УТВЕРЖДАЮ

Ректор ГОУ «Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова»

доцент Набизода М. С.

____

"25" мая 2026 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации

на диссертацию Мадимаровой Фавзии Мадимаровны

«Решение некоторых экстремальных задач приближения функций двух переменных «углами» в пространстве L_2»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

К настоящему времени в теории приближения функций глубоко исследованы задачи, связанные с аппроксимацией функций одной перменнной. Особую роль сыграли работы А.Н. Колмогорова и С.М. Никольского, связанные с решением экстремальных задач о нахождении точной верхней грани погрешности приближения на заданном классе функций. Усилиями многих математиков, и в первую очередь, учениками и последователями А.Н. Колмогорова и С.М. Никольского, такие задачи решены в одномерном случае для наиболее употребляемых классов функций. Однако при исследовании экстремальных задач, на классах функций многих переменных, разработанные методы иногда существенно используют специфику одномерного случая и не пригодны в многомерной стуации.

Среди актуальных задач теории приближения особое место занимают экстремальные задачи, связанные с приближением функций двух и более перменных. В настоящей диссертационной работе в качестве аппарата приближения плодотворно используется аппарат тригонометрических и алгебраических «углов». Понятие «углов» было введено М.К. Потаповым, и в дальнейшем, с успехом применялось многими математиками, в том числе С.Б. Вакарчуком, М. Томичем, М.Ш. Шабозовым и М.О. Акобиршоевым. При решении экстремальных задач аппроксимации функций двух переменных применение аппарата «углов» в качестве аппроксимирующих подпространств имеет заметные преимущества по сравнению с двумерными полиномами, поскольку «углы» приводят к минимальным значениям точной верхней грани оценки погрешности на классах функций и реализуют точные значения квазипоперечников указанных классов функций.

В связи с этим тема диссертации, направленная на получение точных неравенств, связывающих величины наилучших совместных приближений функций двух переменных и их производных с усреднёнными значениями смешанных модулей непрерывности (в том числе с весом Чебыщева), является актуальной.

Диссертация соответствует профилю диссертационного совета 73.2.012.03 по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитированной литературы из 51 наименований, занимает 86 страницу машинописного текста, набранного на LaTeX-е. Переходим к характеристике диссертации по главам.

Во введении даётся общая характеристика диссертационной работы, обосновывается актуальность темы, формулируются цели и задачи исследования, научная новизна и положения, выносимые на защиту, приводится список публикаций автора и данные об апробации результатов.

Первая глава посвящена наилучшему совместному приближению «углами» в среднем классов периодических функций двух переменных. В §1.1 приводятся необходимые определения и вспомогательные факты: пространство $L_2(Q)$ $(Q = \{0 \le x, y \le 2\pi\})$, двойные ряды Фурье, понятие тригонометрического «угла» (квадиполинома), смешанный модуль непрерывности $\omega_{k,l}(f;t,\tau)_2$ и его усреднённый аналог $\Omega_{k,l}(f;t,\tau)_2$. Доказывается лемма 1.1.1 и следствие из неё, устанавливающие неравенство между наилучшими приближениями промежуточных производных $f^{(k,l)}$ и старшей производной $f^{(r,s)}$.

В §1.2 доказывается основная теорема 1.2.1, устанавливающая для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ и $h, \eta \in (0, +\infty)$ точное равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{m^r n^s \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_k^{2/k}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \, dt d\tau\right)^{k/2}} = \left\{\frac{m}{2(mh - \mathrm{Si}(mh))} \cdot \frac{n}{2(n\eta - \mathrm{Si}(n\eta))}\right\}^{k/2} \qquad (1)$$

где $\mathrm{Si}(t)$ – интегральный синус. Из этой теоремы выводится неравенство типа Джексона-Стечкина с явной константой (следствие 1.2.2).

