

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию  
Мехмонзода Сабзины Навбухор «Точные оценки погрешности  
приближения некоторых классов функций двух переменных  
многогранными функциями и сплайн-функциями»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности  
1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Впервые сплайн-функции или просто сплайны появились в работе 1946 года И.Шёнберга, в которой он представил хорошо разработанную теорию сплайн-функций. Сам термин сплайн тоже появился в этой работе. Однако сперва сплайны не привлекли внимания специалистов. И только после статьи 1957 года Дж.Холладея, где было установлено экстремальное свойство, появился интерес к сплайнам. Сплайны показали прекрасные аппроксимативные свойства и зарекомендовали себя в практических задачах в первую очередь для интерполяции и восстановления функций. Именно в задачах интерполяции сплайны оказались гораздо предпочтительнее не только с точки зрения вычислений, но и, как правило, обладают наилучшими аппроксимационными свойствами, обеспечивают минимально возможную погрешность на классах функций. Естественным образом возник вопрос получения точных оценок приближения в различных классах. К настоящему времени многие экстремальные задачи теории сплайн аппроксимации для функции одной переменной решены и даже нашли практическое применение в прикладных задачах. В многомерном случае подобных исследований гораздо меньше, усложнение связано с появлением новых эффектов многомерности. Этим подчёркивается актуальность нахождения точных оценок погрешности приближения различных классов функций двух переменных.

Диссертационная работа Мехмонзода Сабзины Навбухор посвящена получению некоторых результатов окончательного характера, связанных с оценкой погрешности приближения многогранными функциями и оценкой погрешности сплайн-аппроксимации на классах функций двух переменных, задаваемых различными модулями непрерывности. Следует отметить, что первые точные результаты о сплайн-аппроксимации функций двух переменных получены в работах В.Ф.Сторчая, С.Б.Вакарчука, К.Ю.Мыскина и М.Ш.Шабозова. В рассматриваемой работе решены экстремальные задачи сплайн-приближений на более широких классах функций, которые

ранее не поддавались решению известными методами.

Перейдем к описанию основных результатов работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы.

Во введении обсуждается актуальность темы, приводятся цели и задачи исследования, указываются основные направления диссертационной работы и излагаются научная новизна и положения, выносимые на защиту.

Первая глава начинается с необходимых определений, предварительных фактов, вспомогательных утверждений и истории вопроса. В первой главе диссертации рассмотрены вопросы оценки погрешности приближения функций двух переменных многогранными функциями. Основными результатами данной главы являются теоремы 1.2.2, 1.3.1 и 1.4.1 и их следствия.

Особо хотелось бы отметить теорему 1.2.2 когда модуль непрерывности является выпуклой вверх функцией, а норма является  $l_p$ -нормой. Примечательно, что для  $1 \leq p \leq 3$  установленная оценка является точной, но при  $p > 3$  оценка в общем случае может не выполняться. Аналогичная ситуация встречалась ранее в работах Н.П.Корнейчука.

Во второй главе диссертации изучается вопрос приближения билинейными сплайнами на классах функций. Здесь вычислены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе  $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$ , теорема 2.2.1.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми и существенно пополняют коллекцию точных оценок погрешностей приближения.

Диссертация содержит ряд неточностей и опечаток, перечень наиболее значимых приведём ниже:

1. На с.8 при описании публикаций по теме диссертации указано, что одна статья опубликована в журнале Российской Федерации «Математические заметки» и одна в международном журнале «Jaen Journal on Approximation». На мой взгляд первый журнал на столько же международный, что и второй, который является журналом университета Хаена в Испании.
2. На с.17 второе предложение секции 1.1.3, вызывает сомнение, что линейными функциями нельзя приближать производные выше первого порядка.

3. На с.21, вероятно есть неточность в названии параграфа, должно быть нестрогое неравенство  $1 \leq p$ .
4. На с.44, определение 2.1.1, сейчас общепринятым является, что степень сплайна меньше его порядка на 1.

*Перечисленные в списке замечания в большей степени являются опечатками и никак не влияют на результаты диссертационной работы.*

**Основными результатами работы являются:**

1. найдены точные оценки приближения многогранными функциями на классах  $H_{\|\cdot\|}^{\omega}(Q)$  и  $H_p^{\omega}(Q)$  ( $1 \leq p \leq 3$ ),  $Q := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ ;
2. найдены оценки приближения частных производных  $f^{(l,j)}(x, y)$  соответствующими частными производными  $\mathcal{L}_{m,n}^{(l,j)}(f; x, y)$  ( $l, j = 0, 1$ ;  $0 \leq l + j \leq 1$ ) многогранной функции на классах  $W^{(l,j)}H_p^{\omega}(Q)$  ( $l, j = 0, 1; 0 \leq l + j \leq 1$ );
3. найдены оценки приближения частных производных  $f^{(r,s)}(x, y)$  функции класса  $W^{(r,s)}H^{\omega_1, \omega_2}(Q)$  ( $(r, s) = (0, 1)$ ;  $(r, s) = (1, 0)$ ) и  $W^{(r,s)}H^{\omega_1, \omega_2}(Q)$  соответствующими частными производными  $\mathcal{L}_{m,n}^{(l,j)}(f; x, y)$  многогранной функции;
4. найдены точные оценки погрешности интерполяции билинейными сплайнами на классе функций  $W^{(1,1)}H^{\omega_*}(Q)$ .

*Данные результаты являются новыми и вносят весомый вклад в теорию приближения функций.*

Автореферат соответствует требованиям ВАК МОН РФ, однако есть мелкое несоответствие с текстом диссертации. При описании публикаций по теме диссертации указано, что помимо статей в Математических заметках и Jaen Journal on Approximation есть ещё 7 в научных журналах Республики Таджикистан, но всего публикаций 8. В остальном автореферат полно и правильно отражает основные положения текста диссертационной работы.

Диссертация Мехмонзода С.Н. соответствует критериям, установленным "Положением о присуждении ученых степеней" по пунктам 10, 11 и 14.

Диссертация написана автором самостоятельно, обладает внутренним единством, содержит новые научные результаты и положения в теории аппроксимации функций, выдвигаемые для публичной защиты, и свидетельствует о личном вкладе автора диссертации в теорию приближения функций. Полученные автором результаты могут найти применение при нахож-

дении точных оценок погрешности приближений многогранными функциями и сплайн-функциями в многомерном случае на различных классах функций многих переменных.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в 8 научных работах, 5 из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК РФ и ВАК РТ.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеются.

Диссертация Мехмонзода Сабзины Навбухор на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук является научно-квалификационной работой, в которой содержатся решения задач, имеющих существенное значение для теории приближения функций, и полностью соответствует требованиям пунктов 9-11, 14 Положения о присуждении ученых степеней, а ее автор — Мехмонзода Сабзина Навбухор — заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

**Официальный оппонент:**

доктор физико-математических наук  
по специальности 1.1.7 Вычислительная  
математика

Волков Ю.С.

**Место работы:**

630090, Россия, г. Новосибирск, пр. академика Коптюга, д.4,  
ФГБУН Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Тел.: 383 333-28-92.

Веб-сайт: //www.math.nsc.ru/;

E-mail: im@math.nsc.ru

Подпись Ю.С.Волкова по электронной почте

Учёный секретарь



Н.А.Даурцева

19.08.2024