переменной, так и для функций многих переменных, приведены в монографии [4]. Связь неравенства типа Колмогорова (2.3.1) с известной задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора обыкновенного дифференцирования $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^k$ порядка k анализируется в статье В.В.Арестова [3]. В приведенной ниже теореме 2.3.1 доказывается точное неравенство типа Колмогорова для функций двух переменных $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ в пространстве $L_{2,\mu}$. Поскольку для функции

$f \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ все ее промежуточные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \dots, r-1)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}$, то представляет интерес изучение поведения наилучших приближений $\mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$, $s = 1, 2, \dots, r-1$ на классе $f \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$. С этой целью сначала докажем неравенство типа (2.3.1) в пространстве $L_{2,\mu}(Q)$.

Справедлива следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть $r, s \in \mathbb{N}$, $r \geq s$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, $f \neq const$ справедливо точное на $L_{2,\mu}$ неравенство*

$$\left\|\mathcal{D}^s f\right\|_{2,\mu} \leq \left\|\mathcal{D}^r f\right\|_{2,\mu}^{s/r} \cdot \left\|f\right\|_{2,\mu}^{1-s/r} \tag{2.3.2}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$, для которой (2.3.2) *обращается в равенство.*

Доказательство. В самом деле, в силу линейности оператора $\mathcal{D}^s$ с учетом равенства

$$\mathcal{D}^s(T_k(x)T_l(y)) = (-1)^s(k^2 + l^2)^s T_k(x)T_l(y),$$

для произвольной функции $L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$ имеем:

$$\mathcal{D}^s f(x, y) = \mathcal{D}^s \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{k,l}(f) T_k(x) T_y \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{k,l}(f) \mathcal{D}^s(T_k(x)T_l(y)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^s (k^2 + l^2)^s c_{k,l}(f) T_k(x) T_k(y).$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\|\mathcal{D}^s(f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (k^2 + l^2)^{2s} c_{k,l}(f),\ s = 1, 2, \dots, r-1. \tag{2.3.3}$$

Аналогичным образом для любого $r \in \mathbb{N}$ выводим

$$\|\mathcal{D}^r(f)\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(k^2+l^2)^{2r}c_{k,l}^2(f).$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера для двойных рядов, из (2.3.3) будем иметь

$$\left\|\mathcal{D}^s(f)\right\|_{2,\mu}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\left((k^2+l^2)^{2r}c_{k,l}^2(f)\right)^{s/r}\cdot(c_{k,l}(f))^{1-s/r} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(k^2+l^2)^{2r}c_{k,l}(f)\right)^{s/r}\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}c_{k,l}^2(f)\right)^{1-s/r} =$$

$$= \left\|\mathcal{D}^r(f)\right\|_{2,\mu}^{2s/r}\cdot\left\|f\right\|_{2,\mu}^{2-(1-s/r)},$$

откуда и следует неравенство (2.3.2). Проверим точность неравенства (2.3.2) для функции $f_0(x,y) = T_m(x)\cdot T_n(y) \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q,\mathcal{D})$. Так как для функции $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}$, $\|f_0\|_{L_{2,\mu}} = 1$ и из равенств

$$\mathcal{D}^s f_0(x,y) = (-1)^s\big(k^2+l^2\big)^s T_k(x)T_l(y), \quad k,l\in\mathbb{Z}_+,\ s=1,2,\ldots,r-1$$

$$\mathcal{D}^r f_0(x,y) = (-1)^r\big(k^2+l^2\big)^r T_k(x)T_l(y), \quad k,l\in\mathbb{Z}_+,\ r\in\mathbb{N}$$

сразу следует, что

$$\|\mathcal{D}^s f_0\|_{L_{2,\mu}} = (k^2+l^2)^s, \quad \|\mathcal{D}^r f_0\|_{L_{2,\mu}} = (k^2+l^2)^r,$$

то, учитывая полученные результаты, получаем

$$\|\mathcal{D}^s f_0\|_{L_{2,\mu}} = \big(k^2+l^2\big)^s = \big[(k^2+l^2)^r\big]^{s/r}\cdot(-1)^{1-s/r} =$$

$$= \left\|\mathcal{D}^r f_0\right\|_{L_{2,\mu}}^{s/r}\cdot\left\|f_0\right\|_{L_{2,\mu}}^{1-s/r},$$

чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.1.