В §1.3 рассматривается экстремальная задача об одновременном приближении функции $f \in L_2^{(r,s)}$ и её частных производных $f^{(\mu,\nu)}$ тригонометрическими «углами». Доказаны точные неравенства, связывающие величины наилучших совместных приближений и усреднённые значения модуля непрерывности $\Omega_{k,l}(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$ (теоремы 1.3.1–1.3.3). В частности, в теореме 1.3.3 для весовой функции $\varphi(t, \tau)$ получено равенство

$$\sup_{\substack{f \in L_2^{(r,s)} \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{2^{(k+l)/2} m^{r-\mu} n^{s-\nu} \mathcal{E}_{m-1,n-1}(f^{(\mu,\nu)})_2}{\left(\int_0^h \int_0^\eta \Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2 \varphi(t,\tau) \, dt d\tau\right)^{1/q}} =$$

$$= \left(\int_0^h \int_0^\eta (1 - \mathrm{sinc}\, mt)^{kq/2} (1 - \mathrm{sinc}\, n\tau)^{lq/2} \varphi(t, \tau) \, dt d\tau\right)^{-1/q}. \qquad (2)$$

В §1.4 на основе полученных ранее неравенств решена экстремальная задача для классов функций $W_{k,l,q}^{(r,s)}(h, \eta; \varphi)$, задаваемых интегральным ограничением на $\Omega_{k,l}^q(f^{(r,s)}; t, \tau)_2$. Найдено точное значение величины наилучшего совместного приближения на этих классах (теорема 1.4.1).

Вторая глава посвящена среднеквадратическому приближению с весом Чебышева $\mu(x, y) = 1/\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$ на квадрате $Q = \{-1 \le x, y \le 1\}$. В §2.1 вводится оператор обобщённого сдвига $F_h(f)$ и доказывается, что наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ алгебраическими «углами» (2.1.5) достигается на обобщённом полиноме Фурье-Чебышева, причём

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu} = \left(\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=n}^{\infty} c_{kl}^2(f)\right)^{1/2} \qquad (3)$$

(теорема 2.1.1). Также в §2.1 доказано равенство (теорема 2.1.2)

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\mathcal{E}_{m-1,n-1}(\mathcal{D}^r f)_{2,\mu}} = \frac{1}{(m^2+n^2)^r}, \tag{4}$$

где $\mathcal{D} := (1-x^2)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+(1-y^2)\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-x\dfrac{\partial}{\partial x}-y\dfrac{\partial}{\partial y}$ — дифференциальный оператор Чебышего второго порядка.

В §2.2 вводятся обобщённые конечные разности и обобщённый смещенный модуль непрерывности $\Omega_{k,l}(f;\delta,\eta)_{2,\mu}$ (формула (2.2.3)). Доказываются точные неравенства, связывающие наилучшие приближения алгебраическими «углами» с интегралами от $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}$ (теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4). В частности, в теореме 2.2.1 установлено

$$\sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}} \frac{(m^2+n^2)^r\,\mathcal{E}_{m-1,n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^u\int_0^v \Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}\,dtd\tau\right)^k} = \left\{\frac{mn}{(mu-\sin mu)(nv-\sin nv)}\right\}^k. \tag{5}$$

В §2.3 доказывается неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s=1,\ldots,r-1)$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ (теорема 2.3.1):

$$\|\mathcal{D}^s f\|_{2,\mu} \le \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}^{s/r}\cdot\|f\|_{2,\mu}^{1-s/r}. \tag{6}$$

На основе неравенства (6) получены точные оценки наилучших приближений промежуточных производных (теоремы 2.32–2.3.6). В частности, в теореме 2.3.4 найдено точное значение наилучшего приближения класса $W_{2,\mu}^{(r)} = \{f : \|\mathcal{D}^r f\|_{2,\mu}\le 1\}$:

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}(W_{2,\mu}^{(r)})_{2,\mu} = (m^2+n^2)^{-r}. \tag{7}$$

В §2.4 рассматривается задача о совместном приближении функций f и всех её промежуточных производных $\mathcal{D}^s f$. На основе результатов §2.2–2.3 доказаны точные равенства для величин наилучших совместных приближений на классах, определяемых усреднёнными значениями обобщённого модуля непрерывности (теоремы 2.4.1–2.4.4). В частности, в теореме 2.4.4 получено

$$\mathcal{E}_{m-1,n-1}^{(s)}(\widetilde{W}_{m,n}^{(r)}(\Omega_k)_{2,\mu}) = 4^{-k}(m^2+n^2)^{-(r-s)}. \tag{8}$$

В **выводах** кратко сформулированы основные научные результаты диссертации.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. найдены точные неравенства, связывающие величины наилучших приближений и усреднённые значения модулей непрерывности функций $f\in L_2^{(r,s)}$;
2. найдены точные неравенства между величинами наилучших совместных приближений функций $f \in L_2^{(r,s)}$, их промежуточных частных производных и усреднёнными значениями модуля непрерывности $\Omega_k(f^{(r,s)};t,\tau)_2$;
3. найдены точные оценки наилучшего приближения в среднем с весом Чебышева некоторых классов дифференцируемых функций двух переменных алгебраическими «углами», связывающие величины наилучших приближений и усреднённые с весом значения обобщённого модуля непрерывности $\Omega_k^{1/k}(\mathcal{D}^r f;t,\tau)_{2,\mu}$;

4. найдено неравенство типа Колмогорова для последовательности операторов $\mathcal{D}^s f$ $(s = \overline{1, r-1})$ в пространстве $L_{2,\mu}^{(r)}$ и приведены некоторые его приложения.