Из теоремы 2.3.1 в качестве следствия получаем

Теорема 2.3.2. *При выполнении условий теоремы* 2.3.1 *имеет место точное неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le$$
$$\le \big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r (f)_{2,\mu})\big)^{s/r}\big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}, \qquad (2.3.4)$$

обращающееся в равенство для функции $f_0(x,y) = T_m(x)T_n(y) \in L^{(r)}_{2,\mu}(Q,\mathcal{D})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что если для любой функции $f \in L^{(r)}_{2,\mu}(Q,\mathcal{D})$ полагать

$$R_{m-1,n-1}(f,x,y) := f(x,y) - \sigma_{m-1,n-1}(f,x,y) =$$
$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} c^2_{k,l}(f)T_k(x)T_l(y), \qquad (2.3.5)$$

то очевидно, что функция $R_{m-1,n-1}(f) \in L^{(r)}_{2,\mu}$ и из (2.3.5) следует, что

$$\|R_{m-1,n-1}(f)\|^2_{2,\mu} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} c_{k,l}((f) = \mathcal{E}^2_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}. \qquad (2.3.6)$$

Пусть $1 \le s \le r-1$, где $r, s \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Так как

$$\mathcal{D}^s\sigma_{m-1,n-1}(f;x,y) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(f)\mathcal{D}^s(T_k(x)T_l(y)) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(f)\mathcal{D}^s(T_k(x)T_l(y)) - \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(f)\mathcal{D}^s(T_k(x)T_l(y)) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^s(k^2+l^2)^{2s}c_{k,l}(f)T_k(x)T_l(y) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^s(k^2+l^2)^{2s}c_{k,l}(f)T_k(x)T_l(y) -$$
$$- \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^s(k^2+l^2)^{2s}c_{k,l}(f)T_k(x)T_l(y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{\infty} c_{k,l}(\mathcal{D}^s f)T_k(x)T_l(y) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} c_{k,l}(\mathcal{D}^s f)T_k(x)T_l(y) -$$

$$-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} c_{k,l}(\mathcal{D}^s f)T_k(x)T_l(y) = \sigma_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f; x, y),$$

то из (2.3.5) находим

$$\mathcal{D}^s R_{m-1,n-1}(f, x, y) =$$

$$= \mathcal{D}^s f(x, y) - \mathcal{D}^s \sigma_{m-1,n-1}(f, x, y) =$$

$$= \mathcal{D}^s(f, x, y) - \sigma_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f; x, y) =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} c_{k,l}(\mathcal{D}^s f)T_k(x)T_l(y).$$

Отсюда, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\|\mathcal{D}^s R_{m-1,n-1}(f)\|_{2,\mu}^2 =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} c_{k,l}^2(\mathcal{D}^s f) = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} (k^2 + l^2)^{2s} c_{k,l}^2(f) = \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(\mathcal{D}^s f)_{2\mu}. \qquad (2.3.7)$$

Если теперь в неравенстве (2.3.2) вместо $\mathcal{D}^s f$, $\mathcal{D}^r f$ и f соответственно полагать $\mathcal{D}^s R_{m-1,n-1}(f)$, $\mathcal{D}^r R_{m-1,n-1}(f)$ и $R_{m-1,n-1}(f)$, то приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_{n-1,n-1}^2(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \|\mathcal{D}^s R_{m-1,n-1}(f)\|_{2,\mu}^2 \le$$

$$\le \|\mathcal{D}^r R_{m-1,n-1} f\|_{2,\mu}^{2s/r} \cdot \|R_{m-1,n-1}(f)\|_{2,\mu}^{1-s/r} =$$

$$= (\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu})^{2s/r} \cdot (\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu})^{2(1-s/r)},$$

откуда и следует требуемое неравенство (2.3.4). Для функции

$$f_0(x, y) = T_m(x) \cdot T_n(y) \in L_{2,\mu}^{(r)}(Q, \mathcal{D})$$

проверка реализации знака равенства в (2.3.4) проводится непосредственным вычислением. Теорема 2.3.2 доказана.

В качестве следствия из теоремы 2.3.2 получаем

Теорема 2.3.3. *В условиях теоремы* 2.3.2 *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{2,\mu}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} = 1. \qquad (2.3.8)$$

Доказательство. Учитывая, что для любой функции $f \in W^{(r)}_{2,\mu}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \le \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \le 1,$$

из (2.3.4) получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \le \big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r},$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, расположенной в левой части равенства (2.3.8):

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{2,\mu}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} \le 1. \qquad (2.3.9)$$

С целью получении аналогичной оценки снизу введём в рассмотрении, функцию

$$f_1(x,y) = (m^2+n^2)^{-r}\, T_m(x)T_n(y).$$

Так как для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}^r f_1(x,y) = \big(m^2+n^2\big)^{-r}(-1)^r\big(m^2+n^2\big)^r\, T_m(x)T_n(y) =$$

$$= (-1)^r T_m(x)T_n(y),$$

где $\|\mathcal{D}^r f_1\|_{2,\mu} \equiv 1$, то функция f_1 принадлежит классу $W^{(r)}_{2,\mu}$ и поскольку

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-r},$$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{s-r},$$

то запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in W^{(r)}_{2,\mu}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} \geq \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu}}{\big(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{2,\mu}\big)^{1-s/r}} =$$

$$= \frac{(m^2+n^2)^{-r+s}}{(m^2+n^2)^{-r+s}} = 1. \tag{2.3.10}$$

Равенство (2.3.8) получаем из сопоставления оценки сверху (2.3.9) с оценкой снизу (2.3.10). Теорема 2.3.3 доказана.

Через $W^{(r)}_{2,\mu} := W^{(r)}_{2,\mu}(Q,\mathcal{D})$ обозначим класс функций $f \in L^{(r)}_{2,\mu}(Q,\mathcal{D})$, для которых $\|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \leq 1$. Наилучшее приближение класса $W^{(r)}_{2,\mu}$ алгебраическими «углами» в метрике $L_{2,\mu}$ обозначим

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(W^{(r)}_{2,\mu})_{2,\mu} := \sup\Big\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} : f \in W^{(r)}_{2,\mu}\Big\}. \tag{2.3.11}$$

Теорема 2.3.4. *Пусть* $m,n,r \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(W^{(r)}_{2,\mu})_{2,\gamma} = (m^2+n^2)^{-r}. \tag{2.3.12}$$

Доказательство. Заметим, что из (2.1.17) для произвольной функции $f \in L^{(r)}_{2,\mu}(Q;\mathcal{D})$ вытекает неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq (m^2+n^2)^{-r} \cdot \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \tag{2.3.13}$$

и если $f \in W^{(r)}_{2,\mu}$, то

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \leq \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu} \leq 1 \tag{2.3.14}$$

и из (2.3.13) вытекает неравенство

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(W^{(r)}_{2,\mu})_{2,\gamma} \leq (m^2+n^2)^{-r}. \tag{2.3.15}$$

С целью получения оценки снизу используем введенную при доказательстве предыдущей теоремы функцию

$$f_1(x,y) = (m^2+n^2)^{-r} T_m(x) T_n(y) \in W^{(r)}_{2,\mu},$$

для которой

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-r}.$$

Следовательно

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(W_{2,\mu}^{(r)})_{2,\mu} \geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f_1)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-r}. \tag{2.3.16}$$

Требуемое равенство (2.3.12) вытекает из сравнения неравенств (2.3.15) и (2.3.16). Теорема 2.3.4 доказана.

Полученный результат в теореме 2.3.4 позволяет решать следующую экстремальную задачу: для значений $1 \leq s \leq r$ требуется найти величину

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)}\right\}. \tag{2.3.17}$$

Величина (2.3.17) при $s=0$ совпадает с величиной (2.3.11), и ее можно интерпретировать как распространение результата (2.3.11) на случай вычисления точных верхних граней наилучших приближений промежуточных производных $\mathcal{D}^s f$ $(1 \leq s \leq r,\ s,r \in \mathbb{N})$ на класс $W_{2,\mu}^{(r)}$ в метрике пространства $L_{2,\mu}$.