Каждое неравенство является неулучшаемым: для всех теорем указаны функции, на которых эти неравенства обращаются в равенства.

Полученные в диссертации Ф.М.Мадимаровой результаты являются новыми, они имеют важное теоретическое значение. Тема исследований является перспективной и актуальной. В диссертации получены интересные и важные результаты. Диссертантом проделана кропотливая, трудоемкая и содержательная работа. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 печатных работах автора и в совместных работах с научным руководителем, из них 4 статьи опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК РФ, а 4 статьи опубликованы в материалах международных конференций. В совместных работах научному руководителю М.Ш. Шабозову принадлежит постановка задач и рекомендации по выбору метода доказательства. Доказательства всех приведенных в диссертационной работе результатов получены лично ее автором – Ф.М. Мадимаровой. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации могут быть использованы в организациях, научных институтах, занимающихся проблемами теории приближения функций, в частности, в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского Отделения РАН, в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Институте математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан, в учебном процессе при чтении спецкурсов в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского, Санкт-Петербургском государственном университете, Таджикском национальном университете, Худжандском государственном университете им. академика Б. Гафурова, Хорогском государственном университете им. М. Назаршоева и других.

Замечания

В представленной диссертационной работе имеется небольшое количество замечаний.

1. На стр. 16 в обозначении модуль непрерывности пропущена μ.
2. В следствие 1.3.2 после условия $q = 2/k$ должно быть $k = 1, 2$.
3. Стр. 64. Вместо Q надо написать $Q := \{(x, y) : -1 \le x, y \le 1\}$.

Все эти замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации, так как они относятся лишь к стилю изложения или являются опечатками.

Диссертационная работа Мадимаровой Фавзии Мадимаровны «Решение некоторых экстремальных задач приближения функций двух переменных «углами» в пространстве L_2» является законченной квалификационной научно-исследовательской работой, в которой решены задачи, вносящие существенный вклад в развитие теории аппроксимации функций двух переменных тригонометрическими и алгебраическими «углами».

Диссертация удовлетворяет всем условиям пп. 9-11, 13, 14 действующего положения “О порядке присуждения ученых степеней” ВАК при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Автор диссертации, Мадимарова

Фавзия Мадимаровна, заслуживает присвоения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв подготовили д.ф.-м.н. А.Б. Назимов и д.ф.-м.н. К. Тухлиев. Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры «Информатика и вычислительная математика» Худжандского государственного университета имени академика Б. Гафурова, протокол №10 от 12 мая 2026 года.

Профессор кафедры “Математического
анализа имени профессора А. Мухсинова”
ГОУ «Худжандский государственный
университет имени академика Б. Гафурова»,
доктор физ.-мат. наук по специальности
1.1.7. — Вычислительная математика — Назимов Акбар Багадурович

Профессор кафедры “Информатика и
вычислительная математика”
ГОУ «Худжандский государственный
университет имени академика Б. Гафурова»,
доктор физ.-мат. наук по специальности
1.1.1. — Вещественный, комплексный и
функциональный анализ — Тухлиев Камаридин

Ученый секретарь заседания —
кандидат физ.-мат. наук по специальности
1.1.1. — Вещественный, комплексный и
функциональный анализ — Муродов Каримджон Насимович

Почтовый адрес: 735700, г.Худжанд, ул. Мавлонбекова, 1,
ГОУ «Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова».
Телефон: +992 (3422) 6-75-18,e-mail: rector@hgu.tj
Адрес сайта: https://www. hgu.tj/

Подписи А.Б. Назимова, К. Тухлиева и К.Н. Муродова заверяю

Начльник УК и СР ГОУ «Худжандский
государственный университет
имени академика Б. Гафурова» — Сайдуллозода З.С.

РАЁСАТИ КАДРХО ВА КОРХОИ МАХСУС