Теорема 2.3.5. *Пусть числа $m,n \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$. Тогда для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ выполняется неулучшаемое неравенство*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq (m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}, \tag{2.3.18}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in L_{2,\mu}^{(r)}$ для которой (2.3.18) *обращается в равенство.*

Доказательство. В самом деле для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ при любых $s=0,1,\ldots,r$ в силу правой части равенства (2.3.7) имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^2(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}(k^2+l^2)^{2s}c_{k,l}^2(f) =$$

$$= \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} (k^2 + l^2)^{-2(r-s)} (k^2 + l^2)^{2r} c_{k,l}^2(f) \le$$

$$\le (m^2 + n^2)^{-2(r-s)} \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} (k^2 + l^2)^{2r} c_{k,l}^2(f) =$$

$$= (m^2 + n^2)^{-2(r-s)} \mathcal{E}_{m-1,n-1}^2 (\mathcal{D}^r f)_{2,\mu},$$

и неравенство (2.3.18) доказано.

Точность неравенства (2.3.18) на функции

$$f_0(x, y) = T_m(x) T_n(y) \in L_2^{(r)}$$

проверяется непосредственными вычислениями, чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.5.

Следствие 2.3.1. *В условиях теоремы 2.3.5 имеет место соотношение*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} = \frac{1}{(m^2 + n^2)^{r-s}}. \qquad (2.3.19)$$

Для величины (2.3.17) верно следующее утверждение

Теорема 2.3.6. *Пусть числа $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $r \ge s$. Тогда имеет место равенство*

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)} \right\} = (m^2 + n^2)^{-(r-s)}. \qquad (2.3.20)$$

Доказательство. В самом деле, из неравенства (2.3.4), учитывая, что для произвольной функции $f \in W_{2,\mu}^{(r)}$ имеет место неравенство (2.3.14), получаем

$$\sup \left\{ \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)} \right\} \le \left(\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \right)^{1-s/r} \le$$

$$\le (m^2 + n^2)^{-r(1-s/r)} = (m^2 + n^2)^{-(r-s)}. \qquad (2.3.21)$$

С другой стороны, для рассмотренной в конце теоремы 2.3.4 функции

$$f_1(x,y) = (m^2+n^2)^{-r} T_m(x) T_n(y) \in W_{2,\mu}^{(r)}$$

имеем:

$$\mathcal{D}^s f_1(x,y) = (-1)^s (m^2+n^2)^{-(r-s)} T_m(x) T_n(y),$$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_1)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-(r-s)}. \tag{2.3.22}$$

Учитывая равенство (2.3.20), запишем оценку снизу

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in W_{2,\mu}^{(r)}\right\} \geq$$

$$\geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-(r-s)}. \tag{2.3.23}$$

Равенство (2.3.20) является следствием сопоставления неравенств (2.3.21) и (2.3.23), чем и завершаем доказательство теоремы 2.3.6.

§ 2.4. О совместном приближении некоторых классов функций из $L_{2,\mu}$, определяемых усреднёными значениями обобщённого модуля непрерывности $\Omega_{k,l}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu}$

В этом параграфе обобщим некоторые результаты, полученные в предыдущих параграфах на случай совместного приближения функции f и всех её промежуточных производных $\mathcal{D}^s f$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ алгебраическими «углами» в пространстве $L_{2,\mu}$.

Имеет место следующая

Теорема 2.4.1. *Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, удовлетворяющих неравенствам $0 < mu \leq \pi/2$, $0 < nv \leq \pi/2$, при любом $k \in \mathbb{N}$, имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u \int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k} =$$

$$= \left\{\frac{mn}{(mu - \sin mu)(nv - \sin nv)}\right\}^k. \tag{2.4.1}$$

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 2.2.1 установлено, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих ограничениям $0 < mu \leq \pi/2$, $0 < nv \leq \pi/2$, при любом $k \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство (см. неравенства (2.2.13))

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{(m^2+n^2)^r}\left\{\frac{mn}{(mu - \sin mu)(nv - \sin nv)}\right\}^k \times$$

$$\times \left\{\int\limits_0^u \int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu} dt d\tau\right\}^k. \tag{2.4.2}$$

В неравенстве (2.4.2) сначала положим $r = 0$, затем в полученном соотношение функцию f заменим на $\mathcal{D}^r f$, в итоге приходим к неравенству

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu} \leq$$

$$\leq \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k \left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k. \quad (2.4.3)$$

Учитывая (2.4.3), из неравенства (2.4.1) при любом $s=0,1,\ldots,r$ имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq (m^2+n^2)^{-(r-s)}\times$$

$$\times\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k \left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k, \quad (2.4.4)$$

откуда сразу следует оценка сверху

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k} \leq$$

$$\leq \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \quad (2.4.5)$$

Чтобы получить соответствующую оценку снизу заметим, что для ранее введённой нами функции

$$f_0(x,y)=T_m(x)T_n(y)\in L_{2,\mu}^{(r)},$$

из формулы (2.2.8) получаем

$$\Omega_k(\mathcal{D}^r f_0,t,\tau)_{2,\mu}=(m^2+n^2)^r(1-\cos mt)^k(1-\cos n\tau)^k, \quad (2.4.6)$$

пользуясь которой для любых $(u,v)\in[0,\pi/(2m)]\times[0,\pi/(2n)]$ имеем:

$$\int\limits_0^u\int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau=$$

$$=(m^2+n^2)^{r/k}\frac{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}{mn}. \quad (2.4.7)$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}\geq$$

$$\geq\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f_0)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^u\int\limits_0^v\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f_0;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}=$$

$$=\left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \qquad (2.4.8)$$

Равенство (2.4.1) получаем из сравнения неравенств (2.4.5) и (2.4.8), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.1.

Из теоремы 1.2.2 вытекает.

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы 2.4.1 при* $u=\pi/(2m)$, $v=\pi/(2n)$, $m,n\in\mathbb{N}$ *выполняется равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{mn\int\limits_0^{\pi/(2m)}\int\limits_0^{\pi/(2n)}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}dtd\tau\right\}^k}=\left(\frac{2}{\pi-2}\right)^k.$$

Справедлива также следующая

Теорема 2.4.2. *Для любых* $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, *удовлетворяющих неравенствам* $0<mt\leq\pi$, $0<n\tau\leq\pi$, *при любом* $k\in\mathbb{N}$, *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}}\frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{mn\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k}=\frac{1}{4^k}. \qquad (2.4.9)$$

Доказательство. Полагаем $\mathcal{D}^s f = g$. Тогда имеем $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}^{r-s}(\mathcal{D}^s f) = \mathcal{D}^{r-s} g$, то есть если функция $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, то функция $g \in L_{2,\mu}^{(r-s)}$. Но тогда утверждение теоремы 2.4.2 с учётом соотношения (2.2.19) вытекает из следующей цепочки равенств

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{mn\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k} =$$

$$= \sup_{g\in L_{2,\mu}^{(r-s)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(g)_{2,\mu}}{\left\{mn\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n}\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^{(r-s)} g;t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau\right\}^k} = \frac{1}{4^k}.$$

Теорема 2.4.2 доказана.

Аналогичным образом, учитывая теорему 2.2.4 по схеме доказательства 2.4.2, доказывается следующая

Теорема 2.4.3. *Пусть* $m,n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $r\ge s$, $0<mh\le\pi$, $0<n\eta\le\pi$. *Тогда при любых* $k,r\in\mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^{r-s}\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left\{\int\limits_0^{h}\int\limits_0^{\eta}(h-u)(\eta-v)\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;u,v)_{2,\mu}dudv\right\}^k} =$$

$$= \left(\frac{h\eta}{2}\right)^{2k}\left(1-\left(\frac{2}{mh}\sin\frac{mh}{2}\right)^2\right)^{-k}\left(1-\left(\frac{2}{n\eta}\sin\frac{n\eta}{2}\right)^2\right)^{-k}.$$

Поскольку для произвольной функции $f\in L_{2,\mu}^{(r)}$, наравне с функциями f и $\mathcal{D}^r f$, последовательные производные $\mathcal{D}^s f$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$ также принадлежат пространству $L_{2,\mu}$, то определённый интерес представляет отыскание точных значений наилучших совместных приближений функций и их производных $\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}$ на некотором подклассе $\mathfrak{M}^r \subset L_{2,\mu}^{(r)}$ или на самом классе $L_{2,\mu}^{(r)}$. Точнее, требуется найти значение величины

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}^{(r)})_{2,\mu} := \sup\{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}^{(r)}\}. \tag{2.4.10}$$

Вводим классы функций, для которых решаем экстремальную задачу (2.4.10). Через $W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_k; u, v)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, при любых $(u,v) \in (0,\pi/(2m)] \times (0,\pi/(2n)]$, $m,n,k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяющих условию

$$mn\int\limits_0^u\int\limits_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)dtd\tau \le 1.$$

Аналогичным образом, обозначим через $\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}$ класс функций $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$, при любых $m,n,k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условию

$$mn\int\limits_0^{\pi/m}\int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t,\tau)_{2,\mu}\sin mt\sin n\tau dtd\tau \le 1.$$

В этих обозначениях справедлива следующая

Теорема 2.4.4. *Пусть $m,n,k \in \mathbb{N}$, $r,s \in \mathbb{Z}_+$, $r \ge s$. Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(W_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_k; u,v)) =$$
$$= \frac{1}{(m^2+n^2)^{r-s}}\left\{\frac{1}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k, \tag{2.4.11}$$

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}) = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \tag{2.4.12}$$

Доказательство. Схема доказательства равенств (2.4.11) и (2.4.12) одинакова, а потому приводим, например, доказательство (2.4.12). Из (2.2.22) для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}^{(r)}$ для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$ имеем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq$$
$$\leq 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)} \left\{ mn \int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau \right\}^k,$$

откуда для произвольной функции $f \in \widetilde{W}_{2,\mu}^{(r)}(\Omega_k)$ получаем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} \leq 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}$$

или, что то же,

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}) \leq 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \tag{2.4.13}$$

Простыми вычислениями легко проверить, что для функции $g_0(x,y) = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-r}T_m(x)T_n(y)$,

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s g_0)_{2,\mu} = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}, \tag{2.4.14}$$

$$mn \int\limits_0^{\pi/m} \int\limits_0^{\pi/n} \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r g_0; t, \tau)_{2,\mu} \sin mt \sin n\tau dt d\tau = 1, \tag{2.4.15}$$

и в силу (2.4.15) $g_0 \in \widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}$. Поэтому, учитывая равенство (2.4.14), запишем

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}) \geq \mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^s g_0)_{2,\mu} = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \tag{2.4.16}$$

Требуемое равенство (2.4.12) получаем из сопоставления оценок сверху (2.4.13) и снизу (2.4.16), чем и завершаем доказательство теоремы 2.4.4.

Выводы

Основные научные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

- найдены точные равенства, связывающих величины наилучших приближений и усреднённых значений модулей непрерывности функций $f \in L_2^{(r,s)}$;
- найдены точные равенства между величинами наилучших совместных приближений функций $f \in L_2^{(r,s)}$, их частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$;
- найдены точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающих величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r, f, \tau)_{2,\mu}$;
- найдено неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ и приведены некоторые его приложения.

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Полученные в диссертационной работе результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Приведённые в ней методы и результаты могут применяться при решении других экстремальных задач теории аппроксимации функций многих переменных.

Список литературы

А) Список использованных источников

[1] *Абилов В.А., Абилова Ф.В.* Об одной квадратурной формуле // ЖВМ и МФ. – 2002. – Т.42, №4. – С.451–458.

[2] *Абилов В.А., Керимов М.К.* Об оценках остаточных членов кратных рядов Фурье-Чебышева и кубатурных формул чебышевского типа // ЖВМ и МФ. – 2003. – Т.43, №4. – С.643–663.

[3] *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. – 1966. – Т.51, №6. – С.89–124.

[4] *Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.* Неравенства для производных и их приложения // Киев: Наукова думка. – 2003. – 590 с.

[5] *Брудный Ю.А.* Приближение функций n-переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1979. – Т.34, №3. – С.564–583.

[6] *Вакарчук С.Б.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных // Изв. вузов. Матем. –1991, №7. – С.14–25.

[7] *Вакарчук С.Б.* Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки. – 2005. – Т.78, №5. – С.792–796.

[8] *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Матем. заметки. – 2006. – Т.80, вып.1. – С.11–19.

[9] *Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.* Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их при-

ложения к теории аппроксимации // Укр. матем. журн. – 2011. – Т.63, №12. – С.1579–1601.

[10] *Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.* Точные неравенства типа Джексона в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ // Вестник Днепропетровского университета. Серия: Матем. – 2014, вып.19. – С.17–23.

[11] *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Точное неравенство типа Джексона – Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. – 2009. – Т.86, №3. – С.328–336.

[12] *Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш.* О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. матем. журн. – 1996. – Т.48, №3. – С.301–308.

[13] *Вакарчук С.Б., Швачко А.В.* Неравенства колмогоровского типа для производных функций двух переменных и их приложение к аппроксимации "углом" // Известия вузов. Матем. – 2015, вып. 11. – С.2–22.

[14] *Вакарчук С.Б., Швачко А.В.* О наилучшем приближении "углом" в среднем на плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом Чебышева-Эрмита // Збірник праць Інституту математики НАН Украіни. – 2014. – Т.11, №3. – С.35–46.

[15] *Есмаганбетов М.Г.* Точные неравенства Джексона-Стечкина и поперечники классов функций из $L_2(\mathbb{R}^2, e^{-x^2-y^2})$ // Известия вузов. Матем. – 2007. №2,(537). – С.3–9.

[16] *Левитан Б.М.* Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка // Успехи матем. наук. – 1949. – Т.4, №1(29). – С.3–112.

[17] *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи матем. наук. – 1951. – Т.6, №2(42). – С.102–143.

[18] *Потапов М.К.* Приближение «углом» и теоремы вложения // Mathematica Balkanica. – 1972, №2. – P.183–198.

[19] *Потапов М.К.* О приближении «углом» // Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Function. Budapesht. – 1972. – P.371–399.

[20] *Потапов М.К. Симонов В.В.* Уточнение связи между смешанными модулями гладкости в метриках L_2 и L_∞ // Матем. заметки. – 2021. – Т.110, вып.3. – С.368–385.

[21] *Ржавинская Е.В.* О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_2 с весом // Дисс. канд. физ.-матем. наук. Москва, 1980.

[22] *Руновский К.В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1984. – Т.185, №8. – С.81–102.

[23] *Руновский К.В.* Об одной оценке для интегрального модуля гладкости // Известия вузов. Матем. – 1992, №1. – С.78–80.

[24] *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены // М.: Наука. – 1979. – 416 С.

[25] *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах P_p, $0 < p < 1$ // Матем. сборник. – 1975. – Т.98, №140. – С.395–415.

[26] *Тайков Л.В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. – 1976. – Т.20, №3. – С.433–438.

[27] *Темляков В.Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т.178. – С.3–113.

[28] *Томич М.* О приближении углом функций с доминирующим модулем гладкости // Inst. Math. Beogrand. Mathematica Balkanica. – 1972. – Vol.23, №37. 2. – P.193–206. – P.183–198.

[29] *Черных Н.И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т.2, №5. – С. 513–522.

[30] *Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О.* Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // ДАН России. – 2005. – Т.404, №4. – С. 406–464.

[31] *Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О.* О точных значениях квазипоперечников некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Укр. матем. журн. – 2009. – Т.61, №6. – С. 855–864.

[32] *Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических функций двух переменных в L_2 // Чебышевский сб. – 2019. – Т.20, №2. – С.348–365.

[33] *Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О.* Среднеквадратическое приближение "углом" в метрике L_2 и значения квазипоперечников некоторых классов функций // Укр. матем. журнал. – 2020. – Т.72, №6. – С.852–864.

[34] *Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Точные неравенства типа Джексона–Стечкина для периодических функций в L_2 и значения поперечников классов функций // Докл. РАН. – 2013. – Т.451, №6. – С.625–628.

[35] *Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов // Український матем. вісник. – 2014. – Т.11, №3. – С. 417–441.

[36] *Шабозов М.Ш., Тухлиев К.* Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 // Матем. заметки. – 2013. – Т.94, №6. – С. 908–917.

[37] *Шабозов М.Ш., Тухлиев К.* Неравенства Джексона–Стечкина с обобщенными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Тр. ИММ УрО РАН. – 2015. – Т.21, №4. – С. 292–308.

[38] *Шалаев В.В.* О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // УМЖ. – 1991. – Т.43, №1. – С. 125–129.

[39] *Goncka H., Jetter K.* Jackson-type theorems on approximation by trigonometric and algebraic pseudopolynomials // J. Approxim. Theoty. – 1986. – Vol.48, no4. – PP.396–406.

[40] *Haussmann W., Zeller K.* Uniqueness and non-uniqueness in bivariate L^1-approximation // Approximation Theory IV. Proc. of Intern. Symp., College Station, Tex., January 10–14, 1983 (Academic Press, New York). – PP.509–514.

[41] *Vakarchuk S.B.* Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2-approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes // East J. on Approximations. – 2004. – Vol.10, No1-2. – P.27–39.

[42] *Vakarchuk S.B., Zabutna V.I.* Widths of functional classes from L_2 and exact constants in Jackson type inequalities // East. J. on Approximations. – 2008. – Vol.14, no4. – P.411–421.

[43] *Shabozov M.Sh., Akobirshoev M.O.* Exact estimates of quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables // Anal. Math. –

2009. – Vol.35, no1. – P.61–72.

Б) РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. В журналах, входящих в перечень ВАК при Президенте Республики Таджикистан и ВАК Российской Федерации

[44] *Шабозов М.Ш., Мадимарова Ф.М.* Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций двух переменных алгебраическими “углами” // Математические труды. – 2026. – Т.29, №1. – С.163–183.

[45] *Мадимарова Ф.М.* О неравенствах типа Джексона–Стечкина для совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими “углами” // Доклады НАН Таджикистана. – 2025. – Т.68, №4. – С.319–326.

[46] *Шабозов М.Ш., Мадимарова Ф.М.* Среднеквадратическое наилучшее приближение с весом Чебышева некоторых классов функций двух переменных // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2018, №3 (172). – С.7–18.

[47] *Мадимарова Ф.М.* О наилучшем приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Известия АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н. – 2017, №3 (168). – С.16–25.

2. В других изданиях:

[48] *Мадимарова Ф.М.* Неравенства типа Джексона–Стечкина для совместного приближения функций двух переменных тригонометрическими «углами» // Материалы международной конференции „*Современные проблемы математики и ее приложения*”, 75-летию со дня рождения академика НАНТ, д.ф.-м.н., профессора К.Бойматова и 75-летию д.ф.-м.н., заве-

дующего отделом дифференциальных уравнений Института математики им. А.Джураева НАНТ, профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 мая 2025 г.). – С. 120–125.

[49] *Мадимарова Ф.М.* Приближение в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Материалы республиканской научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и их роль в формировании технического мировоззрения общества», посвященная "Двадцатилетию изучения и развития естественных, точных и математических наук в сфере науки и образования" (Худжанд, 29-30 октября 2021 г.). – С.47–49.

[50] *Мадимарова Ф.М.* О приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Материалы международной научной конференции «Сингулярные интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами», посвященной 70-летию профессора Г.Джангибекова. (Душанбе, 30-31 января 2020 г.). – С.178–181.

[51] *Мадимарова Ф.М.* О приближении в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных // Материалы республиканской научной конференции «Математический анализ и его приложения», посвященной 80-летию видно таджикского математика, профессора Б.Имомназарова. (Душанбе, 10-11 июня 2019 г.). с.142–145.